

HRVATSKO DRUŠTVO ZA MEHANIČKU
PODRUŽNICA OSIJEK



HRVATSKO DRUŠTVO ZA MEHANIČKU
ZAGREB - OSIJEK - RIJEKA - SL. BROD - SPLIT

ISBN 978-953-7539-22-1

8.

SUSRET
HRVATSKE
DRUŠTVA ZA MEHANIČKU

OSIJEK, 7. - 8. SRPNJA 2017. GODINE



UREDNICI: DAVORIN PENAVA, IVICA GULJAŠ, MIRJANA BOŠNJAK KLEČINA

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
GRAĐEVINSKI FAKULTET OSIJEK



HRVATSKO DRUŠTVO ZA MEHANIČKU

ZAGREB - OSIJEK - RIJEKA - SL. BROD - SPLIT

**ZBORNIK RADOVA OSMOG SUSRETA HRVATSKOG DRUŠTVA ZA
MEHANIKU**

Urednici: Davorin Penava

Ivica Guljaš

Mirjana Bošnjak Klečina

Izdavač: Hrvatsko društvo za mehaniku

Oblikovanje: Filip Anić

Tisak: Grafika d. o. o., Osijek

Naklada: 100 kom

ISBN: 978-953-7539-22-1

CIP zapis dostupan u računalnome katalogu Nacionalne i Sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 140716088

ZBORNIK RADOVA
OSMOG SUSRETA
HRVATSKOG DRUŠTVA ZA MEHANIČKU

Osijek, 7. – 8. srpnja 2017. godine

Urednici:

Davorin Penava

Ivica Guljaš

Mirjana Bošnjak Klečina



Organizacijski odbor:

Davorin Penava,
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku,
Predsjednik organizacijskog odbora
Lovre Krstulović-Opara,
Sveučilište u Splitu
Ivica Skozrit,
Sveučilište u Zagrebu
Mirela Galić,
Sveučilište u Splitu
Ivica Guljaš,
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Dražan Kozak,
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Mirjana Bošnjak Klečina,
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Silva Lozančić,
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Đurđica Matošević,
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Hrvoje Draganić,
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Goran Gazić,
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Ivan Kraus,
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

Organizator:

Hrvatsko društvo za mehaniku
Podružnica Osijek
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Građevinski fakultet Osijek
Vladimira preloga 3, 31000 Osijek

Sjedište:

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje
Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb
www.csm.hr

Pokrovitelji:

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Unikom d. o. o. Osijek
Eurco d. d.
Sirrah-projekt d. o. o. Osijek
Osječko-baranjska županija
Ured ovlaštene arhitektice Višnja Lasović-Kožoman

Predgovor

Prema riječima prof. dr. sc. Antonia J. Gila, sa Sveučilišta *Swansea University, College of Engineering, Zienkiewicz Centre for Computational Engineering*:

The proper understanding of the mechanics surrounding complex physical or engineering phenomena plays a crucial role in current scientific breakthroughs. Current research in mechanics is challenging traditional single field methodologies and seeking novel sophisticated multidisciplinary approaches.

obrazovanje, znanost i istraživanje u području mehanike te ostvarivanje suradnje između znanstvenih disciplina uključenih u mehaniku, ključni su na putu rješavanja sve zahtjevnijih zadataka te postizanja znanstvenih otkrića, a to je ujedno navedeno i kao svrha i djelatnost Hrvatskog društva za mehaniku.

Prof. dr. sc. Antonio J. Gil, dobitnik nagrade *O. C. Zienkiewicz Award for Young Scientists in Computational Engineering Sciences for 2016*, koju dodjeljuje *The European Community on Computational Methods in Applied Sciences (ECCOMAS)*, u okviru 8. susreta Hrvatskog društva mehaniku kao gost predavač održava *keynote* predavanje:

A new framework for large strain electromechanics based on convex multi-variable strain energies.

Objedinjavanje raznolikosti u svim područjima mehanike, putem ovih susreta, doprinosi znanstvenicima, istraživačima i nastavnicima u unaprjeđenju obrazovanja, znanstvenog istraživanja i praktične primjene istraživanja.



Davorin Penava

*Predsjednik Organizacijskog
odbora 8. susreta Hrvatskog
društva za mehaniku*

SADRŽAJ

1.	Utjecaj neujednačenosti svojstava gradiva na seizmički odziv armiranobetonskih okvira ispunjenih ziđem	1
2.	Određivanje modula elastičnosti CFRP cross-ply kompozita	9
3.	Numerička simulacija optjecanja aeroprofila s upravljanom cirkulacijom	15
4.	Projektiranje eksperimenta na modelu armiranobetonske okvirne konstrukcije ispunjene ziđem pri potresnom djelovanju	21
5.	Utjecaj efekta malih veličina na mehaničko ponašanje ugljičnih nanocijevi	27
6.	Prevrtanje stupca od dva bloka uslijed konstantnog i impulsnog ubrzanja podlage	31
7.	Eksperimentalna i numerička dinamička analiza grednih nosača pod utjecajem nejednolike potresne pobude oslonaca	37
8.	Analiza naprezanja na aneurizmi abdominalne aorte	43
9.	Model strujanja vode kroz djelomično zapunjeni tunel sa ugrađenom cijevi	49
10.	Formulacija trodimenzijskog C1 konačnog elementa	55
11.	Geometrijski nelinearan gredni konačni element temeljen na objedinjenoj parametrizaciji položaja i rotacija – pregled interpolacijskih varijanti	61
12.	Membranski element s rotacijskim stupnjevima slobode	65
13.	Ispitivanje modela armiranobetonskog okvira sa zidanim ispunom na potresnom stolu	71
14.	Numeričko modeliranje stvaranja tromba u analizi rasta abdominalne aneurizme	77
15.	Utjecaj numeričke mreže na opstrujavanje oko pojednostavljenog modela automobila	83
16.	Koopmanovi modovi strujanja oko rotiraćujeg cilindra	89

17.	Usporedba mješovitih bezmrežnih pristupa za modeliranje problema gradijentne elastičnosti	95
18.	Osvrt na metode podjele energije loma u pokusima delaminacije s grednim uzorcima	101
19.	Usporedba modela materijala u opisu ravninske anizotropije lima Al5754-H22	107
20.	Poziv na primjenu smartphone-a i tablet računala u inženjerstvu	113
21.	Razvoj numeričkog modela vijčanog priključka pri cikličkom djelovanju	117
22.	Jednodimenzionalni numerički model dvoslojnog tečenja fluida različitih gustoća u koritima proizvoljne geometrije	125
23.	Utjecaj rubnih uvjeta u višerazinskom modeliranju oštećenja duktilnih materijala	131
24.	Numeričko modeliranje procesa kompaktiranja praha metala	137
25.	Hidrodinamički otpor trupa jedrilice klase Optimist	143
26.	Priča o jednoj fotografiji – prilog povijesti HDM-a	149
27.	Relaksacija momenta uvijanja u poprečnom presjeku osovine	157
28.	Gradijentno deformacijska formulacija za modeliranje oštećenja	165
29.	Četveročvorni konačni elementi ljski sa usvojenim interpolacijama za deformacije smicanja	171
30.	Numeričko modeliranje procesa kvazi-krhkog loma primjenom faznog modeliranja	177
31.	Eksperimentalna analiza pada tlaka u spiralnom isparivaču	183
32.	Modeliranje pukotina osnim betonskim elementima s ugrađenim diskontinuitetom	191
33.	Ujednačavanje raspodjele naprezanja vijčanog spoja optimiranjem veličine uspona	197
34.	Numeričko modeliranje delaminacije ovisne o brzini kod grednih slojevitih nosača	203
35.	Analiza naprezanja u jednoslojnom grafenu primjenom molekularne mehanike	209
36.	Ljuljanje bloka uslijed pomicanja podloge	215
37.	Analiza posipanja kolnika česticama metodom diskretnih elemenata	221

Utjecaj neujednačenosti svojstava gradiva na seizmički odziv armiranobetonskih okvira ispunjenih ziđem

Anić, F.¹, Penava, D.², Legatiuk, D.³ i Sarhosis, V.⁴

Sažetak

Pri projektiranju armiranobetonskih okvirnih konstrukcija ispunjenih ziđem otpornih na potrese, u skladu s odredbama EN1998-1 konstrukcijskih normi, pouzdanost modela izravno ovisi o ujednačenosti svojstava upotrebljnih gradiva, osobito onih kod ispunskog zida. U ovom radu opisana je procjena pogreške mikromodela konstrukcijskog sustava armiranobetonskog okvira ispunjenog ziđem, s i bez otvora, pri seizmičkom djelovanju, obzirom na eksperimentalno određene rezultate. Kako stvarna svojstva gradiva u konstrukciji nisu sasvim poznata, u obzir su uzete nesigurnosti koje proizilaze iz eksperimenta poput varijabilnosti u svojstvima gradiva. Utjecaj neujednačenosti svojstava gradiva izražen je putem potresne otpornosti (nosivosti) sustava usvajanjem najmanjih, srednjih ili najvećih vrijednosti svojstava reški morta pri proračunu. Proračuni su pokazali kako je utjecaj neujednačenosti svojstava gradiva različit ovisno o vrsti i smještaju otvora te da je osobito izražen u nelinearnom području odziva konstrukcije.

Ključne riječi: neujednačenost svojstava, seizmički odziv, armiranobetonski okvir, ispunsko ziđe

¹ **Filip Anić, mag. ing. aedif**, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski fakultet Osijek, Zavod za tehničku mehaniku, Vladimira Preloga 3, 31000 Osijek, e-mail: fanic@gfos.hr

² **Doc. dr. sc. Davorin Penava, dipl. ing. grad.**, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski fakultet Osijek, Zavod za tehničku mehaniku, Vladimira Preloga 3, 31000 Osijek, e-mail: davorin.penava@gfos.hr

³ **Dr. rer. nat. Dmitrii Legatiuk**, Bauhaus Universität Weimar, Fakultät für Bauingenieurwesen, Coudraystraße 13 B, 99421 Weimar, e-mail: dmitrii.legatiuk@uni-weimar.de

⁴ **Dr. Vasilis Sarhosis**, Newcastle University, School of Civil Engineering and Geosciences, Newcastle upon Tyne, NE1 7RU, UK, e-mail: vasilis.sarhosis@ncl.ac.uk

1 Uvod

Pri projektiranju armiranobetonskih okvirnih konstrukcija ispunjenih ziđem otpornih na potrese, u skladu s odredbama EN1998-1 konstrukcijskih normi (1), pouzdanost modela (2,3) izravno ovisi o ujednačenosti svojstava upotrebljnih gradiva, osobito onih kod ispunskog ziđa (4–7).

U ovom radu opisana je procjena pogreške mikromodela konstrukcijskog sustava armiranobetonskog okvira ispunjenog ziđem, s i bez otvora, pri seizmičkom djelovanju, s obzirom na eksperimentalno određene rezultate (8,9). Primijenjen je prostorni proračunski mikromodel provjerene ispravnosti, koji ima mogućnost obuhvatiti djelovanju u izvan svoje ravnine okvira ispunjenih ziđem. Kako stvarna svojstva gradiva u konstrukciji nisu sasvim poznata, u obzir su uzete nesigurnosti koje proizlaze iz eksperimenta poput varijabilnosti u svojstvima gradiva (6,10,11). Utjecaj neujednačenosti svojstava gradiva izražen je putem potresne otpornosti (nosivosti) sustava usvajanjem najmanjih, srednjih ili najvećih vrijednosti svojstava reški morta pri proračunu, utvrđenih eksperimentalno.

Proračuni su pokazali kako je utjecaj neujednačenosti svojstava gradiva različit ovisno o vrsti i smještaju otvora i načinu sloma te da je osobito izražen u nelinearnom području odziva konstrukcije.

2 Primjenjena metodologija i opis konstrukcije

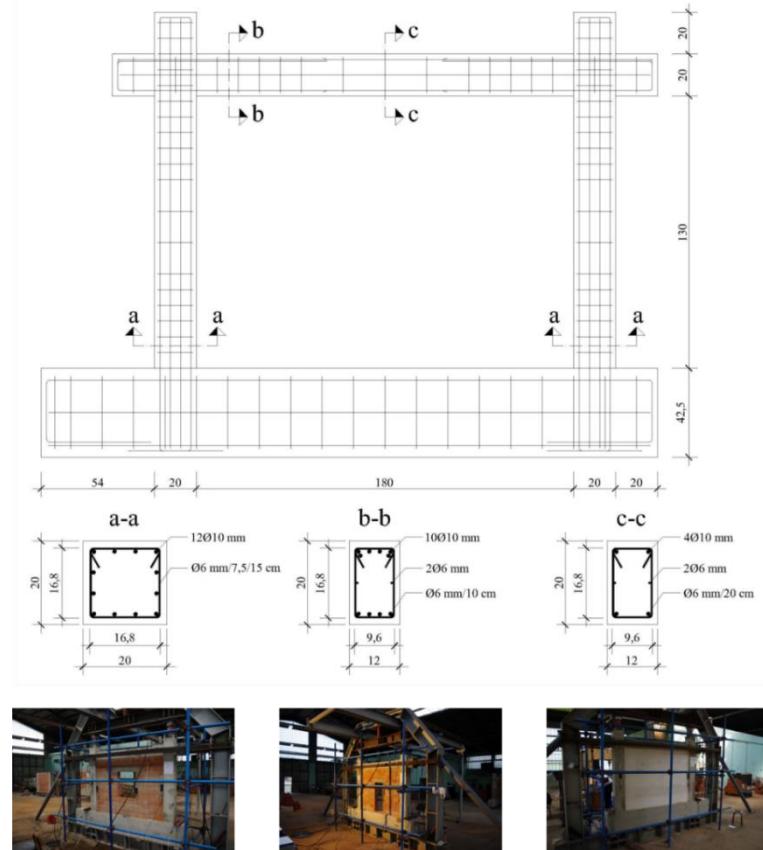
Proračun odziva konstrukcijskog sustava armiranobetonskog okvira ispunjenog ziđem putem mikromodela proveden je u razvijenom računalnom programu ATENA 3D (12,13), pri čemu su u obzir uzete nesigurnosti koje proizlaze iz eksperimentalnog određivanja svojstava reški morta u ziđu pri posmiku i savijanju. Najmanje, srednje i najveće vrijednosti svojstava reški morta određena su eksperimentalno u skladu s odredbama EN1052-3 i EN1052-2 normi (12–15) i prikazana su u Tablici 1.

Modelska armiranobetonska okvirna konstrukcija u mjerilu 1:2,5 pripada razredu srednje duktilnosti (DCM) u skladu s odredbama EN1998-1 (1) normi (vidjeti sliku 1.). U skladu s odredbama EN1996-1-1 normi (16,17) upotrebljeni zidni elementi pripadaju grupi 2 (vidjeti sliku 2.), a mort razredu čvrstoće M5. Detaljni opis modelske konstrukcije može se pronaći u (11,18). Od modelskih konstrukcija prikazanih u (11,18) u ovome radu, razmatrani su slučajevi bez omeđenih otvora (vidjeti sliku 4.).

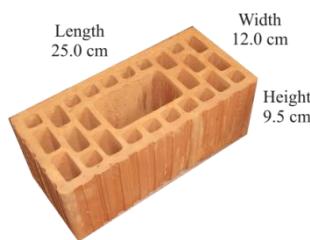
Tablica 1. Osnovna svojstva reški morta

Opis	Najmanja vrijednost	Srednja vrijednost	Najveća vrijednost	Koeficijent varijacije	Jedinice
Normalna krutost	$5,65 \cdot 10^5$ (ležajnice)	$8,50 \cdot 10^4$ (sudarmice)	-	-	N/mm ²
Tangencijalna krutost	$2,57 \cdot 10^5$ (ležajnice)	$3,86 \cdot 10^4$ (sudarmice)	-	-	N/mm ²
Vlačna čvrstoća	0,14	0,20	0,26	30 %	N/mm ²
Početna posmična čvrstoća	0,25	0,35	0,46	30 %	N/mm ²
Kut unutarnjeg trenja	0,17	0,24	0,31	30 %	-

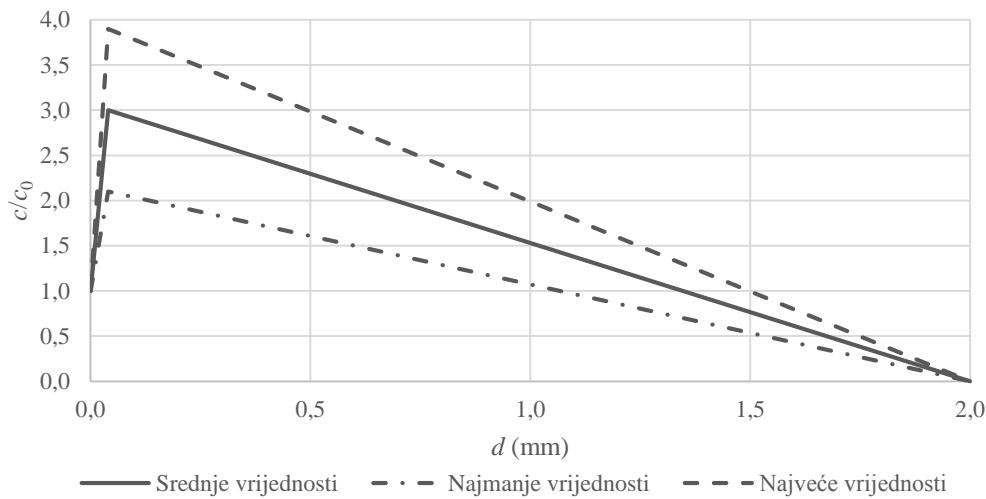
Osim svojstava reški morta danih u Tablici 1., u proračunskom mikromodelu za ležajnice je primijenjena funkcija ukljinjavanja (vidjeti sliku 3.) opisana u (19). Druga svojstva proračunskog mikromodela dana su u (20).



Slika 1. Modelska armiranobetonska okvirna konstrukcija u mjerilu 1:2,5 ispunjena zidem



Slika 2. Zidni elementi ispunskog ziđa grupe 2 u skladu odredbama EN1996-1 norme



Slika 3. Funkcija uklinjavanja kojem je opisano povezivanje ležajnice i zidnog elementa

3 Provedba proračuna i rezultati

Pri proračunu je primjenjen nelinearni staticki postupak, pri čemu je obostrano opterećivanje zadavanjem pomaka ($\delta d = 1 \cdot 10^{-3}$ mm) primijenjeno u slučaju nesimetričnog smještaja otvora. Rezultati proračuna (vidjeti sliku 4.) izraženi su putem krivulje odnosa pomaka d u mm (i katnog pomaka d_r u %) i otpornosti na poprečnu (posmičnu) silu V_R u kN (i omjera promatrane i najveće otpornosti $V_R/V_{R,\max}$).

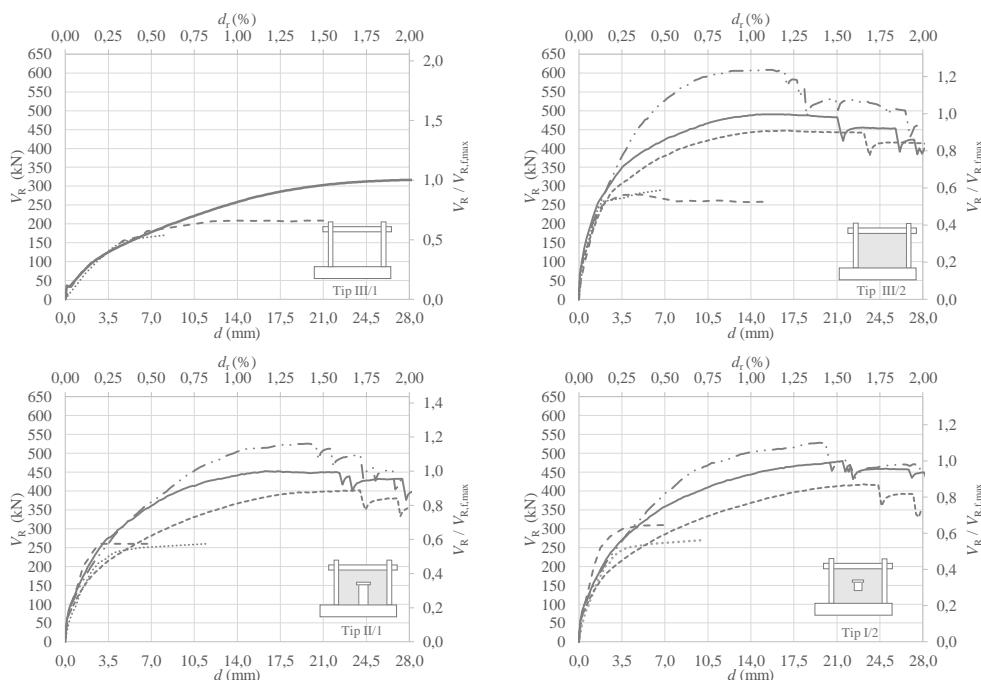
U Tablici 2. prikazane su vršne vrijednosti otpornosti na poprečnu silu i pripadni pomaci za najmanje, srednje i najveće vrijednosti svojstava reški morta.

Tablica 2. Vršne vrijednosti otpornosti na poprečnu silu pri različitim svojstvima reški morta

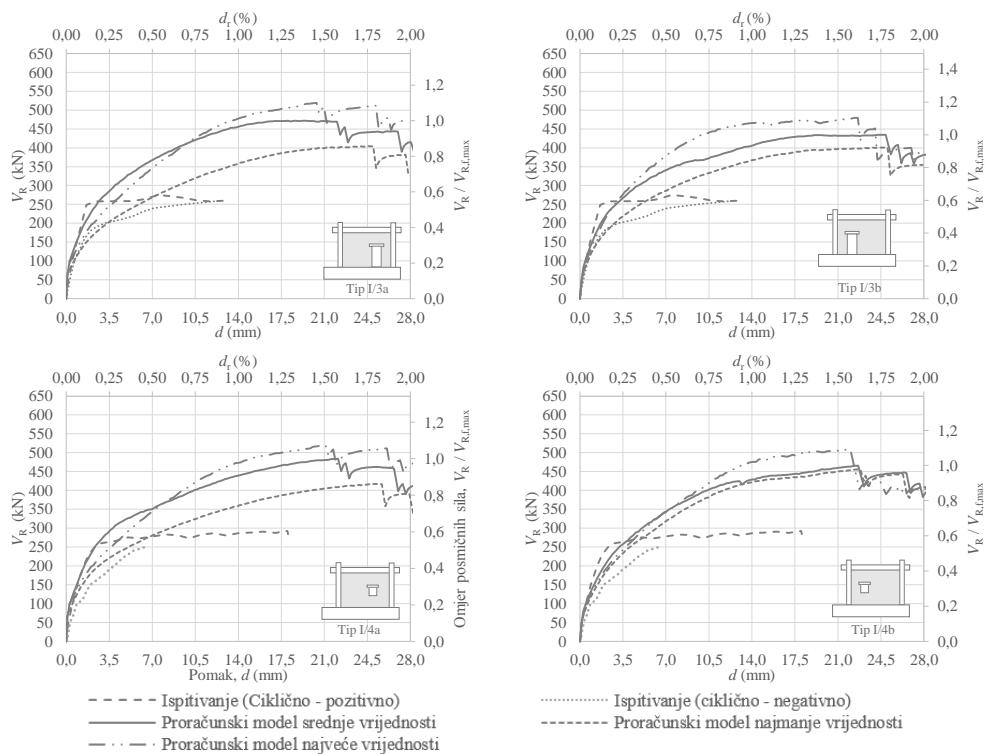
Slučaj	Vrijednost	$V_{R,\max}$	$\Delta V_{R,\max}$ (%)	d_{\max} (mm)	Δd_{\max} (%)
III/2	najmanja	446,87	8,95	17,15	3,26
	srednja	490,78	0,00	16,61	0,00
	najveća	608,96	24,08	14,92	10,16
I/1	najmanja	401,55	11,29	24,00	45,79
	srednja	452,65	0,00	16,46	0,00
	najveća	525,67	16,13	19,78	20,15
I/2	najmanja	417,51	12,91	23,18	8,05
	srednja	479,40	0,00	21,45	0,00
	najveća	529,25	10,40	20,04	6,59

Tablica 2. Nastavak...

I/3a	najmanja	404,48	14,27	24,56	17,11
	srednja	471,82	0,00	20,98	0,00
	najveća	519,40	10,08	20,36	2,95
I/3b	najmanja	400,38	7,85	24,64	0,98
	srednja	434,50	0,00	24,88	0,00
	najveća	479,62	10,39	22,42	9,89
I/4a	najmanja	417,18	13,75	25,46	15,08
	srednja	483,69	0,00	22,12	0,00
	najveća	519,40	7,38	21,10	4,61
I/4b	najmanja	455,30	2,22	22,41	1,07
	srednja	465,62	0,00	22,65	0,00
	najveća	507,98	9,10	21,80	3,75
Prosjek	najmanja		10,18		13,05
	srednja		0,00		0,00
	najveća		12,51		8,30



Slika 4. Odnos otpornosti na poprečnu silu i pripadnih pomaka



Slika 4. Nastavak...

4 Objasnjenje rezultata proračuna

Proračunom putem mikromodela konstrukcijskog sustava armiranobetonskog okvira ispunjenog ziđem, sa i bez otvora, obzirom na vršne vrijednosti otpornosti na poprečnu (posmičnu) silu i pripadne, a u skladu sa slikom 4. i tablicom 2., utvrđeno je kako:

- utjecaj neujednačenosti svojstava reški morta ne utječe na početnu krutost sustava za sve slučajeve;
- se pri vrijednosti katnog pomaka od približno 1,50 % javljaju vršne vrijednosti otpornosti na poprečnu silu za sve slučajeve s otvorima;
- utjecaj neujednačenosti svojstava reški morta kod slučajeva s ekscentrično smještenim otvorima ovisi o smjeru opterećivanja;
- je kod slučaja bez otvora utjecaj neujednačenosti svojstava reški morta najveći (odstupanje od srednje vrijednosti s najmanjim vrijednostima 9% i najvećim 24%);
- odstupanje u vršnoj vrijednosti otpornosti na poprečnu silu u prosjeku pri najmanjim vrijednostima iznosi 10 % (odstupanje pripadnog pomaka 13 %), dok pri najvećim 12 % (odstupanje pripadnog pomaka 8,30 %);
- utjecaj neujednačenosti vrijednosti svojstava reški morta ovisi o načinu sloma ispunskog ziđa (8,9).

Pri proračunu nije opažen utjecaj neujednačenosti svojstava gradiva na eksperimentalno utvrđen način sloma.

5 Zaključak

Pri projektiranju armiranobetonskih okvirnih konstrukcija ispunjenih ziđem otpornih na potrese, u skladu s odredbama EN1998-1 konstrukcijskih normi, u obzir je potrebno uzeti neujednačenost svojstava gradiva, osobito onih kod ispunskog ziđa. To je iz razloga kako bi se utvrdila mogućnost pogreške proračuna, jer stvarna svojstva gradiva u konstrukciji nisu sasvim poznata. S ciljem razvoja pouzdanog proračunskog modela u obzir je potrebno uzeti nesigurnosti u ključnim svojstvima gradiva konstrukcije poput varijabilnosti svojstava pri povezivanju u spoju mortom. Ovim pristupom moguće je izraziti nesigurnosti pri procjeni odziva konstrukcijskih sustava armiranobetonskih okvira ispunjenih ziđem (nenamjernim nosivim konstrukcijskim elementima), sa i bez otvora, u nelinearnom području pri potresnom djelovanju, a time procijeniti najnepovoljniji slučaj za konstrukciju.

Zahvale

Prikazani istraživački rad proveden je u okviru istraživačkog projekta Hrvatske zaklade za znanost "Uokvireno ziđe - kompozitni nosivi sustav kod armirano-betonskih zgrada" te im ovim putem izražavamo zahvalnost na potpori.

Literatura

1. CEN. Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance - Part 1: General Rules, Seismic Actions and Rules for Buildings (EN 1998-1:2004). Brussels: European Committee for Standardization; 2004.
2. Legatiuk D. Evaluation of the coupling between an analytical and a numerical solution for boundary value problems with singularities. Bauhaus-Universität Weimar; 2015.
3. Scheiber F, Motra HB, Legatiuk D, Werner F. Uncertainty-based evaluation and coupling of mathematical and physical models. Probabilistic Eng Mech. 2016;45:52–60.
4. Asteris PG, Cavaleri L, Di Trapani F, Sarhosis V. A macro-modelling approach for the analysis of infilled frame structures considering the effects of openings and vertical loads. Struct Infrastruct Eng. 2016 May;12(5):551–66.
5. Asteris PG, Cotsovos DM, Chrysostomou CZ, Mohebkhah A, Al-Chaar GK. Mathematical micromodeling of infilled frames: state of the art. Eng Struct. 2013;56:1905–21.
6. Celarec D. Seismic Risk Assessment of the Selected Structural Systems with Consideration of Uncertainties. PhD Thesis. 2012.
7. Crisafulli FJ, Carr AJ, Park R. Analytical modelling of infilled frame structures - a general review. Bull New Zeal Soc Earthq Eng. 2000;33(1):30–47.
8. Penava D. Influence of openings on seismic response of masonry infilled reinforced concrete frames. 2012.
9. Sigmund V, Penava D. Influence of openings, with and without confinement, on cyclic response of infilled R-C frames - An experimental study. J Earthq Eng. 2014;18(1).
10. Oberkampf WL, Roy CJ. Verification and validation in scientific computation. Cambridge University Press; 2010.
11. Penava D, Sigmund V, Kožar I. Validation of a simplified micromodel for analysis of infilled RC frames exposed to cyclic lateral loads. Bull Earthq Eng [Internet]. 2016 May;1–26. Available from: <http://link.springer.com/10.1007/s10518-016-9929-0>

12. Cervenka V, Jendele L, Cervenka J. ATENA Program Documentation Part 1 Theory. Prague: Cervenka Consulting Ltd.; 2012.
13. s.r.o. CC. ATENA for Non-Linear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures. Prague: Červenka Consulting s.r.o.; 2015.
14. CEN. Methods of Test for Masonry - Part 2: Determination of Flexural Strength (EN 1052-2:1999). Brussels: European Committee for Standardization; 1999.
15. CEN. Methods of Test for Masonry - Part 3: Determination of Initial Shear Strength (EN 1052-3:2002/A1). Brussels: European Committee for Standardization; 2007.
16. CEN. Eurocode 6: Design of masonry structures - Part 1-1: General rules for reinforced and unreinforced masonry structures (EN 1996-1-1:2005). Brussels: European Committee for Standardization; 2005.
17. Sorić Z. Zidane konstrukcije. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu; 2016.
18. Sigmund V, Penava D. Influence of openings, with and without confinement, on cyclic response of infilled r-c frames — an experimental study. *J Earthq Eng*. 2014;18(November):113–46.
19. Penava D, Sigmund V, Kožar I, Anić F, Trajber D, Vig M. Clay block masonry and mortar joint interlocking. *J Croat Assoc Civ Eng*. 2016 Sep;68(8):609–16.
20. Anić F, Penava D, Sarhosis V. Development of a three-dimensional computational model for the in-plane and out-of-plane analysis of masonry-infilled reinforced concrete frames. In: Papadrakakis M, Fragiadakis M, editors. COMPDYN 2017 6th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering. Rhodes Island, Greece; 2017. p. 1–15.

Određivanje modula elastičnosti CFRP cross-ply kompozita

Bagavac, P.¹, Krstulović-Opara, L².

Sažetak

U ovom radu uspoređena je eksperimentalno i analitički dobivena vrijednost Youngova modula savijanja. Eksperimentalne vrijednosti modula elastičnosti izmjerene su ispitivanjem epruveta na kidalici savijanjem u tri točke. Epruvete su izrađene od karbonskih vlakana i poliesterske smole postupkom ručne laminacije te orientacije slojeva u obliku cross-ply laminata $[0 / \bar{90}]_s$. Analitičke vrijednosti modula elastičnosti su izračunate prema literaturi korištenjem programskog paketa MATLAB R2010b. Izračunato je odstupanje eksperimentalno izmjereno i analitičkog rješenja za Youngov modul savijanja. U zaključku su dani mogući razlozi odstupanja vrijednosti i mogućnost primjene analitičkog modela u svrhu daljnje analize složenih konstrukcija napravljenih od kompozita.

Ključne riječi: Analitički modul elastičnosti, Eksperimentalni modul elastičnosti, Savijanje u tri točke.

¹ **Petra Bagavac, mag. inž. stroj.**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, R. Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: Petra.Bagavac@fesb.hr

² **Prof. dr. sc. Lovre Krstulović-Opara**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju R. Boškovića 32, 21000 Split, tel. 021/305981, e-mail: Lovre.Krstulovic-Opara@fesb.hr

1 Uvod

Testovi savijanja se često koriste jer ne zahtijevaju posebnu opremu i na relativno lagan i brz način se dolazi do usporedivih rezultata koji se mogu koristiti u kontroli kvalitete ili pri odabiru materijala. U radu (1) je provedeno istraživanje s ciljem boljeg razumijevanja mehaničkih svojstava polimernih kompozita ojačanih karbonskim vlaknima. U radu je promatran utjecaj orientacije vlakana, broja slojeva laminata i vrste korištene smole na mehanička svojstva kao što su vlačna čvrstoća, savojna čvrstoća i žilavost. Autori su zaključili da najveći utjecaj na mehanička svojstva ima orientacija vlakana, a zatim broj slojeva laminata, dok vrsta smole nema veliki utjecaj na mehanička svojstva. U radu (2) su ispitane epruvete polimernih kompozita ojačanih jednodirekcionalnim karbonskim vlaknima testom savijanja u tri točke. Korišteni su različiti rasponi oslonaca pri savijanju kako bi se dobila točnija procjena Youngovog modula savijanja. Pokus je izведен prema ASTM standardu na kidalici INSTRON 3367, pri čemu je razmatran utjecaj raspodjele i udjela pojedinih slojeva na odziv laminatne ljskaste konstrukcije (3). Korištena je kombinacija staklenih i ugljičnih vlakana u matrici od poliesterske smole. Provedena je parametarska analiza ploče opterećene na savijanje u programskom paketu ABAQUS. Autori su zaključili da kut orientacije ima veliki utjecaj na čvrstoću laminatne ploče. Taj utjecaj postaje blaži ako se slojevi laminata orientiraju pod međusobno zakrenutim kutovima. Odziv konstrukcije se značajno mijenja i s promjenom rasporeda slojeva vlakana, dok je kod numeričkog modela velik utjecaj odabranog kriterija popuštanja konstrukcije.

2 Analitička vrijednost modula elastičnosti

Analitička vrijednost modula elastičnosti je izračunata prema (4, 5, 6) uz sljedeće pretpostavke:

- zanemaren je utjecaj vlažnosti vlakana i razlike među koeficijentima toplinskog širenja matrice i vlakana,
- veza između matrice i vlakana je savršena,
- ujednačen je modul elastičnosti, promjer vlakana i razmak među vlaknima,
- vlakna su neprekinuta i međusobno paralelna,
- i vlakna i matrica su linearno elastični materijali,
- kompozit ne sadržava praznine,
- slojevi laminata su homogeni i ortotropni,
- ravna linija ostaje ravna i okomita na neutralnu liniju tokom deformiranja,
- nema klizanja među slojevima laminata.

Korišteni laminat je ortotropni materijal s tri međusobno okomite ravnine simetrije. Matrica krutosti ortotropnog materijala sadrži 9 nezavisnih elastičnih konstanti i simetrična je. Uz uvedene pretpostavke da je sloj dovoljno tanak i da nema opterećenja u smjeru okomitom na ravninu sloja laminata, ovakav slučaj se može promatrati kao ravninsko stanje naprezanja. Jednadžba ovisnosti deformacije o nanesenom opterećenju dana je u izrazu (2) (5):

$$\begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_0}{\kappa} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & | & B^* \\ C^* & | & D^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdje su ε_0 - naprezanje u središnjoj ravnini, κ - zakrivljenost u središnjoj ravnini, a N i M primjenjeno opterećenje. $[A^*]$, $[B^*]$, $[C^*]$ i $[D^*]$ su submatrice podatnosti dobivene inverzijom jednadžbe zavisnosti opterećenja o deformaciji za središnju ravninu laminata:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & | & B \\ B & | & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \end{bmatrix}. \quad (2)$$

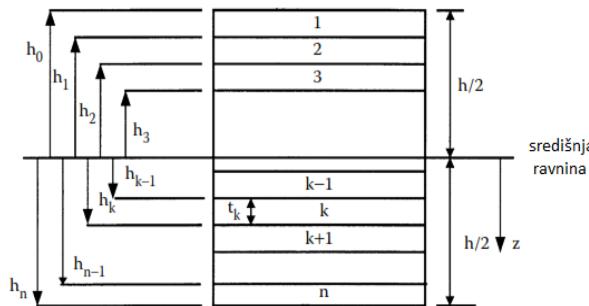
gdje je:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n [(\bar{Q}_{ij})]_k (h_k - h_{k-1}), \quad i = 1,2,6; \quad j = 1,2,6. \quad (3)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [(\bar{Q}_{ij})]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad i = 1,2,6; \quad j = 1,2,6. \quad (4)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [(\bar{Q}_{ij})]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3), \quad i = 1,2,6; \quad j = 1,2,6. \quad (5)$$

pri čemu je \bar{Q}_{ij} reducirana transformirana matrica krutosti za sloj k , a h je gornja, odnosno donja površina svakog sloja poznata iz debljine svakog sloja unutar laminata, kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1. Položaj slojeva unutar laminata

Iz ovih izraza prema (5) lako je izvesti izraz za uzdužni Youngov modul savijanja:

$$E_1^{an} \equiv \frac{12}{h^3 D_{11}^*}, \quad (6)$$

pri čemu je h – visina epruvete, a D_{11}^* – element submatrice podatnosti D^* .

Izračunata vrijednost Youngevog modula savijanja je $E_x^f = 130.63\text{GPa}$.

3 Izrada uzoraka i provođenje mjerena

U cilju eksperimentalne provjere prethodnih izraza epruvete su izrađene postupkom ručne laminacije, u obliku cross-ply laminata $[0 / \bar{90}]_s$. Materijal matrice je poliesterska smola, a ojačanja su od tkanine u obliku jednodirekcionalnih karbonskih vlakana, specifične mase 300 gr/m^2 . Svojstva sastavnica i jednog sloja kompozita su navedena u literaturi (7).

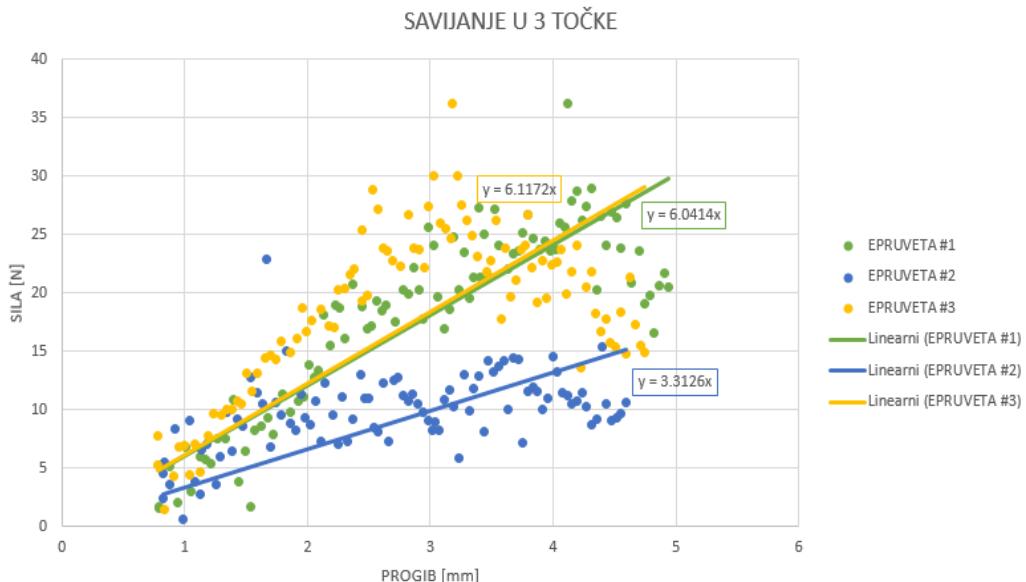
Savojna čvrstoća grede se može dobiti iz ovisnosti nanesenog opterećenja i progiba na sredini raspona savijanja. Savojna čvrstoća je naprezanje na površini uzorka u trenutku loma koje bi trebalo biti popraćeno lomom vlakana, radije nego delaminacijom. Pri računanju savojne čvrstoće u obzir se uzima maksimalni moment savijanja, izmjereni u trenutku loma pri čemu je u modelu pretpostavljena linearna ovisnost naprezanja i deformacije sve do trenutka loma. Preporučuje se koristiti što veći razmak između oslonaca kako bi se ostvario što veći udio čistog momenta savijanja prema poprečnoj sili koja je neizbjegljiva kod savijanja u tri točke. Na ovaj se način osigurava da do loma dođe u uzdužnom smjeru, pri čemu razmak između oslonaca nema utjecaja na smično naprezanje u međuslojevima. U testu savijanja u tri točke, moguće je da lom nastane na više načina. Vrsta loma uglavnom ovisi o rasponu savijanja, materijalu ojačanja i matrice te o položaju vlakana unutar matrice.

Epruvete ispitane testom savijanja u tri točke su označene brojevima 1, 2 i 3, kao na slici 2.a. Prema standard ASTM D 790M-93, dimenzije epruvete se mogu slobodno odabratи. Standard uvjetuje samo pravokutni poprečni presjek epruvete $b \times h$ i omjer raspona savijanja i debljine epruvete S/h . Izabrane dimenzije epruvete su $500 \times 50 \times 1.5 \text{ (mm)}$ (4). Raspon oslonaca prilikom testa savijanja je $L = 250 \text{ mm}$, a omjer raspona savijanja i debljine epruvete je 160: 1, slika 2.b i 2.c. Ispitivanje je provedeno na servo – hidrauličkoj dinamičkoj kidalici INSTRON 8801, pri čemu je brzina pomaka čeljusti iznosila 0.01 mm/s .



Slika 2. a) Izrađene epruvete, b) kidalica INSTRON 8801, c) savijanje u 3 točke.

Mjerni rezultati su obrađeni u programskom paketu *Excel* 2013. Iz mjernih rezultata su uklonjene sve mjerne točke koje odstupaju za $\pm 3\sigma$ od srednje vrijednosti. Preostale mjerne točke su aproksimirane pravcima. Izračunat je nagib svakog od tri pravca. Nagib svakog pravca predstavlja tangentu na krivulju Hookeovog dijagrama. Iz tangensa kuta kojeg zatvara tangentu i pozitivan smjer x osi moguće je odrediti Yungov modul elastičnosti materijala za kojeg je dobiven Hookeov dijagram. Srednja vrijednost Yungovog modula elastičnosti je dobivena kao aritmetička sredina tri eksperimentalno izmjerene vrijednosti Yungovog modula elastičnosti. Obradeni mjerni rezultati su prikazani slikom 3.



Slika 3. Obrađeni rezultati pokusa; linearna aproksimacija točaka pravcima; nagib pravaca.

Modul savijanja je procijenjen iz nagiba pravca u dijagramu sila-progib prema izrazima (3):

$$E_1^{exp} = \left(\frac{F}{\Delta}\right) \frac{L^3}{48I} \quad (7)$$

$$\frac{F}{\Delta} = \frac{\sum_i^n k_i}{n} = \frac{6.12 + 6.04 + 3.32}{3} = 5.28 \quad (8)$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{50 * 1.5^3}{12} = 14.06 \text{ mm}^4 \quad (9)$$

gdje je $\frac{F}{\Delta}$ – nagib tangente na pravac u dijagramu sila-progib, L – raspon oslonaca, a I – moment inercije.

Vrijednost eksperimentalno određenog savojnog modula elastičnosti je $E_x^f = 122 \text{ GPa}$. $E_x^f = 122 \text{ GPa}$.

Odstupanje numerički izračunatog i eksperimentalno izmjerenoj moduli savijanja:

$$\Delta = \frac{E_1^{an} - E_1^{exp}}{E_1^{an}} = \frac{130 - 122}{130} \approx 6\% \quad (10)$$

4 Zaključak

Eksperimentalno dobiveni modul savijanja (122 GPa) je nešto manji od onog dobivenog analitički (130 GPa). Međutim to nije iznenađujuće budući da je velik broj uvedenih prepostavki. Broj utjecajnih parametara na vrijednost analitički dobivenih svojstava materijala toliko velik da je praktično nemoguće izvesti analitičke izraze koji bi točno opisali mehanička svojstva i predviđeli ponašanje kompozita. Nadalje, teorija za izračun čvrstoće, naprezanja i krutosti kompozitnih materijala koristi zakone mehanike materijala pri čemu ta teorija ne uzima u obzir međusobno djelovanje ojačanja na matricu i obrnuto. Ipak, analitičkim proračunom možemo dobiti poprilično dobre rezultate za preliminarne proračune konstrukcija kao što je i potvrđeno ovim radom. Dobivene rezultate je potrebno potvrditi eksperimentalno te je upravo zato bitno standardizirati načine što bržeg i preciznijeg eksperimentalnog utvrđivanja svojstava.

Literatura

1. H. Rahmani, S. Saffarzadeh-Matin, A. Ashori: „Mechanical Properties of Carbon Fiber/Epoxy Composites: Effects of Number of Plies, Fiber Contents and Angle-Ply Layers“, članak iz Polymer Engineering and Science, studeni 2014.
2. I. Petrescu, C. Mohora, C. Ispas: „The Determination of Young Modulus for CFRP Using Three Point Bending Tests at Different Span Lengths“, članak, 2013.
3. L. Kovačić, T. Jarak: „Utjecaj raspodijele i udjela pojedinih slojeva na odziv laminatne konstrukcije“, članak, 7. susret HDM, lipanj, 2016.
4. J. M. Hodgkinson: „Mechanical testing of advanced fibre composites“, Woodhead Publishing Limited, England, 2000.
5. Autar K. Kaw: „Mechanics of Composite Materials“, Taylor and Francis, USA, 2006.
6. Jack R. Vinson, Robert L. Sierakowski: „The Behavior of Structures Composed of Composite Materials“, Kluwer Academic Publishers, USA, 2004.
7. S interneta, veljača 2016.:
<http://www.modalmechanics.com/Acoustic%20properties%20of%20selected%20high%20strength%20thermosetting%20plastic%20composites%20at%20ultrasonic%20frequencies.htm>

Numerička simulacija optjecanja aeroprofila s upravljanom cirkulacijom

Batistić, I.¹, Cukrov, A.² i Tuković, Ž.³

Sažetak

Cilj ovog rada je pokazati mogućnosti primjene OpenFOAM C++ biblioteke za numeričku mehaniku kontinuma kod proračuna optjecanja aeroprofila s upravljanom cirkulacijom. Upravljanje cirkulacijom podrazumijeva povećanje sile uzgona pomicanjem točke odvajanja strujanja prema području krajnje točke aeroprofila. Ovo povećanje uzgonske sile se ostvaruje tangencijalnim upuhivanjem zraka u granični sloj na gornjoj površini profila. Metodom kontrolnih volumena su numerički riješene jednadžbe očuvanja mase i količine gibanja za turbulentno nestlačivo strujanje. Skup jednadžbi je zatvoren $k-\omega$ SST modelom turbulencije. Izvršeni su proračuni s tri numeričke mreže različitih rezolucija. Dobiveni rezultati se dobro slažu s rezultatima eksperimentalnih ispitivanja, te rezultatima proračuna kod kojih je primijenjena metoda simulacije velikih vrtloga.

Ključne riječi: turbulentno optjecanje aeroprofila, metoda kontrolnih volumena, OpenFOAM, sila uzgona, točka odvajanja

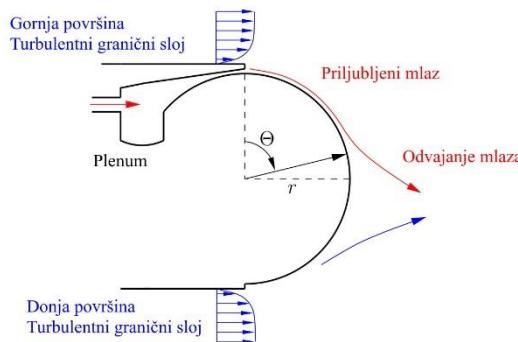
¹ **Ivan Batistić, bacc. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: ivan.batistic2@gmail.com

² **Alen Cukrov, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za termodinamiku, toplinsku i procesnu tehniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: alen.cukrov@fsb.hr

³ **Prof. dr. sc. Željko Tuković, dipl. ing. stroj.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: zeljko.tukovic@fsb.hr

1 Uvod

Postizanje što većih vrijednosti sile uzgona prilikom optjecanja aeroprofilima ima izrazit značaj u zrakoplovstvu. Kod polijetanja i slijetanja je potrebno postići što veću силу uzgona uz što manju brzinu zrakoplova. Jedan od načina na koji se može povećati silu uzgona jest upuhivanjem mlaza zraka na području stražnjeg brida aeroprofila, kao što je prikazano na Slici 1. Takvim tangencijalnim upuhivanjem struje zraka, uz površinu profila se formira priljubljeni mlaz (Coanda efekt), te se točka odvajanja strujanja pomiče prema području krajnje točke aeroprofila. Pomicanje točke odvajanja rezultira većim iznosom sile uzgona.



Slika 1. Grafički prikaz strujanja priljubljenog mlaza uz površinu aeroprofila

Standardni inženjerski pristup numeričkog modeliranja turbulentnog nestlačivog strujanja rješavanjem vremenski osrednjениh Navier-Stokesovih jednadžbi (*engl. Reynolds Averaged Navier-Stokes, RANS*), nailazi na poteškoće kod predviđanja mesta na kojem dolazi do odvajanja mlaza pri višim brzinama strujanja mlaza.

Cilj ovog rada je pokazati mogućnosti OpenFOAM C++ biblioteke kod proračuna optjecanja aeroprofila uz prisutno upuhivanje mlaza zraka u granični sloj na stražnjem bridu.

Rad je podijeljen na četiri poglavlja. Nakon Uvoda, u drugom poglavlju izneseni su detalji vezani uz izrađeni numerički model kojim je riješen opisani problem. Dobiveni rezultati dani su u trećem poglavlju. Na kraju rada je dan zaključak zajedno s preporukama za daljnji rad.

2 Numerički model

2.1 Matematički model i model turbulencije

Analizirano izotermno turbulentno nestlačivo strujanje opisano je vremenski osrednjjenim Navier-Stokesovim jednadžbama (tzv. Reynoldsovim jednadžbama), koje predstavljaju dva zakona klasične fizike:

- zakon očuvanja mase

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

- zakon očuvanja količine gibanja

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) = \nabla \cdot [(\nu + \nu_t) \nabla \mathbf{v}] - \nabla p \quad (2)$$

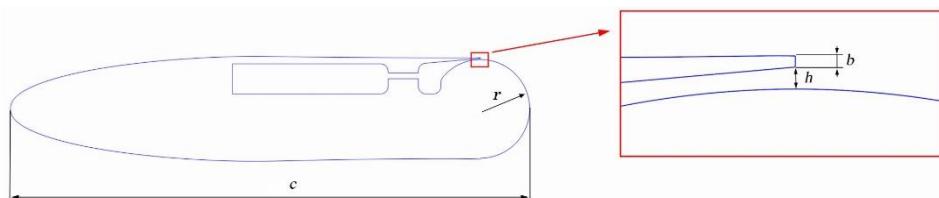
gdje \mathbf{v} označava vremenski osrednjeno polje brzine, p polje tlaka, a zbroj $(\nu + \nu_t)$ efektivnu viskoznost, sastavljenu od molekularne viskoznosti ν i turbulentne viskoznosti ν_t . S obzirom da u skupu jednadžbi (1)-(2) broj jednadžbi nadmašuje broj nepoznatih polja, sustav se zatvara uvođenjem $k-\omega$ SST modela turbulentcije sa standardnim koeficijentima, čijim rješavanjem se dobiva turbulentna viskoznost ν_t .

2.3 Diskretizacija sustava jednadžbi

Sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi kojima je opisan analizirani problem, diskretiziran je metodom kontrolnih volumena (MKV). Za rješavanje jednadžbe očuvanja mase i jednadžbi količine gibanja primijenjena je linearne uzvodna shema (*engl. second order upwind*), dok je za transportne jednadžbe turbulentnih veličina korištena uzvodna shema diferencije (*engl. first order upwind*). Polje tlaka, čije poznavanje je nužno za rješavanje jednadžbi količine gibanja, a nije opisano vlastitom transportnom jednadžbom, povezano je s poljem brzine koristeći algoritam SIMPLE (*engl. Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*).

2.4 Diskretizacija prostora proračuna i rubni uvjeti

Proračunska domena izvedena je kao dvodimenzionalna. Geometrija analiziranog aeroprofila prikazana je na Slici 2. Konstrukciju i ispitivanja predmetnog aeroprofila je provela istraživačka grupa na Georgia Tech Research Institute (GTRI) (2). Također, u (3) autori su proveli mjerjenja na zadanim profilima. Aeroprofil karakterizira prednji brid eliptičnog oblika, te cilindrična izvedba stražnjeg brida. Upuhivanje zraka u svrhu povećanja sile uzgona, odvija se jedino na gornjoj strani profila. Duljina teteve c iznosi 218,3 mm, a polujmjer stražnjeg brida je 20,66 mm (0,09463 c). Istrujni otvor ima visinu h u iznosu 0,503 mm (0,02433 r), te se nalazi na dubini b ispod gornje površine profila koja iznosi 0,254 mm (0,01229 r). Geometrija aeroprofila je preuzeta sa stranice američke svemirske agencije NASA (4).



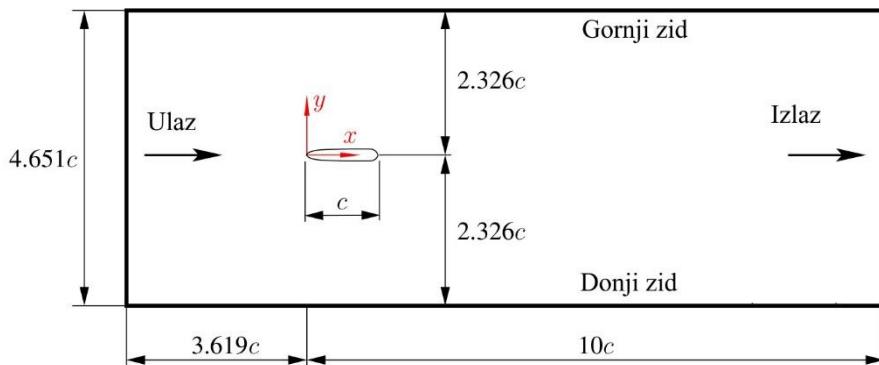
Slika 2. Geometrija analiziranog aeroprofila s upravljanom cirkulacijom

Na Slici 3 prikazana je proračunska domena. Na površini aeroprofila, jednako kao i na stjenkama plenuma i mlaznice, komponente brzine strujanja postavljene su na nulu (*engl. no-slip condition*). S druge strane, na gornjem i donjem zidu domene je prepostavljeno nepostojanje trenja (*engl. slip condition*). Na ulazu u domenu zadani je uniforman profil brzine $U_\infty = 34$ m/s. Napadni kut u analiziranom slučaju je jednak nuli, jer vektor brzine leži na pravcu koji je paralelan osi simetrije profila. Nadalje, na ulaznoj granici komore koja prethodi plenumu, zadana je uniformna brzina $U = 4,203$ m/s. Time je postignut maseni protok zraka koji je korišten u eksperimentu, $m_f = 0,0636 \text{ kg}/(\text{m s})$. Koeficijent količine gibanja mlaza glasi:

$$C_\mu = \frac{m_f U_{j,sr}}{q_{ref} A} \quad (3)$$

gdje je m_f maseni protok mlaza, a $U_{j,sr}$ je srednja istrijuna brzina mlaza. Koeficijent količine gibanja mlaza u ovoj studiji iznosi približno 0,044 dok Machov broj na izlazu iz mlaznice ima vrijednost 0,39. Iako nestlačivo strujanje podrazumijeva Machov broj niži od 0,3, može se primijeniti numerički rješavač za nestlačivo strujanje jer je područje višeg Machovog broja malo, te ne utječe značajno na dobivena rješenja (1). Na izlazu iz domene je zadan tlak u obliku $p/p_{ref} = 1$. Uvažavajući brzinu na ulazu u domenu U_∞ i duljinu tetine c , dobiva se Reynoldsov broj u iznosu 488.992. Reynoldsov broj za strujanje mlaza je definiran kao $U_{j,max} h/v$, te iznosi 4500.

U eksperimentu (3) i proračunu (5), u kojem je primijenjena metoda simulacije velikih vrtloga (*engl. Large Eddy Simulation, LES*), je dodana valovita traka u blizini prednjeg brida. Ta traka je u dvodimenzionalnom prikazu predstavljena kao pravokutno ispuštenje. Proračuni metodom simulacije velikih vrtloga (5) pokazuju kako granični sloj s donje strane profila ne postaje potpuno turbulentan do duljine $x/c = 0,4$ (valovita traka se nalazi na $x/c = 0,021$). Time je ustanovljeno kako dodavanje trake ne ostvaruje željeni učin, te je stoga izuzeta iz ove studije. Rezultati dobiveni rješavanjem Reynoldsovinih jednadžbi (1), pokazali su pojavu prijelaznog područja na duljini $x/c = 0,1$. Također, u (1) istraživači su ustvrdili kako postizanje prijelaznog područja na istom mjestu na kojem se ono dobiva metodom simulacije velikih vrtloga, nema značajnog utjecaja na dobivena rješenja.

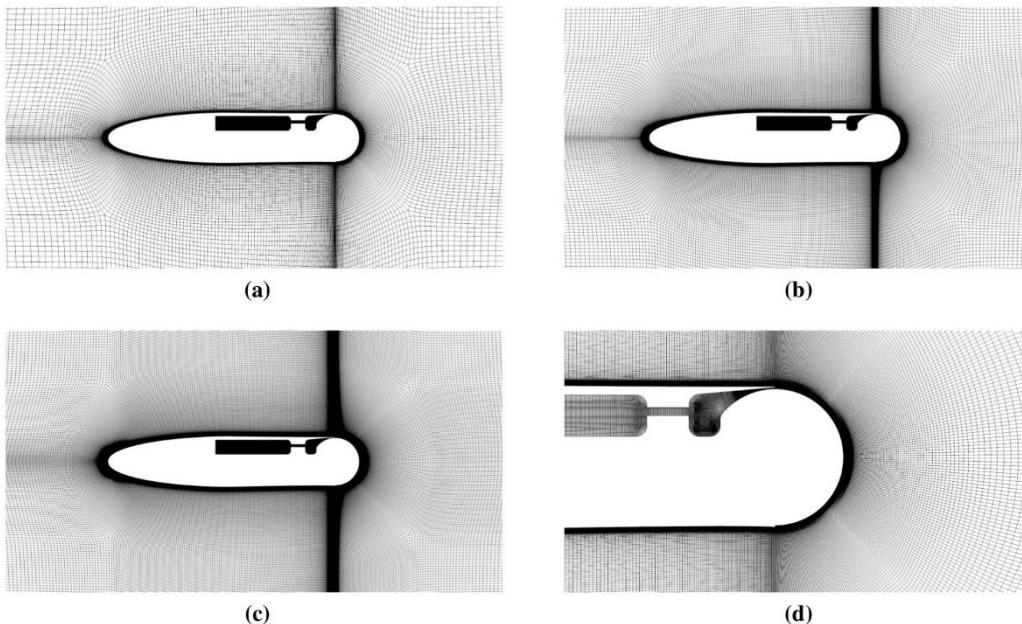


Slika 3. Proračunska domena

Slika 4 prikazuje generiranu numeričku mrežu u blizini aeroprofila. Mreža je izrađena koristeći računalni program Pointwise (7), te se sastoji od heksaedarskih kontrolnih volumena (ćelija). Izrađene su tri mreže različitih gustoća raspodjele kontrolnih volumena: gruba (73.190 ćelija), srednja (156.699 ćelija), te fina (276.490 ćelija). Mreža u blizini zidova ima raspodjelu ćelija potrebnu za proračun viskoznog podsloja na finoj mreži. Kod srednje i grube mreže je zabilježeno kako neka područja imaju vrijednosti y^+ veće od preporučenih.

3 Rezultati

Numerički dobivene vrijednosti koeficijenata uzgona se dobro slažu s rezultatima istraživača koji su primijenili metodu simulacije velikih vrtloga (Tablica 1). Također, prijavljeno je prihvatljivo predviđanje vrijednosti kuta odvajanja strujanja (kut Θ na Slici 1).



Slika 4. Mreže kontrolnih volumena koje su korištene za proračun: (a) gruba, (b) srednja i (c) fina mreža. Detaljniji prikaz diskretizacije prostora u blizini stražnjeg brida na finoj mreži (d).

Vrijednosti koeficijenta tlaka pokazuju dobro slaganje s eksperimentalnim rezultatima po cijeloj dužini aeroprofilna (Slika 5a). Na području priljubljenog mlaza, najbolja slaganja s eksperimentalnim rezultatima i rezultatima dobivenim metodom simulacije velikih vrtloga su ostvarena sa srednjom i finom mrežom (Slika 5b).

Tablica 1. Usporedba dobivenih karakteristika priljubljenog mlaza s rezultatima dobivenim pomoću metode simulacije velikih vrtloga

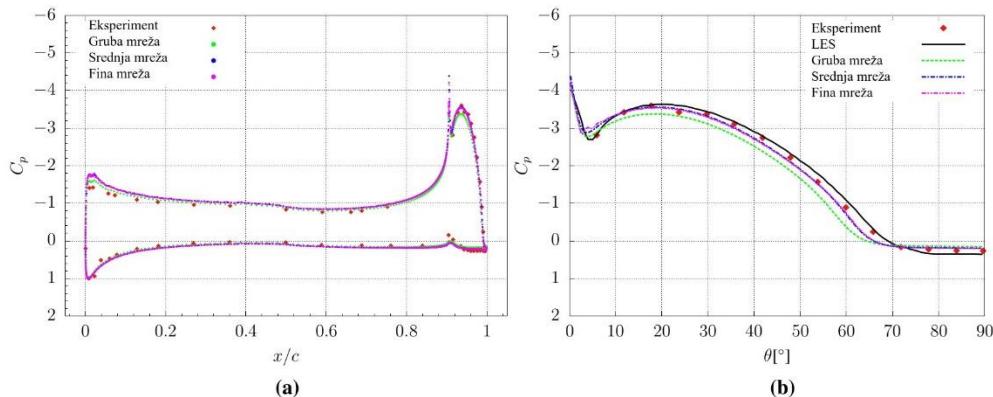
	$U_{j,max}$	Θ_{sep} [°]	x_{rec}/c	x_{stag}/c	C_L		
					Gruba mreža	Srednja mreža	Fina mreža
OpenFOAM	131,47	62,0	1,089	0,0075	1,347	1,453	1,446
LES (5),(6)	134,5	67	1,060	0,0055		1,36	

$U_{j,max}$ – maksimalna brzina mlaza na izlazu iz mlaznice; x_{rec}/c – udaljenost na kojoj završava recirkulacijska zona; x_{stag}/c – položaj prednje zaušavne točke; C_L – koeficijent uzgona

4 Zaključak

Provedena numerička studija pokazuje učinkovitost primjene C++ biblioteke OpenFOAM za proračune optjecanja aeroprofilna s kontroliranom cirkulacijom. Metodom kontrolnih volumena su numerički riješene Reynoldsove jednadžbe, te su dobivene vrijednosti kuta odvajanja mlaza od stjenke profila, kao i koeficijenata tlaka i uzgona. Prijavljeno je dobro slaganje s

eksperimentalnim rezultatima i rezultatima drugih istraživača koji su primjenili metodu simulacije velikih vrtloga.



Slika 5. Koeficijent tlaka po dužini aeroprofilna (a), te u zoni priljubljenog mlaza (b)

Analizirani fenomen ima velik potencijal za primjenu u turbostrojevima. Ubrizgavanjem fluida na izlaznom bridu statorskih lopatica moguće je upravljati kutem apsolutnog toka na ulazu u rotorsku rešetku i na taj način povećati iskoristivost turbostroja u vanprojektним režimima rada. Ovaj rad čini temelj za razvoj numeričke metode prikladne za takve proračune.

Literatura

1. Rumsey C L i Nishino T. Numerical study comparing RANS and LES approaches on a circulation control airfoil. *Int. Journal of Heat and Fluid Flow*, 2011;32:847-864.
2. Englar R J, Jones G S, Allan B G i Lin J C. 2-D circulation control airfoil banchmark experiments intended for CFD code validation. *47th AIAA Paper*. 2009;902.
3. Jones G S, Lin J C, Allan B G, Milholen W E, Rumsey C L i Swanson R. Overview of CFD Validation Experiments for Circulation Control Applications at NASA. NASA Scientific and Technical Information Branch, 2009.
4. Langley Research Center., Turbulence modeling resource, pristupljeno: 02.10.2017, https://turbmodels.larc.nasa.gov/Other_LES_Data/coanda_airfoil.html, posljednji put ažurirano: 24.01.2014.
5. Nishino T, Hahn S i Shariff K. Large-eddy simulations of a turbulent coanda jet on a circulation control airfoil. *Physics of fluids* 2010;22(12).
6. Nishino T, Hahn S i Shariff K. LES of high-Reynolds-number Coanda flow separating from a rounded trailing edge of a circulation control airfoil. *8th International ERCOFTAC Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements*, 2010.
7. Pointwise, <http://www.pointwise.com/>.

Projektiranje eksperimenta na modelu armiranobetonske okvirne konstrukcije ispunjene zidem pri potresnom djelovanju

Burilo, D.¹, Penava, D.², Lahmer, T.³ i Kožar, I.⁴

Sažetak

Utvrđivanje stanja modelske konstrukcije tijekom i nakon eksperimenata podrazumijeva prikupljanje i obradu značajne količine podataka. Međutim, postavlja se pitanje je li količina podataka dovoljna te je li bi se drukčijim razmještajem mjernih uređaja dobili drukčije informacije o stanju konstrukcije. U ovome radu prikazan je postupak optimiranja eksperimenta 3-etažne armiranobetonske okvirne konstrukcije ispunjene zidem (FRAMA) putem dinamičkih nelinearnih proračuna u računalnom programu SeismoStruct. Konstrukcija je predstavljena putem modela koji ima mogućnost s dovoljnom točnošću opisati ponašanje konstrukcije. Nakon odabira seizmičkog djelovanja i svojstava odziva konstrukcije koje je cilj utvrditi eksperimentom, proveden je postupak optimiranja eksperimenta primjenom Fisherove informacijske matrice (FIM). Matrica je dobivena određivanjem parcijalnih derivacija odziva modela u odnosu na promjene u opažanim svojstvima. Inverznom FIM procijenjena je varijabilnost opažanih svojstava.

Ključne riječi: projektiranje eksperimenta, armirano betonska okvirna konstrukcija, ispunsko zidem, Fisherova informacijska matrica

¹ **Dalibor Burilo, mag. ing. aedif.** Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski fakultet Osijek, Poslijediplomski sveučilišni studij Građevinarstvo, Ulica Vladimira Preloga br. 3, 31000 Osijek, e-mail: dalibor.burilo@gfos.hr

² **Doc. dr. sc. Davorin Penava, dipl. ing. grad.**, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski fakultet Osijek, Zavod za tehničku mehaniku, Ulica Vladimira Preloga br. 3, 31000 Osijek, e-mail: davorin.penava@gfos.hr

³ **Prof.Dr.rer.nat. Tom Lahmer.**, Bauhaus-University Weimar, Institute of Structural Mechanics-Structural Analysis and Component Strength, Marienstraße 15, 99423 Weimar, Njemačka, tom.lahmer@uni-weimar.de

⁴ **Prof. dr. sc. Ivica Kožar, dipl. ing. grad.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za računalno modeliranje materijala i konstrukcija, Ulica Radmila Matejčić br. 3, 31000 Osijek, e-mail: ivica.kozar@uniri.hr

1 Uvod

Utvrđivanje stanja modelske konstrukcije tijekom i nakon eksperimenata podrazumijeva prikupljanje i obradu značajne količine podataka (1). Međutim, postavlja se pitanje je li količina podataka dovoljna te je li bi se drukčijim razmještajem mjernih uređaja dobili drukčije informacije o stanju konstrukcije.

U ovome radu prikazan je uvod u postupak optimiranja eksperimenta 3-etažne armiranobetonske okvirne konstrukcije ispunjene ziđem (2–4) putem dinamičkih nelinearnih proračuna u računalnom programu SeismoStruct (5). Konstrukcija je predstavljena putem modela koji ima mogućnost s dovoljnom točnošću opisati ponašanje konstrukcije. Nakon odabira seizmičkog djelovanja i svojstava odziva konstrukcije koje je cilj utvrditi eksperimentom, proveden je postupak optimiranja eksperimenta primjenom Fisherove informacijske matrice (FIM). Matrica nastaje određivanjem parcijalnih derivacija odziva modela u odnosu na promjene u opažanim svojstvima.

Inverznom FIM procjenjuje se varijabilnost opažanih svojstava.

2 Opis modelske konstrukcije

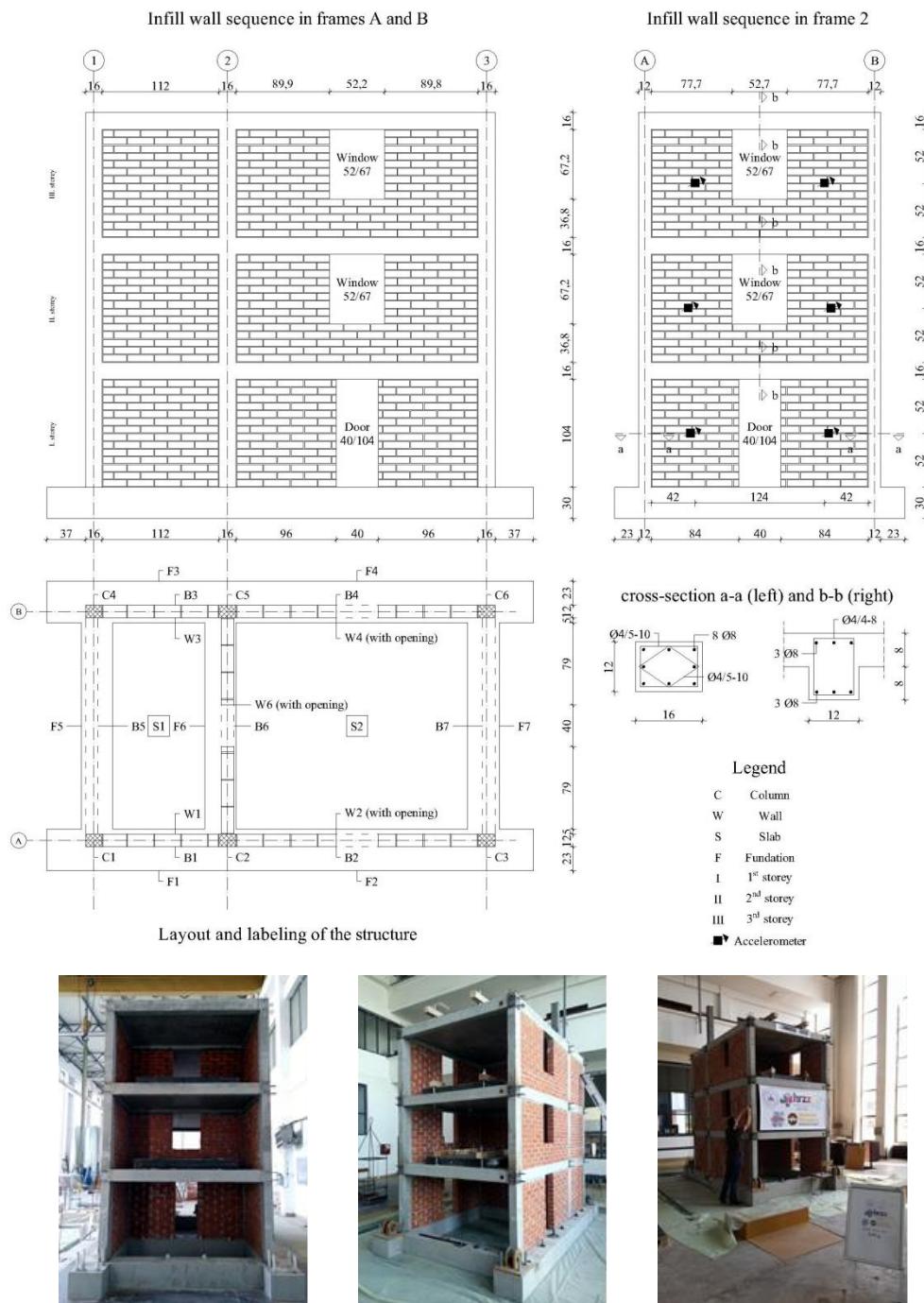
Modelska 3-etažna armiranobetonska okvirna konstrukcija izvedena je u mjerilu 1:2,5 s osnovnim mjerama i poprečnim presjecima prikazanim na slici 1.

Konstrukcija je projektirana u skladu s odredbama (6–8) kao na savijanje potresno otporni armiranobetonski okvirni sustav s izvedbom siezmičkih detalja prema razredu srednje duktilnosti (DCM). Sastoji se od dva okvira u uzdužnom smjeru (smjeru potresnog djelovanja) i tri poprečna okvira (okomita na smjer potresnog djelovanja). Uzdužni okviri i srednji poprečni okvir su ispunjeni ziđem sa i bez otvora čitavom visinom konstrukcije. Ziđe je izvedeno od opečnih blokova i morta opće namjene (c:v:p=1:1:6) koji udovoljavaju uvjetima potresne otpornosti nearmiranog konstrukcijskog zida.

U tablici 1. dana su osnovna svojstva upotrebljenih gradiva.

Tablica 1. Osnovna svojstva upotrebljenih gradiva

Opis	Vrijednost		Jedinice
Srednja tlačna čvrstoća betonskog valjka	36.6		N/mm ²
Granica tečenja / vlačna čvrstoća armature	Ø 4 mm	753 / 780	N/mm ²
	Ø 6 mm	564 / 589	N/mm ²
	Ø 8 mm	591 / 621	N/mm ²
Srednja tlačna čvrstoća zida	1.53		-
Vlačna čvrstoća zida	0.08		
Početna posmična čvrstoća zida	0.05		
Modul elastičnosti zida	1800		



Slika 1. Modelska armiranobetonska okvirna konstrukcija ispunjena ziđem (2–4)

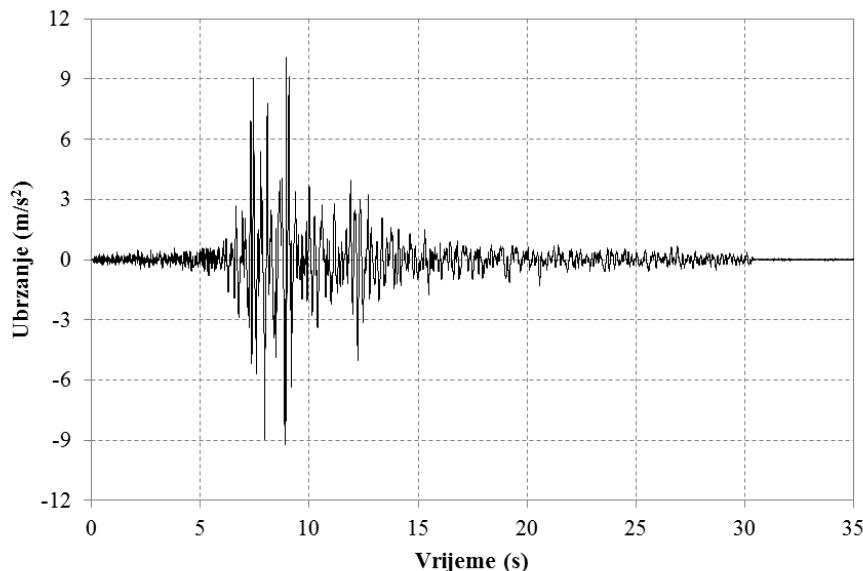
Odarbana je metoda umanjivanja pri kojoj konstrukcija u stvarnoj veličini i modelska konstrukcija imaju jednake materijale, a geometrijske veličine su uamnjene sukladno mjerilu. Zbog ispravne simulacije inercijskih sila koje nastaju u konstrukciji pri djelovanju potresa, sukladno pravilima sličnosti modelske i stvarne konstrukcije $S_M = S_f^2 = 1/2.5^2 = 1/6.25$, dodana je masa od ukupno 4,8 t na svaku etažu puetm čeličnih ingota.

Na ovaj način ispravno je predstavljena vlastita težina konstrukcija. Međutim, zbog ograničenja nosivosti vibroplatforme, nije bilo moguće dodati još mase kako bi se predstavilo promjenjivo opterećenje.

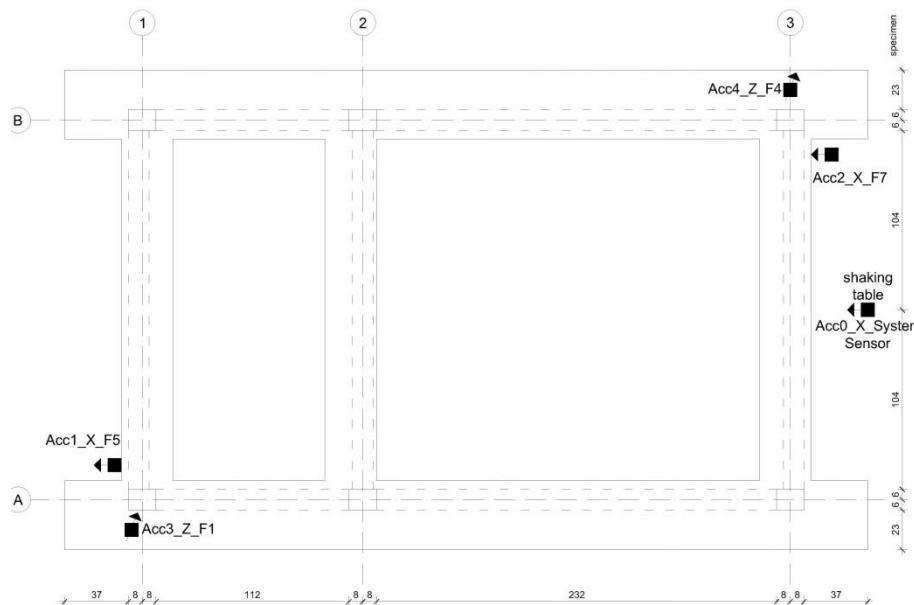
3 Opis ispitivanja konstrukcije

Uslijed geoloških uvjeta koji prevladavaju u Republici Hrvatskoj i bliže, kao potresno djelovanje odabran je zapis potresa postaje Herceg Novi tijekom potresa u Crnoj Gori 1979. godine (vidjeti sliku 2.). U skladu s odabranin mjerilom i načinom umanjivanja konstrukcije vrijeme zapisa potresa podijeljeno je s $\sqrt{2.5}$. Konstrukcija je opterećivana nizom od deset zapisa potresnog djelovanja različitih vršnih vrijednosti ubrzanja (a_g/g), odnosno 0,05, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,6, 0,7, 0,8, 1,0 i 1,2.

Tijekom ispitivanja, između ostalog, opažani su pomaci i ubrzanja katova konstrukcije u smjeru potresnog djelovanja te ubrzanja konstrukcije okomito na smjer djelovanja kako bi se mogla zamijetiti pojava torzije (vidjeti sliku 3.). Dodatno, nakon svakog opterećivanja modela, bilježena su oštećenja na konstrukciji. Pri vršnom ubrzanju $a_g/g = 0,8$, slomom ispunskog ziđa u prizemlju na lijevoj strani lijevog uzdužnog okvira konstrukcije nastalo je torzijski odziv konstrukcije.



Slika 2. Zapisa potresnog djelovanja Herceg Novi 1979 s ubrzanjem $a_g / g = 1.0$



Slika 3. Rapodjela uređaja za mjerjenje ubrzanja (temelj)

4 Objašnjenje i zaključak

U ovome radu prikazan je uvod u postupak optimiranja eksperimenta 3-etažne modelske armiranobetonske okvirne konstrukcije ispunjene ziđem putem dinamičkih nelinearnih proračuna u računalnom programu SeismoStruct. Odabrani računalni program omogućava simulaciju nelinearnog odziva konstrukcijskog sustava okvir-zidje pri čemu je ziđe predstavljeno zamjenskim tlačnim dijagonalama. Utjecaj otvora u obzir uzeti će se dodatnim faktorima kojima se umanjuje ploština zamjenjujuće dijagonale obzirom na odnos ploštine otvora i ispunskog ziđa.

Nakon odabira potresnog djelovanja i svojstava odziva konstrukcije koje je cilj utvrditi eksperimentom, provodi se postupak optimiranja eksperimenta primjenom Fisherove informacijske matrice (FIM). Matrica nastaje određivanjem parcijalnih derivacija odziva modela u odnosu na promjene u opažanim svojstvima. Inverznom FIM procjenjuje se varijabilnost opažanih svojstava.

Cilj je provjeriti je li drukčijom raspodjelom mjernih uređaja moguće utvrditi ključna svojstava konstrukcije (pomaci i ubrzanja etaža) drukčije te je li razmještaj i broj uređaja optimalan.

Zahvale

Prikazani istraživački rad proveden je u okviru istraživačkog projekta Hrvatske zaslade za znanost "Uokvireno ziđe - kompozitni nosivi sustav kod armirano-betonskih zgrada" te im ovim putem izražavamo zahvalnost na potpori.

Literatura

1. Reichert I, Olney P, Lahmer T, Zable V. Comparison of Different Approaches for the Model-Based Design of Experiments. In: Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series 2015. Orlando; 2015. p. 135–41.
2. Sigmund V. FRAMed-MAsonry Composites for Modelling and Standardization [Internet]. 2015 [cited 2015 Jan 13]. Available from: <http://framed-masonry.com/>
3. Necevska-Cvetanovska G, Sendova V, Apostolska R. Frame - Masonry Composites for Modelling and Standardization (Framed-Masonry) Report IZIIS 2015 - 31. Skopje, Macedonia; 2015.
4. Sigmund V. FRAMed MAsonry Composites for Modelling and Standardization. Osijek, Croatia; 2014.
5. Seismosoft. SeismoStruct 2016. Pavia, Italy: Seismosoft; 2016.
6. CEN. Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings (EN 1992-1-1:2004). Brussels: European Committee for Standardization; 2004.
7. CEN. Eurocode 6: Design of masonry structures - Part 1-1: General rules for reinforced and unreinforced masonry structures (EN 1996-1-1:2005). Brussels: European Committee for Standardization; 2005.
8. CEN. Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance - Part 1: General Rules, Seismic Actions and Rules for Buildings (EN 1998-1:2004). Brussels: European Committee for Standardization; 2004.

Utjecaj efekta malih veličina na mehaničko ponašanje ugljičnih nanocijevi

Čanadija, M.¹ i Brčić, M.²

Sažetak

Rad razmatra mehaničko ponašanje ugljičnih nanocijevi kao nanogrednih struktura. Sa razvojem nanotehnologije pojavljuje se učestala potreba za mehaničkim opisivanjem ugljičnih nanocijevi. Primjerice, ugljične se nanocijevi mogu koristiti kao nanosenzori pri statickim i dinamičkim mjenjenjima. Ovdje se razmatraju statička mjenjenja gdje se mjere progibi temeljem poznatog opterećenja ili obratno.

Primjera radi, neka se razmotri senzor koji radi na principu konzolnog nosača, a izrađen je od ugljične nanocijevi. Pokuša li se pritom povezati progibe i opterećenje putem klasičnih grednih jednadžbi koje se koriste na makro-razini, vrlo će se brzo uočiti odstupanja od takve teorije. Uzrok ovome su nelokalni efekti, tj. utjecaj naprezanja u okolini promatrane točke na stanje naprezanja u istoj točki. Do nelokalnih efekata dolazi uslijed malih veličina nanostruktura. Diskretna – atomska – struktura uvjetuje ovakvo ponašanje. Nadalje, sile koje su zanemarive na makro razini dobivaju na važnosti kako se veličina razmatrane strukture smanjuje. Tipično se ovaj problem rješava uvođenjem gradijenata naprezanja koji bi trebali opisati spomenuto ponašanje. Konstitutivno ponašanje definira se uvođenjem nelokalnog parametra, koji se pak često tretira kao konstanta.

Ovim se radom predstavlja serija računalnih simulacija metodom molekularne strukturne mehanike s ciljem određivanja nelokalnog parametra za ugljičnu nanocijev. Rezultati ukazuju na više nedostataka gradijente teorije te se predlaže alternativni pristup.

Ključne riječi: efekti malih veličina, ugljične nanocijevi, nanomehanika, nanogrede, nelokalno konstitutivno ponašanje

¹ Prof. dr. sc. Marko Čanadija, dipl. ing. stroj., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: marko.canadija@riteh.hr

² Doc. dr. sc. Marino Brčić, dipl. ing. stroj., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: marino.brcic@riteh.hr

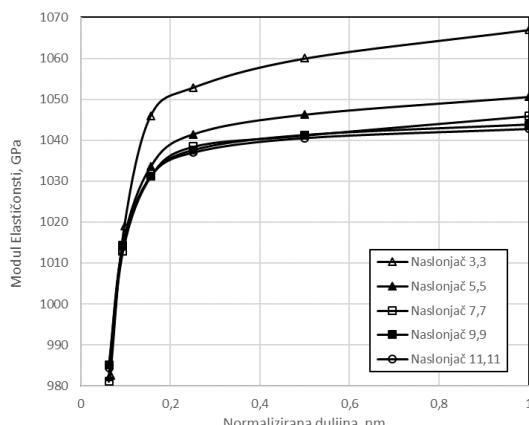
1 Uvod

Zadnje desetljeće obilježeno je naglim razvojem nanotehnologije. Ovakav razvoj povlači sa sobom i potrebu modeliranja grednih nosača na nanorazini. No, na nanorazini pojavljuju se međuatomske i međumolekularne sile koje na makrorazini nemaju uglavnom nikakav značaj. Osim ovoga, struktura poprima diskretni karakter. Posljedica ovakvog ponašanja jest da veličina nanogrede postaje vrlo važna. Na stanje naprezanja ne utječe samo stanje deformacije u promatranoj točki već i u susjednim točkama. Sa aspekta mehanike, ovo narušava osnovne postavke klasičnih grednih formulacija i otvara potrebu za uvođenje novih - nelokalnih modela.

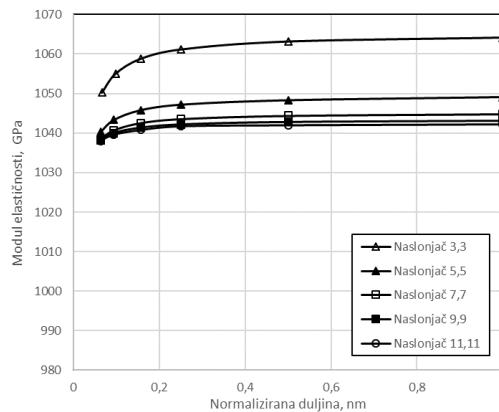
Imajući u vidu gore navedeno, u zadnje vrijeme pojavilo se dosta publikacija koje predstavljaju nelokalne formulacije ciljujući upravo na opis ovakvih struktura. Formulacije se uglavnom temelje na uvođenju nelokalnog parametra koji treba odražavati nelokalno konstitutivno ponašanje. Ovo bi trebala biti konstanta ovisna o materijalu. No, pretraga literature rezultirala je vrlo malim brojem konkretnih podataka o ovom parametru, nerijetko međusobno neusuglašenih. Stoga je namjera ovog rada pokušati odrediti nelokalni parametar pomoću molekularne strukturne mehanike na primjeru ugljičnih nanocijevi.

2 Molekularna struktturna mehanika i nanocijevi

Za ugljičnu nanocijev sa jednom stijenkicom tipa naslonjač napravljene su simulacije za više različitih promjera i duljina. Promjeri su redom iznosili 0.4071, 0.6785, 0.9499, 1.2213, 1.4927 nm, dok su duljine bile odabrane na način da omjeri promjera i duljine iznose 10, 15, 25, 40, 80. Greda je slobodno oslonjena na dva kraja te je opterećena jednolikim kontinuiranim opterećenjem čija rezultanta iznosi 1 nN. Primijenjena je geometrijski linearna teorija te harmonijski potencijal. Temeljem dobivenih progiba na sredini raspona, izračunat je modul elastičnosti prema klasičnim Bernoulli-Euler i Timoshenkovoj formulaciji. Dobivene raspodjele prikazane su na Sl. 1 i 2. Može se uočiti promjenjivost modula elastičnosti, nešto veća kod Bernoulli-Eulerove formulacije te nešto manja u slučaju Timoshenkove formulacije. Vidljivo je da u oba pristupa dolazi do promjene modula elastičnosti i za najveće omjere promjera i duljine.



Slika 1. Modul elastičnosti za nanogredu na dva oslonca, Bernoulli-Eulerova formulacija



Slika 2. Modul elastičnosti za nanogredu na dva oslonca, Timoshenkova formulacija

3 Nelokalni model nanogrede

Rezultati prikazani na Sl. 1 i 2 ukazuju na efekte malih veličina. Za veće promjere i duljine efekt se vidno smanjuje i asymptotski se približava vrijednosti koja se može usvojiti kao makroskopski modul elastičnosti. Da bi se opisale ovakve pojave razvijeni su nelokalni gredni modeli koji se u većini slučajeva temelje na gradijentima naprezanja. Za jednostavnu gredu duljine L oslonjenu na dva oslonca i opterećenu konstantnim kontinuiranim opterećenjem q progib se definira kao (1-3):

$$v(x) = -\frac{c^3 L q e^{-\frac{x}{c}} \left(e^{\frac{x}{c}} - 1 \right) \left(e^{\frac{x}{c}} - e^{\frac{L}{c}} \right)}{2EI \left(e^{\frac{L}{c}} - 1 \right)} + \frac{c^2 q (x^2 - Lx)}{2EI} + \frac{q(L^3 x - 2Lx^3 + x^4)}{24EI}, \quad (1)$$

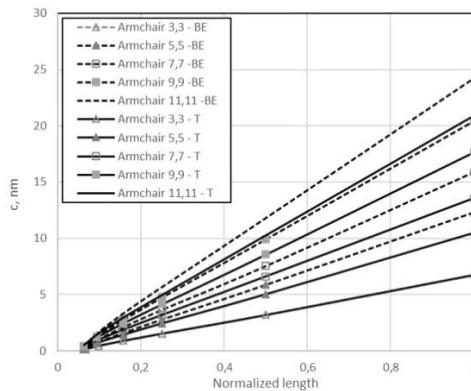
za Bernoulli-Eulerovu formulaciju, dok je kut rotacije za Timoshenksovou formulaciju:

$$\varphi(x) = -\frac{c^3 L q e^{-\frac{x}{c}} (e^{x/c} - 1)(e^{x/c} - e^{L/c})}{2EI(e^{L/c} - 1)} + \frac{c^2 q (x^2 - Lx)}{2EI} + \frac{q(L^3 x - 2Lx^3 + x^4)}{24EI}. \quad (2)$$

U obje jednadžbe oznakom c označen je nelokalni parametar. Uvrsti li se u jednadžbu (1) progib na sredini grede, a u jednadžbu (2) rotacija na četvrtini raspona grede dobivene simulacijama molekularnom strukturnom mehanikom, moguće je odrediti nelokalni parametar.

Ukoliko se kao modul elastičnosti koristi vrijednost $E=1040.7$ GPa koja je određena kako je to opisano u poglavljju 2, a dopunjeno sa drugim rezultatima iz (4), pristup vodi situaciji u kojoj se kao rješenja nelinearnih jednadžbi (1) i (2) za pojedine nanocijevi pojavljuju kompleksni brojevi. Dodatni je problem u tome što većina literature podrazumijeva da je nelokalni parametar c konstantna, što se ovdje pokazuje da nije slučaj. Da bi se zaobišao problem sa kompleksnim brojevima, odabrana je ekstremna vrijednost modula elastičnosti koja još uvijek daje realna

rješenja za sve nanocijevi, $E=980$ GPa. Nelokalni parametar c i dalje nije konstanta, već ima linearnu karakteristiku u ovisnosti o normaliziranoj duljini grede, Sl. 3.



Slika 3. Ovisnost nelokalnog parametra o normaliziranoj duljini grede

4 Zaključak

Dobiveni rezultati ukazuju na teškoće koje nelokalni gredni modeli imaju pri opisu deformacija ugljičnih nanocijevi. Moguće je istaći dvije osnovne poteškoće:

- odabir asymptotske vrijednosti za modul elastičnosti vodi rješenjima koja su imaginarni brojevi za dio nanocijevi,
- nelokalni parametar nije konstanta, već linearna funkcija normalizirane koordinate.

Osnovni uzrok ovakvog ponašanja jest diskretna priroda nanogrede. Predloženo rješenje kompromis je koji ipak omogućava primjenu razvijenih analitičkim nelokalnim grednim modela.

Zahvale

Rad je finansijski potpomognut sredstvima projekta br. 13.09.1.1.01 Sveučilišta u Rijeci.

Literatura

1. de Sciarra FM, Barretta R. A gradient model for Timoshenko nanobeams. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*. 2014;62:1-9.
2. Čanadija M, Barretta R, De Sciarra FM. A gradient elasticity model of Bernoulli–Euler nanobeams in non-isothermal environments. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2016;55:243-55.
3. Čanadija M, Barretta R, de Sciarra FM. On functionally graded Timoshenko nonisothermal nanobeams. *Composite Structures*. 2016;135:286-96.
4. Barretta R, Brčić M, Čanadija M, Luciano R, de Sciarra FM. Application of gradient elasticity to armchair carbon nanotubes: Size effects and constitutive parameters assessment. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. 2017 (u tisku)

Prevrtanje stupca od dva bloka uslijed konstantnog i impulsnog ubrzanja podloge

Čeh, N.¹, Theophile, L.², Jelenić, G.³ i Bićanić, N.⁴

Sažetak

Kruti blok ili stupac krutih blokova koji se ljulja uslijed pomicanja baze na kojoj se nalazi (bez proklizavanja i odskakivanja) je opisan skupom od osam jednadžbi kretanja za osam različitih konfiguracija u kojima se može naći. Prelazak iz jedne konfiguracije u drugu se može dogoditi zbog zadovoljavajućeg uvjeta odnosa opterećenja baze i dinamičkih veličina koje opisuju kretanje blokova ili zbog sudara među blokovima. Kod numeričkog rješavanja jednadžbi kretanja je potrebno detektirati točan trenutak sudara, prilikom čega početne vrijednosti dinamičkih veličina u novoj konfiguraciji, u idealnom slučaju, moraju zadovoljavati jednadžbe balansa energije i balansa momenta količine kretanja.

Za analizu ovoga problema napisan je numerički algoritam u programskom jeziku Matlab. S ciljem validacije algoritma, osmišljen je niz kontroliranih laboratorijskih eksperimenata ljuljanja jednog bloka i stupca od dva bloka uslijed konstantnog ubrzanja podloge određenog trajanja. Opisan je mehanizam kojim su kontrolirani stupnjevi slobode blokova i postupak nanošenja konstantnog ubrzanja podloge. Osim usporedbe eksperimentalno i numerički dobivenih rezultata, analizirana je ovisnost oblika prevrtanja (djelomično ili globalno prevrtanje) o parametrima ubrzanja baze kod dva bloka.

Ključne riječi: ljuljanje blokova, prevrtanje blokova, konstantno ubrzanje, impulsno opterećenje

¹ Nina Čeh, mag. ing. aedif., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet u Rijeci, Zavod za tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: nina.ceh@uniri.hr

² Lauryne Theophile, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet u Rijeci (na Erasmus razmjeni, studentica Cnam Champagne-Ardenne)

³ Prof. Gordan Jelenić, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet u Rijeci, Zavod za tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

⁴ Pok. prof. Nenad Bićanić, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet u Rijeci, Zavod za tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

1 Uvod

Ljuljanje jednog krutog pravokutnog bloka na krutoj podlozi, bez proklizavanja ili odsakivanja bloka, je često analitički opisivano u literaturi već više od 60 godina (1), no i dalje je aktualna tema interesa mnogih znanstvenika (2).

Takav analitički opis je generaliziran na dva bloka (odnosno, dva stupnja slobode) tako da su izvedene linearizirane jednadžbe kretanja (3) ili jednadžbe kretanja u pseudo-vremenu (4), na temelju kojih su dana analitička rješenja za kutove zaokreta blokova u prvih nekoliko intervala ljuljanja (5).

U nastavku rada su izvedene jednadžbe kretanja za ljuljanje stupca od dva bloka u općenitom slučaju, za proizvoljni oblik funkcije pobude. Jednadžbe su numerički riješene, čime je dobivena platforma za analizu dinamičkog odziva stupca od dva bloka na različite vrste pobude.

Da bi se provela validacija bilo kakvog analitičkog ili numeričkog pristupa takvoj dinamičkoj analizi, do sada je provedeno tek nekoliko izoliranih laboratorijskih eksperimentata ljuljanja jednog bloka ili stupca od više blokova (6). Zbog nedostatka provedenih eksperimentata koji bi predstavljali *benchmark* probleme, osmišljeno je nekoliko setova eksperimentalnih ispitivanja, od kojih je jedan od jednostavnijih – eksperimentalno ispitivanje odziva stupca od dva bloka na konstantno ubrzanje podloge određenog trajanja – opisan u nastavku.

2 Dinamika stupca od dva bloka

Stupac od dva bloka je promatrani u ravnini uz pretpostavke da između donjeg bloka i podloge te gornjeg i donjem bloku nema proklizavanja i odsakivanja, i da su širine oba bloka jednak, odnosno $b_1 = b_2 = b$. Takav stupac predstavlja problem s dva stupnja slobode – zaokret donjem bloku, θ_1 , i zaokret gornjem bloku, θ_2 – i opisan je pomoću osam setova jednadžbi kretanja za osam različitih konfiguracija u kojima se može naći (3-5):

$$\begin{aligned} I'_{01}\ddot{\theta}_1 + m_2 h_1 R_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\mp\theta_1 + \alpha_2 \pm \theta_2) \mp m_2 h_1 R_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\mp\theta_1 + \alpha_2 \pm \theta_2) + \\ g[\pm m_2 h_1 \sin(\mp\theta_1) \mp m_1 R_1 \sin(\alpha_1 \pm \theta_1)] + \ddot{u}[m_1 R_1 \cos(\alpha_1 \pm \theta_1) + \\ m_2 h_1 \cos(\mp\theta_1)] = 0 \quad (1) \\ m_2 h_1 R_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\mp\theta_1 + \alpha_2 \pm \theta_2) + I_{02}\ddot{\theta}_2 \pm m_2 h_1 R_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\mp\theta_1 + \alpha_2 \pm \theta_2) \mp \\ m_2 g R_2 \sin(\alpha_2 \pm \theta_2) + \ddot{u}m_2 R_2 \cos(\alpha_2 \pm \theta_2) = 0, \end{aligned}$$

za konfiguracije 1a i 1b, gdje su znakovi \pm i \mp korišteni za $\theta_2 < \theta_1 < 0$ i $\theta_2 > \theta_1 > 0$, respektivno,

$$\begin{aligned} I'_{01}\ddot{\theta}_1 + 2m_2 R_1 R_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\alpha_1 \pm \theta_1 + \alpha_2 \mp \theta_2) \\ + g[\mp m_1 R_1 \sin(\alpha_1 \pm \theta_1) \mp 2m_2 R_1 \sin(\alpha_1 \pm \theta_1)] \\ + \ddot{u}(m_1 + 2m_2)R_1 \cos(\alpha_1 \pm \theta_1) = 0 \quad (2) \\ 2m_2 R_1 R_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\alpha_1 \pm \theta_1 + \alpha_2 \mp \theta_2) + I_{02}\ddot{\theta}_2 \pm m_2 g R_2 \sin(\alpha_2 \mp \theta_2) \\ + \ddot{u}m_2 R_2 \cos(\alpha_2 \mp \theta_2) = 0 \end{aligned}$$

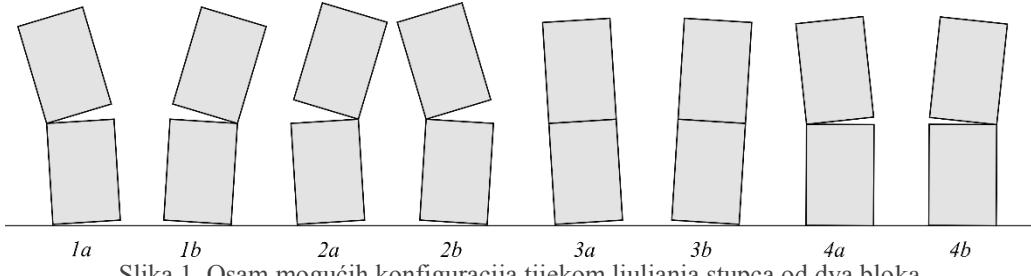
za konfiguracije 2a i 2b, gdje su znakovi \pm i \mp korišteni za $\theta_2 > \theta_1 < 0$ i $\theta_2 < \theta_1 > 0$,

$$[I'_0 + 2h_1m_2R_2 \cos(\alpha_2)]\ddot{\theta}_1 + g[\pm m_2h_1 \sin(\mp\theta_1) \mp m_1R_1 \sin(\alpha_1 \pm \theta_1) \mp m_2R_2 \sin(\alpha_2 \pm \theta_1)] + \ddot{u}[m_1R_1 \cos(\alpha_1 \pm \theta_1) + m_2h_1 \cos(\mp\theta_1) + m_2R_2 \cos(\alpha_2 \pm \theta_1)] = 0, \quad (3)$$

za konfiguracije 3a i 3b, gdje su znakovi \pm i \mp korišteni za $\theta_2 = \theta_1 < 0$ i $\theta_2 = \theta_1 > 0$,

$$I_{02}\ddot{\theta}_2 \mp m_2gR_2 \sin(\alpha_2 \pm \theta_2) + \ddot{u}m_2R_2 \cos(\alpha_2 \pm \theta_2) = 0, \quad (4)$$

za konfiguracije 4a i 4b, gdje je $\theta_1 = 0$ i znakovi \pm i \mp su korišteni za $\theta_2 < 0$ i $\theta_2 > 0$. U gornjim jednadžbama indeksi 1 i 2 predstavljaju veličine za donji i gornji blok, respektivno, m , b , h , α i R su masa, širina, visina, kut vitkosti (kut između dijagonale i vertikalne stranice bloka) i duljina polovice dijagonale, respektivno, I_{02} je moment inercije gornjeg bloka oko jednog od njegovih donjih uglova, I'_0 je moment inercije stupca od dva bloka oko jednog od donjih uglova, a $I'_{01} = \frac{4}{3}m_1R_1^2 + m_1h_1^2$. Svi osam mogućih konfiguracija je prikazano na Slici 1.



Slika 1. Osam mogućih konfiguracija tijekom ljudjanja stupca od dva bloka

Na temelju jednadžbi (1)–(4) je napisana numerička procedura za dobivanje kuta zaokreta oba bloka u vremenu u programskom jeziku *Matlab*. Jednadžbe su u vremenskoj domeni diskretizirane pomoću Newmarkove metode integracije, a u svakom vremenskom koraku riješene iterativnim Newton-Raphsonovim postupkom. Prilikom kretanja stupac blokova prelazi iz konfiguracije u konfiguraciju te je razvijen postupak za detekciju točnog vremena sudara među tijelima prilikom takvog prelaska. Neposredno nakon svakog sudara, kada stupac prelazi u novu konfiguraciju kretanja, izvedeni su izrazi za izračun novih početnih kutnih ubrzanja i kutnih brzina iz izraza za balans momenta koliciće kretanja neposredno prije i neposredno nakon sudara oko točaka koje predstavljaju centre rotacije donjeg i gornjeg bloka u novoj konfiguraciji.

Uvjet za početak ljudjanja oba bloka zajedno je

$$\ddot{u} \geq g \tan(\alpha_{uk}), \quad (5)$$

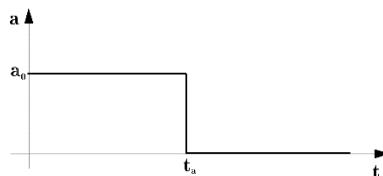
gdje je $\alpha_{uk} = \tan^{-1}\left(\frac{b}{h_1+h_2}\right)$, dok je uvjet za početak ljudjanja samo gornjeg bloka

$$\ddot{u} \geq g \tan(\alpha_2). \quad (6)$$

Uvijek vrijedi da je $\alpha_2 > \alpha_{uk}$, odnosno da je $\tan(\alpha_2) > \tan(\alpha_{uk})$, dakle prije će biti zadovoljen uvjet za pokretanje oba bloka zajedno u rotaciju.

3 Eksperimentalni model

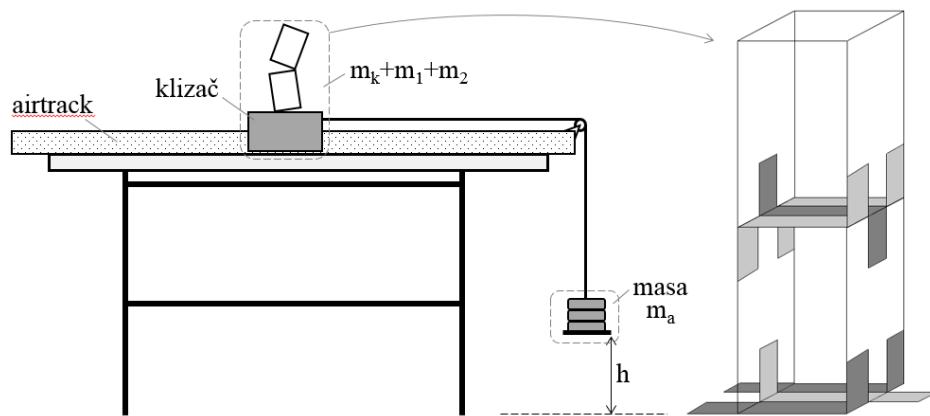
Za validaciju opisanog numeričkog modela osmišljen je eksperimentalni postav za ispitivanje odziva stupca od dva bloka na pobudu u obliku konstantne akceleracije podloge određenog vremena trajanja (Slike 2 i 3).



Slika 2. Prikaz funkcije ubrzanja podloge

Kako bi se eliminiralo proklizavanje i odskakivanje blokova, osmišljen je i izведен sustav povezivanja blokova međusobno i donjeg bloka s podlogom pomoću sustava vrlo tankih traka (Slika 3, desno). Trake su pričvršćene za bočne stranice blokova i za podlogu na dijelovima koji izlaze iz tlocrtnih gabarita blokova.

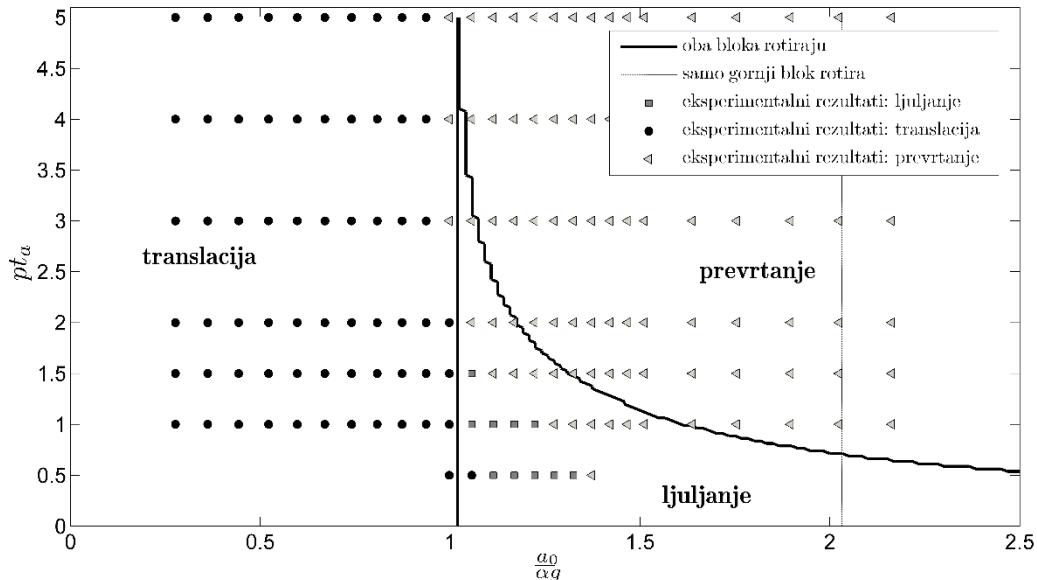
Konstantno ubrzanje podloge je dobiveno pomoću sustava koji se sastoji od klizača i mase povezane nerastezivim užetom prebačenim preko koloturnika zanemarive mase (Slika 3, lijevo). Klizač se nalazi na zračnoj traci (engl. *airtrack*) iz koje se ispuhuje zrak pod pritiskom, što eliminira trenje između klizača i podloge. Na drugoj strani užeta se nalazi masa (m_a na Slici 3) koju je moguće varirati (dodavanjem i micanjem utega) na visini (h na Slici 3) koju je moguće varirati.



Slika 3. Skica eksperimentalnog postava (lijevo) i skica mehanizma za eliminiranje proklizavanja i odskakivanja (desno)

Na taj način je proveden nize eksperimenata s različitim veličinama h i m_a , čime su dobivene pobude s različitim amplitudama, a_0 , i trajanjem, t_a . Rezultati provedenih

eksperimenata su prikazani na Slici 4 pomoću tri različita simbola, ovisno o tome što se dogodilo sa stupcem blokova na kraju svakog eksperimenta.



Slika 4. Rezultati prevrtanja stupca od dva bloka

Na Slici 4 pune linije predstavljaju numerički dobivene rezultate za početak ljudljana jednog bloka kojem su dimenzijske jednake ukupnim dimenzijskim stupca od dva bloka (vertikalna puna linija prikazuje granicu iz jednadžbe (5)), tanka isprekidana linija predstavlja granicu za početak ljudljana samo gornjeg bloka (granica iz jednadžbe (6)). Eksperimenti su potvrdili da puna vertikalna linija dobro opisuje kriterij za početak ljudljana oba bloka, s obzirom da se granica dobivena iz eksperimenata (granica između crnih kružića i sivih kvadrata ili trokuta) nalazi vrlo blizu analitičke granice. Granica koja označava prevrtanje stupca od dva bloka (odnosno, prevrtanje oba bloka dok rotiraju zajedno) precjenjuje stabilnost blokova – eksperimenti su pokazali da će se stupac od dva bloka prevrnuti pri manjim amplitudama ubrzanja podloge (za manji $\frac{a_0}{\alpha g}$) istog trajanja.

Važno je primijetiti da samo male varijacije u početnim uvjetima koji su kontrolirani uzrokuju primjetne promjene u amplitudi i trajanju funkcije ubrzanja podloge. Zbog toga je potrebno provesti dodatnu seriju eksperimenata s uzorcima na većoj skali, na kojoj će takve varijacije imati manji utjecaj.

4 Zaključak

Dinamičko ponašanje stupca od dva kruta pravokutna bloka koji mogu rotirati je opisan analitički pomoću osam setova jednadžbi kretanja za osam različitih konfiguracija te riješen numeričkom integracijom u vremenu i iterativnim postupkom u svakom vremenskom koraku. Prelazak iz jedne konfiguracije u drugu uzrokuje međusobno sudaranje tijela te je u numeričkoj proceduri proveden

postupak detekcije točnog trenutka sudara, nakon čega su izvedeni novi početni uvjeti za kutne brzine i ubrzanja u novoj konfiguraciji.

Radi validacije opisanog numeričkog postupka, osmišljen je set kontroliranih laboratorijskih eksperimenata s ciljem opisivanja dinamičkog odziva stupca od dva bloka na pobudu podloge u obliku konstantne funkcije ubrzanja određenog trajanja. Prilikom eksperimenata su kontrolirani stupnjevi slobode blokova, tako da je eliminirano proklizavanje i odsakivanje blokova. Preliminarni eksperimenti su pokazali da analitička granica za početak ljudjanja stupca od dva bloka dobro opisuje stvarno ponašanje, dok granica za prevrtanje stupca od dva bloka (prilikom ljudjanja oba bloka zajedno) precjenjuje stabilnost stupca.

Eksperimentalne rezultate je potrebno proširiti rezultatima dinamičkog ponašanja stupca od dva bloka na većoj skali, na kojoj će manji utjecaj imati perturbacije kontroliranih početnih uvjeta. Nakon toga, potrebno je usporediti zaokrete, kutne brzine i kutna ubrzanja tijekom cijelog kretanja stupca dobivena iz eksperimenata s onima koja su dobivena iz opisanog numeričkog koda.

Zahvale

Rad je izrađen u sklopu projekta HRZZ-1631 *Configuration dependant approximation in non linear finite-element analysis of structures* Hrvatske zaslade za znanost i istraživačke potpore Sveučilišta u Rijeci za projekt Procjena oštećenja i ojačanja građevinskih konstrukcija. Korištena laboratorijska oprema je nabavljena u sklopu projekta Razvoj istraživačke infrastrukture za laboratorije na Kampusu Sveučilišta u Rijeci br. RC.2.2.06-0001.

Literatura

1. Housner G. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1963;53(2):403-4017.
2. Dimitrakopoulos E i DeJong M. Revisiting the rocking block: closed-form solutions and similarity laws. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2012;468(2144):2294-2318.
3. Psycharis I N. Dynamic behaviour of rocking two-block assemblies. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 1990;19:555-575.
4. Spanos P D, Roussis P C i Politis N P A. Dynamic analysis of stacked rigid blocks. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2001;21(7):559-578.
5. Kounadis A N, Papadopoulos G J i Cotovos D M. Overturning instability of a two-rigid block system under ground excitation. *AMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012;92(7):536-557.
6. Pena F, Laurencio P B i Campos-Costa A. Experimental dynamic behavior of free standing multi- block structures under seismic loadings. *Journal of Earthquake Engineering*. 2008;12(6):953-979.

Eksperimentalna i numerička dinamička analiza grednih nosača pod utjecajem nejednolike potresne pobude oslonaca

Čeh, N.¹, Hlača, I.², Dobrilla, S.³, Jelenić, G.⁴ i Bićanić, N.⁵

Sažetak

Predmet istraživanja jest dinamička analiza odziva grednog mosta na prostorno promjenjivu potresnu pobudu, odnosno pobudu uslijed različitog pomicanja oslonaca. Budući da je Građevinski fakultet u Rijeci jedna od nekolicine ustanova u svijetu koje posjeduju čak dva stola za potresnu simulaciju, sve analitički dobivene rezultate bit će moguće potkrijepiti i eksperimentalnim dijelom istraživanja. Rad obuhvaća formulaciju jednadžbi problema i postupke njihova rješavanja, a u sklopu eksperimenta ispitane su slobodne oscilacije slobodno oslonjene grede i konzole s koncentriranim masama te prililne oscilacije uslijed pomaka oslonaca. Naposljetku je dana usporedba analitički i empirijski dobivenih rezultata.

Ključne riječi: dinamička analiza, prostorno promjenjiva potresna pobuda, potresne platforme, optičko mjerjenje pomaka, modalna analiza, direktna integracija metodom centralnih razlika

¹ **Nina Čeh**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: nina.ceh@uniri.hr

² **Ivan Hlača**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

³ **Simona Dobrilla**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: simona.dobrilla@student.uniri.hr

⁴ **Prof. dr. sc. Gordan Jelenić, dipl. ing. grad.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

⁵ **Prof. dr. sc. Nenad Bićanić**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka

1 Uvod

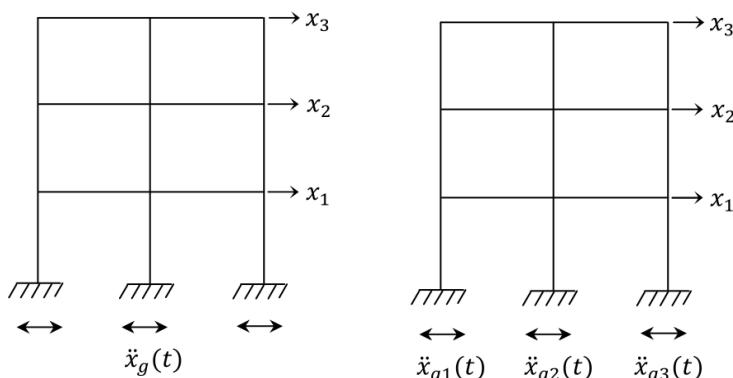
Kod dugačkih mostova kod kojih je udaljenost između oslonaca velika, prostorna promjenjivost potresnog djelovanja može imati nepovoljan učinak na seizmički odziv mosta. Potresna pobuda kod takvih mostova ne mora nužno na isti način pobuditi sve oslonce mosta, a posljedica takve pobude može biti otkazivanje rasponskoga sklopa uslijed relativnih pomaka oslonaca (1). Ostale konstrukcije kod kojih ovaj fenomen može značajno utjecati na sigurnost i trajnost su također i dugačke vodovodne mreže, tuneli i brane (2).

U ovome radu predstaviti će se uvodni dio istraživanja nejednolike potresne pobude oslonaca provedenih u sklopu izrade diplomskih radova studenata sveučilišnoga diplomskog studija na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Rijeci (3), (4). Prikazat će se rezultati eksperimentalnih ispitivanja vitkih grednih konstrukcija na pobudu oslonaca kao podloga za validaciju analitičkih i numeričkih modela.

2 Metode analize

Pobude oslonaca se mogu podijeliti u sljedeće dvije grupe (3):

Jednolika pobuda oslonaca – svi oslonci doživljavaju identično gibanje. Slika 1 (lijevo) prikazuje ovaku situaciju, koja predstavlja prihvatljiv model za opis ponašanja visokih zgrada, tornjeva, dimnjaka i sličnih objekata kod kojih udaljenost između oslonaca nije jako velika.



Slika 1. Sustav izložen jednolikoj (lijevo) i nejednolikoj (desno) pobudi oslonaca (2)

Nejednolika pobuda oslonaca – oslonci se različito gibaju u vremenu. Slika 1 (desno) prikazuje ovaku situaciju, koja se javlja, na primjer, kada uslijed potresnog vala vremenski zapisi gibanja podloge postaju različiti u slučaju da su oslonci značajno udaljeni.

Odgovor konstrukcije na pobudu oslonaca dobiva se rješavanjem sljedeće matrične jednadžbe gibanja:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Kx}(t) = -\mathbf{M}\Gamma \ddot{\mathbf{x}}_g(t) \quad (1)$$

gdje su \mathbf{M} , \mathbf{K} i \mathbf{C} matrice masa, krutosti i prigušenja dimenzija $n \times n$, n je broj stupnjeva slobode, \mathbf{x} i $\ddot{\mathbf{x}}$ su vektori relativnih pomaka i brzina dimenzija n , $\ddot{\mathbf{x}}$ je vektor apsolutnih ubrzanja dimenzije n , $\ddot{\mathbf{x}}_g$ je vektor ubrzanja podloge dimenzije r , r je broj komponenti vektora ubrzanja podloge i Γ je matrica utjecajnih koeficijenata dimenzija $n \times r$. Iako prigušenje postoji, njegov utjecaj je uglavnom vrlo malen u odnosu na inercijalne utjecaje pa će se za potrebe ovoga rada izostaviti. Dinamička analiza može se provesti modalnom analizom ili direktnom integracijom.

2.1 Modalna analiza i račun vlastitih vrijednosti

U modalnoj analizi, prostor stupnjeva slobode potrebno je preslikati u prostor vlastitih vektora za što je najprije potrebno provesti račun vlastitih vrijednosti. Stoga analiziramo homogeni neprigušeni dio problema (1):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Kx}(t) = 0 \quad (2)$$

Pritom, dvostrukim deriviranjem homogenog rješenja jednadžbe kretanja dobiva se odnos $\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2 \mathbf{x}$ pa je izraz (2) moguće zapisati u obliku problema vlastitih vrijednosti:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{x} = 0 \quad (3)$$

Množenjem jednadžbe (3) inverzom matrice krutosti (tj. *matricom fleksibilnosti*) s lijeve strane možemo po potrebi izbjegći računanje matrice krutosti i zamijeniti ga računanjem matrice fleksibilnosti, koju je ponekad jednostavnije izvesti. Također, za potrebe ove analize, pretpostaviti ćemo da je masa grede koncentrirana u n diskretnih točaka – stupnjeva slobode kretanja konstrukcije. Koristi se *metoda statičke kondenzacije* kojom se iz dinamičke analize uklanaju stupnjevi slobode kojima nije pridružena masa, a budući da mase osciliraju translacijski mogu se ukloniti i stupnjevi slobode koji se odnose na rotaciju. Koristeći metodu statičke kondenzacije, jednadžbu (2) moguće je zapisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{pp} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{x}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pp} & \mathbf{K}_{pr} \\ \mathbf{K}_{rp} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_p \\ x_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

gdje se indeksi p i r odnose na translacijski, odnosno rotacijski pomak. Iz dobivenog sustava jednadžbi moguće je rotacijski pomak izraziti preko translacijskog, čime se dolazi do izraza:

$$(\mathbf{K}_{pp} - \mathbf{K}_{pr}\mathbf{K}_{rr}^{-1}\mathbf{K}_{rp} - \omega^2 \mathbf{M}_{pp})\mathbf{x}_p = \mathbf{0} \quad (5)$$

Kako bi postojalo netrivijalno rješenje determinanta dijela u zagradi mora biti jednaka nuli (5,6).

Cilj modalne analize je izvršiti transformaciju *generaliziranih koordinata* tako da dobijemo sustav od n linearno nezavisnih diferencijalnih jednadžbi od kojih svaka sadrži samo jednu nepoznamicu. Transformacija generaliziranih koordinata u modalne, odnosno dijagonalizacija matrice krutosti, postiže se uvođenjem *matrice transformacije* Φ , takve da njeni stupci budu proporcionalni vektorima vlastitih oblika osciliranja neprigušenog sustava s n stupnjeva slobode $\mathbf{x} = \Phi \mathbf{Y}$, gdje je \mathbf{x} vektor prvobitnih generaliziranih (nepoznatih) koordinata, Φ matrica transformacije i \mathbf{Y} vektor modalnih koordinata. Matrica transformacije Φ dobiva se

izračunavanjem vlastitih frekvencija ω_n i vlastitih oblika slobodnih neprigušenih oscilacija, odnosno pronalaženjem vektora Φ_n rješavanjem jednadžbe:

$$K\Phi = \omega^2 M\Phi \quad (6)$$

Nakon toga slijedi izračun generaliziranih vrijednosti masa i krutosti te formiranje modalnih jednadžbi, u koje se jednostavno može dodati i utjecaj vanjske pobude. Superpozicijom modalnih efekata (dobivenih modalnim rastavljanjem na n nezavisnih sustava s jednim stupnjem slobode) dobivaju se vrijednosti stvarnih pomaka (7).

2.2 Direktna integracija metodom centralnih razlika

Postupak direktne integracije metodom centralnih razlika teče tako da se najprije formiraju matrice krutosti, masa i prigušenja te postavljaju početni uvjeti: ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$, ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$ i odabire vremenski korak $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$. Zatim se izračunavaju integracijske konstante ($\alpha_0 = \frac{1}{\Delta t^2}$; $\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta t}$; $\alpha_2 = 2\alpha_0$; $\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2}$) te se kompletiraju početni uvjeti putem izraza ${}^{-\Delta t}\mathbf{U} = {}^0\mathbf{U} - \Delta t {}^0\dot{\mathbf{U}} + \alpha_3 {}^0\ddot{\mathbf{U}}$ i formira se *efektivna matrica masa* $\mathbf{M} = \alpha_0\mathbf{M} + \alpha_1\mathbf{C}$. Nakon toga, za svaki vremenski korak računa se *efektivno opterećenje* u vremenu t:

$${}^t\mathbf{R}_{eff} = {}^t\mathbf{R} - (\mathbf{K} - \alpha_2\mathbf{M}) {}^t\mathbf{U} - (\alpha_0\mathbf{M} - \alpha_1\mathbf{C}) {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \quad (7)$$

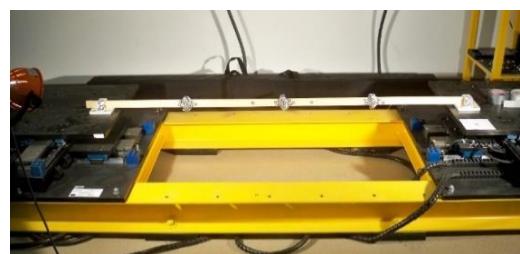
te traži pomak u vremenu $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}_i = {}^t\mathbf{R}_{eff} \left(\frac{\Delta t^2}{m_{ii}} \right) \quad (8)$$

Detalji postupka opisani su u (3), (8).

3 Eksperimentalni dio

Za provedbu ispitivanja korišten je sustav dviju potresnih platformi *Quanser STI-III* pokretanih elektromagnetskim motorom, tlocrtnih dimenzija $625 \times 625 \text{ mm}^2$. Platforme se mogu koristiti neovisno jedna o drugoj za potrebe simultanog provođenja različitih ispitivanja ili pak zajednički tako da se model oslanja na oba stola (Slika 2). Pritom pobuda može biti jednaka (*sinkroni rad*) ili različita (*asinkroni rad*).

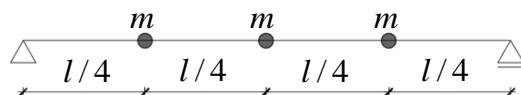


Slika 2. Postava eksperimenta (4)

Koristi se sustav za 3D beskontaktno optičko mjerjenje pomaka i deformacija GOM mbH PONTOS 3D 4M koji se sastoji od dviju kamera i programa *Aramis* i *Pontos* za upravljanje i obradu podataka. Kamere omogućuju snimanje do 168 fps rezolucijom 2400x1728 piksela te do 1300 fps rezolucijom 2400x168 piksela (9).

4 Primjer: prirodne frekvencije i oblici osciliranja za sustav s tri stupnja slobode kretanja

Za model konstrukcije korištena je letvica od smreke modula elastičnosti $E = 12,5 \text{ GPa}$, duljine 2,00 m, visine 40 mm i širine 13 mm, slobodno oslonjena i postavljena tako da pobuda u bočnom smjeru aktivira slabiju krutost poprečnog presjeka (Slika 3). Masa letvice iznosi 650 g, a dodatne mase u čvorovima koji se nalaze na jednakim razmacima iznose 204 g.



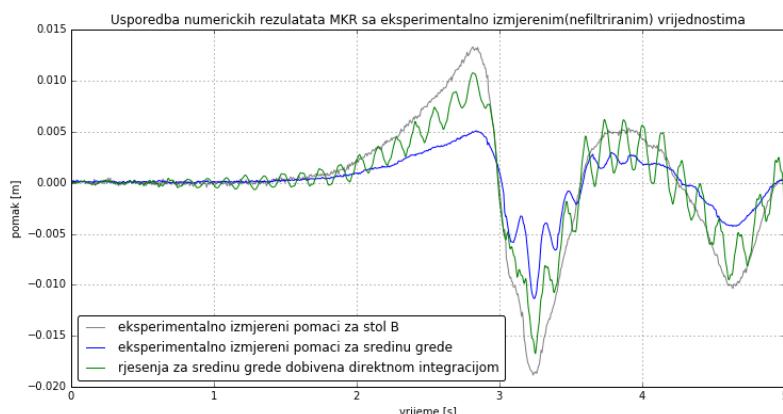
Slika 3. Sustav s tri stupnja slobode kretanja (4)

Ranije opisanim postupkom dobivene su sljedeće vrijednosti vlastitih frekvencijskih振子の固有振動数: $\omega_1 = 25,719$; $\omega_2 = 102,162$; $\omega_3 = 216,912$, dok su vlastiti oblici osciliranja prikazani na Slici 4.



Slika 4. Vlastiti oblici osciliranja (4)

Iz eksperimentalnih mjerjenja pomaka uslijed slobodnih oscilacija grede proizlazi prva vlastita frekvencija iznosa $\omega_1 = 27,9 \text{ rad/s}$, koja odstupa od one dobivene proračunom za 7,8% (4).



Slika 5. Rezultati usporedbe nefiltriranih eksperimentalnih i numeričkih rješenja za pomake na sredini grede (3)

Direktnom integracijom metodom centralnih razlika proveden je i postupak proračuna za nanesenu pobudu jednog oslonca unosom vremenske funkcije pomaka potresa Northridge. U eksperimentu, ta funkcija nanesena je pomicanjem potresnoga stola, a na Slici 5 prikazani su izračunati i izmjereni pomaci u sredini raspona grede.

Mogući uzrok odstupanja računskih rezultata od eksperimentalnih jest u izostavljanju utjecaja prigušenja u postupku direktnе integracije (3).

4 Zaključak

U okviru ovoga rada, zbog tehničkih poteškoća nije bilo moguće eksperimentalno mjeriti pomake uslijed pomicanja obaju oslonaca. To se planira ispitati prilikom provedbe daljnjih istraživanja.

Ispitivanja ovakvog tipa veoma su značajna za planiranje budućih građevinskih poduhvata u seizmičkim područjima te za predviđanje ponašanja izgrađenih objekata, što se posebno odnosi na građevine velikih dimenzija. Prostorna promjenjivost potresne pobude danas je još uvijek relativno neistraženo područje, stoga je svako novo saznanje korak bliže k stvaranju trajnih, potresno otpornih građevina (4).

Zahvale

Ovdje prikazano istraživanje provedeno je u sklopu projekta HRZZ-IP-11-2013-1631 *Configuration-dependent interpolation in non-linear finite-element analysis of structures te uz potpore Sveučilišta u Rijeci Ispitivanje vitkih grednih prostornih konstrukcija s naglaskom na validaciju modela i Procjena oštećenja i ojačanje građevinskih konstrukcija.*

Literatura

1. Šavor Novak, M, Lazarević, D i Atalić, J. Utjecaj prostorne promjenjivosti potresne pobude na seizmički odziv mostova. Građevinar. Kolovoz 2015; 67 (10): 943-957
2. Hart, G. C. i Wong, K. Structural Dynamics for Structural Engineers. New Jersey: Wiley; 2014
3. Hlača, I. Eksperimentalna i numerička dinamička analiza grednih nosača pod utjecajem nejednolike potresne pobude oslonaca (diplomski rad). Sveučilište u Rijeci: Građevinski fakultet; 2016
4. Dobrilla, S. Diplomski rad u izradi. Sveučilište u Rijeci: Građevinski fakultet; 2017
5. Chopra A. K. Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering. Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice Hall; 1995
6. Przemieniecki, J. S. Theory of Matrix Structural Analysis. Mineola: Dover Publications, INC; 2012
7. Čaušević, M. Dinamika konstrukcija. Zagreb: Golden marketing – Tehnička knjiga; 2010
8. Bathe, K.-J. Finite Element Procedures. New Jersey: Prentice Hall; 1996
9. Cuculić, M, Mrakovčić, S, Jagodnik, V, Smolčić, Ž, Travaš, V. Potencijali istraživačkog rada na Građevinskom fakultetu u Rijeci. Sveučilište u Rijeci: Građevinski fakultet; 2016

Analiza naprezanja na aneurizmi abdominalne aorte

Čorić, A.¹, Virag, L.² i Karšaj, I.³

Sažetak

Aneurizma abdominalne aorte lokalizirano je proširenje abdominalne aorte i bolest je koja se razvija tijekom razdoblja od nekoliko desetaka godina, a česta komplikacija je ruptura. Liječenje aneurizme svodi se na operativni zahvat, koji se preporuča ukoliko je maksimalni promjer aneurizme veći od 5-5,5 cm ili ako aneurizma raste brže od 1 cm/god. Ukoliko ti kriteriji nisu zadovoljeni, tijek bolesti se prati CT uređajem ili ultrazvukom. Biomehanički gledano, dva su glavna čimbenika koja utječu na rupturu AAA – naprezanje u stijenci i čvrstoća stijenke. U sklopu ovog rada nastoji se iz CT snimaka geometrija aneurizmi dobivenih uzastopnim praćenjem jednog pacijenta kroz nekoliko godina korištenjem metode konačnih elemenata analizirati raspodjelu naprezanja na stijenci aneurizme. Analiza se provodi koristeći dva različita materijalna modela – izotropni Neo-Hooke model i anizotropni Holzapfel-Gasser-Ogdenov model. Za anizotropan Holzapfel-Gasser-Ogdenov model definiraju se orijentacije kolagenih vlakana za pojedini segment geometrije. Tijekom vremena povećava se volumen aneurizme te je u radu analizirana promjena naprezanja s povećanjem volumena kao mjere rasta aneurizme. Za oba materijalna modela pokazano je da s povećanjem volumena raste i naprezanje na stijenci aneurizme. Ispitivan je i utjecaj povećanja krvnog tlaka na povećanje maksimalnog naprezanja u stijenci. Također su, unutar ograničenja modela, identificirane lokacije moguće rupture.

Ključne riječi: aneurizma abdominalne aorte, metoda konačnih elemenata, CT snimke

¹ Adriana Čorić, univ. bacc. ing. mech., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: ac195347@stud.fsb.hr

² Dr. sc. Lana Virag, mag. ing. mech., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Katedra za mehaniku i čvrstoću, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: lana.virag@fsb.hr

³ Izv. Prof. dr. sc. Igor Karšaj, dipl. ing. stroj., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Katedra za mehaniku i čvrstoću, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: igor.karsaj@fsb.hr

1 Uvod

Anuerizma abdominalne aorte (AAA) lokalizirano je proširenje abdominalne aorte. AAA se uobičajeno definira kao proširenje aorte promjera većeg od 3 cm ili proširenje od 50% s obzirom na promjer zdravog dijela aorte.

Liječenje AAA svodi se na operativni zahvat, a trenutno su jedini kriteriji, na temelju kojih se odlučuje o provođenju zahvata, maksimalni promjer veći od 5-5,5 cm ili brzina rasta veća od 1 cm godišnje. Taj je podatak poznat jedino ako postoji više uzastopnih mjerena pomoću kojih bi se utvrdila brzina rasta. Iako je rizik od rupture zasigurno povezan s veličinom aneurizme, korištenje samo tog pokazatelja može dovesti do nepotrebnih operativnih zahvata u slučaju velikih i stabilnih aneurizmi, ali isto tako može i isključiti neke potrebne (aneurizme promjera manjeg od 5 cm kod kojih je došlo do rupture). Kako se aneurizme obično javljaju kod osoba starije životne dobi, rizik od operacije često je veći od rizika rupture same aneurizme pa je u svakom slučaju poželjno izbjegći nepotrebne operativne zahvate.

Do rupture AAA dolazi u trenutku naprezanje u stijenci aorte nadvisi njezinu čvrstoću. Dakle, biomehanički gledano, dva su glavna čimbenika koji utječu na rupturu aneurizme – naprezanje u stijenci i čvrstoća stijenke. Stoga ne čudi da je izračun naprezanja u stijenci detaljno razmatran u literaturi, a za tu svrhu učestala je primjena metode konačnih elemenata.

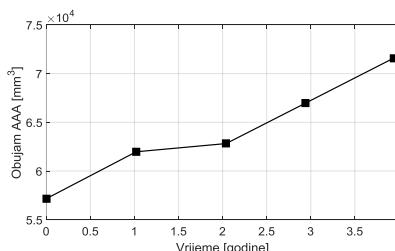
2 Metodologija

Upotreboom programskog paketa Abaqus 6.14 analizirano je naprezanje na stijenci aneurizme abdominalne aorte. Korištena su dva različita materijalna modela koji u obzir uzimaju velike deformacije te su primjenjena na geometrijama aorti dobivenima korištenjem CT snimki za pojedinog pacijenta tijekom rasta aneurizme. Prvo se primjenjuje jednostavniji izotropni Neo-Hooke model, a zatim kompleksniji anizotropni Holzapfel-Gasser-Ogdenov model.

2.1 Geometrija

Analiza se provodi na temelju dostupnih CT snimaka pacijenta ustupljenih od istraživača sa University of Michigan, SAD. Analizira se 5 CT snimaka koje su dobivene uzastopnim praćenjem jednog pacijenta kroz nekoliko godina. Radi izbjegavanja utjecaja nametnutih rubnih uvjeta na rezultate analize geometrijski model aneurizme zahvaća dio ilijskih arterija te se dio zdrave abdominalne aorte.

Kao jedan od mogućih utjecajnih parametara tijekom određivanja rizika od rupture AAA je i obujam aneurizme. Kako bi se odredio obujam AAA, postavila se ravina okomito na središnju liniju na mjestu grananja aorte na renalne arterije što predstavlja gornju granicu. Na isti način je postavljena i donja granica, tako što su se postavile dvije okomite ravnine na središnju liniju na mjestu grananja na ilijske arterije. Porast obujma tijekom vremena prikazan je slikom 1.



Slika 1: Rast volumena AAA tijekom vremena

2.2 Rubni uvjeti

Na krajevima su spriječeni pomaci u aksijalnom smjeru s obzirom na lokalne koordinatne sustave (tj. okomito na površinu). Za potrebe analize konačnim elementima, sistolički tlak trebao bi se primijeniti na neopterećenu aortu, s prisutnom uzdužnom silom koja uzrokuje predistezanje (1). Nažalost, potpuno neopterećena geometrija AAA za pojedinog pacijenta nije poznata, što uvodi grešku u rezultate analize. Međutim, u radu se naglasak stavlja na promjenu naprezanja tijekom vremena te promjenu uslijed povišenja krvnog tlaka. Pretpostavlja se da je analizirana geometrija već opterećena srednjim krvnim tlakom te se kao opterećenje nameće samo povećanje krvnog tlaka za 9-72 mmHg.

2.3 Svojstva materijala

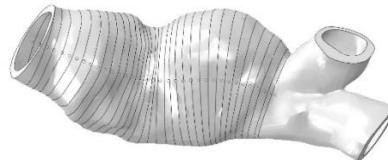
Kao što je već prije navedeno, za potrebe analize koriste se hiperelastični izotropni Neo-Hooke model i anizotropni Holzapfel-Gasser-Ogden (HGO). Za definiranje HGO modela potrebno je 6 parametara, od kojih se 5 unosi izravno u grafičkom sučelju programa Abaqus dok se orijentacija kolagenih vlakana (odnosno kut γ kojim je određena) unosi unutar *input filea*. Parametri modela korišteni u analizi vidljivi su u tablici 1. Parametar C_{10} određuje krutost i volumeni udio elastina unutar stijenke arterije, dok parametri k_1 i k_2 opisuju kolagena vlakna. Parametar D osigurava nestlačivost, dok κ definira disperziju kolagenih vlakana, pri čemu $\kappa = 0$ označava idealno poravnata vlakna koja ne dispergiraju oko glavnog smjera određenog parametrom γ .

Tablica 1:Svojstva materijala za Neo-Hooke i Holzapfel-Gasser-Ogden model

Parametar	C_{10} [MPa]	D [MPa $^{-1}$]	k_1 [MPa]	k_2 [-]	κ [-]	γ [$^{\circ}$]
Neo-Hooke	0,0434	0	-	-	-	-
HGO	0,0434	0	0,1681	22	0	$\pm 45^{\circ}$

U literaturi postoji nekoliko predloženih načina definiranja orijentacije kolagenih vlakana za anizotropni materijalni model, a u ovom radu se koristi modificirani postupak predložen u (1). Prema spomenutoj literaturi, 3D putanja središnje linije stijenke AAA općenito je dobar indikator lokalne aksijalne osi stijenke. Orientacija se određuje na način da se složena geometrija podijeli na manje (2 mm dugačke) segmente, pri čemu su granice segmenata određene karakterističnim točkama središnje linije prema slici 2. Za potrebe ovog rada podjela modela na karakteristične segmente automatizirana je Python skriptom koja se pokreće iz programskog paketa Abaqus.

Nakon podjele modela na segmente svakom segmentu se dodjeljuje orijentacija kolagenih vlakana unutar *input filea*.

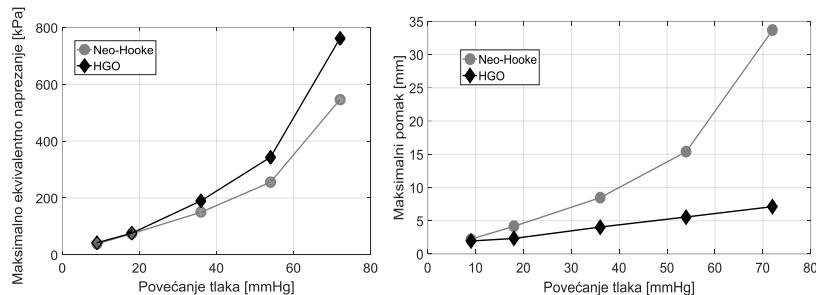


Slika 2: Karakteristične točke središnje linije

3 Rezultati

3.1 Promjena naprezanja i pomaka uslijed hipertenzije

Poznato je da je povećanje krvnog tlaka jedan od čimbenika koji mogu uzrokovati rupturu (1), što je u ovom radu i potvrđeno rezultatima prikazanim na slici 3 (lijevo).



Slika 3: Dijagram promjene maksimalnog ekvivalentnog naprezanja (lijevo) i pomaka (desno) s povećanjem unutarnjeg tlaka

Uspoređujući navedene rezultate, vidljivo je da su naprezanja za pojedini tlak uvijek veća za HGO, odnosno anizotropni materijalni model, što se slaže s rezultatima usporedbe izotropsnog i anizotropsnog modela u literaturi (1, 2). Razlika između maksimalnih naprezanja izotropsnog i anizotropsnog modela manja je nego u literaturi (1), što se može povezati s činjenicom daje u ovom radu korištena stvarna geometrija aneurizme dobivena iz CT snimki ograničene rezolucije i višestruko je obrađivana različitim softwareima pri čemu se svaki put unosi dodatna pogreška. Prilikom interpretacije navedenih rezultata potrebno je uzeti u obzir da se prema dosadašnjim analizama (3) procjenjuje da do rupture stijenke dolazi pri naprezanju od otprilike 450 kPa. Nadalje, u analizu je dodatno uvedena pogreška uzimanjem *in vivo* geometrije, već opterećene krvnim tlakom, pri čemu se analiza provodi samo s povećanjem tlaka Δp koje je definirano kao razlika između prepostavljenog krvnog tlaka i nekog uprosječenog krvnog tlaka kojim je opterećena arterija u trenutku snimanja. Također je zanemareno postojanje zaostalih naprezanja u tkivu i uzdužne sile predstezanja što sve može imati značajan utjecaj na rezultat analize. S

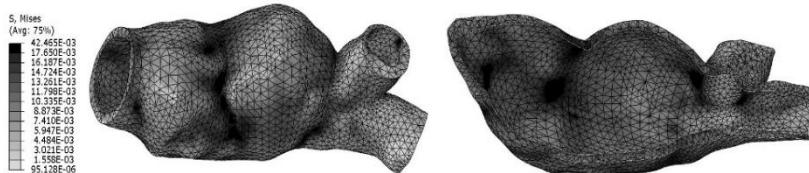
povećanjem unutarnjeg tlaka rastu i naprezanja, a samim time i pomaci za pojedini materijalni model, što je vidljivo na slici 3 (desno). Unatoč većem naprezanju na aneurizmi kod HGO materijalnog modela, pomaci aneurizme su manji, što je i očekivano. Neo-Hooke materijalni model, hiperelastičan je model koji opisuje samo ponašanje elastina u stijenci aorte, dok je HGO anizotropan model koji podrazumijeva da je elastinska stijenka ojačana kolagenim vlaknima i samim time je zbog mehaničkih svojstava kolagena kruća od stijenke koja ne sadrži vlakna.

3.2 Promjena naprezanja uslijed povećanja volumena

U okviru ovog rada analizirana je promjena maksimalnog naprezanja s povećanjem volumena aneurizme. Uz određena odstupanja u trećem vremenskom trenutku, uzrokovana najvjerojatnije nepravilnom geometrijom dobivenom pomoću CT snimaka, potvrđeno je da se maksimalno naprezanje povećava s povećanjem volumena te se može razmatrati kao dodatni operativni kriterij. Dobivene rezultate trebalo bi usporediti s rezultatima koji analiziraju ostale operativne kriterije, radi boljeg shvaćanja utjecaja volumena na rizik od rupture.

3.3 Određivanje kritičnih mesta

Koristeći navedene materijalne modele ustanovljeno je da su mesta s najvećim iznosima naprezanja uvek na mjestima izrazitih geometrijskih diskontinuiteta, ponajprije je riječ o mjestu račvanja abdominalne aorte na ilijačne arterije, kao što je vidljivo na slici 4. Tako određene lokacije potencijalne rupturi ne slažu se s kliničkim podacima o najčešćem mjestu rupturi aneurizme. Jedan od razloga zašto se mesta maksimalnih naprezanja ne poklapaju sa očekivanjima je zanemarivanje zaostalih naprezanja.



Slika 4. Prikaz kritičnih mesta na vanjskoj (lijevo) i unutarnjoj (desno) strani stijenke abdominalne aorte za prvi vremenski trenutak (crno)

4 Zaključak

Analiziran je utjecaj povišenog krvnog tlaka, kao poznatog čimbenika koji može uzrokovati rupturu AAA. Ispitivanje je provedeno za 5 različitih iznosa povećanja tlaka, pri čemu je potvrđeno da povećanje krvnog tlaka ima značajan utjecaj na povećanje maksimalnog naprezanja u stijenci. Također, iz rezultata navedene analize vidljivo je da se primjenom anizotropnog modela dobivaju veći iznosi naprezanja u stijenci te manji pomaci stijenke aneurizme, što je posljedica implementacije kolagenih vlakana. Izotropni model stijenku modelira kao isključivo elastinsku, dok anizotropni model sadrži i kolagena vlakna koja su mnogo kruća od elastina.

Tijekom vremena povećava se volumen aneurizme te je u radu analizirana promjena naprezanja s povećanjem volumena kao mjere rasta aneurizme. Za oba materijalna modela pokazano je da s povećanjem volumena raste i naprezanje na stijenci aneurizme, pri čemu su naprezanja za pojedini volumen uvijek veća za Holzapfel-Gasser-Ogdenov nego za Neo-Hookeov model.

Koristeći navedene materijalne modele kao lokacije potencijalne rupture identificirana su mesta geometrijskih diskontinuiteta. Prvenstveno je riječ o mjestu račvanja abdominalne aorte na ilijačne arterije, što se ne slaže u potpunosti s dostupnim podacima o stvarnim najčešćim mjestima rupturi aneurizme. Jedan od razloga zašto se mesta maksimalnih naprezanja ne poklapaju s kliničkim opažanjima mesta na kojima najčešće dolazi do rupturi je zanemarivanje zaostalih naprezanja. Također geometrija aneurizme dobivena je iz CT snimaka, pri čemu je uvedena pogreška uzrokovana ograničenom rezolucijom CT uređaja te pretpostavkom da je tako dobivena geometrija opterećena nekom uprosječenom vrijednosti krvnog tlaka tijekom vremena. S obzirom da navedeni materijalni modeli nisu linearni, neispravno je na tako opterećenu geometriju nadodati samo razliku tlaka prilikom analize naprezanja. Također, tako dobivena geometrija sadrži velik broj izrazitih geometrijskih diskontinuiteta koji uzrokuju mnoge nerealne koncentracije naprezanja što uvodi dodatnu grešku u analizu. Primijenjena orijentacija kolagenih vlakana, na modelu je određena pomoću lokalnih koordinatnih sustava za pojedine segmente te je zanemarena disperzija vlakana što ne odgovara stvarnoj orijentaciji vlakana.

Zahvale

Ovaj rad je u potpunosti financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom 7328.

Literatura

1. Geest, J. P. V., Schmidt, D. E., Sacks, M. S. i Vorp, D. A. The effects of anisotropy on the stress analyses of patient-specific abdominal aortic aneurysms. *Annals of Biomedical Engineering*. 2008; 36:921–932
2. Roy, D., Holzapfel, G., Kauffmann, C. i Soulez, G. Finite element analysis of abdominal aortic aneurysms: geometrical and structural reconstruction with application of an anisotropic material model. *Journal of Applied Mathematics*. 2014; 79:1011–1026.
3. Humphrey, J. D. i Holzapfel, G. A. Mechanics, mechanobiology, and modeling of human abdominal aorta and aneurysms. *Journal of Biomechanics*. 2012; 45:805–814.

Model strujanja vode kroz djelomično zapunjeni tunel sa ugrađenom cijevi

Družeta, S.¹, Škifić, J.² i Grbčić, L.³

Sažetak

Jedno od inženjerskih rješenja za polaganje cjevovoda kroz tlo je ugradnja cijevi u prethodno probijeni tunel. U radu se razmatra slučaj mikrotunela sa ugrađenom cijevi, kroz koji se crpi voda iz mora za potrebe ispiranja cijevi.

S obzirom da je analizirani mikrotunel položen sa kopna prema moru pod kutom, samo dijelom svoje dužine je potpuno zapunjeno vodom, što znači da se strujanje odvija kao prijelaz iz strujanja pod tlakom u strujanje sa slobodnom površinom. Dodatni izazov predstavlja geometrija kanala u kojem se odvija strujanje, koja je definirana kao „cijev u cijevi“.

Strujanje je modelirano upotrebom 1D modela strujanja u otvorenim kanalima, gdje je strujanje pod tlakom omogućeno upotrebom uskog proreza u vrhu kanala (tzv. Priessmanov prorez). Dobiveni numerički model iskorišten je za određivanje maksimalnog mogućeg protoka kroz tunel s obzirom na nemogućnost crpki da povećaju protok nakon što se jednom uspostavi nadkritični slap na ulazu tunela u crpnu stanicu.

Postavljeni računalni model uspješno je iskorišten za analizu kapaciteta crpljenja morske vode kroz mikrotunel, gdje su rezultati simulacija dali maksimalni mogući protok za minimalnu očekivanu razinu mora, kao i najnižu razinu mora za koju je moguće ostvariti željeni protok crpljenja.

Ključne riječi: tunel, strujanje plitkih voda, transkriticno strujanje, Priessmanov prorez, kapacitet crpljenja

¹ Izv. prof. dr. sc. Siniša Družeta, dipl. ing., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: sinisa.druzeta@riteh.hr

² Izv. prof. dr. sc. Jerko Škifić, dipl. ing., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: jerko.skific@riteh.hr

³ Luka Grbčić, mag. ing. mech., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: luka.grbcic@riteh.hr

1 Uvod

Polaganje cjevovoda kroz tlo može se izvesti na način da se cjevovod položi u prethodno izvedeni mikrotunel. U ovom radu razmatramo jedan takav slučaj, gdje u mikrotunelu, koji povezuje podmorje sa crpnom stanicom smještenom na obali, leži cijev koja se dalje nadovezuje na podmorski cjevovod. Crpna stanica je izvedena kao jednostavno okno odnosno bazen sa djelomično uronjenim vertikalnim pumpama, dok je mikrotunel izведен sa padom prema moru.

Promjer tunela je 2,4 m, na dnu kojeg je položena cijev vanjskog promjera 0,963 m. Cijev u tunelu leži na osloncima visokima 0,06 m, širokima 0,3 m, koji su međusobno razmaknuti 6 m. Dno tunela na spoju sa crpnom stanicom leži na koti -1 m n. m., odakle tunel ukupne duljine 1485 m pada prema moru sa nagibom 0,067 rad. Okno crpne stanice je široko 11 m, duboko 10 m, kota dna mu je -1,7 m n. m., dok je os tunela zamaknuta 1,97 m bočno od osi okna.

Procijenjena prosječna visina neravnina tunela iznosi 1,3 mm, što također odgovara i procijenjenoj prosječnoj visini neravnina na vanjskoj strani ugrađene cijevi (tj. na njenoj oblozi).

Ciljani protok crpljenja zadan je kao $Q_p = 1100 \text{ m}^3/\text{h}$, što bi trebalo postići za najmanju očekivanu razinu mora $Y_{m,min} = -0,6 \text{ m n. m.}$

Crpna stanica služi za crpljenje morske vode kroz mikrotunel, da bi se onda njome u suprotnom smjeru punio ugrađeni cjevovod, za potrebe testiranja i ispiranja. U tom smislu potrebno je odrediti kapacitet crpljenja, odnosno najveći mogući protok crpljenja za najnižu očekivanu razinu mora.

2 Numerički model

Za nestacionarno strujanje kroz djelomično zapunjeni tunel s ugrađenom cijevi koristi se nestacionarni 1D model strujanja u otvorenim vodotocima s Roeovom numeričkom shemom (upwind prvoga reda). Numerički model je implementiran u softveru *Stripp12*, koji je razvijen na Tehničkom Fakultetu u Rijeci i široko korišten u raznim znanstvenim i industrijskim projektima vezanim uz strujanje plitkih voda (kao na primjer (3)).

Strujanje kroz mikrotunel i okno modelirano je 1D St. Venantovim jednadžbama:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gI_2 + gA(S_0 - S_f) \quad (2)$$

gdje

$$I_1 = \int_0^h (h - \varsigma) B(x, \varsigma) d\varsigma \quad (3)$$

modelira silu hidrostatskog tlaka,

$$I_2 = \int_0^h (h - \varsigma) \frac{\partial B}{\partial x}(x, \varsigma) d\varsigma \quad (4)$$

predstavlja silu vezane uz promjenu širine kanala,

$$S_0 = \frac{dz}{dx} \quad (5)$$

je nagib dna kanala te

$$S_f = \frac{n^2 Q |Q|}{A^2 R^{4/3}} \quad (6)$$

modelira sile trenja fluida na stjenke kanala.

U navedenim jednadžbama x je definiran kao uzdužna prostorna koordinata, t je vrijeme, $A = A(x, t)$ je površina omočenog poprečnog presjeka, a $Q = Q(x, t)$ je protok. Nadalje, $h = h(x, t)$ predstavlja dubinu vode, $z = z(x, t)$ je razina dna, $B = B(x, \varsigma)$ se definira kao širina dna, q je bočni dotok, n je Manningov koeficijent trenja, $R = R(x, A)$ predstavlja hidraulički radijus, a g je gravitacijska konstanta.

Kao početni uvjeti uzimaju se početna razina vode i početni protok u kanalu, tj. $Y(x, 0) = Y_0(x)$ i $Q(x, 0) = Q_0(x)$. Razina vode $Y(x, t)$ definira se kao $Y = h + z$. Stacionarni režimi strujanja izračunati su korištenjem opisanog nestacionarnog numeričkog modela.

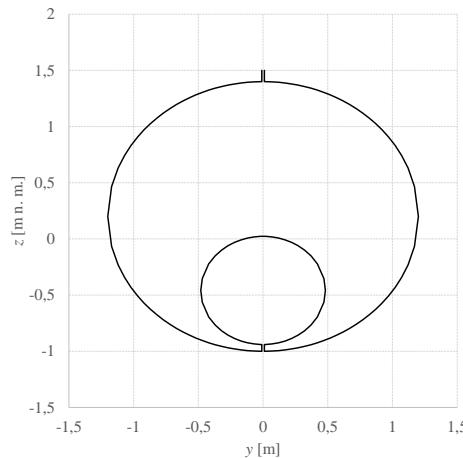
Prijašnja istraživanja i praktični projekti su pokazali da je Roeova numerička shema stabilna i pouzdana, pogotovo za kompleksne geometrije kanala te je stoga ona korištena i u ovom radu. Roeova numerička shema uključuje numeričku aproksimaciju prostorno zavisne funkcije fluksa i geometrijskog izvornog člana korištenjem *upwind* tehnike. Diskretizacija oba člana izvedena je tako da se postigne balansiranje između gradijenta fluksa i izvornog člana.

Tunel je modeliran kao otvoreni vodotok, gdje je strujanje pod tlakom omogućeno korištenjem fiktivnog uskog uzdužnog proreza (eng. *slot*) na stropu tunela. Ugradnja ovakvog proreza u model strujanja u otvorenim vodotocima predstavlja standardnu tehniku za kombiniranje strujanja pod tlakom sa strujanjem sa slobodnom površinom jer dopušta porast tlaka bez značajnog porasta brzine. Preciznije, kada strujanje uđe u režim strujanja pod tlakom, varijabla $Y(x, t)$ efektivno predstavlja piezometarsku visinu, tj. razina vode se treba interpretirati kao piezometrijska linija. Takva tehnika se naziva Priessmanov prorez i njezino korištenje u kombinaciji s 1D St. Venantovim jednadžbama je temeljito istraženo i potvrđeno eksperimentalnim podacima (1).

Preliminarna istraživanja pokazala su da je, s obzirom na zanemarivi pad piezometrijske visine u nižem dijelu tunela, dovoljno uzeti segment od 50 metara tunela od okna prema moru ($x = -50 \dots 0$ m). Poprečni presjek kanala u ovom dijelu definiran je geometrijom tunela te uključuje cijev promjera 0,963 m, koja je podignuta od dna tunela za visinu oslonca cijevi (0,06 m). Pošto su oslonci relativno mali i međusobno široko razmaknuti, oni nisu geometrijski reprezentirani u modelu, osim pomoću „nožice“ širine 0,02 m koja povezuje cijev i tunel.

Profil modelskog kanala na spoju tunela sa oknom ($x = 0$ m) prikazan je na slici 1. Iako prorez na vrhu tunela u prikazu ima visinu od samo 0,1 m, njegova se visina tijekom simulacije strujanja u numeričkom modelu automatski po potrebi povećava. Širina proreza na vrhu tunela je

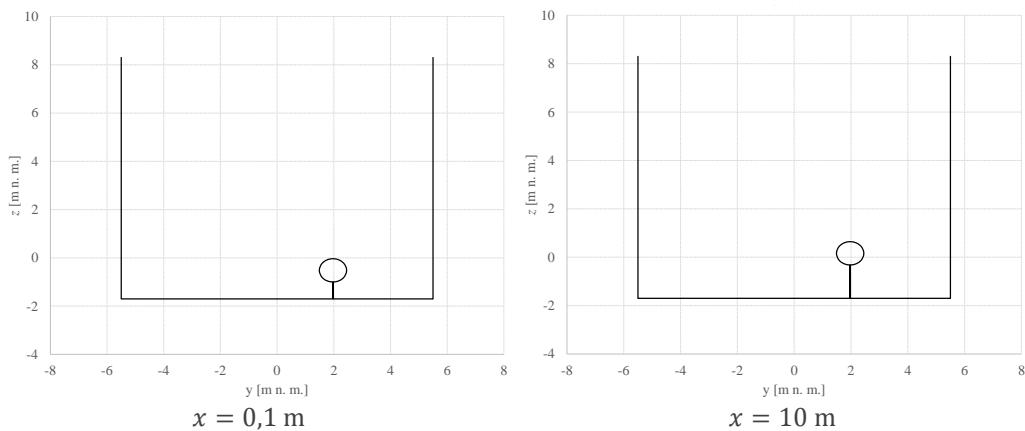
0,02 m. Teoretski bi bilo povoljnije da je prorez što uži, no značajno manje širine proreza uzrokuju numeričke probleme u rješavanju jednadžbi.



Slika 1. Poprečni presjek kanala na spoju tunela sa oknom

Poprečni presjek kanala u području okna ($x = 0,1 \dots 10$ m) je pravokutnog oblika te uključuje poprečni presjek cijevi koja prodire iz mikrotunela dalje u okno. Cijev je zadržana u presjeku okna radi djelomičnog kontakta cijevi s vodom u oknu. Slično kao u tunelskom dijelu domene gdje postoji „nožica“ koja spaja cijev sa dnem tunela (slika 1.) i ovdje je prisutna „nožica“ širine 0,02 koja spaja dno okna i dno cijevi, koja s obzirom na svoju širinu ne narušava značajno točnost modela, tim više ako uzmemo u obzir nisku brzinu strujanja vode u oknu. (Ove „nožice“ prisutne su u geometriji kanala isključivo zbog načelnog uvjeta da se poprečni presjeci kanala definiraju poligonalnim linijama.)

Poprečni presjek kanala na mjestu spoja tunela sa oknom, na strani okna ($x = 0,1$ m), kao i poprečni presjek na nizvodnom rubu domene ($x = 10$ m) prikazani su na slici 2.



Slika 2. Poprečni presjek kanala na uzvodnoj (lijevo) i nizvodnoj (desno) strani okna

U skladu sa zadanim ulaznim podacima, hrapavost tunela odnosno zidova okna, kao i hrapavost vanjske površine cijevi smatraju se jednakom i uniformnom s odgovarajućim Manningovim koeficijentom koji je procijenjen kao $n = 0,01 \dots 0,02$, što je u skladu sa standardnom literaturom (2). U svrhu ovih analiza, Manningov koeficijent je u konačnici usvojen kao $n = 0,02$, što odgovara površini vrlo hrapavog betona. Takva pretpostavka osigurava da sile trenja ne budu podcijenjene.

Što se rubnih uvjeta tiče, na ulaznoj granici domene ($x = -50$ m) nametnut je rubni uvjet poznatog protoka Q_p , dok je na izlaznoj granici domene ($x = 10$ m) zadana razina vode i to upravo ona vrijednost Y koja osigurava da piezometrijska visina na ulaznom rubu domene u stacionarnom stanju postigne traženu razinu mora, tj. $Y(-50, \infty) = Y_m$. Pumpe nisu uključene u model i voda slobodno istjeće iz okna, ali uz unaprijed definiranu konstantnu razinu vode na izlaznoj (nizvodnoj) granici $Y(10, t) = Y_{iz}$.

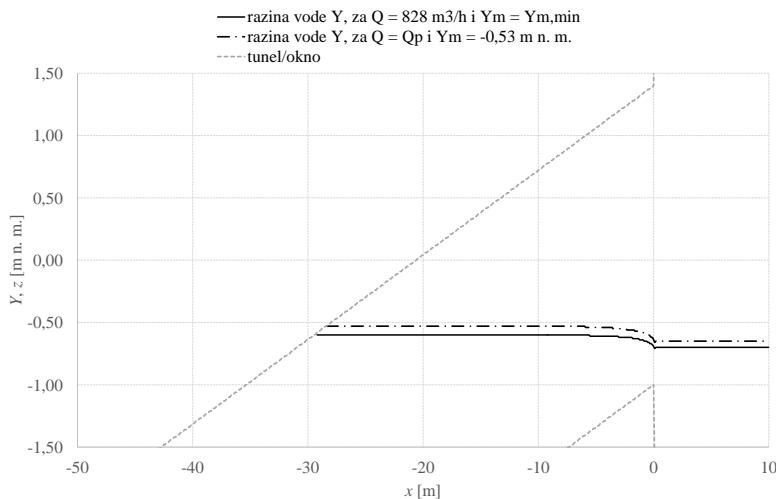
3 Rezultati simulacija

Na opisanom numeričkom modelu i proračunskoj domeni provedene su simulacije strujanja za određivanje stacionarnih režima strujanja u sustavu tunel-okno. U svim provedenim simulacijama korišten je prostorni korak $\Delta x = 0,1$ m, dok se vremenski korak Δt određuje dinamički, na temelju zadanih CFL koeficijenta $c_{CFL} = 0,7$.

Prvo je provedena simulacija strujanja za zadani razinu mora $Y_{m,min} = -0,6$ m n. m., i protok $Q_p = 1100 \text{ m}^3/\text{h}$, gdje se pokazalo da za ove parametre nije moguće postići stacionarno strujanje. Naime, u ovim uvjetima na mjestu gdje voda iz tunela utječe u okno ($x \approx 0$ m) uspostavlja se prijelaz iz potkritičnog u natkritično strujanje, čime se prekida „komunikacija“ donje vode (u bazenu okna) i gornje vode (u tunelu) odnosno formira se „slap“ koji ima svoj maksimalni protok (za zadani razinu mora) i to manji od Q_p (problem također razmatran u (3)). Drugim riječima, nakon uspostave natkritičnog strujanja, pumpe ne mogu održavati protok Q_p nego počinju iscrpljivati vodu akumuliranu u bazenu, što znači da u stvarnom radu ne bi bio moguć kontinuirani rad sustava s protokom Q_p .

Stoga je u nastavku istraživanja numerički model iskorišten za određivanje najvećeg ostvarivog protoka za minimalnu razinu mora $Y_{m,min}$ te za određivanje najniže razine mora za koju je još uvijek ostvariv ciljni protok $Q_p = 1100 \text{ m}^3/\text{h}$. Pri tome se protok uvijek smatrao ostvarivim samo dok vrijedi da Froudeov broj Fr nigdje u domeni ne prelazi granicu $Fr_{max} = 0,9$. Takav uvjet prevenira stvaranje hidrauličkog pada, tj. prijelaza iz potkritičnog u natkritično strujanje na ulazu vode iz tunela u okno.

Slika 3. prikazuje rezultate ovih simulacija u obliku uzdužnog profila sa ucrtanom razinom vode (vodnim licem) duž cijele proračunske domene. Provedene simulacije su pokazale da najniža razina mora pri kojoj je još uvijek ostvariv ciljni protok Q_p iznosi $Y_m = -0,53$ m n. m., dok najveći ostvarivi protok pri predviđenoj najnižoj razini mora $Y_{m,min}$ iznosi $Q = 828 \text{ m}^3/\text{h}$.



Slika 3. Rezultati simulacija ostvarivog stacionarnog strujanja u sustavu mikrotunel-okno

4 Zaključak

Na temelju 1D St. Venantovih jednadžbi strujanja u otvorenim vodotocima postavljen je numerički model strujanja u sustavu mikrotunel-okno. Numerički model je za tu potrebu proširen primjenom tehnike Priessmanovog proreza na vrhu kanala, čime je omogućeno modeliranje i strujanja pod tlakom i strujanja sa slobodnom površinom.

Prisutnost ugrađene cijevi u mikrotunelu uvjetuje složenu geometriju poprečnog profila strujnog kanala, što se nije pokazalo kao poseban problem za korišteni numerički model odnosno softver *Stripp12*.

Model se pokazao uspješnim za provedbu simulacija strujanja sa prijelazom iz strujanja pod tlakom u nižem dijelu tunela u strujanje sa slobodnom površinom pri vrhu tunela, uz transkritično tečenje na ulazu u crpno okno. Dobiveni rezultati su pokazali da ciljani protok crpljenja nije moguće postići pri očekivanoj najnižoj razini mora, zbog uspostavljanja natkritičnog strujanja na ulazu vode iz tunela u okno. Stoga je potrebno crpiti vodu sa manjim protokom ili revidirati procjenu najniže razine mora.

Literatura

1. Garcia-Navarro, P., Alcrudo, F., Priestley, A. An implicit method for water flow modelling in channels and pipes. *Journal of Hydraulic Research*. 1994;32(5):721-742.
2. Chow, V. T. *Open-channel hydraulics*. McGraw-Hill. New York. 1959.
3. Družeta, S., Sopta, L., Črnjarić Žic, N., Škifić, J. Pump Start Up Analysis in Fužine Reversible Hydropower Plant Using 1D Open Channel Flow Model. *Proceedings of the 5th DAAAM International Conference on Advanced Technologies for Developing Countries*. Rijeka. 2006:63-68.

Formulacija trodimenzijskog C^1 konačnog elementa

Frančeski, J.¹, Skozrit, I.², Lesičar T.³

Sažetak

Heterogeni materijali sastoje se od dva ili više konstituenata, pri čemu je za modeliranje njihova deformiranja potrebno uključiti utjecaj mikrostrukture. Kako bi se opisalo deformiranje materijala pomoću matematičkog modela, koristi se mehanika kontinuuma. Parcijalne diferencijalne jednadžbe dobivene primjenom mehanike kontinuuma rješavaju se približnim numeričkim metodama, od kojih je najpoznatija metoda konačnih elemenata.

Klasična mehanika kontinuuma zasniva se na lokalnom pristupu u materijalnoj točki i nema mogućnost opisivanja utjecaja lokalne točke na okolinu, i time utjecaja mikrostrukture i utjecaja veličine mikrostrukture. Kako bi se stvorio matematički model koji obuhvaća relevantne mikrostruktturne mehanizme, u prošlom stoljeću je izvedena teorija kontinuuma višeg reda, tzv. gradijentna teorija, koja u sebi sadrži mikrostruktturne materijalne parametre, koji razmatraju utjecaj mikrostrukture na mehaničko ponašanje materijala.

U radu provedeno je istraživanje literature te su detaljno proučeni i uspoređeni trodimenzijski konačni elementi izvedeni pomoću metode pomaka i konačni elementi temeljeni na mješovitoj formulaciji kojima se rješavaju problemi gradijentne teorije. Korištenje metode pomaka u izvodu konačnog elementa zahtjeva zadovoljavljavanje kontinuiteta pomaka i deformacija, što znači da pomaci i njihove derivacije moraju biti kontinuirane funkcije. S druge strane, mješovita formulacija koristi iste interpolacijske polinome za opisivanje pomaka i gradjenata pomaka, te time pridonosi smanjenju numeričke kompleksnosti konačnog elementa. U radu je dan pregled izvoda heksaedarskog konačnog elementa koji zadovoljava C^1 kontinuitet temeljen na metodi pomaka. Prikazani su i komentirani rezultati ispitivanja konačnog elementa. Također je opisan izvod heksaedarskog konačnog elementa temeljenog na mješovitoj formulaciji koji približno zadovoljava C^1 kontinuitet. Prikazani su i komentirani rezultati ispitivanja konačnog elementa.

Ključne riječi: gradijentna teorija, metoda konačnih elemenata, C^1 kontinuitet

¹ **Joško Frančeski, mag. ing. stroj.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: josko.franceski@fsb.hr

² **Doc. dr. sc. Ivica Skozrit**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: ivica.skozrit@fsb.hr

³ **Dr. sc. Tomislav Lesičar**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: tomislav.lesicar@fsb.hr

1 Uvod

Materijali čija se mikrostruktura sastoji od dva ili više konstituenata nazivaju se heterogenim materijalima. Heterogeni materijali su od posebnog interesa u inženjerskoj praksi jer pružaju mogućnost iskorištavanja prednosti svih konstituenata u svrhu izrade materijala željenih mehaničkih svojstava. Kako bi se izveo matematički model ponašanja materijala, koriste se konstitutivne jednadžbe izvedene u mehanici kontinuma. Takav matematički model pruža parcijalne diferencijalne jednadžbe koje je na jednostavan način moguće riješiti primjenom numeričkih metoda, poput metode konačnih elemenata.

Teorija klasične mehanike kontinuma koristi lokalni pristup u materijalnoj točki koji ne razmatra utjecaj veličine mikrostrukture materijala. Kako bi proširio klasičnu mehaniku na nelokalni pristup koji razmatra utjecaj veličine mikrostrukture, Mindlin (1) je razvio teoriju kontinuma višeg reda, gdje u jednadžbi gustoće potencijalne energije uz Lameove konstante vezane za deformacije uvodi i dodatne konstante vezane uz gradijente deformacija. Mindlinova teorija kontinuma višeg reda, odnosno gradijentna teorija, omogućuje modeliranje utjecaja veličine mikrostrukture i mehaničkog ponašanja mikrostrukture na ponašanje cjelovite konstrukcije. Osim gradijentne teorije, kako bi se opisalo ponašanje konstrukcije kao cjeline, proteklih godina su razvijene metode višerazinskog modeliranja kojima se proširuje metoda konačnih elemenata, gdje se rezultati problema rubnih vrijednosti na razini mikrostrukture, putem određenih postupaka kao što je računalna homogenizacija, prenose na razinu konstrukcije – makrorazinu. Jedna od najučinkovitijih metoda računalne homogenizacije u višerazinskom modeliranju je homogenizacija drugog reda (2) koja zahtjeva korištenje konačnih elemenata koji zadovoljavaju C^1 kontinuitet.

Kod C^1 konačnih elemenata, uz pomake se kao stupnjevi slobode javljaju i prve i druge derivacije pomaka, kako bi se zadovoljio kontinuitet deformacija. Povećanje broja stupnjeva slobode konačnih elemenata, kao i potreba za zadovoljavanjem kontinuiteta deformacija, dovodi do proširenja interpolacijskog polinoma i povećanja kompleksnosti izvoda konačnog elementa. U ovom radu će biti prikazani trodimenzijski konačni elementi koji zadovoljavaju C^1 kontinuitet, temeljeni na metodi pomaka, te konačni elementi temeljeni na mješovitoj formulaciji.

2 Pregled literature

Gradijentna teorija, razvijena u (1), pretpostavlja da je gustoća energije deformiranja funkcija prve derivacije polja pomaka, deformacija i gradijenta deformacija. U formulaciji principa virtualnog rada pojavljuju se tenzor gradijenta deformacija i tenzor sekundarnih naprezanja. Primjena konačnih elemenata temeljenih na metodi pomaka, pri čemu se rješavaju parcijalne diferencijalne jednadžbe četvrtog reda. Parcijalne diferencijalne jednadžbe višeg reda uvjetuju korištenje sheme interpolacije koja jamči zadovoljavanje kontinuiteta polja pomaka i derivacija polja pomaka.

Konačni elementi temeljeni na metodi pomaka su dosad bili rijetko korišteni u literaturi za rješavanje gradijentnih problema. U literaturi je moguće naći malo konačnih elemenata koji zadovoljavaju C^1 kontinuitet temeljenih na metodi pomaka zbog komplikirane matematičke formulacije i zahtjevnih računalnih algoritama koji proizlaze iz matematičke formulacije.

U literaturi su stoga brojnija istraživanja u kojima se koriste konačni elementi temeljeni na mješovitoj formulaciji za rješavanje gradijentnih problema. U radu (3) funkcije polja pomaka i derivacija polja pomaka se koriste kao nezavisne nepoznanice čija se kinematička veza

zadovoljava u prosječnom smislu. Drugim riječima, kako bi se dobili točni kinematički odnosi između polja pomaka i derivacije polja pomaka koriste se dodatni parametri u obliku Lagrangeovih multiplikatora. Formulacija dvodimenzijanskog konačnog elemenata prema (4) uvodi deformacije kao dodatne stupnjeve slobode. Osnovne jednadžbe u formulaciji konačnog elementa izvode se primjenom Lagrangeovih multiplikatora. U radu (5), uz pomake su dodani stupnjevi slobode u obliku rotacija u čvorovima konačnog elementa. Kako bi se smanjila razlika između rotacijskih gradijenata izračunatih preko rotacija u čvorovima i pomaka u čvorovima koriste se kaznene funkcije.

Unatoč postojećim alternativama i zahtjevnom izvodu, u literaturi postoje konačni elementi temeljeni na metodi pomaka koji zadovoljavaju C^1 kontinuitet i koriste se za rješavanje gradijentnih problema. Najjednostavniji C^1 konačni element je jednodimenzionalni kubični Hermiteov element (6) koji se često koristi za rješavanje problema savijanja greda. U literaturi postoji više dvodimenzionalnih konačnih elemenata za rješavanje problema savijanja ploča. U radu (7) predstavljen je trokutni konačni element s 21 stupnjem slobode. Drugi trokutni element, s 18 stupnjeva slobode je razvijen u radu (8). Funkcija polja pomaka konačnog elementa je dana u trokutnim (površinskim) koordinatama. Trokutni element s 36 stupnjeva slobode razvijen u radu (2) je temeljen na konačnom elementu razvijenom u (8). Zbog problema koji se javljaju kod korištenja konačnog elementa iz rada (8), u radu (2) je izvršena transformacija stupnjeva slobode i funkcija oblika u Kartezijev koordinatni sustav. U radu (9) je predstavljen četverokutni konačni element sa 16 stupnjeva slobode temeljen na Bogner – Fox – Schmidt četverokutu.

Trodimenijski C^1 konačni element je predstavljen u (10) u obliku izoparametarskog heksaedra temeljenog na metodi pomaka. Konačni element ima ukupno 192 stupnja slobode i njegova formulacija temelji se na postupku opisanom u radu (9). U literaturi postoji formulacija trodimenijskog konačnog elementa mješovite formulacije (11) koji se temelji na radu (3).

3 Trodimenijski C^1 konačni elementi

U ovom poglavlju bit će opisana formulacija trodimenijskih konačnih elemenata temeljenih na metodi pomaka i mješovitoj formulaciji, prema radovima (10) i (11).

3.1 Trodimenijski konačni element temeljen na metodi pomaka

Izoparametarski heksaedarski konačni element predstavljen u radu (10) temelji se na postupku izvoda dvodimenijskog izoparametarskog četverokutnog konačnog elementa predstavljenog u radu Petera i Pittmana (9). Element je oblika kocke u referentnom parametarskom koordinatnom sustavu $\xi_1-\xi_2-\xi_3$, koji odgovara globalnom Kartezijevom koordinatnom sustavu. Polje pomaka opisano je funkcijom f pomoću trikubičnog polinoma koji sadrži 64 nepoznata koeficijenata

$$f(\xi) = \sum_{i,j,k=0}^3 a(ijk) \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k. \quad (1)$$

Kako bi se pronašle vrijednosti nepoznatih koeficijenata, potrebno je definirati 64 jednadžbe. Za položaje čvorova je odabранo osam vrhova heksaedra te za stupnjeve slobode čvorna vrijednost funkcije f , njene prve derivacije, mješovite druge derivacije i potpuno mješovita treća derivacija. Tako definirani, stupnjevi slobode se mogu zapisati

$$f^N = \{f^1 f_1^1 f_1^2 f_1^3 f_1^4 f_1^5 f_1^6 f_1^7 f_1^8\}. \quad (2)$$

Funkcije oblika ovog konačnog elementa izračunavaju se rješavanjem sustava kubičnih Hermiteovih polinoma na rubovima heksaedra između čvorova prema postupku koji je opisan u

(5) i (9). Nakon izračuna funkcija oblika, potrebno je provesti transformaciju iz lokalnog, parametarskog koordinatnog sustava u globalni, Kartezijev. Stupnjevi slobode koji sadržavaju derivacije se transformiraju primjenom lančanog pravila diferenciranja

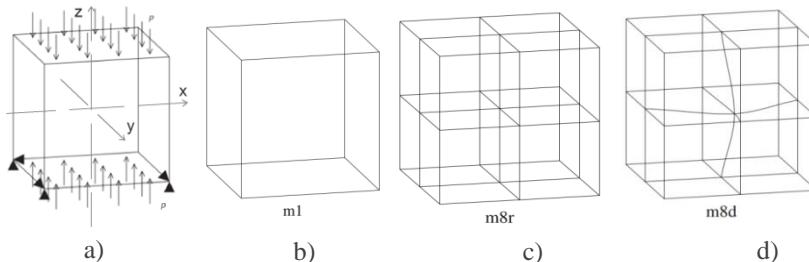
$$f_{;i} = f_{,p} x_{p;i}, \quad (3)$$

$$f_{;ij} = f_{,pq} x_{p;i} x_{q;j} + f_{,p} x_{p;ij}, \quad (4)$$

$$f_{;ijk} = f_{,pqs} x_{p;i} x_{q;j} x_{s;k} + f_{,pq} (x_{p;ij} x_{q;k} + x_{p;jk} x_{q;i} + x_{p;ki} x_{q;j}) + f_{,p} x_{p;ijk}. \quad (5)$$

Iz izraza (3)-(5) vidljivo je da svaka parametarska derivacija u sebi sadrži sve Kartezijeve derivacije istog ili nižeg reda, dakle, transformacija svih parametarskih derivacija po čvoru zahtjeva korištenje 19 Kartezijevih derivacija. U cilju pojednostavljenja izvoda jednadžbe konačnog elementa u Kartezijevim koordinatama, u radu je odabранo transformiranje samo stupnjeva slobode koji se sastoje od prvih derivacija, dok se stupnjevi slobode derivacija višeg reda ne transformiraju. Selektivna transformacija stupnjeva slobode unosi dodatno ograničenje da svi konačni elementi moraju dijeliti iste parametarske smjerove, dakle, elementi moraju biti dio strukturirane mreže konačnih elemenata.

Ponašanje konačnog elementa je testirano na „patch“ testu, kao i na primjerima smicanja unutrašnje stijenke debelostjenog šupljeg cilindra i torziji debelostjenog šupljeg cilindra. Na slici 1 predstavljeni su rubni uvjeti i mreže konačnih elemenata korištene u testiranju konačnog elementa. Ispitano je ponašanje konačnog elementa i mreže konačnih elemenata opterećenih na tlak, uz ograničavanje 6 stupnjeva slobode prema slici 1 a), kako bi se sprječilo gibanje krutog tijela.



Slika 1. a) rubni uvjeti, b) jedan element, c) nedistordirana mreža d) distordirana mreža (10)

Rezultati maksimalne relativne greške pomaka u_z , deformacija ε_{zz} i naprezanja σ_{zz} dani su u tablici 1 za više redova Gaussove sheme integracije. Pri tome, relativna greška je definirana kao razlika između numeričkih i analitičkih rezultata.

Tablica 1. Rezultati „patch“ ispitivanja (10)

Gaussova shema	Mreža	Greška u_z	Greška ε_{zz}	Greška σ_{zz}
4x4x4	m1	$0,17 \times 10^{-15}$	$0,69 \times 10^{-15}$	$0,88 \times 10^{-15}$
	m8r	$0,35 \times 10^{-15}$	$0,10 \times 10^{-14}$	$0,18 \times 10^{-14}$
	m8d	$0,70 \times 10^{-05}$	$0,14 \times 10^{-04}$	$0,18 \times 10^{-04}$
5x5x5	m1	$0,52 \times 10^{-15}$	$0,12 \times 10^{-14}$	$0,18 \times 10^{-14}$
	m8r	$0,87 \times 10^{-15}$	$0,16 \times 10^{-14}$	$0,21 \times 10^{-14}$
	m8d	$0,70 \times 10^{-05}$	$0,15 \times 10^{-04}$	$0,17 \times 10^{-04}$

Pregledom rezultata vidljivo je da za regularnu, nedistordiranu mrežu konačnih elemenata test daje točne rezultate unutar greške zaokruživanja, dok se za distordiranu mrežu konačnih elemenata pojavljuje prihvatljiva relativna greška.

3.2 Trodimenijski konačni element temeljen na mješovitoj formulaciji

Formulacija konačnog elementa predstavljenog u radu (11) temelji se na postupku izvoda konačnog elementa koji je predstavljen u radu (3). Konačni element se temelji na formulaciji gradijentne elastičnosti koja je detaljno opisana u radu (1). U cilju izbjegavanja zahtjeva za zadovoljavanjem C^1 kontinuiteta, u formulaciju virtualnog rada uvedeni su dodatni stupnjevi slobode ψ_{ij} , koje autori nazivaju oslabljenim deformacijama. Oslabljene deformacije definirane su jednadžbom (6), te u konstitutivnim relacijama zamjenjuju deformacije, dok jednadžba (7) definira gradijente oslabljenih deformacija. Koristeći gradijente oslabljenih deformacija, definira se aproksimacija naprezanja višeg reda pomoću jednadžbe (8)

$$\psi_{ij} - u_{ij} \approx 0_{ij}, \quad (6)$$

$$\eta_{ijk} = \frac{1}{2}(\psi_{jk,i} - \psi_{ik,j}). \quad (7)$$

$$\tau_{ijk,j} = \mu l^2(\eta_{ijk} - \eta_{kji}). \quad (8)$$

Pomoću jednadžbi (6)-(8) moguće je promijeniti osnovne jednadžbe definirane u radu (1) tako da se sekundarna naprezanja zamijene sa oslabljenim naprezanjima. Uvođenje dodatnih veličina u osnovnim jednadžbama formulacije konačnog elementa zahtjeva uvođenje Lagrangeovih multiplikatora ρ (9)

$$\rho_{ik} = -\tilde{\mu}_{jik,j}. \quad (9)$$

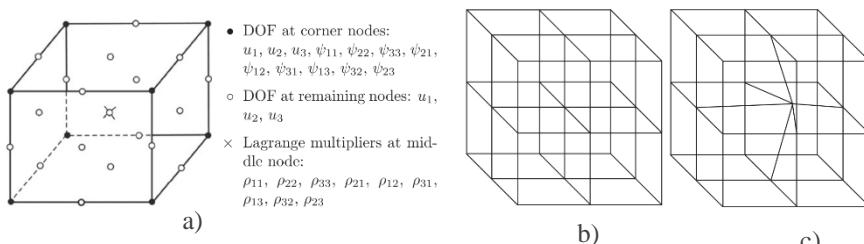
Pomoću promjena uvedenih u jednadžbama (6)-(9) izvode se konačne jednadžbe virtualnog rada u mješovitoj formulaciji

$$\int_{\beta} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - \rho_{jk} \delta u_{k,j}) dV = \int_{\beta} b_k \delta u_k dV + \int_{\partial \beta^{(t)}} t_k \delta u_k dA, \quad (10)$$

$$\int_{\beta} (\tau_{ijk} \delta \eta_{ijk} - \rho_{jk} \delta \psi_{jk}) dV = \int_{\partial \beta^{(s)}} s_{jk} \delta \psi_{jk} dA, \quad (11)$$

$$\int_{\beta} (-\mu_{k,j} + \psi_{jk}) \delta \rho_{jk} dV = 0, \text{ (nema sumiranja po } j \text{ i } k\text{).} \quad (12)$$

Trodimenijski heksaedarski konačni element izведен na temelju mješovite formulacije sastoji se od 27 čvorova i ukupno 162 stupnja slobode. U svim čvorovima su definirani stupnjevi slobode kao pomaci u smjerovima osi koordinatnog sustava. U čvorovima koji se poklapaju s vrhovima uz pomake, definirano je 9 stupnjeva slobode oslabljenih deformacija. U čvoru koji se poklapa s težištem kocke, uz pomake definirano je 9 stupnjeva slobode Lagrangeovih multiplikatora. Izgled konačnog elementa i stupnjevi slobode prikazani su na slici 2 a). Osim na „patch“ testu, konačni element je testiran i pomoću „benchmark“ testa. Mreže konačnih elemenata korištene u „patch“ testu prikazane su na slici 2 b) i 2 c).



Slika 2. a) Čvorovi i stupnjevi slobode, b) nedistordirana mreža, c) distordirana mreža (11)

Jednakost oslabljenih deformacija i gradijenata pomaka strogo je zadana na rubu mreže konačnih elemenata. Rezultati pomaka i oslabljenih deformacija za nedistordiranu i distordiranu mrežu konačnih elemenata daju točne rezultate u središnjem čvoru, te za točke integracije rezultate točne unutar greške zaokruživanja. Konačni element predstavljen u ovom radu pruža

alternativu komplikiranom izvodu konačnih elemenata temeljenih na metodi pomaka, uz zadržavanje dovoljno visoke točnosti.

4 Zaključak

U radu su predstavljena dva trodimenzijska heksaedarska konačna elementa za rješavanje problema gradijentne elastičnosti. Konačni elementi su visoke razine točnosti, no izvod konstitutivnih jednadžbi i funkcija oblika je iznimno komplikiran, što rezultira računalnim algoritmima koji su zahtjevni na računalne resurse. Pošto u literaturi ne postoje drugi trodimenzijski konačni elementi za rješavanje problema gradijentne elastičnosti osim izoparametarskih heksaedara, lako je zaključiti da u ovom području postoje brojne mogućnosti za istraživanje i razvoj novih formulacija trodimenzijskih konačnih elemenata koji zadovoljavaju C¹ kontinuitet, što predstavlja fokus dalnjeg istraživanja.

Finacijska potpora

Ovaj rad je finansirala Hrvatska zaklada za znanost projektom „Multiscale Numerical Modeling of Material Deformation Responses from Macro- to Nanolevel“ (2516).

Literatura

1. Mindlin R. D. Micro-Structure in Linear Elasticity – Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1962; 11: 385-414.
2. Lesičar, T – Multiscale Modeling of Heterogeneous Materials Using Second Order Homogenization – Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, University of Zagreb, 2015.
3. Amanatidou E., Aravas N. Mixed Finite Element for Formulations of strain Gradient Elasticity Problems – Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2002; 191: 1723-1751.
4. Shu J., King W. E., Fleck N. A. Finite Elements for Materials with Strain Gradient Effects – Int . J. Numer. Meth. Engng. 1999; 44: 373-391.
5. Garg N., Han. C-S. A Finite Element Approach for Couple Stress Elasticity – Computational Mechanics. 2013; 52: 709-720.
6. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The Finite Element Method 4th Edition – 1989.
7. Argyris J. H., Scharpf D. W. The TUBA Family of Plate Elements for the Matrix Displacement Method. 1968.
8. Dasgupta S., Sengupta D. A Higher – Order Triangular Plate Bending Element Revisited – Int. J. Numer. Meth. Engng. 1990; 30: 419 – 430.
9. Petera J., Pittman J. F. T. Isoparametric Hermite Elements – Int. J. Numer. Meth. Engng. 1994; 37: 3489-3519.
10. Papanicopoulos S. A., Zervos A., Vardoulakis I. A Three – Dimensional C1 Finite Element for Gradient Elasticity – Int. J. Numer. Meth. Engng. 2009; 77: 1396 – 1415.
11. Zybell L., Mühlich U., Kuna M., Zhang Z. L. A Three – Dimensional Finite Element for Gradient Elasticity Based on a Mixed – Type Formulation – Computational Materials Science. 2012; 52: 268 – 273.

Geometrijski nelinearan gredni konačni element temeljen na objedinjenoj parametrizaciji položaja i rotacija – pregled interpolacijskih varijanti

Gaćeša, M.¹, Jelenić, G.²

Sažetak

U ovome radu predstavljamo prostorni geometrijski nelinearan gredni konačni element temeljen na objedinjenoj parametrizaciji pomaka i rotacija. Kinematičke jednadžbe geometrijski su egzaktne, tj. uzimaju u obzir pojavu velikih pomaka i rotacija.

Orientacija poprečnog presjeka nosača prikazuje se pomoću tzv. orientacijskih ili rotacijskih matrica dimenzija 3×3 koje su eksponencijalnom mapom povezane sa pripadajućim parametrom rotacije. Međutim, to se može generalizirati: i položaje i rotacije može se upisati na određeni način u matricu dimenzija 6×6 . Tu matricu još nazivamo konfiguracijski tenzor jer određuje ukupnu konfiguraciju proizvoljnog poprečnog presjeka nosača. Analogno rotacijama, konfiguracijski tenzor eksponencijalnom je mapom povezan s parametrom konfiguracije. Iako je ovakav pristup elegantniji u smislu da koristi jedinstvenu operaciju za izračun i položaja i orientacija, on sa sobom (upravo zbog te jedinstvene operacije – eksponencijacije u 6D prostoru) nosi određene algoritamske poteškoće.

Ovaj rad zamišljen je kao pregled stanja područja po pitanju interpolacijskih varijanti za konfiguracijski parametar. Razmotrene interpolacije ugraditi će se u vlastiti kod za metodu konačnih elemenata te će se analizirati s obzirom na točnost, brzinu konvergencije, objektivnost mjera deformacije te ovisnost o putanji ka konvergiranome rješenju.

Ključne riječi: parametrizacija pomaka i rotacija, geometrijska nelinearnost, metoda konačnih elemenata, interpolacija ovisna o konfiguraciji

¹ Doc. dr. sc. Maja Gaćeša, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet Rijeka, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmila Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: maja.gacesa@uniri.hr

² Prof. dr. sc. Gordan Jelenić, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet Rijeka, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmila Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

1 Uvod

Tema ovog rada su interpolacijske tehnike kod geometrijski točnih grednih konačnih elemenata proizvoljnog reda sa šest stupnjeva slobode po čvoru (tri pomaka i tri rotacijska parametra). Korištenje tzv. *fixed-pole* pristupa odnosno koncepta konfiguracijskog tenzora (1), omogućuje korištenje šest konfiguracijskih parametara kao čvornih nepoznanica. U čemu je razlika? U prvom pristupu tri pomaka i tri rotacije tretiraju se nezavisno - mehanizam popravka rotacija u iterativnom postupku uključuje korištenje eksponencijalne mape rotacijskog parametra, dok je mehanizam popravka pomaka jednostavno - pribrajanje. U drugom pristupu, šesterodimenzionalni vektor konfiguracija je jedinstveno polje, te se u iteracijskom postupku popravlja jedinstvenom operacijom - eksponencijacijom konfiguracijskog parametra. Važno je napomenuti da su i orientacijske matrice i konfiguracijski tenzori Liejeve grupe tako da se svojstva orientacijskih matrica mogu generalizirati na konfiguracijski tenzor.

Pri rješavanju nelinearnog problema (u ovom slučaju, nelinearnost je geometrijskog podrijetla), potrebno je definirati na koji način će se interpolirati popravci pomaka i rotacija (odnosno, konfiguracija) koji se koriste za izračunati trenutno stanje naprezanja i deformacija u integracijskim točkama. U nastavku predstavljamo nekoliko različitih opcija za interpolaciju iterativnih prirasta konfiguracija, uzimajući u obzir eksponencijalnu vezu između parametra konfiguracije i konfiguracijskog tenzora.

2 Aditivne interpolacije konfiguracijskih parametara

2.1 Interpolacija iterativnih konfiguracija (spinova)

U kontekstu konačnih prostornih rotacija, Simo i Vu-Quoc (2) su predložili ovaj pristup. Ideja je da se interpoliraju *spinovi* (infinitesimalne promjene rotacijskog parametra) između prethodne i trenutne iteracije. Sličan pristup dan je u (3), gdje su korišteni Lagrangeovi polinomi za interpolaciju konfiguracijskih *spinova*.

2.2 Interpolacija inkrementalnih konfiguracija

Interpolaciju inkrementalnih rotacija predložili su Cardona i Geradin (4), dok su Bottasso i Borri (1) isto predložili za konfiguracijske parametre. Ideja je da se Lagrangeovim polinomima interpoliraju konfiguracijski parametri između trenutne iteracije i zadnjeg iskonvergiranog stanja. Ovakva je vrsta interpolacije prirođan odabir za definiranje dinamičkih problema, gdje je vremenska domena diskretizirana na konačan broj vremenskih koraka. U tom smislu, iskonvergirani inkrement konfiguracije odgovara promjeni konfiguracije između dva vremenska koraka.

2.3 Interpolacija totalnih konfiguracija

Interpolacija totalnih rotacija temelji se na interpolaciji rotacija između trenutnog i početnog položaja Lagrangeovim polinomima, što su predložili Ibrahimbegović i suradnici (5). Koliko je do sada poznato, takva interpolacija još nije generalizirana na konfiguracijske parametre, ali planira se izvesti i implementirati u jednom od budućih radova. U slučaju da u postupku rješavanja nema inkremenata bilo koje vrste, totalna je formulacija specijalan slučaj inkrementalne.

3 Interpolacije konfiguracijskih parametara ovisne o konfiguraciji

3.1 Interpolacija relativnih konfiguracija

U kontekstu rotacija, ovakav pristup predložili su Jelenić i Crisfield (6). Ideja ovog pristupa je odvajanje tzv. rotacije krutog tijela (izražena kao rotacija referentnog čvora tog elementa) od relativnih rotacija preostalih čvorova u odnosu na ukupnu rotaciju. Aditivnom interpolacijom samo relativnih rotacija dobiva se invarijantna formulacija te formulacija koja ne pati od ovisnosti o iterativnoj putanji prema konvergiranom rješenju.

U kontekstu konfiguracijskih parametara, isto je napravljeno u (3), čime je, očekivano, postignut isti efekt (invarijantnost, neovisnost o iterativnoj putanji). Zbog velikog broja složenih trigonometrijskih koeficijenata koji se pojavljuju u interpolacijskim funkcijama (generalizirane funkcije oblika), a koje koriste normu konfiguracijskog parametra kao argument, dešavaju se numeričke nestabilnosti. Naime, te funkcije nisu definirane za argument jednak nuli pa su samim time izrazito nestabilne kako se argument približava nuli. Međutim, jednostavno i efektno rješenje ovog problema je korištenje prvih nekoliko članova Taylorove ekspanzije za dane funkcije u slučaju kada je argument relativno malen.

3.2 Implicitna interpolacija

Ovo je relativno nepoznat, ali obećavajući pristup. U kontekstu rotacija predložili su ga Merlini i Morandini (7), a za konfiguracije Sonnevile i suradnici (8). Princip je u suštini sličan prethodnom, uz iznimku što referentni čvor nije unaprijed određen. Štoviše, referentni čvor uopće nije čvor, nego položaj, koji je tek implicitno definiran u smislu rotacijskog (ili konfiguracijskog) tenzora u tom položaju. Ovakva interpolacijska shema je dakle implicitna i podrazumijeva iterativni proces unutar nje same, međutim s dovoljnim proglašenjem mreže, elementi postaju relativno kratki pa se i relativne rotacije između čvorova mogu pretpostaviti kao male što vodi dalnjem pojednostavljenju interpolacije. Zanimljivo je napomenuti da je, u slučaju korištenja dvočvornih elemenata te rotacijskog pseudovektora kao parametra rotacije, ova interpolacija jednaka Jelenićevoj objektivnoj interpolaciji (6). To bi značilo da bi se slična paralela mogla izvesti i između korištenja konfiguracijskog vektora na dvočvornim elementima i objektivne interpolacije predložene u (3).

4 Zaključak

U radu je dan kratki pregled interpolacijskih tehnika za vektorske konfiguracijske parametre kod geometrijski nelinearnih trodimenzionalnih greda. Zbog činjenice da su i rotacije i konfiguracije elementi nelinearne mnogostrukosti tj. liejeve grupe, svojstva rotacija mogu se generalizirati na svojstva konfiguracija, što vrijedi i za koncepte interpolacija. Naglasak je dan na odnos između standardnih tehnika te tehnika ovisnih o konfiguraciji. Potonje su pogodnije jer otklanjaju kako problem neinvarijantnosti mjera deformacije, tako i problem ovisnosti rješenja o konvergencijskoj putanji. Prikazane interpolacije planiraju se ugraditi u kod za metodu konačnih elemenata i kvantitativno ih usporediti.

Zahvale

Ovaj rad je nastao u sklopu HRZZ projekta IP-11-2013-1631 CANFAS, oba autora zahvaljuju Hrvatskoj zakladi za znanost za finansijsku podršku u provođenju projekta.

Literatura

1. Bottasso CL, Borri M. Integrating finite rotations. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 1998;164(3-4):307–31.
2. Simo JC, Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 1986 Oct;58(1):79–116.
3. Gaćeva M. Fixed-Pole Concept in 3D Beam Finite Elements – Relationship to Standard Approaches and Analysis of Different Interpolations [PhD]. Jelenić G, editor. University of Rijeka; 2015.
4. Cardona A, Geradin M. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *Int J Numer Methods Eng.* 1988;26(11):2403–38.
5. Ibrahimbegović A, Frey F, Kožar I. Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations. *Int J Numer Methods Eng.* 1995;38(21):3653–73.
6. Jelenić G, Crisfield MA. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics. *Comput Methods Appl Mech Eng.* 1999;171(1-2):141–71.
7. Merlini T, Morandini M. The helicoidal modeling in computational finite elasticity. Part I: Variational formulation. *Int J Solids Struct.* 2004;41(18-19):5351–81.
8. Sonnevile V, Brüls O, Bauchau OA. Interpolation schemes for geometrically exact beams: A motion approach. *Int J Numer Methods Eng* [Internet]. 2017; Available from: <http://dx.doi.org/10.1002/nme.5548>

Membranski element s rotacijskim stupnjevima slobode

Grbčić, S.¹, Ibrahimbegović, A.² i Jelenić, G.³

Sažetak

U modeliranju složenih sustava metodom konačnih elemenata istovremeno se koriste različiti elementi poput štapova, membrana, ploča i slično. Navedeni elementi izvedeni na temelju klasične (Cauchyeve) teorije kontinuma ne posjeduju uvijek nužno međusobno ekvivalentne stupnjeve slobode što dovodi do nekompatibilnosti elemenata u zajedničkim čvorovima diskretiziranog sustava. Kompatibilnost stupnjeva slobode zajedničkih čvorova je nužna kako bi se osigurala konvergencija točnom rješenju, zbog čega je predložena nova familija elemenata koji posjeduju dodatne, rotacijske stupnjeve slobode.

Počevši od regularizirane miješane varijacijske formulacije kontinuma s nezavisnim rotacijskim stupnjevima slobode i uvođenjem nekonvencionalne obogaćene interpolacije polja pomaka izведен je novi membranski element. Obogaćenjem interpolacije pomaka skupom nekompatibilnih oblika (*incompatible modes*) postiže se visoka točnost u odnosu na analitičke rezultate.

Ključne riječi: metoda konačnih elemenata, membranski element, rotacijski stupnjevi slobode, nekompatibilni oblici

¹ **Sara Grbčić mag. ing. aedif**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet Rijeka, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: sara.grbcic@uniri.hr, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

² **Prof. dr. sc. Adnan Ibrahimbegović**, Université de Technologie de Compiègne / Sorbonne Universités, Laboratoire Roberval, Compiègne, e-mail: adnan.ibrahimbegovic@utc.fr

³ **Prof. dr. sc. Gordan Jelenić, dipl. ing. grad.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

1 Uvod

Potreba za membranskim elementima s rotacijskim stupnjevima slobode proizlazi iz praktičnih inženjerskih problema, poput analize ispunjenih okvira i zidova na stupovima gdje se za modeliranje konstrukcija kombiniraju elementi s različitim stupnjevima slobode po čvoru. U radu je prezentiran membranski element s rotacijskim stupnjevima slobode i nekonvencionalnom interpolacijom pomaka nekompatibilnim oblicima. Nekompatibilni oblici pomaka prvi puta su predstavljeni 1970-ih godina s ciljem eliminiranja posmičnih naprezanja koja se pojavljuju pri čistom savijanju (*eng. shear locking*). (1) Uz modifikacije izvedena je miješana varijacijska formulacija gdje je uvedeno nezavisno polje rotacije. Pravokutni četveročvorni element izведен na modificiranoj miješanoj varijacijskoj formulaciji s nezavisnim poljem rotacije i obogaćenom interpolacijom pomaka pokazao je vrlo bliske rezultate analitičkim rezultatima.

2 Problem rubnih vrijednosti u Cauchyjevoj linearnej elastičnosti

Promatramo problem rubnih vrijednosti opisan sljedećim ravnotežnim jednadžbama:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{skew} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

gdje vektor \mathbf{f} predstavlja vektor vanjskih sila, a $\boldsymbol{\sigma}$ predstavlja Cauchyjev tenzor naprezanja. Svaki tenzor može se zapisati kao zbroj simetričnog i antisimetričnog dijela (2), odnosno:

$$\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{symm} \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{skew} \boldsymbol{\sigma}, \quad \operatorname{symm} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T) \quad \text{i} \quad \operatorname{skew} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^T). \quad (2)$$

Ovdje ne prepostavljamo nužnu simetričnost tenzora naprezanja $\boldsymbol{\sigma}$. Za posljedicu, uvodimo novo nezavisno kinematičko polje, tenzor rotacije $\boldsymbol{\Psi}$, koje je energetski konjugirano s antisimetričnim dijelom tenzora naprezanja. Tenzor deformacija $\boldsymbol{\epsilon}$ jednak je simetričnom dijelu gradijenta pomaka, dok je novo polje rotacije $\boldsymbol{\Psi}$ jednako antisimetričnom dijelu gradijenta pomaka. Kinematičke jednadžbe problema jednake su

$$\boldsymbol{\epsilon} = \operatorname{symm} (\nabla \mathbf{u}) \quad \text{i} \quad \boldsymbol{\Psi} = \operatorname{skew} (\nabla \mathbf{u}), \quad (3)$$

gdje \mathbf{u} predstavlja polje pomaka, a ∇ predstavlja diferencijalni operator nabla (2). Konstitutivna jednadžba definirana je kao

$$\operatorname{symm} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \operatorname{symm} (\nabla \mathbf{u}), \quad (4)$$

gdje \mathbf{C} predstavlja konstitutivni, izotropni tenzor četvrtog reda.

3 Varijacijska formulacija u 3D

Reissner je predložio varijacijsku formulaciju gdje je antisimetrični dio tenzora naprezanja $\operatorname{skew} \boldsymbol{\sigma}$ predstavljen kao Lagrangeov multiplikator, čime je osigurana jednakost nezavisnih rotacija s antisimetričnim dijelom gradijenta pomaka (3). Reisnerov funkcional jednak je

$$\pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\sigma}) = \int_V \left[-\frac{1}{2} \text{symm } \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1} \text{symm } \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \mathbf{u} - \boldsymbol{\Psi}) \right] dV - \pi_{\text{ext}}. \quad (5)$$

Formulacija (5) neprakladna je za numeričku implementaciju. Hughes i Brezzi proveli su analizu konvergencije Reissnerove formulacije i utvrdili da je istu potrebno modificirati kako bi se osigurala stabilnost rješenja (4). Modificirana Reissnerova formulacija jednaka je

$$\pi_y(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\sigma}) = \pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{2} \int_V [\text{skew } \boldsymbol{\sigma} : \gamma^{-1} \text{skew } \boldsymbol{\sigma}] dV, \quad (6)$$

gdje je γ skalar koji predstavlja regularizacijski parametar ovisan o analiziranom problemu. Za izotropnu elastičnost predloženo je da je vrijednost γ jednaka vrijednosti modula posmika (4). Varijacijom modificiranog funkcionala zadovoljavaju se Euler-Lagrangeove jednadžbe (1) – (4) i dobiva se dodatna jednadžba

$$\text{skew } \boldsymbol{\sigma} = \gamma(\text{skew } (\nabla \mathbf{u}) - \boldsymbol{\Psi}). \quad (7)$$

Korištenjem konstitutivne jednadžbe (4) i zamjenom $\gamma^{-1} \text{skew } \boldsymbol{\sigma} = \text{skew } (\nabla \mathbf{u}) - \boldsymbol{\Psi}$ iz jednadžbe (7) modificirani funkcional $\pi_y(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\sigma})$ koji čini bazu za formiranje metode konačnih elemenata se svodi samo na kinematičke varijable:

$$\pi_y(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Psi}) = \frac{1}{2} \int_V [\text{symm}(\nabla \mathbf{u}) : \mathbf{C} \text{symm}(\nabla \mathbf{u}) + (\text{skew } (\nabla \mathbf{u}) - \boldsymbol{\Psi}) : \gamma (\text{skew } (\nabla \mathbf{u}) - \boldsymbol{\Psi})] dV - \pi_{\text{ext}}, \quad (8)$$

4 Interpolacija membranskim elementom s rotacijskim stupnjevima stupnjevima slobode za ravninsko stanje naprezanja ili deformacija

Za diskretizaciju 2D mreže odabrali smo četverokutni konačni element (Q4) s 4 čvora i 3 stupnja slobode po čvoru (horizontalni pomak, vertikalni pomak i rotacija).

1.1 Interpolacija kinematičkih polja

Tenzor rotacije $\boldsymbol{\Psi}$ se u ravnini svodi na jednu komponentu ψ . Odabrana je konvencionalna interpolacija bilinearnim Lagrangeovim funkcijama:

$$\psi \rightarrow \psi^h|_{V^e} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \psi_i, \quad (9)$$

gdje

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta); \quad \xi_i = \pm 1, \quad \eta_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (10)$$

i ψ_i predstavlja rotaciju čvora i . Polje pomaka interpolirano je nekonvencionalno, uključujući nekompatibilne oblike, kako slijedi:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{u}^h|_{V^e} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^2 M_i(\xi, \eta) \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (11)$$

gdje je \mathbf{u}_i vektor pomaka čvora i , $\boldsymbol{\alpha}_i$ vektor interpolacijskih parametara definiran na svakom elementu nezavisno i $M_1(\xi, \eta) = 1 - \xi^2$, $M_2(\xi, \eta) = 1 - \eta^2$ parabolične interpolacijske funkcije. Na osnovi definiranih interpolacija dobivamo deformacije

$$\boldsymbol{\epsilon} = \text{symm} (\nabla \mathbf{u}) \rightarrow \boldsymbol{\epsilon}^h|_{V^e} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}_i \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (12)$$

gdje su matrice \mathbf{B}_i i \mathbf{G}_i

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} & \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial y} \\ \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial y} & \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Kako bi element s nekompatibilnim oblicima pomaka zadovoljio patch test (2), energija deformacije povezana s nekompatibilnim oblicima mora biti jednaka nuli za stanje konstantnog naprezanja, što znači da treba biti zadovoljena sljedeća jednadžba:

$$\int_{V^e} \mathbf{G}_i dV = 0. \quad (14)$$

Kako bi zadovoljili uvjet (14) matrica \mathbf{G}_i treba biti modificirana na sljedeći način (5):

$$\tilde{\mathbf{G}}_i = \mathbf{G}_i - \frac{1}{V^e} \int_{V^e} \mathbf{G}_i dV = 0 \rightarrow \boldsymbol{\epsilon}^h|_{V^e} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^2 \tilde{\mathbf{G}}_i \boldsymbol{\alpha}_i \quad (15)$$

Referentna konfiguracija izoparametarskog elementa s nekompatibilnim pomacima se definira isključivo preko kompatibilnih funkcija oblika, $\mathbf{x}^h|_{V^e} = \sum_{i=1}^{br.elem} N_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_i$, što dalje implicira da se derivacije funkcija nekompatibilnih pomaka računaju na isti način kao funkcije oblika odabrane za izoparametarski element. U ravnini antisimetrični dio tenzora deformacija ima samo jednu komponentu te uvođenjem interpolacije dobivamo izraz

$$\text{skew} (\nabla \mathbf{u}) - \boldsymbol{\psi} = \sum_{i=1}^4 (\mathbf{A}_i \mathbf{u}_i - \mathbf{N}_i \boldsymbol{\psi}_i) + \sum_{i=1}^2 \mathbf{E}_i \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (16)$$

gdje $\mathbf{A}_i = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \quad \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \right)$ i $\mathbf{E}_i = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial y} \quad \frac{\partial M_i(\xi, \eta)}{\partial x} \right)$. Uvođenjem izraza (12) i (16) u funkcional (8) i njegovom minimizacijom dobivamo ravnotežne jednadžbe elementa

$$\mathbf{K}^e \mathbf{d}^e + \mathbf{F}^{eT} \boldsymbol{\alpha}^e = \mathbf{f}^e, \quad (17)$$

$$\mathbf{F}^e \mathbf{d}^e + \mathbf{H}^e \boldsymbol{\alpha}^e = \mathbf{f}^e, \quad (18)$$

gdje

$$\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \{ [\mathbf{B}_i^T] \mathbf{C} [\mathbf{B}_i] + \gamma ([\mathbf{A}_i] - [\mathbf{N}_i])^T ([\mathbf{A}_i] - [\mathbf{N}_i]) \} dV, \quad (19)$$

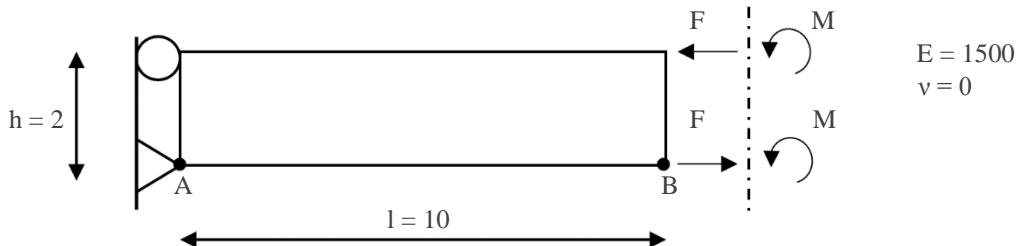
$$\mathbf{F}^e = \int_{V^e} \{ [\mathbf{B}_i^T] \mathbf{C} [\tilde{\mathbf{G}}_i] + \gamma ([\mathbf{A}_i] - [\mathbf{N}_i])^T ([\mathbf{E}_i]) \} dV, \quad (20)$$

$$\mathbf{H}^e = \int_{V^e} \{ [\tilde{\mathbf{G}}_i^T] \mathbf{C} [\mathbf{B}_i] + \gamma [\mathbf{E}_i]^T [\mathbf{E}_i] \} dV, \quad (21)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{V^e} [\mathbf{N}_i] \mathbf{b} dV + \int_{S_\sigma^e} [\mathbf{N}_i] \bar{\mathbf{t}} dS. \quad (22)$$

Prije nego što pristupimo sabiranju konačnih elemenata potrebno je izvršiti statičku kondenzaciju kako bi eliminirali parametre nekompatibilnih pomaka $\boldsymbol{\alpha}^e$ na razini elementa (7). Iz jednadžbe (18) dobivamo $\boldsymbol{\alpha}^e = -\mathbf{H}^{e-1} \mathbf{F}^e \mathbf{d}^e$, zatim uvrštanjem izraza u jednadžbu (17) dobivamo reduciranu matricu krutosti $\tilde{\mathbf{K}}^e = \mathbf{K}^e - \mathbf{F}^{eT} \mathbf{H}^{e-1} \mathbf{F}^e$. Dalje provodimo standardnu proceduru sabiranja, kojom dolazimo do sustava linearnih jednadžbi iz kojih dobivamo vrijednosti čvornih pomaka i rotacija \mathbf{d} . Nakon dobivenih čvornih pomaka možemo na razini elementa izračunati vrijednosti parametara nekompatibilnih pomaka $\boldsymbol{\alpha}^e$ i uvrštanjem u jednadžbu (12) dobivamo polje deformacija $\boldsymbol{\epsilon}^h$. Naprezanja $\boldsymbol{\sigma}^h$ dobivamo iz konstitutivne jednadžbe (4) reducirane na 2D.

5 Numerički primjer



Slika 1. Konzola opterećena čistim savijanjem

Analiziramo konzolu prikazanu na slici 1. opterećenu čistim savijanjem u dva različita slučaja opterećenja. Prvi slučaj opterećenja je opterećenje spregom sile $F=10$, a drugi slučaj koncentriranim momentima $M=10$. Konzola je diskretizirana pravilnom mrežom koja se sastoji od dva pravokutna elementa s četiri čvora. Rezultati u točkama A i B dobiveni membranskim elementom s rotacijskim stupnjevima slobode su prikazani u tablici 1.

Tablica 1. Numerički rezultati čistog savijanje konzole

opterećenje	vertikalni pomak v_B	rotacija ψ_B	naprezanje σ_A
spreg sila F	1.00	0.2	30.00
koncentrirani moment	1.0063	0.2047	30.00
analitičko rješenje	1.00	0.2	30.00

6 Zaključak

Membranski element s rotacijskim stupnjevima slobode pokazao se kao robusan element pomoću kojeg eliminiramo potrebu uvođenja prijelaznih elemenata. S obzirom na odlične performanse ovog elementa predviđeno je ovaku interpolaciju primjeniti u formulaciji alternativnih teorija kontinuuma, što zbog već postojećih rotacijskih stupnjeva slobode olakšava njeno izvođenje, bez potrebe regularizacije kako bi se osigurala stabilnost.

Zahvale

Rezultati prikazani u ovom radu dobiveni su u sklopu rada na projektu IP 1631Hrvatske zaklade za znanost (Configuration-dependent approximation in non-linear finite-element analysis of structures) i stipendije Francuske Vlade.

Literatura

1. Wilson E. L., Taylor R. L, Doherty i Ghaboussi J. Incompatible Displacement Models, Proceedings, ONR Symposium on Numerical and Computer Method in Structural Mechanics, University of Illinois, Urbana, 1971.
2. Ibrahimbegović A., Nonlinear Solid Mechanics: Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods, Springer, London, 2009.
3. Reissner E., A note on variational principles in elasticity, International Journal of Solids and Structures, 1965; 1: 93-95.
4. Hughes T. J. R., Brezzi F. On drilling degrees of freedom. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1989; 72: 105-121.
5. Ibrahimbegović A., Frey F. i Rebora B. Une approche unifiée de la modélisation des structures complexes: les éléments finis avec degré de liberté de rotation, Revue Européene des Eléments. 2015; 2:3: 257-286.
6. Ibrahimbegović A., Nonlinear Solid Mechanics: Theoretical Formulations and Finite Element Solution Methods, Springer, London, 2009.
7. Wilson E. L. The static condensation algorithm, International Journal for Numerical Methods In Engineering, 1974;8: 199-203.

Ispitivanje modela armiranobetonskog okvira sa zidanim ispunom na potresnom stolu

Guljaš, I.¹

Sažetak

Kod armiranobetonskih okvira ispunjenih ziđem, zidani ispun ukrućuje okvir i smanjuje veličinu prvog vlastitog perioda što za posljedicu može imati izraženo ograničavanje ponašanja iskazanog u pomacima pri djelovanju jačih podrhtavanja tla. Istovremeno, dodavanje zidanog ispuna u okvir povećava nastale posmične sile a smanjuje kapacitet katnih pomaka cijelokupne konstrukcije. Povećanje horizontalnih sila i smanjenje kapaciteta pomaka može doprinijeti većoj oštećljivosti ukoliko se dovoljna pozornost ne posveti osiguranju potrebnih aseizmičkih detalja. Pravi je izazov, dakle, kod okvira sa zidanim ispunom, iskoristiti učinke povećane krutosti a da istovremeno povećanje poprečnih sila i narušavanje kapaciteta pomaka ne naškodi njihovom skupnom ponašanju. Dostupna iskustva ukazuju na posmičnu čvrstoću armiranobetonskih stupova kao na „bolnu točku“ takvih konstrukcijskih sustava. Stoga rješenje ovog problema zahtijeva razumijevanje ponašanja opečnog ziđa i armiranobetonskih elemenata izloženih slučajnom promjenjivom dinamičkom djelovanju. Izazov je to s kojim se samo ispitivanje pod što je moguće realnijim uvjetima može suočiti a da pri tom doprinese pouzdanijoj analizi i uopćavanju njenih rezultata. Stoga je svrha ovog istraživanja svojevrsno pozicioniranje ovog kompozita među nosivim konstrukcijskim sustavima.

Ovaj rad opisuje iskustva u provedbi eksperimenta na potresnoj platformi u okviru znanstveno-istraživačkog projekta FRAMA (FRAMed-Masonry) financiranog sredstvima Hrvatske zaklade za znanost u potresnom laboratoriju Instituta za zemljotresno inženjerstvo i inženjersku seismologiju u Skopju, Republika Makedonija. Dva modela s dvije različite vrste zidanog ispuna bila su izložena simuliranim podrhtavanjima tla nominalnih vršnih ubrzanja između 0,05g i 1,40g. Seizmičko ispitivanje trokatne okvirne konstrukcije sa zidanim ispunom izrađene u mjerilu 1:2,5 omogućilo je analizu ponašanja ovih složenih sustava pri različitim intenzitetima seizmičke uzbude. Početne faze ispitivanja s malim vršnim ubrzanjima rezultirale su pojavom samo nekoliko manjih pukotina u zidnom ispunu dok su završne faze ispitivanja obilježile slom konstrukcije budući je većina nearmiranih zidova prvog i drugog kata bila znatno oštećena, uz gotovo zanemariva oštećenja okvira. Vertikalna stabilnost konstrukcije nije bila ugrožena.

Ključne riječi: AB okvir sa zidanim ispunom, složeni konstrukcijski sustav, uokvireno ziđe, seizmičko ponašanje, ispitivanje na potresnoj platformi

¹ Prof. dr. sc. Ivica Guljaš, dipl. ing. grad., Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski fakultet Osijek, Zavod za tehničku mehaniku, Vladimira Preloga 3, 31000 Osijek, e-mail: iguljas@gfos.hr

1 Stanje područja

Projektiranje i izvedba armiranobetonskih zgrada sa zidnim ispunom uobičajeni su u europskoj inženjerskoj praksi, osobito u seizmički aktivnim južnim područjima (1). Utjecaj zidnog ispuna na potresno ponašanje cijelokupne konstrukcije je vrlo bitno ali i dvojbeno. Naime, ispun vrlo često stradava čak i pri umjerenim potresima: njegovo izrazito krto ponašanje te slaba ili nikakva duktilnost dovode do oštećenja u rasponu od sitnih pukotina do potpunog sloma, ispadanja te dekompozicije cijelog sustava (slika 1). S druge strane, neosporan je i njihov pozitivan doprinos potresnom ponašanju objekata u smislu smanjivanja katnih pomaka uz zadržavanje maksimalnog posmika dva i više puta u usporedbi s objektima s praznim okvirima, naravno uz uvjet da su ispoštivana pravila njihovog oblikovanja.



Slika 1. Oštećenja zidnog ispuna (L'Áquila EQ, 2009)

Pregled recentne literature ukazuje na izostanak suglasja o međudjelovanju ab okvira i ugrađenog opečnog ziđa. Dok pojedini istraživači navode da je zidni ispun utjecao na pojavu sloma brojnih objekata (Aschheim, 2000; Sezen et al., 2003, Kyriakides, 2008) i negativno djelovao na ponašanje okvira (Murty et al., 2006), istovremeno ima onih koji ističu pozitivan doprinos zidnih panela (Akin, 2006; Hassan, 1996; Fardis i Panagiotakos, 1997; Henderson, 2002; Mehrabi et al., 1997). Možda su upravo Fajfar i Dolšek (2008) dotakli srž ovog problema rekovši: „Zidni ispun može imati pozitivan doprinos na seizmičko konstrukcijsko ponašanje pod uvjetom da su pravilno raspoređeni po objektu i ne dovode do posmičnog sloma ab stupova.“ (2).

Upravo ovakva oprečna mišljenja istraživača rezultirala su svojevrsnom „dekonstrukcijom“ uokvirenog ziđa u regionalnim građevinskim pravilnicima na način da su usmjereni na upozorenja o mogućim posljedicama ove interakcije ali su nijemi s obzirom na preporuke i ograničenja njihove primjene (3). S namjerom još boljeg razumijevanja ponašanja ovakvih složenih konstrukcijskih sustava, prof.dr.sc. Vladimir Sigmund s Građevinskog fakulteta Osijek, pokrenuo je eksperimentalno istraživanje potresnog ponašanja modela uokvirenog ziđa na potresnoj platformi u okviru znanstveno-istraživačkog projekta FRAMA (FRAMed-Masonry) financiranog sredstvima Hrvatske zaklade za znanost u potresnom laboratoriju Instituta za zemljotresno inženjerstvo i inženjersku seismologiju u Skopju, Republika Makedonija. Eksperimentalno ispitivanje postavljeno je s ciljem traženja odgovora na nekoliko otvorenih pitanja: 1) odnos između kapaciteta pomaka i svojstava okvira s ispunom koja ga kontroliraju; 2) stabilnost zidnog ispuna od opeke izloženog inercijskim silama van ravnine; 3) utjecaj otvora u zidnom ispunu na odziv uokvirenog ziđa.

2 Ispitivanje modela okvirenog zida u mjerilu 1:2,5 na potresnoj platformi

2.1 Modelske konstrukcije

Definiranje modelskih konstrukcija postavljeno je s ciljem određivanja mehanizma posmičnog sloma stupova. Pri tome je, proučavanjem sličnih eksperimentalnih ispitivanja i iskustava na terenu, definiran projektni zadatak na način da odgovori sljedećim bitnim zahtjevima: 1) ispitivanje uzoraka u dinamičkim uvjetima (simulacija podrhtavanja tla), 2) veći broj etaža – barem tri, kako bi se uključio utjecaj promjene uzdužnih sila na ponašanje ab okvira s ispunom, 3) korištenje materijala i izmjera što bližih prototipu, 4) izvedba srednjeg stupa modelske konstrukcije (stup između dva zida), 5) ograničenje tlorisa modelske konstrukcije na 5×5 m te njegove težine na 45 t s obzirom na kapacitete raspoložive potresne platforme.

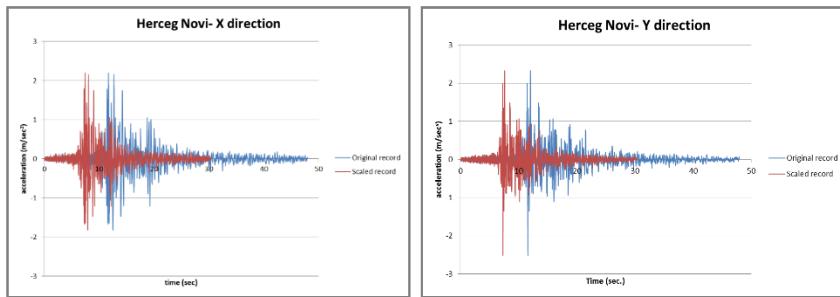


Slika 2. Dvije modelske konstrukcije: MODEL 1 I MODEL 2

Projektni zadatak rezultirao je odabirom trokatne armiranobetonske okvirne konstrukcije sa zidnim ispunom s dva raspona u prepostavljenom smjeru S-J i jednim rasponom u smjeru I-Z. Tlorisne izmjere modela su $2,78 \times 4,66$ m dok je ukupna visina modelske konstrukcije 3,9m. Model 1 je ab okvir sa zidnim ispunom od šupljih blokova dok je Model 2 ab okvir sa zidnim ispunom od pune opeke.

2.2 Program ispitivanja i potresno opterećenje

Za potresno opterećenje odabran je zapis podrhtavanja tla zabilježen tijekom potresa u Herceg Novom (Crna Gora) od 15. travnja 1979. godine (slika 3) magnitudo 6,9 i dubine hipocentra od 12 km. Zapis je s obzirom na umanjeni model skaliran po vremenu faktorom $\sqrt{2,5}$.



Slika 3. Vremenski zapisi ubrzanja odabranog potresa

Program ispitivanja modelskih konstrukcija sastojao se od nekoliko faza kako bi se omogućilo praćenje sigurnosti i ponašanja ab okvira s ispunom u linearnom i nelinearnom području. Sukladno tome, eksperiment su obilježile dvije osnovne faze:

1. Ispitivanja rezonantnom frekvencijom s ciljem određivanja dinamičkih svojstava modela prije, tijekom i na kraju seizmičkog ispitivanja te praćenja degradacije krutosti modela pojavom i širenjem mikro i makro pukotina tijekom testa;
2. Seizmičko ispitivanje pomoću odabranog zapisa podrhtavanja tla sve do prihvatljivo oštećenog stanja. Ispitivanje je izvedeno u nekoliko koraka sa stalnim prirastom intenziteta potresa (0,05g; 0,1g, 0,2g, 0,3g, 0,4g, 0,6g, 0,7g, 0,8g, 1,0g, 1,2g, 1,4g) a u cilju dobivanja odziva konstrukcije u linearnom području te definiranja početnih pukotinskih stanja, razvoja mehanizma otkazivanja nosivosti i mogućeg sloma modela. Na taj način je obuhvaćeno cijelokupno seizmičko ponašanje konstrukcije počev od linearog područja preko pojave prvih pukotina u zidovima pa sve do prihvatljivih obilježja mehanizma sloma.

2.3 Postavljanje mjernih instrumenata

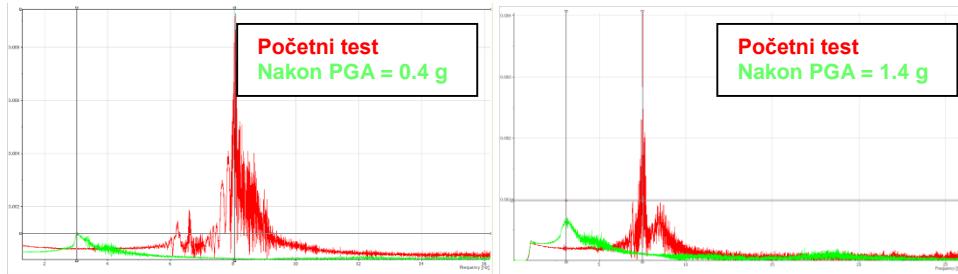
Odziv modela konstantno je praćen sustavom kojeg su činili središnji sustav za prikupljanje podataka velikim brzinama, 20 akcelerometara, 20 mjerača pomaka (LVDT-a), 4 linearne potenciometra i 12 mjernih traka kojima su dobiveni podaci o ubrzanjima točaka pojedinih etaža u nekoliko točaka, relativnim pomacima i deformacijama te relativnim deformacijama i naprezanjima u odabranim točkama (4).

3 Rezultati mjerena i opažanja

Eksperimentalno ispitivanje modelnih konstrukcija provedeno opisanom opremom čije su komponente činile povezanu integriranu cjelinu sastojalo se od generiranja odabranog podrhtavanja tla, mjerena i snimanja karakterističnih vrijednosti vibracija i dinamičkog ponašanja modela te obrade i prezentacije dobivenih rezultata mjerena.

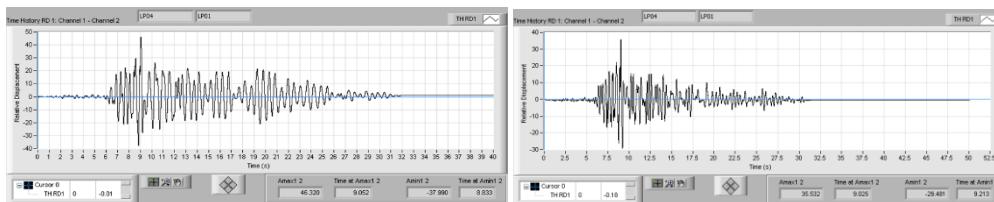
Prvi korak ispitivanja bilo je definiranje dinamičkih svojstava modela čime su dobivene važne informacije o njihovim stvarnim krutostima (vlastitim frekvencijama). Dominantna (prva) vlastita frekvencija Modela 1 u uzdužnom smjeru u početnom (neoštećenom) stanju bila je 8,785 Hz da bi se nakon nekoliko serija seizmičkih testova ona smanjila na 3,047 Hz, što ukazuje na reduciranje početne krutosti modela uslijed oštećenja, prvenstveno zidnog ispuna. Kod Modela

2, početna je frekvencija bila 7,51 Hz da bi završetkom ispitivanja (nakon 1,4g) ona pala na veličinu od 3,11 Hz, uslijed istih razloga kao i kod prethodnog modela.



Slika 4. Izmjerene frekvencije Modela 1 i Modela 2

Relativni pomaci Modela 1 i Modela 2, definirani razlikom izmjerениh pomaka vrha i dna modela prikazani su na slici 5.



Slika 5. Relativni pomaci Modela 1 (PGA=0,4g) i Modela 2 (PGA=1,2g) u mm

Nakon svakog pojedinačnog testa izvršena je vizualna inspekcija nastalih oštećenja. Generalna ocjena ponašanja oba modela može se svesti na nekoliko zajedničkih zaključaka:

- Prvih nekoliko eksperimenata s umjerenim vršnim ubrzanjima prouzročili su samo nekoliko manjih pukotina;
- Posljednji testovi u nizu doveli su do gubitka kompozitnog djelovanja s obzirom da su gotovo svi zidovi donja dva kata bili teško oštećeni.



Slika 6. Oštećenja zidnog ispuna Modela 1

- Armiranobetonski okvir doživio je samo nekoliko manjih / zanemarivih oštećenja, uglavnom koncentriranih na gredama i jako armiranim čvorovima. Vertikalna stabilnost konstrukcije nije bila ugrožena.



Slika 7. Oštećenja zidnog ispuna Modela 1

Skupovi rezultata dobiveni nakon svake opisane grupe ispitivanja i primjenom različitih instrumenata još su u fazi "dotjerivanja" tj. pripreme za daljnju obradu. Ipak, preliminarni rezultati pokazuju da zidani ispun ima značajan utjecaj na ponašanje armiranobetonskog okvira osobito u područjima niske i umjerene seizmičnosti. Taj utjecaj nestaje kod visokih intenziteta.

Zahvale

Istraživanja prikazana u ovom radu provedena su u sklopu istraživačkog projekta „Frame-masonry composites for modelling and standardization – **FRAmed-Masonry**“ potpomognutog sredstvima Hrvatske zaklade za znanost. Također, u ime svih istraživača na ovom projektu, velika zahvala izuzetnom znanstveniku, voditelju projekta prof.dr.sc. Vladimиру Sigmundu.

Literatura

1. Zovkić, J., Sigmund, V., Guljaš, I. Cyclic testing of a single bay reinforced concrete frames with various types of masonry infill. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. Volume 42, Issue 8, pages 1131-1149, 10. July 2013.
2. Dolšek M, Fajfar P (2008) The effect of masonry infills on the seismic response of a four-storey reinforced concrete frame—a deterministic assessment. *Eng Struct* 30(7): 1991–2001.
3. EN 1998: (2004). Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance. Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings, 2004.
4. Necevska-Cvetanovska G., Apostolska R., Shendova V., Stojanoski B., Zurovski A. (2015). Frame-masonry composites for modelling and standardizations (FRAmed-Masonry). Report IZIIS 2015-31.

Numeričko modeliranje stvaranja tromba u analizi rasta abdominalne aneurizme

Horvat, N.¹, Krizmanić, S.², i Karšaj, I.³

Sažetak

Većina aneurizmi abdominalne aorte (AAA) sadrži intraluminalni tromb (ILT) nataložen na mjestu proširenja stijenke. Pokazano je da ILT ima značajan biokemijski i mehanički utjecaj na stijenu aorte i stoga je bitno modelirati njegovo stvaranje i utjecaj u analizi rasta i promjene strukture (*growth and remodeling*, G&R) aorte.

U ovom radu razvijen je algoritam za spajanje G&R analize AAA pomoću konačnih elemenata i simulacije strujanja krvi pomoću konačnih volumena. Algoritam radi tako da nakon određene promjene u geometriji aneurizme (npr. određeno povećanje najvećeg promjera) zaustavlja G&R analizu te pokreće simulaciju strujanja krvi na trenutnoj geometriji aneurizme. Simulacija strujanja izračunava vremenski osrednjeno posmično naprezanje na stijenci i na mjestu gdje je ono manje od granične vrijednosti, algoritam dodaje sloj konačnih elemenata tromba te nastavlja G&R analizu. Tijekom jedne G&R analize pokreće se više simulacija strujanja krvi, pri čemu se G&R analiza odvija na vremenskoj skali u godinama, a simulacija strujanja krvi u sekundama.

Konačni elementi s ugrađenim G&R modelom omogućuju nam analizu razvoja fuziformne i sakularne aneurizme, pri čemu uz pomoć razvijenog algoritma možemo dodatno modelirati stvaranje i rast tromba te analizirati njegov biokemijski i mehanički utjecaj na stijenu aorte.

Ključne riječi: abdominalna aneurizma, rast i restrukturiranje, metoda konačnih elemenata, hemodinamika, metoda konačnih volumena

¹ **Nino Horvat, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: nino.horvat@fsb.hr

² **Doc. dr. sc. Severino Krizmanić, dipl. ing.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: severino.krizmaic@fsb.hr

³ **Izv. Prof. dr. sc. Igor Karšaj, dipl. ing.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: igor.karsaj@fsb.hr

1 Uvod

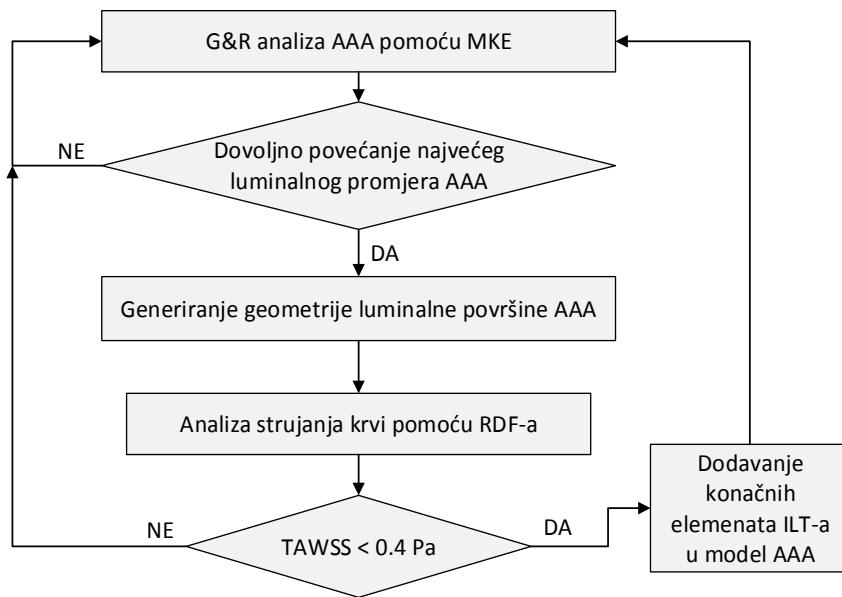
Aneurizma abdominalne aorte (AAA) je lokalno i trajno proširenje infrarenalne aorte koje nastaje kao posljedica neravnoteže u proizvodnji i razgradnji izvanstanične matrice aorte. Većina AAA sadrži intraluminalni tromb (ILT) nataložen na mjestu proširenja stijenke. Tromb je smjesa fibrina, krvnih stanica i proteina te produkata razgradnje fibrina. Istraživanja pokazuju da ima značajan biokemomehanički utjecaj na stijenu aorte te na tijek razvoja aneurizme (1). Unatoč tome, većina numeričkih modela ne uključuje ILT i njegov utjecaj kod modeliranja rasta i promjene strukture (*growth and remodeling*, G&R) aorte. Virag et al. (2), razvili su numerički model intraluminalnog tromba s biokemijskim i mehaničkim utjecajem na stijenu aorte te pokazali važnost njegovog modeliranja u G&R analizi. Međutim, koristili su idealizirani cilindrični model aorte i ILT je dodavan pod pretpostavkom konstantnog luminalnog promjera. Obično, ILT se ne akumulira istovremeno s proširenjem aorte i ne pokriva uvijek čitavu površinu proširenja. Jedan od parametara koji se može koristiti za predviđanje akumulacije tromba je vremenski osrednjeno posmično naprezanje na stijenci (TAWSS), što je prikazano u (3) i (4).

U ovom radu opisana je razvijena metoda za povezivanje G&R modela aneurizme s dodanim itraluminalnim trombom, s analizom strujanja krvi. Analiza strujanja koristi se za računanje TAWSS i za predviđanje mesta i vremena akumulacije tromba. Za modeliranje aneurizme koristimo metodu konačnih elemenata. Za razliku od semi-analičkih metoda koje mogu dati rješenje za cilindrični model aneurizme, upotrebom konačnih elemenata omogućena nam je analiza osno-simetričnog i nesimetričnog 3D modela AAA.

2 Metodologija

Analiza rasta i restrukturiranja aorte i pripadna analiza strujanja krvi, izvode se u iterativnoj vremenskoj petlji, pri čemu se G&R simulacija odvija na vremenskoj skali u godinama, a simulacija strujanja na vremenskoj skali u sekundama. Tijekom jedne G&R analize pokreće se više analiza strujanja krvi. Algoritam za spajanje simulacija ilustriran je na slici 1.

G&R analiza počinje od zdrave aorte čija je početna geometrija ravni cilindar. Nastanak aneurizme potaknut je lokalnom razgradnjom elastina, pri čemu je razgradnja modelirana pomoću Gaussove prostorno-vremenske funkcije. Za fuziformnu aneurizmu gubitak elastina ovisi o vremenu i aksijalnoj položaju, dok za sakularnu aneurizmu ovisi i o cirkularnom položaju. Nakon određene promjene u geometriji aorte (npr. dovoljno povećanje najvećeg promjera), generira se geometrija luminalne površine za analizu strujanja krvi. Na temelju TAWSS, dobivenog iz analize strujanja, određuje se vrijeme i mjesto akumulacije ILTa. Kako je trenutno naš fokus na razvoju algoritma za spajanje analiza i na metodi za dodavanje dodatnih konačnih elemenata u model tijekom simulacije, koristimo jednostavnu pretpostavku prema kojoj se tromb akumulira kad je TAWSS manji od 0,4 Pa. Novi konačni elementi ILTa dodani su na deformiranu geometriju i u trenutku dodavanja su bez deformacija i naprezanja. Na njih su prema potrebi nametnuti rubni uvjeti simetrije, a tlak je s površine aorte premješten na površinu tromba. Nakon dodavanja, nastavlja se G&R analiza do ponovnog pokretanja analize strujanja (npr. nakon dovoljnog dodatnog povećanja najvećeg promjera).



Slika 1. Algoritam za spajanje analize rasta i restrukturiranje (G&R) AAA i analize strujanja krvi

2.1 Modeliranje rasta i restrukturiranja aorte (G&R)

Za modeliranje aorte te njezinog rasta i restrukturiranja, korišten je numerički model opisan u (5). Model koristi teoriju spregnutih smjesa prema kojoj su svi konstituenti (u slučaju aorte to su elastin, kolagen i mišićna vlakna) ograničeni na zajedničko gibanje, ali svaki od njih može posjedovati vlastito stanje naprezanja. Također, u promatranom trenutku, smjesa se sastoji od konstituenata, koji su proizvedeni u različitim vremenskim trenutcima u prošlosti i svaki od njih ima zasebni i drugačiji gradijent deformiranja. Numerički model je implementiran u programski paket za konačne elemente FEAP preko rutina za nove materijalne modele. Za postizanje nestlačivosti korištena je Augmented Lagrange metoda.

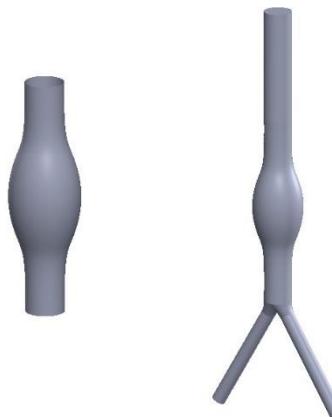
2.2 Model intraluminalnog tromba

Kako je u ovom radu, naglasak na razvoju algoritma i metode za dodavanje novih konačnih elemenata tromba u numerički model aorte, korišten je postojeći Neo-Hooke materijalni model u FEAPu. Time ILT ima mehanički utjecaj na stijenu aorte, ali ne i biokemijski. Sljedeći korak je implementacija materijalnog modela iz (2), koji ima mehanički i kompleksni biokemijski utjecaj tromba, u FEAP.

2.3 Analiza strujanja krvi

Analize strujanja krvi napravljene su pomoću računalne biblioteke OpenFOAM. Da bi izbjegli utjecaj rubnih uvjeta, geometrija modela je produžena na ulaznoj strani te je dodano račvanje s ilijskim arterijama na izlaznoj strani, kao što je za jedan slučaj prikazano na slici 2. Za slučaj

fuziformne aneurizme, zbog osnosimetričnosti modela, za analizu je korištena samo jedna četvrtina modela, a mreža se sastojala od cca 50000 većinom heksaedarskih elemenata. Na ulazu je kao rubni uvjet korišten pulsirajući, parabolični profil brzine na temelju (6). Krv je modelirana pomoću BirdCarreau modela kao nenewtonski fluid te je pretpostavljeno laminarno strujanje. Analiza je napravljena za 5 srčanih ciklusa, pri čemu je za računanje TAWSS gledan samo peti ciklus kad je rješenje uspostavilo cikličnost. Za osnosimetrični model fuziformne aneurizme, posmično naprezanje je dodatno i cirkularno osrednjeno.

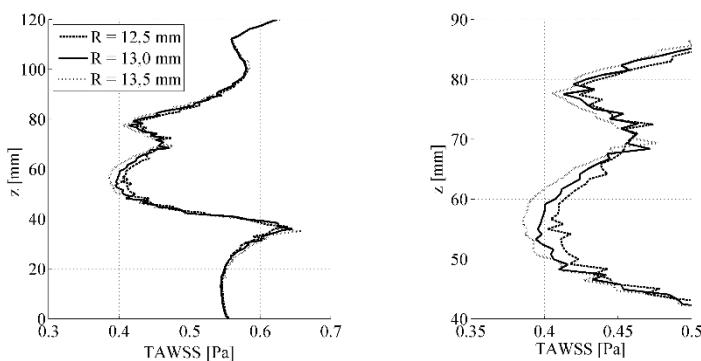


Slika 2. Geometrija dobivena iz G&R analize fuziformne aneurizme (lijevo) i geometrija korištena za analizu strujanja krvi s produženjem na gornjoj strani te račvanjem i ilijačnim arterijama na donjoj strani.

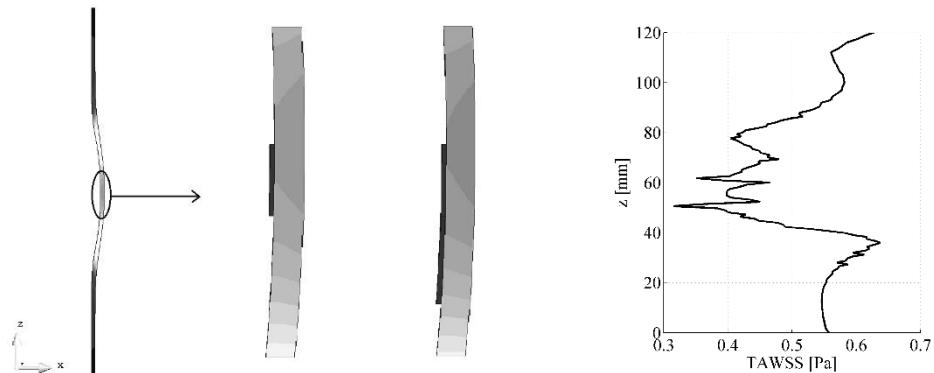
3 Rezultati

Razvijeni algoritam za dodavanje ILTa može se primijeniti jednako na nesimetrični model sakularne aneurizme, kao i na osnosimetrični model fuziformne aneurizme. U nastavku je prikazano dodavanje tromba na jednom slučaju fuziformne aneurizme.

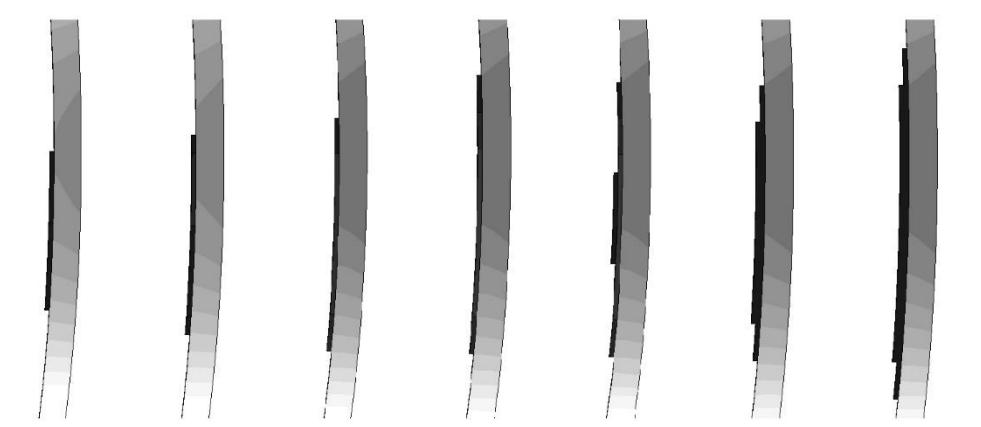
Kao što je vidljivo na slici 1., prvo se pokreće G&R simulacija aorte, pri čemu je početna geometrija ravni cilindar. Zbog lokalne razgradnje elastina, počinje se stvarati izbočenje na aorti koje se s vremenom širi. Za svako povećanje najvećeg polumjera od 0,5 mm, napravljena je analiza strujanja krvi kako bi se ustanovilo kod kojeg polumjera TAWSS na nekom dijelu počinje biti ispod 0,4 Pa. Iz dijagrama na slici 3. vidimo da je to kod slučaja najvećeg promjera proširenja aorte od 13 mm, na visini modela od 52 mm do 59 mm. Nakon tog, na tom dijelu modela, dodan je sloj konačnih elemenata tromba. Radi manje numeričke nestabilnosti modela, elementi su dodani u dva koraka kao što je prikazano na slici 4. lijevo. Iz rezultata naknadne analize strujanja (slika 4. desno) vidimo da je osrednjeno naprezanje manje od granične vrijednosti na rubovima sloja tromba pa je u slijedećem koraku sloj proširen s dodatnim elementima. Slika 5. prikazuje nekoliko dodavanja naknadnih slojeva elemenata prilikom daljnog rasta aneurizme.



Slika 3. Cirkularno osrednjeno TAWSS po visini osnosimetričnog modela fuziformne aneurizme (slika 2. lijevo) za različite veličine najvećeg promjera proširenja, bez ILTa.



Slika 4. Dodavanje prvog sloja konačnih elemenata ILT-a (lijevo). Raspodjela TAWSS nakon dodavanja prvog sloja ILT-a (desno).



Slika 5. Vremenski prikaz dodavanja slojeva tromba na osnovi rezultata strujanja krvi.

4 Zaključak

U ovom radu predstavljena je metoda za spajanje G&R analize AAA s analizom strujanja krvi, pri čemu se iz analize strujanja određuje vrijeme i mjesto dodavanja intraluminalnog tromba. Ovakav način dodavanja ILT je dobar korak naprijed u odnosu na dodavanje pod pretpostavkom konstantnog lumena. Upotreba konačnih elemenata omogućuje analizu 3D modela aneurizmi, a razvijena metoda za dodavanje novih konačnih elemenata za vrijeme simulacije na deformiranu geometriju modela, može se koristiti za dodavanje ILT i pod drugačijim pretpostavka. Primjerice, uz vremenski osrednjeno posmično naprezanje, dodatno se može promatrati potencijal aktivacije trombocita. Također mogu se koristiti statistički podaci dobiveni iz analize pacijenata za određivanje vremena i mjesta akumulacije tromba. Trenutno, dodani ILT ima samo mehanički utjecaj na stijenu aorte pa je slijedeći korak implementacija biokemijskog utjecaja u konačne elemente.

Zahvala

Ovaj rad je financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom IP-2014-09-7382.

Literatura

1. Wilson JS, Virag L, Di Achille P, Karsaj I, Humphrey JD. Biochemomechanics of intraluminal thrombus in abdominal aortic aneurysms. *J Biomech Eng.* 2013;135(2):21011.
2. Virag L, Wilson JS, Humphrey JD, Karšaj I. A Computational Model of Biochemomechanical Effects of Intraluminal Thrombus on the Enlargement of Abdominal Aortic Aneurysms. *Ann Biomed Eng.* 2015;43(12):2852–67.
3. Basciano C, Kleinstreuer C, Hyun S, Finol EA. A relation between near-wall particle-hemodynamics and onset of thrombus formation in abdominal aortic aneurysms. *Ann Biomed Eng.* 2011;39(7):2010–26.
4. Achille P Di, Tellides G, Figueroa CA, Humphrey JD, A PRS, Achille P Di, et al. A haemodynamic predictor of intraluminal thrombus formation in abdominal aortic aneurysms A haemodynamic predictor of intraluminal thrombus formation in abdominal aortic aneurysms. 2014;(October).
5. Karšaj I, Sorić J, Humphrey JD. A 3-D framework for arterial growth and remodeling in response to altered hemodynamics. *Int J Eng Sci.* 2011;48(11):1357–72.
6. Olufsen MS, Peskin CS, Kim WY, Pedersen EM, Nadim A, Larsen J. Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structured-tree outflow conditions. *Ann Biomed Eng.* 2000;28(11):1281–99.

Utjecaj numeričke mreže na opstrujavanje oko pojednostavljenog modela automobila

Hreljac, I.¹, Čarija, Z.² i Lučin, B.³

Sažetak

Veći broj eksperimentalno dobivenih rezultata mjerena za opstrujavanje oko pojednostavljenog modela automobila (Ahmed body) dostupan je u literaturi. Poseban naglasak je na promjeni nagiba stražnjeg kraja modela čime se značajno mijenja karakter strujanja fluida. U radu su napravljene numeričke simulacije čiji rezultati su uspoređeni s mjerениm rezultatima iz literature kako bi se ispitao utjecaj numeričke mreže na točnost rješenja turbulentnih modela korištenih u software-u FLUENT.

S obzirom da se radi o složenom turbulentnom strujanju, potrebno je pravilno prilagoditi numeričku mrežu budući da značajno utječe na vrijeme trajanja proračuna kao i na točnost rezultata. Veći broj elemenata numeričke mreže, ukoliko su raspoređeni na pravilan način, povećava točnost rezultata, ali značajno povećava vrijeme trajanja proračuna.

Promatran je utjecaj smještaja i veličine volumnih elemenata strukturirane i nestrukturirane mreže na način da se minimizira broj elemenata numeričke mreže i time smanji vrijeme potrebno za izračun simulacije, a postigne zadovoljavajuću točnost rješenja, tj. odstupanje od mjerenih rezultata. Utjecaj numeričke mreže ispitana je za različite turbulentne modele.

Ključne riječi: numerička mreža, CFD, turbulentni modeli, Ahmed body

¹Ivana Hreljac, mag. ing. mech., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: ivana.hreljac@riteh.hr

²Izv. prof. dr. sc. Zoran Čarija, dipl. ing., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: zoran.carija@riteh.hr

³Bože Lučin, mag. ing. mech., KvarnerCAD d.o.o., Dalmatinskih Brigada 24, 51211 Matulji, e-mail: boze.lucin@riteh.hr

1 Uvod

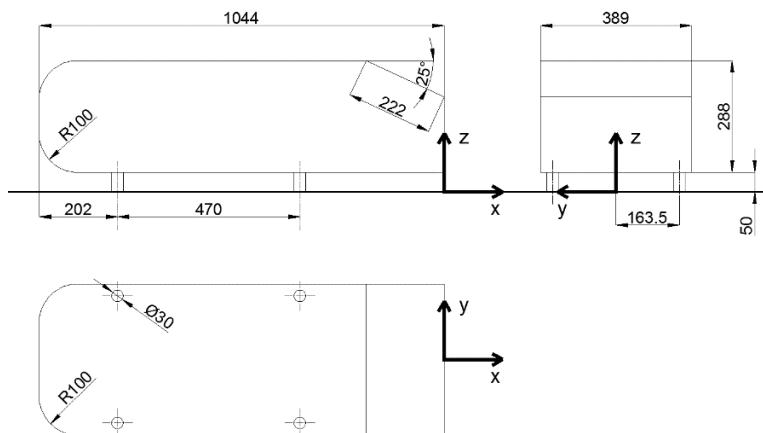
Pojednostavljeni model automobila, poznat i kao „Ahmed body“ prvi puta je opisan 1984. godine, a naziv je dobio po svom autoru S. R. Ahmedu. (1) Karakteristika modela je da promjenom nagiba stražnjeg dijela automobila dolazi do vrtloženja, a nakon kuta većeg od 30° dolazi do potpunog odvajanja fluida. Zbog jednostavne izvedbe geometrije automobila u literaturi je dostupan veći broj eksperimentalnih ispitivanja za različite nagibe stražnje površine. Na taj način rezultati dobiveni računalnim simulacijama mogu se validirati usporedbom s eksperimentalnim rezultatima.

U ovom radu analiziran je utjecaj numeričke mreže i različitih turbulentnih modela na rezultate dobivene pomoću numeričkih simulacija koji su uspoređeni s eksperimentalnim rezultatima kako bi se optimirala numerička mreža kod problema opstrujavanja oko tijela.

2 Postavke simulacije

Geometrija je izrađena za pojednostavljeni model automobila pri kutu stražnjeg nagiba od 25° te je nepromjenjiva za sve računalne simulacije. Za nestrukturiranu mrežu korištena je geometrija s uključenim nožicama na kojima je postavljen model, dok je za izradu strukturirane mreže, zbog pojednostavljenja izrade, korištena geometrija bez nožica.

Za proračunsku domenu strujanja fluida definirana je duljina domene od $8L$ ($L = 1,044$ m što predstavlja duljinu automobila) pri čemu $2L$ ispred automobila i $5L$ nakon automobila, širina domene L i visina domene $2L$. Navedena dimenzija širine se odnosi na polovicu (simetriju) domene zbog simetričnosti geometrije automobila. Završetak automobila je postavljen u ishodište koordinatnog sustava, dok se automobil nalazi u negativnom dijelu osi x što je vidljivo na slici 1. Brzina strujanja fluida u domeni postavljena je na 40 m/s, zidovi domene koji predstavljaju zidove zračnog tunela definirani su kao stijenke na kojima nema trenja, a korišteni su *k-epsilon standard*, *k-epsilon realizable*, *k-omega standard* i *k-omega SST* turbulentni modeli u komercijalnom rješavaču FLUENT. U simulacijama u kojima se promatrao utjecaj numeričke mreže korišten je *k-epsilon standard* model.



Slika 1. Geometrija modela s dimenzijama i postavljenim koordinatnim sustavom

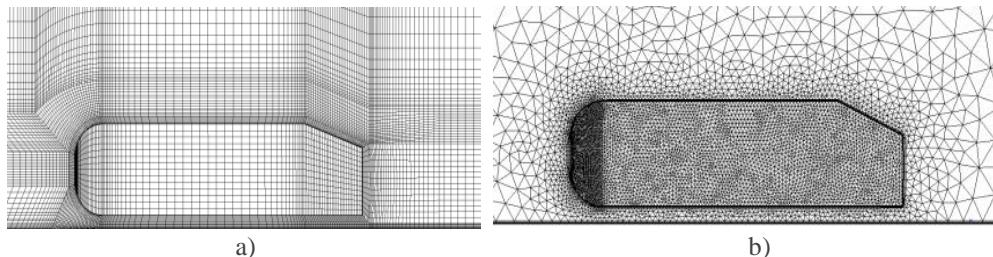
2 Postavke i utjecaj numeričke mreže

Kako bi se ispitao utjecaj numeričke mreže izrađene su strukturirane i nestrukturirane mreže s podjednakim brojem elemenata. Kao mjera odstupanja simulacije od mjerjenih rezultata napravljena je usporedba koeficijenata otpora na prednjem kraju, stražnjem kraju, skošenju te cijelokupnog koeficijenta otpora na automobilu. (1) Usporedba s mjerenim rezultatima napravljena je za numeričke mreže s 50 000, 100 000, 250 000 i 500 000 elemenata. Eksperimentalni rezultati su prikazani u tablici 1 i služe kao referentna vrijednost za sve ostale usporedbe. Vidljivo je da se povećanjem broja elemenata numeričke mreže smanjuje odstupanje od mjerjenih rezultata. Kada je visina prve čelije uz stijenke automobila prilagođena za pojedine površine kako bi se zadovoljile smjernice za y^+ također je uočeno smanjenje odstupanja.

Numerička mreža s oko 0,5 milijuna elemenata s prilagođenom visinom prvog graničnog sloja kako bi bile zadovoljene smjernice za y^+ uzeta je za daljnje razmatranje parametara numeričke mreže (slika 2).

Tablica 1. Eksperimentalni rezultati (1) i koeficijenti otpora dobiveni simulacijom

Eksperimentalni rezultati		Koeficijent otpora Cd			
		Stražnji kraj	Prednji kraj	Skošenje	Ukupno
		0,086	0,018	0,141	0,285
Nestrukturirana					
Broj elemenata	y^+	Stražnji kraj	Prednji kraj	Skošenje	Ukupno
50 000	~ 400	0,125	0,085	0,150	0,421
100 000	~ 400	0,104	0,067	0,139	0,373
250 000	~ 400	0,090	0,053	0,139	0,346
500 000	~ 400	0,091	0,053	0,139	0,346
50 000	30-100	0,133	0,075	0,154	0,416
100 000	30-100	0,107	0,040	0,149	0,354
250 000	30-100	0,095	0,034	0,147	0,336
500 000	30-100	0,095	0,031	0,147	0,337
Strukturirana					
50 000	~ 400	0,129	0,092	0,135	0,392
100 000	~ 400	0,108	0,081	0,138	0,365
250 000	~ 400	0,089	0,064	0,125	0,312
500 000	~ 400	0,137	0,044	0,140	0,336
50 000	30-100	0,161	0,045	0,136	0,380
100 000	30-100	0,148	0,033	0,145	0,366
250 000	30-100	0,128	0,026	0,144	0,338
500 000	30-100	0,122	0,020	0,145	0,323



Slika 2. a) Strukturirana i b) nestrukturirana mreža za 0.5 milijuna elemenata

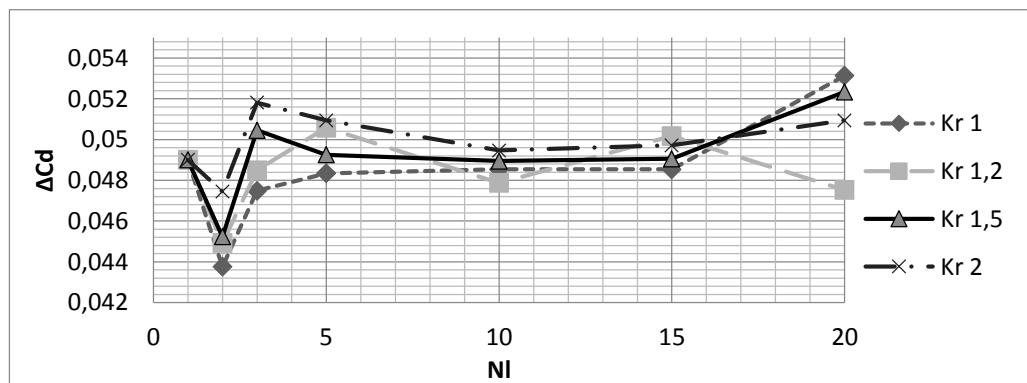
3 Rezultati simulacija

Detaljnije ispitivanje utjecaja parametara numeričke mreže za nestrukturiranu mrežu provedeno je variranjem broja graničnih slojeva (NI) i njihovog koeficijenta rasta (Kr), gdje su odstupanja (ΔCd) od eksperimentalnih rezultata prikazana na slici 3. Ukupni koeficijent otpora je za sve simulacije oko 20% veći od eksperimentalno određenog (oko 0,05), a promjenom parametara numeričke mreže može se smanjiti odstupanje za oko 2%. Odstupanje je izraženo kao suma apsolutnog odstupanja pojedinačnih koeficijenata otpora. Da bi se zadovoljile smjernice za y^+ potrebno je da pojedine površine imaju različite visine prvog graničnog sloja. Kako za veći broj graničnih slojeva dolazi do većih razlika u ukupnoj visini graničnih slojeva dolazi do deformacije mreže što može biti uzrok većih odstupanja od mjerena.

Za jednake postavke graničnih slojeva i ugušćenja oko automobila varirana je maksimalno dozvoljena veličina elementa u cijeloj domeni tj. broj elemenata u numeričkoj mreži. Odstupanja su prikazana u tablici 2.

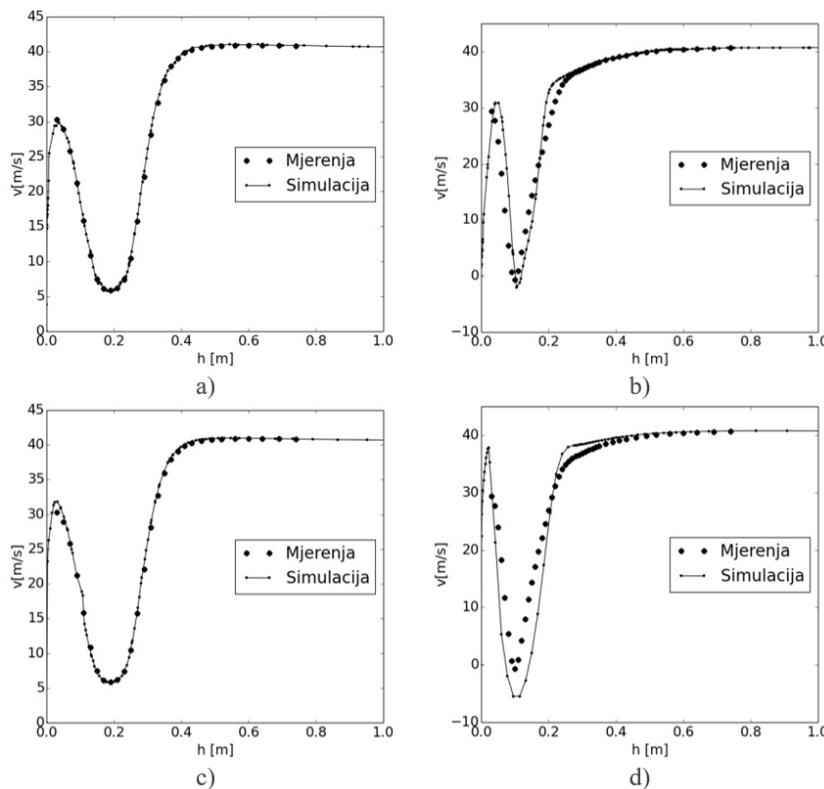
Tablica 2. Utjecaj veličine numeričke mreže na odstupanje od eksperimenta

Broj elemenata	650 939	696 476	770 702	1 291 493	1 852 212
Veličina maksimalnog elementa [m]	0,08	0,07	0,06	0,04	0,03
ΔCd	0,0477	0,0488	0,0473	0,0456	0,0425



Slika 3. Utjecaj broja graničnih slojeva i koeficijenta rasta na odstupanje od eksperimenta

Za validaciju simulacije korišteni su i dostupni podaci o mjerjenjima profila brzina (2). Usporedba je provedena za 264 profila brzina. Na slici 4 prikazani su profili brzina u ravnini simetrije za profil na udaljenosti $x=-1,062$ koji se nalazi na početku automobila i za profil brzina $x=0,188$ koji se nalazi iza automobila, u području turbulentcije. Za nestrukturiranu mrežu najveće odstupanje zamjećuje se na stražnjem dijelu automobila, dok se profili brzina na prednjoj strani automobila dobro podudaraju. To je i očekivano s obzirom da se najveći vrtložni poremećaj nalazi na stražnjem dijelu automobila. Za strukturiranu mrežu se također primjećuju veća odstupanja na stražnjem dijelu automobila od prednjeg, ali su u usporedbi s nestrukturiranim mrežom odstupanja nešto veća.



Slika 4. Profili brzina nestrukturirane mreže na ravnini simetrije za udaljenosti a) $x=-1,062$ i b) $x=0,188$ i profili brzina strukturirane mreže za udaljenosti c) $x=-1,062$ i d) $x=0,188$

Utjecaj turbulentnih modela je ispitan primjenom *k-epsilon standard*, *k-epsilon realizable*, *k-omega* i *k-omega SST* turbulentnih modela. U tablici 3 su prikazani rezultati navedenih simulacija te utjecaj reda točnosti primjenjenih metoda diskretizacije pojedinih članova transportnih jednadžbi.

Za *k-epsilon* modele najveći utjecaj na točnost rješenja zabilježen je prelaskom na drugi red točnosti diskretizacije konvektivnog dijela momentne jednadžbe kada je točnost dobivenog rješenja poboljšana gotovo 40%. Primjena diskretizacije drugog reda točnosti tlaka i turbulentnih značajki nije daljnje značajnije utjecala na točnost. Manja odstupanja dobivena su za *k-epsilon*

realizable model. Kod rješavanja s *k-omega* modelima prelaskom na druge redove točnosti pojavljuje se nestabilnost u dostizanju rješenja što se manifestira oscilacijama koeficijenta otpora u svakoj iteraciji, te ih zbog toga nije moguće precizno odrediti.

Tablica 3. Rezultati za koeficijente otpora Cd za različite turbulentne modele

	k-epsilon standard				k-epsilon realizable			
	Stražnji kraj	Skošenje	Prednji kraj	Ukupno	Stražnji kraj	Skošenje	Prednji kraj	Ukupno
1. red	0,135	0,152	0,079	0,441	0,135	0,153	0,079	0,439
2.red mom. jedn.	0,093	0,146	0,030	0,333	0,096	0,127	0,027	0,309
2. red tlaka	0,095	0,145	0,030	0,331	0,094	0,132	0,028	0,031
2. red turb.	0,110	0,149	0,030	0,352	0,099	0,147	0,029	0,334
	k-omega standard				k-omega SST			
1. red	0,124	0,147	0,085	0,050	0,129	0,150	0,079	0,428
2. red mom. jedn.	/	/	/	/	/	/	/	/
2. red tlaka	0,097	0,125	0,034	0,318	/	/	/	/
2. red turb.	0,090	0,128	0,032	0,313	/	/	/	/

4 Zaključak

Povećanjem broja elemenata numeričke mreže kao i pravilno podešavanje graničnih slojeva oko stijenki automobila omogućava dobivanje točnijih rezultata. Kao mjerene veličine koje upućuju na odstupanje od eksperimentalnih rezultata korišteni su koeficijent otpora i profili brzina. Usporedba profila brzina daje precizniju informaciju o mjestu najvećih odstupanja u promatranoj domeni što omogućuje daljnje ciljano podešavanje numeričke mreže. Na koeficijent otpora najviše utječu postavke turbulentnih modela, gdje se najveća promjena događa prilikom prelaska s prvog reda točnosti diskretizacije konvektivnog dijela momentne jednadžbe na drugi red točnosti.

Najveće odstupanje u koeficijentu otpora može se primjetiti na prednjoj površini auta, što se može objasniti činjenicom da svi korišteni turbulentni modeli prepostavljaju potpuno razvijeno turbulentno strujanje uz čvrstu stijenku dok se u stvarnosti profil brzina razvija iz početno laminarnog u turbulentni profil brzine. Primjenom turbulentnih modela koji omogućuju postepeni razvoj laminarnog u turbulentni granični sloj vjerojatno bi se omogućilo daljnje poboljšanje rješenja.

Literatura

1. Ahmed, S.R., Ramm G. Some Salient Features of the Time-Averaged Ground Vehicle Wake. SAE Technical Paper 840300, 1984.
2. Lienhart, H., Becker, S.. Flow and turbulence structure in the wake of a simplified car model. SAE Technical Paper 2003-01-0656., 2003.

Koopmanovi modovi strujanja oko rotiraćeg cilindra

Ivić, S.¹, Črnjarić-Žic, N.² i Maćešić, S.³

Sažetak

U jeku napretka u nedavnim istraživanjima na polju teorije Koopmanovog operatora, područje dekompozicije dinamičkih sustava na Koopmanove modove postaje vrlo atraktivno i primjenjivo na mnoge realne probleme. Opstrujavanje cilindra, kako mirujućeg tako i rotirajućeg, je naizgled jednostavna tema koja, međutim, ima mnogo primjena u stvarnim inženjerskim problemima pa je zbog toga iscrpljeno istraživana u području mehanike fluida.

U ovom radu je strujno polje oko rotirajućeg cilindra, dobiveno pomoću računalne simulacije strujanja, promatrano kao periodički dinamički sustav. Dekompozicijom takvog sustava na tzv. Koopmanove modove može se postići vrlo precizna redukcija modela i bolji uvid u dinamiku promatranog strujanja kroz frekvencijski spektar promatranog sustava.

Prezentirani rezultati prikazuju spektar i prostorni utjecaj pojedinih modova, te daju ocjenu i usporedbu greške rekonstrukcije strujnog polja koristeći reducirani model za strujanje oko rotirajućeg cilindra.

Ključne riječi: opstrujavanje cilindra, OpenFOAM, Koopmanovi modovi, redukcija modela

¹ Doc. dr. sc. Stefan Ivić, dipl. ing. stroj., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: stefan.ivic@riteh.hr

² Prof. dr. sc. Nelida Črnjarić-Žic, dipl. ing.mat., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za matematiku, fiziku, strane jezike i kinezijologiju, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: nelida@riteh.hr

³ Prof. dr. sc. Senka Maćešić, prof.mat. i fiz., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za matematiku, fiziku, strane jezike i kinezijologiju, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: senka.macesic@riteh.hr

1 Uvod

Proučavanje opstrujavanje cilindra i von Karmanovih vrtloga je neiscrpna tema dinamike fluida. Uvođenjem rotacije cilindra dolazi do manifestacije još jednog zanimljivog fizikalnog fenomena – Magnusovog efekta. Na tijelo u vrtnji stvara se bočni potisak zbog razlike u tlaku fluida na stjenke rotirajućeg cilindra. Posljedično, dolazi do smanjenja sile otpora te do povećanja sile uzgona koja se u ovom slučaju često naziva Magnusova sila. Opisana svojstva ponukala su mnoge primjene rotirajućeg cilindra za stabilizaciju, optimizaciju ili kontrolu strujanja fluida.

Ovisno o brzini rotacije cilindra (reprezentirano pomoću α - omjera obodne brzine cilindra i karakteristične brzine strujanja), tok fluida oko cilindra konvergira ka stacionarnom ili periodičkom strujanju (1). Periodičko strujanje se postiže za dva nepovezana raspona brzine rotacije ($0 \leq \alpha \leq 1,91$ i $4,34 \leq \alpha \leq 4,80$), dok je strujanje stacionarno za ostale režime rotacije.

Koopman je u svom radu (2) postavio teroriju linearog operatora, danas poznatog kao Koopmanov operator. Napretkom numeričkih metoda u posljednjih 10-a godina Koopmanova teorija se počela primjenjivati na razne inženjerske probleme. Posebno se ističe primjena u mehanici fluida (3). Analiza Koopmanovih modova strujanja oko mirujućeg cilindra predstavljena je u (4).

2 Simulacija strujanja oko rotirajućeg cilindra

Promatramo strujanje fluida oko rotirajućeg cilindra pri relativno malom Reynoldsovom broju ($Re = 200$). Pri takvom režimu, strujanje je laminarno i dominantno dvodimenzionalno, pa se model strujanja temelji na nekompresibilnim Navier-Stokes jednadžbama:

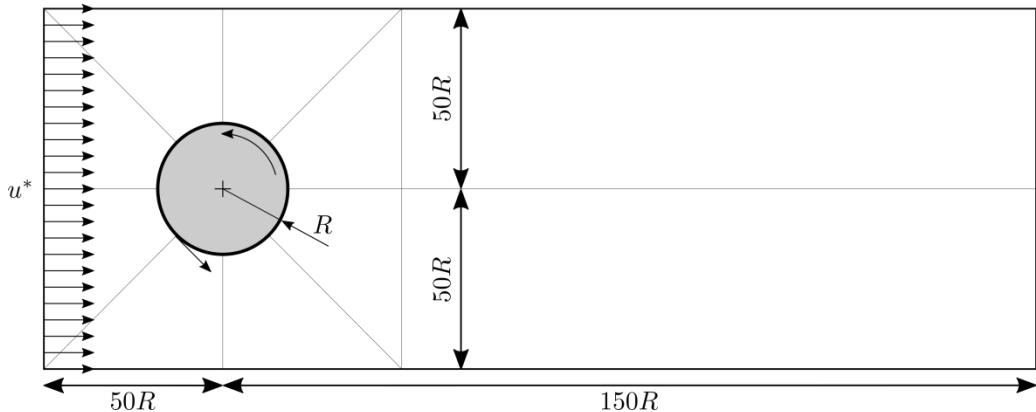
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nu \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

gdje su polje brzine \mathbf{u} i tlak p varijable stanja, ν je kinematička viskoznost i ρ je gustoća fluida.

Promatrana domena strujanja je pravokutna i proširena kako bi se umanjio utjecaj rubova domene (Slika 1). Na rubove domene postavljeni su prikladni rubni uvjeti polja brzine: na ulazu je zadana uniformna brzina, na gornjoj i donjoj granici rubni uvjet idealno glatke stjenke (tzv. "slip" uvjet), na izlazu je postavljen von Neumannov rubni uvjet. Dirichlet-ov rubni uvjet na stjenci cilindra uvjetuje da fluid uz sam cilindar ima brzinu jednaku stjenci cilindra. Za tlak, korišten je Von Neumannov rubni uvjet na svim rubovima domene izuzev izlaznog ruba na kojem je propisan konstantni tlak. Ulazna brzina određena je tako da se za strujanje postiže $Re=200$.

Brzina rotacije cilindra mjerena je bezdimenzijskom veličinom α , koja predstavlja omjer između obodne brzine stjenke cilindra te karakteristične brzine strujanja tj. ulazne brzine. Odabirom $\alpha=4.5$, postiže se nestabilnost toka gdje je strujanje periodično, ali vrtloženje je jednostrano (1).



Slika 1. Skica domene za računalnu simulaciju strujanja

Simulacija laminarnog neturbulentnog strujanja provedena je pomoću OpenFOAM-ovog numeričkog rješavača icoFOAM (5). Za računalnu simulaciju strujanja korištena je strukturirana numerička mreža koju čini 86000 celija.

3 Dekompozicija strujanja na Koopmanove modove

Strujanje fluida može se promatrati iz perspektive dinamičkih sustava kao autonomni sustav:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

gdje \mathbf{x} predstavlja vektor stanja sustava čiju dinamiku određuje funkcija \mathbf{F} .

Koopmanova teorija je generalna i neovisna o fizičkim svojstvima promatranog dinamičkog sustava te je primjenjiva i na diskretnе dinamičke sustave. To nam, u slučaju strujanja fluida, omogućuje primjenu na podacima, bilo mjerenih ili simuliranih rezultata, umjesto direktno na rješenja Navier-Stokesovog modela. Diskretni sustav koji pripada jednadžbi (3) možemo definirati kao

$$\mathbf{x}_{k+1} = T(\mathbf{x}_k) \quad (4)$$

gdje je T operator koji opisuje evoluciju u vremenu sustava (3) uz diskretizaciju kod koje je $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$, $t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots$, te Δt vremenski korak.

Koopmanov operator U je beskonačno-dimenzionalni linearni operator definiran kao

$$Ug(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(T(\mathbf{x})) \quad (5)$$

gdje \mathbf{g} funkcija promatranja (eng. *observable*) koja preslikava vektor stanja \mathbf{x} . Iako je izbor funkcije \mathbf{g} slobodan i funkcija može biti proizvoljna, prikladna funkcija promatranja može posjeći dobivene rezultate.

Svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije operatora U zadovoljavaju

$$U\varphi_j(\mathbf{x}) = \mu_j \varphi_j(\mathbf{x}) \quad (6)$$

$$\mu_j = e^{\lambda_j \Delta t} \quad (7)$$

gdje je $\lambda = \sigma + i\omega$ Koopmanova svojstvena vrijednost. Poznavajući Koopmanove svojstvene funkcije φ , svojstvene vrijednosti λ i svojstvene vektore \mathbf{v} , moguće je rekonstruirati funkciju promatranja koja je u ovom slučaju jednaka polju brzina $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t)) = \sum \varphi_j(\mathbf{x}(0)) v_j e^{(\sigma_j + i\omega_j)t} \quad (8)$$

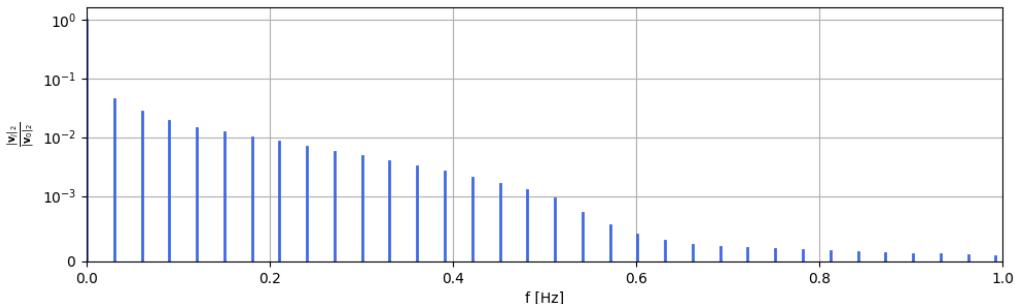
Koopmanovi svojstveni vektori, ili Koopmanovi modovi, u ovom radu, opisuju utjecaj svake komponente brzine \mathbf{u} u promatranim točkama u dinamici definiranoj pripadajućom svojstvenom vrijednošću λ . Realni dio svojstvene vrijednosti σ definira rast ili prigušenje promatranog strujnog polja, dok je harmonično ponašanje sadržano u frekvenciji moda tj. imaginarnom djelu ω . Amplituda, tj. utjecaj pojedinog moda kao i fazni pomak (u odnosu na odabrani početno stanje strujnog polja) sadržani su u kompleksnoj vrijednosti Koopmanove svojstvene funkcije φ .

Koopmanovi modovi se mogu numerički aproksimirati koristeći DMD algoritam (6). Aproksimacija podrazumijeva konačnu dimenzionalnost linearne operatora, što znači konačni broj Koopmanovih modova te pripadajućih svojstvenih vrijednosti i svojstvenih funkcija.

4 Rezultati

Strujno polje dobiveno računalnom simulacijom je interpoliranu u točkama uniformne pravokutne mreže veličine 126x76 na području [-5,20]x[-5,10]. U ukupno 9576 točaka promatrana su stanja u_x i u_y , što čini ukupno 19152 funkcije promatranja koje su uzorkovani u periodu potpuno periodičnog toka od 100 s sa korakom uzorkovanja $\Delta t=0.1$ s.

Na Slici 2 prikazan je spektar koopmanovih modova. Uz svaku frekvenciju ($f=\omega/2\pi$) najznačajnijih modova asociran je i utjecaj moda procijenjen kao L_2 norma moda skalirana sa normom stacionarnog moda, za koji je $\sigma=0$ i $\omega=0$. Jasno se vidi kako utjecaj modova viših frekvencija slablji, što znači da je za relativno točnu rekonstrukciju potrebno u obzir uzeti vrlo mali broj modova. Kod harmoničkog strujanja, frekvencije modova su višekratnici frekvencije prvog harmoničkog moda, kao što je pokazano za strujanje oko mirujućeg cilindra u (4). Frekvencija prvog harmoničkog moda podudara se sa frekvencijom vrtloženja ili tzv. Strouhalovom frekvencijom.



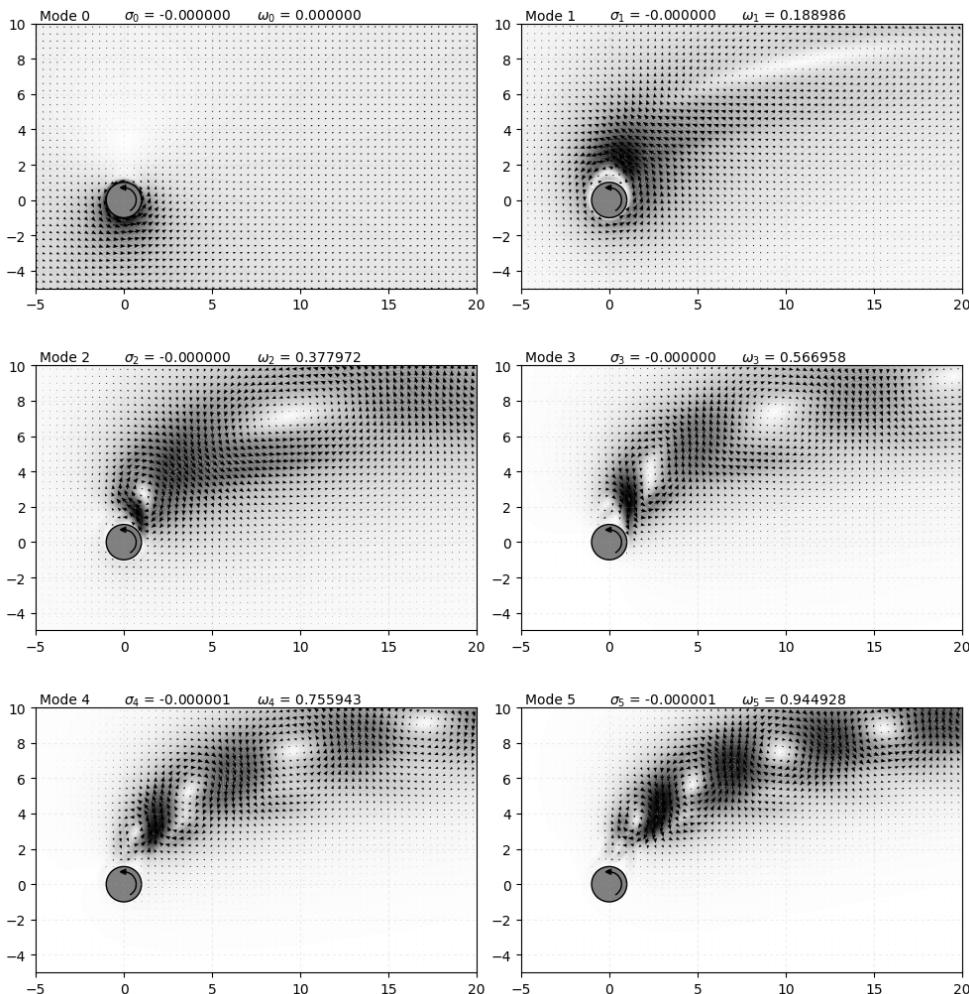
Slika 2. Frekvencije Koopmanovih modova (skalirane sa L_2 normom prvog harmoničkog moda)

Na temelju određenih utjecaja Koopmanovih modova (Slika 2), odabранo je 6 najznačajnijih modova te su vizualizirani njihova pripadajuće strujna polja (Slika 3). Nulti mod je stacionarni mod koji predstavlja prosječno strujno polje promatranog strujanja, dok su ostali modovi harmonički i asocirani sa određenom frekvencijom ω . Porastom frekvencije

Koopmanovih modova strujnog polja raste i prostorna kompleksnost strukture samog moda ali i značajno opada njegov utjecaj u rekonstrukciji strujnog polja. Već pri korištenju samo nekoliko modova, greška rekonstrukcije je vrlo prihvatljiva za većinu tehničkih primjena. Razlike između strujnog polja dobivenog CFD simulacijom i strujnog polja rekonstruiranog preko Koopmanovih modova, mjernjiva je pomoću relativne L_2 norme:

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{u}_{cf} - \mathbf{u}_{Koopman}\|}{\|\mathbf{u}_{cf}\|} \quad (5)$$

Koristeći najznačajnijih 21 Koopmanov mod, 1 stacionarni i 10 konjugirano kompleksnih parova harmonijskih modova, rekonstrukcija promatranog strujnog polja postiže grešku manju od $\epsilon=10^{-4}$. Vrlo je bitno da kod harmoničkih dinamičkih sustava, kao što je promatrano strujanje oko rotirajućeg cilindra, greška rekonstrukcije Koopmanovim modovima ne raste u vremenu.



Slika 3. Koopmanovi modovi strujnog polja pri opstrujavanju rotirajućeg cilindra

5 Zaključak

Rezultati računalne simulacije strujanja oko rotirajućeg cilindra, pri $Re=200$ i $\alpha=4.5$, upotrebljeni su za konstrukciju reduciranih modela koristeći Koopmanove modove. Analizom vlastitih vrijednosti može se zaključiti da je strujanje harmoničko te da su frekvencije oscilacija Koopmanovih modova višekratnici osnovne Strouhalove frekvencije.

Dekompozicija na Koopmanove modove je vrlo precizna i proračunski nije previše zahtjevna, a omogućava jednostavnu rekonstrukciju strujnog polja uz zanemarive greške i red veličine manje računalne zahtjeve u odnosu na CFD simulaciju.

Koopmanovi modovi mogu dati detaljniji uvid u fizikalna svojstva promatranog sustava, što potencijalno olakšava dizajniranje primjene rotirajućeg cilindra za stabilizaciju, optimizaciju ili kontrolu strujanja fluida.

Zahvale

Autori se zahvaljuju prof. Igoru Meziću na pruženoj prilici u sudjelovanju na DARPA projektu "On A Data-Driven, Operator-Theoretic Framework for Space-Time Analysis of Process Dynamics", Contract HR0011-16-C-0116, u sklopu kojeg je napravljeno ovo istraživanje.

Literatura

1. Mittal, Sanjay, and Bhaskar Kumar. "Flow past a rotating cylinder." *Journal of Fluid Mechanics* 476.4 (2003): 303-334.
2. Koopman, Bernard O. "Hamiltonian systems and transformation in Hilbert space." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 17.5 (1931): 315-318.
3. Mezić, Igor. "Analysis of fluid flows via spectral properties of the Koopman operator." *Annual Review of Fluid Mechanics* 45 (2013): 357-378.
4. Bagheri, Shervin. "Koopman-mode decomposition of the cylinder wake." *Journal of Fluid Mechanics* 726 (2013): 596-623.
5. Jasak, Hrvoje, Aleksandar Jemcov, and Zeljko Tukovic. "OpenFOAM: A C++ library for complex physics simulations." International workshop on coupled methods in numerical dynamics. Vol. 1000. IUC Dubrovnik, Croatia, 2007.
6. Schmid, Peter J. "Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data." *Journal of fluid mechanics* 656 (2010): 5-28.

Usporedba mješovitih bezmrežnih pristupa za modeliranje problema gradijentne elastičnosti

Jalušić, B.¹, Jarak, T.² i Sorić, J.³

Sažetak

Posljednjih godina, cilj znanstvenih istraživanja je poboljšati modeliranje različitih fizičkih pojava, kao što su popuštanje materijala i lokalizacija deformacija, koje se ne mogu dovoljno točno opisati pomoću klasične teorije kontinuma. Za rješavanje jednadžbi pridruženih teorijama višeg reda potreban je visok stupanj kontinuiteta funkcija oblika. Dakle, upotreba metode konačnih elemenata (MKE) za rješavanje problema gradijentne elastičnosti zahtijeva primjenu elemenata sa složenim funkcijama oblika i velikim brojem čvornih stupnjeva slobode. U usporedbi s MKE, funkcije oblika proizvoljnog stupnja kontinuiteta mogu u bezmrežnim metodama biti izvedene na jednostavniji način korištenjem manjeg broja čvornih nepoznаница. Stoga se bezmrežni pristupi čine prikladnijima za modeliranje deformiranja materijala primjenom gradijentnih teorija. U ovom radu, diferencijalna jednadžba četvrtog reda kojom je opisan problem Aifantisove gradijentne elastičnosti razdvaja se u dva sastavna problema opisana diferencijalnim jednadžbama drugog reda. Sastavni problemi se tada rješavaju jedan za drugim, gdje se rješenje prvog koristi kao ulazni parametar za rješavanje drugog problema. Razmatraju se dva različita načina razdvajanja jednadžbe četvrtog reda, prvi je temeljen na pomaku, a drugi na deformaciji kao nepoznatom polju. Za diskretizaciju obaju problema koriste se mješovite kolokacijske metode. Rezultati su prikazani na reprezentativnom primjeru, te analizirani s obzirom na korišteni postupak razdvajanja jednadžbe četvrtog reda.

Ključne riječi: kolokacijska metoda, mješoviti pristup, gradijentna elastičnost

¹ Dr. sc. Boris Jalušić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: boris.jalusic@fsb.hr

² Doc. dr. sc. Tomislav Jarak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: tomislav.jarak@fsb.hr

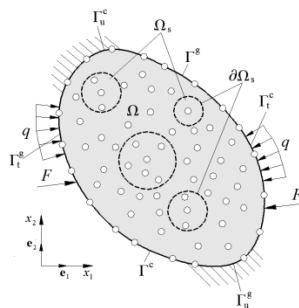
³ Prof. dr. sc. Jurica Sorić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: jurica.soric@fsb.hr

1 Uvod

Razmatra se mješovita bezmrežna lokalna Petrov-Galerkinova metoda (1) za modeliranje deformiranja materijala primjenom gradijentne elastične teorije (2). Pritom je korištena teorija višeg reda s jednim mikrostrukturnim parametrom (3). Analiza deformiranja materijala Aifantisovom gradijentnom teorijom (3) matematički je problem opisan diferencijalnom jednadžbom četvrtog reda. Prilikom rješavanja problema javlja se potreba za izračunavanjem derivacija visokog reda kao i zadovoljavanje složenih rubnih uvjeta na vanjskim granicama (4). U ovom radu spomenuti nedostaci ublaženi su preoblikovanjem cijelovitog problema u dva sastavna problema, klasični (lokalni) i gradijentni (ne-lokalni), opisana jednadžbama drugog reda (4). Primijenjena je aproksimacija koja posjeduje interpolacijska svojstva (5), kojom je omogućeno izravno zadovoljavanje osnovnih rubnih uvjeta. U oba sastavna problema sustav jednadžbi je zatvoren postavljanjem kinematičkih relacija koje povezuju aproksimirane veličine polja. Korištene mješovite formulacije i pristupi su detaljno prikazani u (1). Korištена su dva različita načina razdvajanja originalne jednadžbe koji su objašnjeni u drugom poglavlju. Također, prikazane su dobivene diferencijalne jednadžbe kao i pripadajući rubni uvjeti za dva razmatrana pristupa (u -RA i e -RA). Učinkovitost prikazanih pristupa prikazana je u 3. poglavlju pomoću jednog numeričkog primjera u kojem je analiziran utjecaj mikrostrukturnog parametra na odziv konstrukcije. Odnosno, za oba pristupa razdvajanja razmatrana je pojava efekta utjecaja veličine uzorka na odziv konstrukcije. U završnom poglavlju dani su zaključci i smjernice za daljnja istraživanja.

2 Bezmrežni postupci za rješavanje problema gradijente elastičnosti

Dvodimenijski homogeni materijal koji zauzima područje Ω omeđeno globalnom granicom Γ shematski je prikazan na slici 1. S obzirom da se izvorni problem razdvaja na dva sastavna, globalne granice poprimaju označe Γ^c i Γ^g gdje se gornji indeksi odnose na klasični (lokalni) odnosno gradijentni (ne-lokalni) problem rubnih vrijednosti.



Slika 1. Razmatrano područje s prikazanim rubnim uvjetima i pripadnim granicama

2.1 Jednadžbe gradijentne elastičnosti

Za sustav prema slici 1, jaki oblici 2D jednadžbi ravnoteže moraju biti zadovoljeni u svim čvorovima unutar područja materijala,

$$\tilde{\sigma}_{ij,x^j} + b_i = 0, \text{ unutar } \Omega. \quad (1)$$

Sukladno Aifantisovoj teoriji (2), cjelovito naprezanje $\tilde{\sigma}_{ij}$ definirano je kao razlika klasičnog Cauchyevog naprezanja σ_{ij} i naprezanja višeg reda μ_{ij} ,

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \mu_{ij}, \quad (2)$$

gdje su spomenuta naprezanja jednaka

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3)$$

$$\mu_{ij} = C_{ijkl} l^2 \nabla^2 (\varepsilon_{kl}). \quad (4)$$

U jednadžbama (3) i (4), C_{ijkl} označava materijalni tenzor, ε_{kl} tenzor deformacije cjelovitog problema, a l mikrostruktturni parametar. Kinematičke relacije cjelovitog problema koje povezuju polje deformacija i pomaka mogu se zapisati kao

$$\varepsilon_{kl} = (u_{k,l} + u_{l,k}) / 2. \quad (5)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (3) i (4) u relaciju (2) dobiva se konstitutivna relacija u malo drugačijem obliku

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - l^2 \varepsilon_{kl,mm}). \quad (6)$$

Uvrštavanjem (6) u relaciju (1) dobiva se jednadžba koja nije prikladna za numeričko rješavanje problema zbog potrebe za izračunavanjem visokog reda derivacija, ne samo u jednadžbi ravnoteže već i u pripadnim rubnim uvjetima (4). Stoga se izvorni problem može preoblikovati u dva sastavna problema opisana diferencijalnim jednadžbama drugog reda na sljedeća dva načina.

2.2 \mathbf{u} -RA pristup

Uvrštavanjem relacija (2) - (5) u jednadžbe ravnoteže (1), dobiva se diferencijalna jednadžba četvrtog reda kojom je opisano gradijentno elastično ponašanje materijala

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} \left[(u_k - l^2 \nabla^2 u_k)_{,jl} + (u_l - l^2 \nabla^2 u_l)_{,jk} \right] + b_i = 0, \text{ unutar } \Omega. \quad (7)$$

Gornja diferencijalna jednadžba gradijentne elastičnosti četvrtog reda po polju pomaka može se preoblikovati u dva sastavna problema na način da se izrazi u okruglim zagradama proglase novim klasičnim (lokalnim) poljem pomaka u_k^c ,

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,jl}^c + u_{l,jk}^c)_{,j} + b_i = 0, \text{ unutar } \Omega. \quad (8)$$

Zamjena je moguća s obzirom da rezultira diferencijalnom jednadžbom drugog reda koja opisuje klasično ponašanje linearno elastičnog homogenog materijala. Druga sastavna jednadžba problema slijedi iz supstitucije i glasi

$$u_i^g - l^2 u_{i,mm}^g = u_i^c, \text{ unutar } \Omega. \quad (9)$$

Problemi rubnih vrijednosti definirani jednadžbama (8) i (9) rješavaju se sada stupnjevanom strategijom, odnosno jedan za drugim, gdje se rješenje prvog problema koristi kao ulazni parametar za drugu diferencijalnu jednadžbu. Relacija (8) zapravo sada označava jednadžbu problema klasične elastičnosti (2). Stoga jednadžbe (8) i (9) moraju zadovoljavati rubne uvjete propisane na vanjskoj granici $\partial\Omega$ prikazanoj na slici 1, odnosno

$$u_i^c = \bar{u}_i^c, \text{ na } \Gamma_u^c, \quad t_i^c = \sigma_{ij}^c n_j^c = \bar{t}_i^c, \text{ na } \Gamma_t^c, \quad (10)$$

$$u_i^g = \bar{u}_i^g, \text{ na } \Gamma_u^g, \quad R_i^g = \frac{\partial^2 u_i^g}{\partial n^g \partial n^g} = \bar{R}_i^g, \text{ na } \Gamma_t^g. \quad (11)$$

2.3 ε -RA pristup

Uvrštavanjem jednadžbe (6) u jednadžbe ravnoteže (1), dobiva se diferencijalna jednadžba trećeg reda po polju deformacija kojom je također opisano gradijentno ponašanje materijala

$$C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - l^2 \varepsilon_{kl,mm})_{,j} + b_i = 0, \text{ unutar } \Omega. \quad (12)$$

Ukoliko se sada izraz u zagradi u gornjoj jednadžbi zamjeni s klasičnim (lokalnim) poljem deformacije izravno slijedi prva sastavna jednadžba ovog pristupa

$$C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j}^c + b_i = 0, \text{ unutar } \Omega, \quad (13)$$

dok druga slijedi iz same zamjene

$$\varepsilon_{ij}^g - l^2 \varepsilon_{ij,mm}^g = \varepsilon_{ij}^c, \text{ unutar } \Omega. \quad (14)$$

Jednadžba (13) zapravo je jednaka jednadžbi (8) ukoliko se u nju uvrste kinematičke relacije definirane prema jednadžbi (5). Stoga se mora spomenuti da se klasično (lokalno) rješenje problema kod oba pristupa može izračunavati na isti način. Nadalje, rubni uvjeti klasičnog problema ostaju jednaki kao i kod u -RA pristupa i definirani su prema (10). Međutim, zbog drugačije druge jednadžbe problema dolazi do promjene rubnih uvjeta ne-lokalnog problema te stoga oni prema (4) glase

$$\varepsilon_{ij}^g = \bar{\varepsilon}_{ij}^g, \text{ na } \Gamma_u^g, \quad R_{ij}^g = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^g}{\partial n^g} = \bar{R}_{ij}^g, \text{ na } \Gamma_t^g. \quad (15)$$

3 Numerički primjer

3.1 Membrana opterećena konstantnim površinskim opterećenjem

Membrana jedinične debljine, duljine $L=6$, visine $H=3$ opterećena je na desnom kraju jednolikim površinskim opterećenjem u smjeru osi x , prema slici 2. Svi korišteni klasični i gradijentni rubni uvjeti također su prikazani na slici. Pritom su u oba pristupa (u -RA i e -RA) korišteni jednaki klasični rubni uvjeti, što nije slučaj pri rješavanju gradijentne (ne-lokalne) jednadžbe. Materijalna svojstva membrane definirana su Youngovim modulom $E=1$ i Poissonovim faktorom $\nu=0,25$. Za diskretizaciju membrane korištena je mreža koja je sastoji od 153 jednolikog razmaknutih čvora. Na numeričkom primjeru analizirana je mogućnost mješovitih kolokacijskih pristupa da opišu utjecaj mikrostrukture na odziv konstrukcije, što je postignuto mijenjanjem parametra l . Prije prikaza numeričkih rezultata definiramo pomoćnu veličinu zvanu omjer deformacija ε_R koja će nam poslužiti za analizu rezultata. Omjer deformacija razmatran je u točki A s koordinatama $x=0,375$, $y=1,5$, a računa se prema

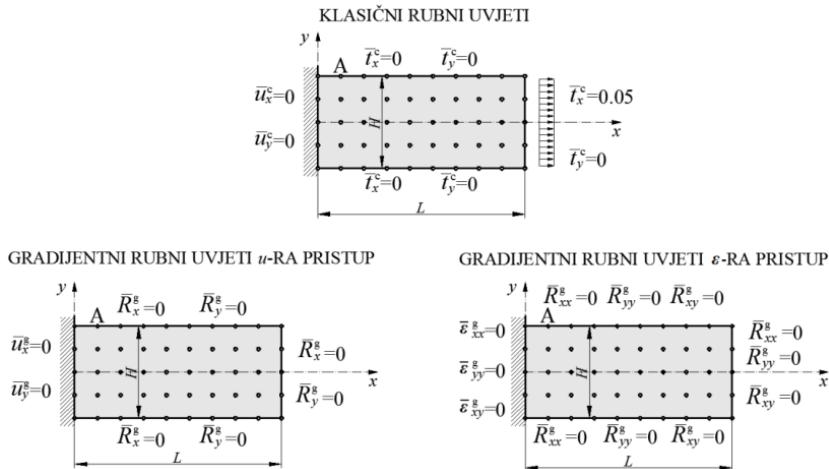
$$\varepsilon_R = \frac{(\varepsilon_{eq}^c)_A}{(\varepsilon_{eq}^g)_A}, \quad (16)$$

gdje su ekvivalentne klasične i gradijentne deformacije jednake

$$\varepsilon_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^{\text{dev}} \varepsilon_{ij}^{\text{dev}}} . \quad (17)$$

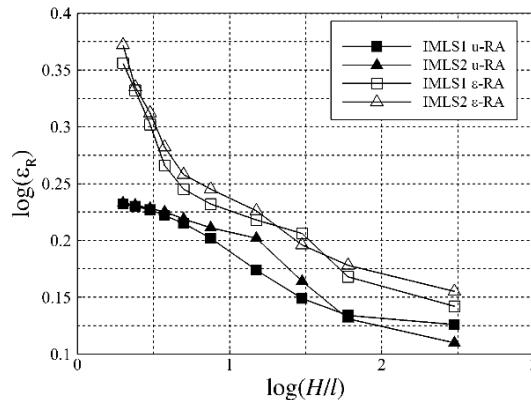
U gornjoj jednadžbi $\varepsilon_{ij}^{\text{dev}}$ se odnosi na tenzor devijatorskih deformacija

$$\varepsilon_{ij}^{\text{dev}} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} . \quad (18)$$



Slika 2. Membrana s prikazanim klasičnim i gradijentnim rubnim uvjetima

Numerički izračuni provedeni su korištenjem aproksimacijskih funkcija prvog (IMLS1) i drugog (IMLS2) stupnja. Pritom su korištene aproksimacijske domene jednake $r_s/h_s = 1.4$ za prvi, odnosno $r_s/h_s = 2.3$ za drugi stupanj aproksimacije. Pritom je s h_s ovdje označena međusobna udaljenost između čvorova. Na slici 3. prikazan je dijagram utjecaja promjene mikrostrukturnog parametra l na iznos omjera deformacija ε_R u točki A u logaritamskom mjerilu.



Slika 3. Dijagram međusobne ovisnosti omjera deformacije i mikrostrukturnog parametra

Analizom rezultata vrlo jasno je vidljivo da upotreba različitih pristupa, odnosno različitih rubnih uvjeta pri rješavanju gradijentne (ne-lokalne) jednadžbe utječe na odziv same konstrukcije. Također, vidljivo je da s povećanjem parametra l kod oba pristupa raste i vrijednost omjera deformacija ε_R . Može se konstatirati da uvođenje članova višeg reda u konstitutivnu jednadžbu gradijentne elastičnosti zaglađuje polja deformacija te smanjuje maksimalnu vrijednost deformacija, što za posljedicu ima povećanje ε_R . Prikazani rezultati kvalitativno su bliski onima koji su dostupni u literaturi (4).

4 Zaključak

Rješavanjem problema gradijentne elastičnosti primjenom tzv. stupnjevanih postupaka, postiže se smanjenje reda potrebnih derivacija kako u samim diferencijalnim jednadžbama, tako i u pripadnim rubnim uvjetima. U korištenim mješovitim bezmrežnim formulacijama, za rješavanje diferencijalnih jednadžbi drugog reda, funkcije moraju posjedovati samo C^0 kontinuitet čime se direktno povećava numerička točnost te smanjuju računalni troškovi. Za sklapanje čvornih matrica krutosti kod obje sastavne jednadžbe problema i kod oba pristupa razdvajanja potrebno je izračunavati samo prve derivacije funkcija oblika. Analizom dobivenih rezultata na numeričkom primjeru membrane može se zaključiti da se s oba pristupa razdvajanja može adekvatno opisati pojava utjecaja veličine uzorka na deformiranje same konstrukcije. S obzirom da su rezultati kvalitativno usporedivi s dostupnima u literaturi, može se konstatirati da se primjenom mješovitih kolokacijskih metoda može postići točan odziv konstrukcije. U dalnjim radovima metoda će biti primijenjena za modeliranje deformiranja heterogenih materijala.

Zahvale

Ovaj rad je financirala Hrvatska zaslada za znanost projektom „Multiscale Numerical Modeling of Material Deformation Responses from Macro- to Nanolevel“ (2516).

Literatura

1. Jalušić B. Meshless Numerical Method for Modeling of Heterogeneous Materials. Doctoral Thesis. Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, Zagreb, 2016.
2. Askes H, Aifantis EC. Gradient Elasticity in Statics and Dynamics: An Overview of Formulations, Length Scale Identification Procedures, Finite Element Implementations and New results. International Journal of Solids and Structures. 2011;48:1962-1990.
3. Tenek LT, Aifantis EC. A Two-dimensional Finite Element Implementation of a Special Form of Gradient Elasticity. Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES). 2002; 3(6):731-741.
4. Askes H, Morata I, Aifantis EC. Finite Element Analysis With Staggered Gradient Elasticity. Computers & Structures. 2008;86:1266-1279.
5. Most T, Bucher C. New Concepts for Moving Least Squares: An Interpolating Non-singular Weighting Function and Weighted Nodal Least Squares. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2008;32(6):461-470.

Osvrt na metode podjele energije loma u pokusima delaminacije s grednim uzorcima

Kačmarčik, J.¹, Konjatić, P.², Karač, A.³ i Ivanković A.⁴

Sažetak

Pokusi delaminacije s grednim uzorcima se često koriste kod ispitivanja različitih suvremenih materijala sa slojevitom strukturom, i kod različitih vrsta ovih pokusa javljaju se i različiti načini loma (otvaranja pukotine). Kod pokusa s mješovitim načinom loma značajno je s aspekta dizajna napraviti podjelu energije loma na udjele od različitih načina loma, tj. odrediti mješovitost načina loma. Problematika podjele energije loma u pokusima delaminacije s grednim uzorcima je predmet velikog broja istraživanja u posljednjih tridesetak godina i kao rezultat toga predložena su različita rješenja zasnovana na analitičkim i numeričkim metodama. Rezultati dobiveni primjenom ovih rješenja pokazuju dobro slaganje kod primjene na pokuse sa simetričnom geometrijom uzorka, međutim, kod primjene na pokuse s asimetričnom geometrijom uzorka pokazuju značajno neslaganje. U ovom radu je dat osvrt na odabrana analitička i numerička rješenja koja se mogu primijeniti za podjelu energije loma. Razmatrane su dvije pionirske, suprotstavljene teorije, prema Williamsu i prema Hutchinsonu i Suou, te nedavno predložena, poluanalitička, SACA metoda, koja je s novim pristupom problemu objedinila ove dvije teorije. Rezultati primjene spomenutih metoda su na primjeru pokusa delaminacije s dvostrukim grednim uzorkom, kome je jedan krak opterećen momentom savijanja, uspoređene s rezultatima odabranih numeričkih istraživanja zasnovanih na primjeni modela kohezivne zone.

Ključne riječi: podjela energije loma, pokusi delaminacije, gredni uzorci, model kohezivne zone

¹Doc. dr. sc. Josip Kačmarčik, dipl. ing. maš., Univerzitet u Zenici, Mašinski fakultet u Zenici, Fakultetska 1, 72000 Zenica, e-mail: kjosip@mf.unze.ba

²Izv. prof. dr. sc. Pejo Konjatić, dipl. ing. stroj., Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Trg. I. B. Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: pekon@sfsb.hr

³Red. prof. dr. sc. Aleksandar Karač, dipl. ing. maš., Univerzitet u Zenici, Politehnički fakultet u Zenici, Fakultetska 1, 72000 Zenica, e-mail: akarac@ptf.unze.ba

⁴Prof. Alojz Ivankovic, MEng, PhD, DIC, School of Mechanical and Materials Engineering, University College Dublin, Belfield, Dublin 4, Ireland, e-mail: alojz.ivankovic@ucd.ie

1 Uvod

Za razvoj i ispitivanje suvremenih materijala sa slojevitom strukturom (npr. slojeviti kompoziti ili različiti lijepljeni spojevi) važnu ulogu imaju različiti pokusi delaminacije, gdje se često primjenjuju pokusi s uzorcima u obliku greda koje se delaminacijom razdvajaju na dva kraka. U tim se pokusima lomna žilavost mjeri kritičnom brzinom oslobođanja energije deformiranja (engl. *strain energy release rate*), koje se radi jednostavnosti često naziva i energija loma. Prilikom delaminacije, posmatra se slučaj kada je pukotina ograničena na rast duž ravnine spoja između slojeva, koje predstavlja slabo mjesto u materijalu, i uslijed nemogućnosti promjene pravca rasta pukotine može doći do pojave mješovitog načina loma (engl. *mixed-mode fracture*). Na ovaj način, mogu se dobiti različiti omjeri udjela različitih načina loma u ukupnoj energiji loma – mješovitost načina loma (engl. *fracture mode-mixity*), u punom opsegu, od čistog načina I do čistog načina II loma (kod razmatranja ravninskih problema).

S aspekta dizajna za određeni materijal potrebno je poznavati krivulju loma (engl. *failure locus*), tj. funkcionalni oblik promjene kritične energije loma s promjenom mješovitosti načina loma, od čistog načina I do čistog načina II loma. Kako bi se eksperimentalno određena kritična energija loma povezala s određenom mješovitosti načina loma neophodno je napraviti podjelu energije loma na udjele od različitih načina loma. U tu se svrhu mogu primijeniti različite analitičke i numeričke metode, od kojih svaka nosi određenu nesigurnost i, što je veći problem, u određenim slučajevima mogu dati i značajno različite rezultate, zbog čega ova problematika izaziva veliko interesiranje u znanstvenoj zajednici u posljednjih 30-tak godina.

2 Pionirske teorije prema Williamsu (globalno rješenje) i Hutchinsonu i Suou (lokalno rješenje)

U radu će se razmatrati dvije pionirske suprotstavljene teorije podjele energije, rješenja prema Williamsu (1) i prema Hutchinsonu i Suu (2), okarakterizirana kao globalno i lokalno rješenje u kasnijim znanstvenim diskusijama. Primjenom ove dvije teorije kod pokusa sa simetričnim grednim uzorcima (uzorci s jednakim debljinama krakova) dobiju se suglasni rezultati, međutim, kod pokusa s asimetričnim grednim uzorcima, one pokazuju znatno neslaganje rezultata, što je izazvalo veliko interesiranje u znanstvenoj zajednici, polemiku i daljnja istraživanja. Ovdje se neće detaljnije razmatrati, ali potrebno je spomenuti pokušaj (3) u kome je su predložena dva granična rješenja primjenom Timoshenkove i klasične – Eulerove teorije greda.

Williams je razmatrao homogenu izotropnu gredu s pukotinom (delaminacijom) na određenom rastojanju od gornje ili donje površine, tj. gredu koja se razdvaja na dva kraka (vidjeti sliku 2.). Do energije loma je došao primjenom klasične teorije greda. U osnovnom razmatranju uzeto je opterećenje momentom savijanja, ali prikazana je i mogućnost superpozicije poprečnih i uzdužnih sila. Podjela energije loma u Williamsovoj teoriji napravljena je usvajanjem sljedećih (globalnih) prepostavki o ponašanju i opterećenju prilikom načina I i načina II loma: čisti način II loma dobije se ako nema normalnog razdvajanja između dva kraka, tj. ako su im elastične linije podudarne; čisti način I loma dobije se ako su momenti koji djeluju na dva kraka jednaki i suprotnih smjerova. Prema ovim prepostavkama su dobiveni izrazi za dijelove energije vezane za načina I i način II loma, prema kojim mješovitost načina loma ovisi samo o geometriji i opterećenju.

Hutchinson i Suo su primijenili polu-analitički pristup, gdje su analitičkim putem, primjenom J -integrala, došli do energije loma, a podjelu energije su bazirali na faktorima intenziteta naprezanja za vršak pukotine (lokalni pristup) do kojih su došli numerički rješavajući integralne jednadžbe stanja naprezanja oko vrška pukotine. I prema ovom rješenju se dobije da mješovitost načina loma ovisi samo o geometriji i opterećenju.

3 Nova SACA metoda podjele energije

Posljednja istraživanja (4-8), temeljena na numeričkim simulacijama loma primjenom modela kohezivne zone (9-12), su dovela do razvoja nove polu-analitičke, SACA metode (engl. *Semi-Analytical Cohesive Analysis*) (13). Ova istraživanja su pokazala netočnost postojećih teorija za podjelu energije za pokuse delaminacije s asimetričnim grednim uzorcima i potrebu drugačijeg pristupa razmatranju ovog problema. Kao glavni nedostatak postojećih teorija je označeno to što one ne uzimaju u obzir svojstva materijala uzorka i spoja između slojeva. Opisivanjem spoja između slojeva kohezivnim modelom i razmatranjem numeričke duljine zone procesa loma, FPZ (engl. *fracture process zone*), uočena je jedinstvena ovisnost mješovitosti načina loma o duljini FPZ. Ova zona obuhvata kohezivne elemente koji su prešli prag iniciranja oštećenja (međuslojna čvrstoća) i nalaze se u procesu loma i stanju degradacije mehaničkih osobina materijala. Ipak, u SACA metodi nisu u potpunosti odbačena pionirska rješenja, jer su rezultati numeričkih istraživanja pokazala kako bi Williamsovo globalno i lokalno rješenje Hutchinsona i Sua mogli predstavljati donju i gornju granicu (ekstrem) mješovitosti načina loma, pri čemu se s povećanjem duljine FPZ numerički rezultati približavaju Williamsovom rješenju, a sa smanjivanjem Hutchinsonovom i Suovom, i obrnuto za smanjenje duljine FPZ. Shodno tome u SACA metodi (13) predložena je nova veličina, normalizirana mješovitost načina loma definirana izrazom:

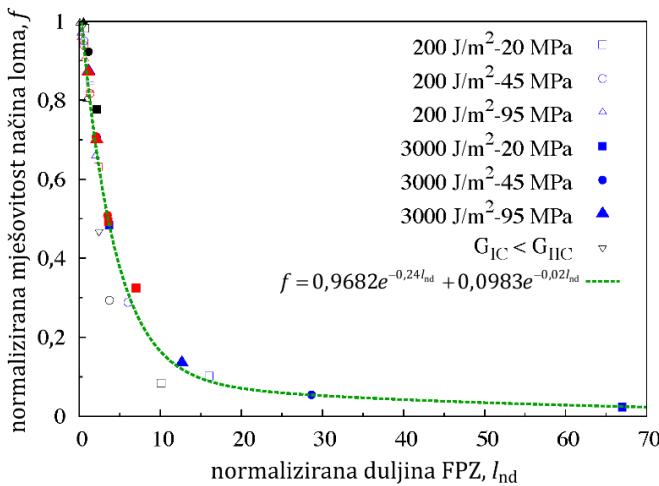
$$f = \left[\left(\frac{G_{II}}{G} \right) - \left(\frac{G_{II}}{G} \right)_W \right] / \left[\left(\frac{G_{II}}{G} \right)_{HS} - \left(\frac{G_{II}}{G} \right)_W \right], \quad (1)$$

gdje su $\left(\frac{G_{II}}{G} \right)_W$ i $\left(\frac{G_{II}}{G} \right)_{HS}$ udjeli energije vezane za način II loma u ukupnoj energiji loma dobivene primjenom Williamsovog i rješenja Hutchinsona i Suoa, slijedom.

Pored ove normalizirane veličine, u SACA metodi se koristi i normalizirana duljina FPZ, $l_{nd} = l_{FPZ}/a_c$ koja se računa na temelju duljine FPZ, l_{FPZ} i najmanje karakteristične dimenzije (debljine krakova uzorka), $a_c = \min[h_1, h_2]$.

Na slici 1. su prikazani rezultati ovisnosti normalizirane mješovitost načina loma o normaliziranoj duljini FPZ za različite pokuse delaminacije s različitim svojstvima kohezivne zone. Radi ograničenja prostora ovdje se neće davati detalji o ovim istraživanjima, čijom analizom je uočena jedinstvena ovisnosti normalizirane mješovitosti načina loma i normalizirane duljine FPZ, te se eksponencijalnom regresijom dobio izraz:

$$f = \begin{cases} 1 & , \text{ za } l_{nd} \leq 0,3 \\ 0,9682e^{-0,24l_{nd}} + 0,0983e^{-0,24l_{nd}}, & \text{ za } l_{nd} > 0,3 \end{cases} \quad (2)$$

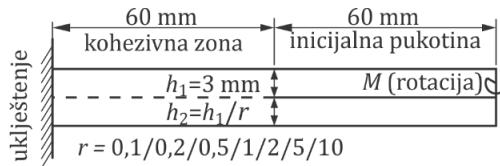


Slika 1. Normalizirana mješovitost načina loma u ovisnosti o normaliziranoj duljini FPZ za različite pokuse delaminacije (različite boje točaka na grafikonu) s različitim svojstvima kohezivne zone (kritična energija loma i međuslojna čvrstoća) (13).

Za procjenu duljine FPZ u SACA metodi se koriste analitički izrazi prema (14) uz određene prilagodbe (pogledati (13) za više detalja). Kako je u ovim izrazima za izračunavanje FPZ potrebno poznavati i mješovitost načina loma, tj. kritične energije vezane za način I i način II loma, SACA proračun je zasnovan na numeričkoj, iterativnoj proceduri, u kojoj se u prvom koraku pretpostavlja mješovitost loma, a u dalnjim se prilagođava, do ostvarivanja tražene točnosti. Ova procedura je putem makroa ubaćena u Excel dokument, koji je dostupan za slobodnu uporabu (15).

3 Usporedba različitih rješenja s numeričkim rezultatima

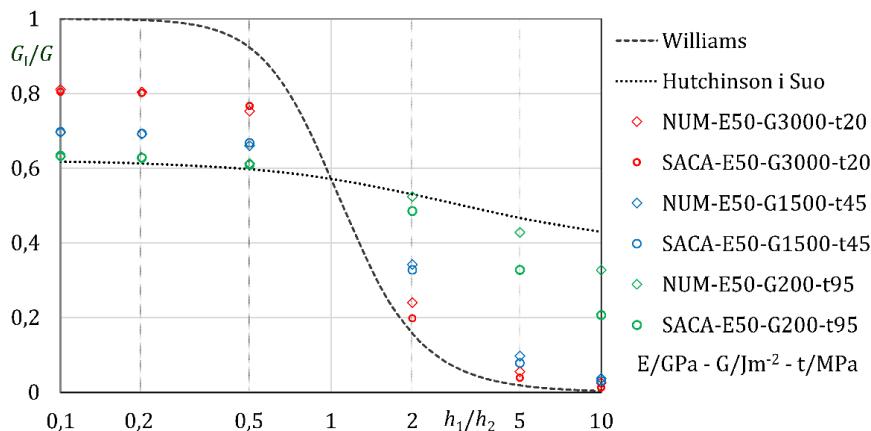
U radu (8) su napravljena opsežna numerička istraživanja pokusa delaminacije primjenom modela kohezivne zone. Ovdje će se prikazati rezultati istraživanja za konfiguraciju pokusa prikazanu na slici 2, DCB uzorak (engl. *double cantilever beam*), kome je jedan krak opterećen momentom savijanja.



Slika 2. Konfiguracija pokusa delaminacije (8).

U istraživanju su mijenjane različite geometrije uzorka (odnosi debljina krakova $r = h_1/h_2$), i svojstva kohezivne zone. Korištene su tri kombinacije (vidjeti sliku 3.) međuslojne čvrstoće i kritične energije loma, s kojim su ostvarene i različite duljine FPZ (dvije ekstremne i srednja

duljina). U istraživanju je korišten komercijalni MKE softver ABAQUS (10) i model kohezivne zone s početnim linearno elastičnim ponašanjem definiranim s proizvoljno velikom krutošću $K = 10^{15}$ Pa, i linearnim razvojem oštećenja. Za oba pravca naprezanja i razdvajanja, normalni i tangencijalni (način I i način II loma), su, radi pojednostavljenja, korištene iste vrijednosti značajki kohezivnog zakona. U istraživanju su mijenjane i različite vrijednosti modula elastičnosti osnovnog materijala, a ovdje su prikazani rezultati za $E = 50$ GPa.



Slika 3. Usporedba različitih rješenja (Williams, Hutchinson i Suo, SACA) s rezultatima numeričkih simulacija (8).

Na slici 3. je prikazana usporedba mješovitosti načina loma, izražene udjelom energije vezana za način I loma u ukupnoj energiji loma (G_1/G) dobivene prethodno opisanim numeričkim istraživanjima i primjenom rješenja prema Williamsu, Hutchinson i Suo, te SACA metodom. Kao što je već navedeno, primjenom pionirskega rješenja se dobiju krivulje mješovitosti načina loma koja ne ovise o kohezivnim svojstvima. Numerički rezultati potvrđuju pretpostavku o tome kako te krivulje mogu predstavljati granice (ekstreme) mješovitosti načina loma. Numerički rezultati se slažu s rezultatima dobivenim SACA metodom, uz određenja odstupanja, zavisno od konfiguracije. Pretpostavlja se da su nešto veća odstupanja za određene konfiguracije uslijed odstupanja duljina FPZ dobivenih analitičkim izrazima koji se koriste u SACA metodi i duljina FPZ ostvarenih u numeričkim simulacijama. Ova opažanja potvrđuju i preostali numerički rezultati iz (8), kao i iz radova (4-7).

4 Zaključak

Rezultati numeričkih istraživanja pokusa delaminacije s asimetričnim grednim uzorcima, primjenom modela kohezivne zone, su ukazali na glavni nedostatak pionirske, suprotstavljenih rješenja podjele energije prema Williamsu i prema Hutchinsonu i Suou: neovisnost mješovitosti načina loma o svojstvima materijala uzorka. Ipak, ova rješenja nisu u potpunosti odbačena, nego je ukazano kako bi ona mogla predstavljati granice (extreme) mješovitosti načina loma. Temeljem ovih rezultata, novim i inovativnim pristupom problemu, u SACA metodi su objedinjene ove dvije pionirske teorije, gdje je utjecaj svojstava osnovnog materijala uzorka i spoja između

slojeva (kohezivne zone) opisan samo jednim čimbenikom, duljinom FPZ. Čini se kako bi ovo mogao biti put za rješenje dugogodišnjeg problema podjele energije loma u pokusima delaminacije s asimetričnim uzorcima. Ipak, SACA metoda je zasnovana na numeričkim rezultatima dobivenim primjenom modela kohezivne zone, te njena točnost ovisi o samoj točnosti numeričkog modela. Shodno tome, moguća su daljnja istraživanja na poboljšanju SACA metode paralelno s istraživanjima modela kohezivne zone za opisivanje procesa delaminacije. Također, poboljšanje SACA metode je moguće ostvariti poboljšanjem točnosti izraza za procjenu duljine FPZ.

Literatura

1. Williams J. On the calculation of energy release rates for cracked laminates. *International Journal of Fracture*. 1988;36(2):101-19.
2. Hutchinson JW, Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials. *Advances in applied mechanics*. 1992;29(63):191.
3. Wang S, Harvey C. A theory of one-dimensional fracture. *Composite Structures*. 2012;94(2):758-67.
4. Conroy M, Ivankovic A, Karac A, Williams J. Mode-Mixity In Beam-Like Geometries: Global Partitioning with Cohesive Zones. 36th Annual Meeting of The Adhesion Society; Hilton Daytona Beach, Daltona, FL, USA2013.
5. Conroy M, Sørensen BF, Ivankovic A. Combined Numerical and Experimental Investigation of Mode-Mixity in Beam Like Geometries. 37th Annual Meeting of The Adhesion Society2014.
6. Kačmarčík J, Karač A. Mode-Mixity in Numerical Simulation of FRMM Test: Local Partitioning using Cohesive Zone. 18th International Research/Expert Conference "Trends in the Development of Machinery and Associated Technology", TMT 2014; 10-12 September; Budapest, Hungary2014.
7. Kačmarčík J, Konjatić P, Karač A. Investigation of the mixed-mode fracture in delamination tests: numerical simulations using cohesive zone and partitioning methods. *Tehnicki vjesnik/Technical Gazette*. 2015;22(3):711-19.
8. Kačmarčík J. Numeričko istraživanje mješovitog načina loma u pokusima delaminacije uporabom modela kohezivne zone [doktorska disertacija]. Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu: Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku; 2016.
9. Camanho PP, Dávila CG. Mixed-mode decohesion finite elements for the simulation of delamination in composite materials. *NASA-Technical paper*. 2002;211737(1):33.
10. Park K, Paulino GH. Cohesive zone models: a critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces. *Applied Mechanics Reviews*. 2011;64(6):060802.
11. Abaqus. *Abaqus Analysis User's Guide* (v. 6.14): DassaultSystèmes; 2014.
12. Elices M, Guinea G, Gomez J, Planas J. The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges. *Engineering fracture mechanics*. 2002;69(2):137-63.
13. Conroy M, Kinloch AJ, Williams JG, Ivankovic A. Mixed mode partitioning of beam-like geometries: A damage dependent solution. *Engineering Fracture Mechanics*. 2015; 149:351-67
14. Yang Q, Cox B. Cohesive models for damage evolution in laminated composites. *International Journal of Fracture*. 2005;133(2):107-37.
15. Mixed Mode: UCD Centre of Adhesion and Adhesives, School of Mechanical & Materials Engineering, University College Dublin [Online]; Dostupno na: http://adhesion.ucd.ie/caa/CAA_MixedMode.html [16.5.2017].

Usporedba modela materijala u opisu ravninske anizotropije lima Al5754-H22

Kovačić, M.¹, Cvitanić, V.² i Krstulović-Opara, L.³

Sažetak

U ovom radu, na temelju rezultata pokusa jednoosnog rastezanja uzoraka lima različitih orijentacija u odnosu na pravac valjanja određene su plastične karakteristike lima aluminijске legure Al5754-H22. Za ispitivane uzorke određene su vrijednosti naprezanja tečenja koje odgovaraju početnoj plastičnoj deformaciji i konstantne vrijednosti Lankfordova parametra za određeni interval uzdužne deformacije. U predviđanju ravninske plastične anizotropije razmatranog materijala analizirani su modeli koji se temelje na ortotropnoj Karafillis-Boyce funkciji naprezanja ili ortotropnoj Yld2000-2d funkciji naprezanja i prepostavci o pridruženom odnosno nepridruženom pravilu tečenja. Prikazana je usporedba predviđanja orijentacijskih ovisnosti omjera naprezanja tečenja i Lankfordova parametra dobivenih navedenim modelima.

Ključne riječi: ravninska plastična anizotropija, pridruženo/nepridruženo pravilo tečenja, Karafillis-Boyce funkcija naprezanja, Yld2000-2d funkcija naprezanja

¹ **Maja Kovačić, mag. ing.**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: majkovac@fesb.hr

² **Izv. prof. dr. sc. Vedrana Cvitanić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: vcvit@fesb.hr

³ **Prof. dr. sc. Lovre Krstulović-Opara**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, Ruđera Boškovića 32, 21000 Split, e-mail: Lovre.Krstulovic-Opara@fesb.hr

1 Uvod

Važnost opisa plastične anizotropije kod predviđanja postupaka oblikovanja metalnih limova prepoznata je kroz dugi niz godina. U literaturi postoji mnogo fenomenoloških elasto-plastičnih modela koji se temelje na anizotropnim funkcijama tečenja kojima se može opisati ravninska plastična anizotropija odnosno orijentacijska ovisnost plastičnih karakteristika metalnih limova. Ako se koristi pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja funkcija tečenja ista je kao plastični potencijal odnosno funkcija koja opisuje plastični tok, dok su prema pretpostavci o nepridruženom pravilu tečenja to dvije različite funkcije. Anizotropni parametri funkcije tečenja/plastičnog potencijala koji se koriste za opis anizotropnog plastičnog ponašanja limova određuju se na temelju vrijednosti naprezanja tečenja i/ili Lankfordova parametra koji se dobiju u pokusima jednoosnog rastezanja uzoraka lima različitih orijentacija u odnosu na pravac valjanja. Lankfordov parametar r predstavlja mjeru plastičnog toka a definira se kao omjer prirasta plastične deformacije na pravcu širine i na pravcu debljine uzorka u pokusu rastezanja.

U 2. poglavlju ovog rada prikazani su rezultati pokusa rastezanja uzoraka lima različitih orijentacija u odnosu na pravac valjanja, aluminjske legure Al5754-H22. Za ispitivane uzorke određeni su omjeri naprezanja tečenja i konstantne vrijednosti Lankfordova parametra. U svrhu opisa orijentacijske ovisnosti omjera naprezanja tečenja i Lankfordova parametra razmatraju se dvije ortotropne funkcije naprezanja, Karafillis-Boyce funkcija (1) i složenija Yld2000-2d funkcija (2), uz pretpostavku o pridruženom odnosno nepridruženom pravilu tečenja. Korištene ortotropne funkcije naprezanja opisane su u poglavlju 3. U poglavlju 4 prikazana je usporedba predviđanja orijentacijskih ovisnosti naprezanja tečenja i Lankfordova parametra dobivenih navedenim modelima te su na samom kraju izneseni zaključci.

2 Pokusi jednoosnog rastezanja uzoraka lima Al5754-H22

Pokusi jednoosnog rastezanja provedeni su na uzorcima lima aluminjske legure Al5754-H22 orijentacija $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ i 90° u odnosu na pravac valjanja. Za svaku navedenu orijentaciju pokusi su provedeni za 3 uzorka, odnosno ukupno je ispitano 21 uzorak. Geometrija uzoraka debljine 1,0 mm, s mjernim dijelom duljine 50 mm i širine 12,5 mm, odabrana je u skladu s ISO10113:2006 standardom. Pokusi rastezanja izvršeni su na INSTRON 8801 kidalici pri čemu je produljenje odnosno suženje mjernog dijela uzorka mjereno istovremeno s dva ekstenzometra (uzdužni ekstenzometar EPSILON 3542 i poprečni ekstenzometar EPSILON 3575AVG-ST). Uzorci su razvlačeni brzinom 0,02 mm/s. Na temelju rezultata mjerena i usvojenih konstanti elastičnosti za sve uzorke (Youngov modul elastičnosti $E=69$ GPa i Poissonov koeficijent $\nu=0.33$) dobiveni su dijagrami prikazani na slikama 1.a) i 1.b). Na slici 1.a) prikazana je ovisnost stvarnog naprezanja o stvarnoj uzdužnoj plastičnoj deformaciji, dok je na slici 1.b) prikazana ovisnost stvarne poprečne plastične deformacije i stvarne uzdužne plastične deformacije za jednu seriju uzoraka ispitivanih orijentacija. Aproksimacija ovisnosti naprezanje-deformacija prikazana na slici 1.a) provedena je korištenjem kombiniranog Swift-Voce zakona očvršćivanja

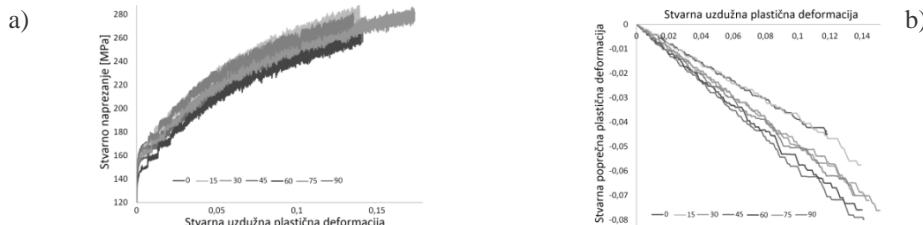
$$\sigma = c' \left(k \left(\bar{\varepsilon}_0^p + \varepsilon_{11}^p \right)^n \right) + (1 - c') (R + Q (1 - e^{-b \varepsilon_{11}^p})) \quad (1)$$

gdje su $\bar{\varepsilon}_0^p, R, Q, n, b$ i k parametri očvršćivanja, c' težinski faktor udjela funkcija, σ stvarno naprezanje a ε_{11}^p stvarna uzdužna plastična deformacija. Ovisnost stvarna poprečna-stvarna

uzdužna plastična deformacija prikazana na slici 1.b) aproksimirana je linearom funkcijom prema $\varepsilon_{22}^p = a\varepsilon_{11}^p$, gdje je ε_{22}^p stvarna poprečna plastična deformacija a parametar a predstavlja nagib pravca aproksimacije koji prolazi kroz ishodište. Ako se Lankfordov parametar r razmatra kao nepromjenjiva veličina na određenom intervalu deformacije, uz korištenje uvjeta plastične inkompresibilnosti ($d\varepsilon_{11}^p + d\varepsilon_{22}^p + d\varepsilon_{33}^p = 0$) slijedi da se može izračunati na temelju nagiba pravca usvojene aproksimacije

$$r = \frac{d\varepsilon_{22}^p}{d\varepsilon_{33}^p} = \frac{d\varepsilon_{22}^p}{-(d\varepsilon_{11}^p + d\varepsilon_{22}^p)} = \frac{-a}{1+a} \quad (2)$$

U izrazu (2) $d\varepsilon_{11}^p$, $d\varepsilon_{22}^p$ i $d\varepsilon_{33}^p$ predstavljaju inkrementne stvarne plastične deformacije na pravcu duljine, širine odnosno debljine uzorka. Nakon provedenih jednoosnih pokusa rastezanja određene su konstantne vrijednosti Lankfordova parametra prema izrazu (2) za sve ispitivane uzorke. Koristeći kombinirani Swift-Voce zakon očvršćivanja prema izrazu (1), izračunate su vrijednosti naprezanja tečenja za vrijednost stvarne uzdužne plastične deformacije $\varepsilon_{11}^p = 0.001$ za sve uzorke. Usporedbom vrijednosti Lankfordova parametra za 3 uzorka pojedine orijentacije, odbačeni su uzorci s ekstremnom vrijednosti ovog parametra. Konačno, za Lankfordov parametar pojedine orijentacije usvojena je srednja vrijednost Lankfordova parametra preostalih dvaju uzoraka. Slično, kao vrijednost naprezanja tečenja pojedine orijentacije usvojena je srednja vrijednost naprezanja tečenja preostalih uzoraka. Usvojene reprezentativne vrijednosti početnog naprezanja tečenja i konstantnog Lankfordova parametra za sve ispitivane orijentacije prikazane su u tablici 1. Na temelju prikazanih rezultata može se zaključiti da se vrijednosti naprezanja tečenja za različite orijentacije malo razlikuju dok Lankfordov parametar pokazuje izraženu orijentacijsku ovisnost.



Slika 1. a) Naprezanje-deformacija; b) Uzdužna-poprečna deformacija. Legura Al5754-H22.

Tablica 1. Vrijednosti naprezanja tečenja i Lankfordova parametra. Legura Al5754-H22.

	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
σ_y [MPa]	157.69	158.85	153.42	154.03	147.39	151.28	151.80
r	0.625	0.645	1.009	1.368	1.251	0.981	0.980

3 Analizirane funkcije naprezanja

3.1 Karafillis-Boyce funkcija naprezanja

Ortotropna Karafillis-Boyce funkcija naprezanja (1) je linearna kombinacija dviju konveksnih nekvadratičnih funkcija naprezanja

$$f_y = \left[\frac{(1-c)}{2} (|\tilde{s}_1 - \tilde{s}_2|^m + |\tilde{s}_2 - \tilde{s}_3|^m + |\tilde{s}_3 - \tilde{s}_1|^m) + c \frac{3^m}{2(2^{m-1} + 1)} (|\tilde{s}_1|^m + |\tilde{s}_2|^m + |\tilde{s}_3|^m) \right]^{1/m} \quad (3)$$

gdje su \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 i \tilde{s}_3 glavna naprezanja ekvivalentnog tenzora naprezanja, c je faktor udjela funkcija a m eksponent koji se može dovesti u vezu s kristalografskom strukturom materijala. Vrijednosti eksponenta $m=6$ odnosno $m=8$ prikladni su za materijale s prostorno odnosno plošno centriranom kubnom rešetkom. Za ravninsko stanje naprezanja, komponente ekvivalentnog tenzora naprezanja definiraju se kao

$$\begin{Bmatrix} \tilde{s}_{xx} \\ \tilde{s}_{yy} \\ \tilde{s}_{zz} \\ \tilde{s}_{xy} \end{Bmatrix} = C \begin{Bmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_3 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & \beta_3 & 0 \\ \beta_2 & \beta_3 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

gdje je $\beta_1 = (\alpha_2 - \alpha_1 - 1)/2$, $\beta_2 = (\alpha_1 - \alpha_2 - 1)/2$ i $\beta_3 = (1 - \alpha_1 - \alpha_2)/2$. Glavna naprezanja ekvivalentnog tenzora naprezanja $\tilde{\mathbf{s}}$ jednaka su

$$\tilde{s}_{1,2} = (\tilde{s}_{xx} + \tilde{s}_{yy})/2 \pm \sqrt{((\tilde{s}_{xx} + \tilde{s}_{yy})/2)^2 + (\tilde{s}_{xy})^2}; \quad \tilde{s}_3 = \tilde{s}_{zz} \quad (5)$$

U gornjim izrazima četiri parametra $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_3$ i C opisuju anizotropno ponašanje materijala. Za izotropan materijal, parametri iznose $C = 2/3$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ te $\gamma_3 = 3/2$. Uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja, parametri funkcije tečenja mogu se odrediti na temelju vrijednosti naprezanja tečenja za uzorce orijentacije $0^\circ, 45^\circ$ i 90° te vrijednosti ujednačenog dvoosnog naprezanja tečenja σ_b ($\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b$), a parametri funkcije plastičnog potencijala mogu se odrediti na temelju vrijednosti Lankfordova parametra za orijentacije $0^\circ, 45^\circ$ i 90° i vrijednosti naprezanja tečenja za pravac valjanja ($\sigma_0, r_0, r_{45}, r_{90}$). U ovom radu pretpostavljena je vrijednost $\sigma_b = (\sigma_0 + \sigma_{90})/2$. Ako se koristi pridruženo pravilo tečenja, parametri funkcije tečenja/plastičnog potencijala mogu biti određeni na temelju vrijednosti $\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}$ i σ_b ili na temelju vrijednosti σ_0, r_0, r_{45} i r_{90} . Kalibracija parametara svodi se na rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi nekim od iterativnih postupaka. U ovom radu korišten je Newton-Raphsonov iterativni postupak.

3.2 Yld2000-2d funkcija naprezanja

Nekvadratična Yld2000-2d funkcija naprezanja (2) temelji se na dvije konveksne funkcije φ' i φ'' koje su funkcije komponenti linearno transformiranih tenzora naprezanja. Za ravninsko stanje naprezanja funkcija Yld2000-2d glasi

$$f_y = \left[0.5 * \left((X'_1 - X'_2)^m + (2X''_2 + X''_1)^m + (2X''_1 + X''_2)^m \right) \right]^{1/m} \quad (6)$$

gdje su $X'_{1,2}$ i $X''_{1,2}$ glavna naprezanja linearno transformiranih tenzora naprezanja $\tilde{\mathbf{s}}' = \mathbf{L}' \cdot \boldsymbol{\sigma}$ odnosno $\tilde{\mathbf{s}}'' = \mathbf{L}'' \cdot \boldsymbol{\sigma}$ gdje za \mathbf{L}' i \mathbf{L}'' vrijedi

$$\begin{Bmatrix} L'_{11} \\ L'_{12} \\ L'_{21} \\ L'_{22} \\ L'_{66} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_7 \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} L''_{11} \\ L''_{12} \\ L''_{21} \\ L''_{22} \\ L''_{66} \end{Bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{Bmatrix} -2 & 2 & 8 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & -4 & 4 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Glavna naprezanja $X'_{1,2}$ i $X''_{1,2}$ računaju se prema

$$X'_{1,2} = (\bar{s}'_{xx} + \bar{s}'_{yy})/2 \pm \sqrt{((\bar{s}'_{xx} - \bar{s}'_{yy})/2)^2 + \bar{s}'_{xy}^2}; X''_{1,2} = (\bar{s}''_{xx} + \bar{s}''_{yy})/2 \pm \sqrt{((\bar{s}''_{xx} - \bar{s}''_{yy})/2)^2 + \bar{s}''_{xy}^2} \quad (8)$$

U gornjim izrazima osam parametra $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ i α_8 opisuju anizotropno ponašanje materijala. Ako se koristi pretpostavka o pridruženom pravilu tečenja, anizotropni parametri Yld2000-2d funkcije tečenja/plastičnog potencijala mogu se odrediti na temelju vrijednosti naprezanja tečenja i Lankfordova parametra za orijentacije $0^\circ, 45^\circ$ i 90° i za ujednačeno dvoosno stanje naprezanja σ_b i r_b ($\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b, r_0, r_{45}, r_{90}, r_b$). U ovom radu usvojene su vrijednosti $r_b \cong r_0$ te $\sigma_b = (\sigma_0 + \sigma_{90})/2$. Ako se pretpostavi nepridruženo pravilo tečenja, parametri Yld2000-2d funkcije tečenja računaju se na temelju 8 eksperimentalnih vrijednosti naprezanja tečenja ($\sigma_0, \sigma_{15}, \sigma_{30}, \sigma_{45}, \sigma_{60}, \sigma_{75}, \sigma_{90}, \sigma_b$), dok se parametri Yld2000-2d plastičnog potencijala računaju na temelju 8 eksperimentalnih vrijednosti Lankfordova parametra ($r_0, r_{15}, r_{30}, r_{45}, r_{60}, r_{75}, r_{90}, r_b$), odnosno u postupku kalibracije potrebno je poznavati 16 eksperimentalnih podataka. Kalibracija parametara svodi se na rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi nekim od iterativnih postupaka. U ovom radu za određivanje parametara korištena je *fminsearch* funkcija programskog paketa MATLAB.

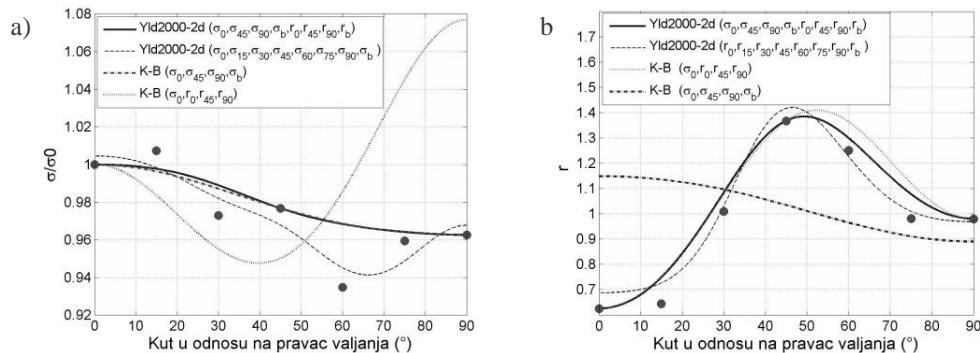
4 Predviđanje ravninske anizotropije lima Al5754-H22

Parametri anizotropije različito kalibriranih analiziranih funkcija naprezanja za aluminijsku leguru Al5754-H22 prikazani su u tablici 2. U ovom radu, korištena vrijednost parametra m iznosi 8. Predviđanja orijentacijske ovisnosti omjera naprezanja tečenja i Lankfordova parametra dobivena Karafillis-Boyce/Yld2000-2d funkcijom naprezanja uz pretpostavku o pridruženom/nepridruženom pravilu tečenja prikazana su na slici 2.a) i na slici 2.b).

Na slikama 2.a) i 2.b) može se uočiti da ako se koristi pridruženo pravilo, 4-parametarska Karafillis-Boyce funkcija kalibrirana na temelju naprezanja tečenja slabo predviđa orijentacijsku ovisnost Lankfordova parametra. Slično, Karafillis-Boyce funkcija kalibrirana na temelju Lankfordovih parametara slabo predviđa orijentacijsku ovisnost naprezanja tečenja. Očekivano, bolja predviđanja orijentacijske ovisnosti obje veličine uz postavku o pridruženom pravilu dobivena su složenijom 8-parametarskom Yld2000-2d funkcijom kalibriranoj na temelju vrijednosti naprezanja i Lankfordovih parametara. Nadalje, može se uočiti da Karafillis-Boyce funkcija tečenja/plastični potencijal daje bolja predviđanja omjera naprezanja tečenja odnosno Lankfordovih parametara ako se koristi pretpostavka o nepridruženom pravilu tečenja kao što je pokazano i u radu (3). Predviđanja dobivena Karafillis-Boyce funkcijom tečenja/plastičnim potencijalom uz pretpostavku o nepridruženom pravilu gotovo se preklapaju s predviđanjima dobivenim Yld2000-2d funkcijom uz pretpostavku o pridruženom pravilu. Uz postavku o nepridruženom pravilu, Yld2000-2d funkcija kalibrirana na temelju 8 vrijednosti naprezanja koristi se kao funkcija tečenja, a Yld2000-2d funkcija kalibrirana na temelju 8 vrijednosti Lankfordovih parametara kao plastični potencijal. Može se uočiti da ovako kalibrirane funkcije ne prolaze kroz sve vrijednosti naprezanja/Lankfordovih parametara na temelju kojih su određene. Ovakva odstupanja uočena su i u drugim radovima (4), a uvjetovana su postavkama iterativnog postupka korištenog pri proračunu parametara. Konačno, na temelju prikazanih rezultata može se zaključiti da se najbolja predviđanja analiziranih orijentacijskih ovisnosti dobiju nepridruženim modelom koji koristi Yld2000-2d funkciju.

Tablica 2. Vrijednosti anizotropnih parametara. Legura Al5754-H22.

Karafillis-Boyce	<i>C</i>		α_1		α_2		γ_3
$\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}$	0.667		1.039		1.019		1.538
$\sigma_0, r_0, r_{45}, r_{90}$	0.665		0.930		1.003		1.605
Yld2000-2d	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
$\sigma_0, \sigma_{45}, \sigma_{90}, \sigma_b, r_0, r_{45}, r_{90}, r_b$	0.888	1.114	0.907	1.006	1.042	1.079	1.044
$\sigma_0, \sigma_{15}, \sigma_{30}, \sigma_{45}, \sigma_{60}, \sigma_{75}, \sigma_{90}, \sigma_b$	2.086	-1.063	-0.719	0.665	0.850	1.242	0.849
$r_0, r_{15}, r_{30}, r_{45}, r_{60}, r_{75}, r_{90}, r_b$	-0.069	1.473	0.010	0.910	0.876	0.235	1.012
							1.654



Slika 2. Predviđanja orijentacijske ovisnosti a) omjera naprezanja tečenja; b) Lankfordova parametra. Legura Al5754-H22.

5 Zaključak

U ovom radu, na temelju rezultata pokusa rastezanja uzoraka različitih orijentacija u odnosu na pravac valjanja određene su plastične karakteristike za lim aluminijске legure Al5754-H22. Prikazana je usporedba predviđanja orijentacijske ovisnosti početnog naprezanja tečenja i konstantnog Lankfordova parametra koja se dobiju korištenjem 4 parametarske ortotropne Karafillis-Boyce funkcije naprezanja ili 8 parametarske ortotropne Yld2000-2d funkcije naprezanja, uz pretpostavku o pridruženom odnosno nepridruženom pravilu tečenja. Najbolje predviđanje eksperimentalnih orijentacijskih ovisnosti navedenih veličina dobiveno je modelom koji koristi složeniju Yld2000-2d funkciju naprezanja uz pretpostavku o nepridruženom pravilu tečenja.

Literatura

1. Karafillis AP, Boyce MC. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. *J Mech Phys Solids*. 1993;41(12):1859–86.
2. Barlat F, Brem JC, Yoon JW, Chung K, Dick RE, Lege DJ, et al. Plane stress yield function for aluminum alloy sheets - Part 1: Theory. *Int J Plast*. 2003;19(9):1297–319.
3. Cvitanic V, Vlak F, Lozina Ž. A finite element formulation based on non-associated plasticity for sheet metal forming. *Int J Plast*. 2008;24(4):646–87.
4. Safaei M, Lee MG, Zang SL, De Waele W. An evolutionary anisotropic model for sheet metals based on non-associated flow rule approach. *Comput Mater Sci*. 2014;81:15–29.

Poziv na primjenu smartphone-a i tablet računala u inženjerstvu

Kožar, I.¹

Sažetak

Cilj je ovog rada poziv na korištenje smartphone-a u nastavi na tehničkim fakultetima i postavlja više pitanja nego što daje odgovora. U prvom redu je to pitanje opstanka fakulteta u obliku kakvi su danas. Velika sveučilišta engleskog govornog područja, kao Cambridge University, Oxford University, University College London, Yale University, MIT, Harvard, Trinity College Dublin i mnoga dr. već su dugo prisutna na Internetu s javno dostupnim snimkama predavanja i drugim nastavnim materijalima. Neka od njih su osnovala ili potaknula osnivanje nezavisnih MOOCs odjela ili poduzeća koja nude usluge školovanja i polaganja ispita preko Interneta, uz naknadu koja je višestruko manja od redovne cijene studiranja na tom sveučilištu.

Pitanje koje si trebamo postaviti je: "zašto bi netko želio studirati kod nas?" Također, što bi trebao naučiti i kako ga podučavati a da od toga ima koristi i za 10 ili više godina, u ovom svijetu koji se vrlo brzo mijenja.

Rješenje koje se predlaže je upotreba smartphone-a u nastavi, odnosno, tableta kao njihove, za nastavu puno praktičnije varijante. Isto tako, podučavanje treba zamijeniti motivacijom za samostalno učenje.

Ukratko se navode osnovni razlozi u prilog korištenja smartphone-a i ukratko se prikazuju neke od mogućnosti koje nude kao pomagalo u nastavi na tehničkim fakultetima; potpuniji prikaz mogućnosti smartphone-a i prikladnih aplikacija zahtjeva puno opširniji tekst.

Ključne riječi: smartphone, inženjerstvo, edukacija, aplikacije

¹ Prof. dr. sc. Ivica Kožar, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za računalno modeliranje, Radmile Matejić 3, 51000 Rijeka, e-mail: ivica.kozar@gradri.uniri.hr

1 Uloga smartphone-a u budućnosti školovanja

Tko su to inženjeri? Što karakterizira neku struku? Koja znanja danas prenosi ljudima koji će primjenjivati za 10 i više godina? Koja pomagala trebaju znati koristiti?

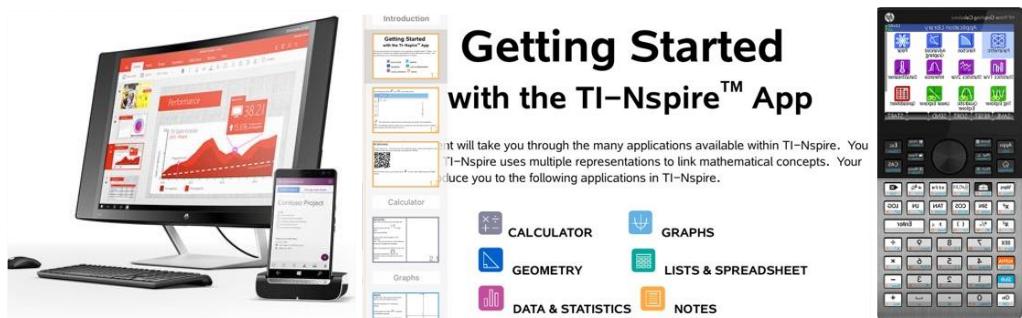
Nekada su to bili šiberi i kalkulatori, danas svi imamo smartphone uređaje. Izvjesno je da će *smartphone* uređaji kakve danas poznajemo doživjeti evoluciju (1, 2) u nešto što će postati dio našeg identiteta, nešto poput nadogradnje naše osobe u komunikacijskom smislu. Ta se nadogradnja treba proširiti i u edukacijskom smislu, tako da se povećaju naše profesionalne kompetencije. Dakle, ne zabrana smartphona na nastavi, nego uvođenje obaveze korištenja u nastavi (ali ne za telefoniranje, iz kojeg razloga ne želim koristiti riječ *telefon*, pa niti prijevod '*pametni telefon*').

Osnovna uloga smartphone je da nam omogući pristup Internetu kao izvoru informacija, a zatim i da nam, kroz aplikacije, olakša rad s podacima. Uzmimo za primjer upotrebu CAS programa (Computer Algebra System) koji omogućuju simboličke manipulacije matematičkih formula; svaki CAS program je bolji u deriviranju i integriranju složenih izraza od 90% diplomiranih studenata bilo kojeg tehničkog usmjerjenja. U pravilu se CAS sistemi daju i programirati. To omogućuje promjenu fokusa nastave sa savladavanje tehnike računanja na razumijevanje problema (3), na formuliranje jednadžbi koje opisuju problem umjesto na učenje metoda kako se te jednadžbe rješavaju; prelaz s rješavanja problema na modeliranje problema.

Treba spomenuti i učenje na daljinu, MOOCs (Massive Open On-line Courses) koji postaju sve popularniji i među 'velikim' sveučilištima; pristup takvima sadržajima bilo kada i bilo gdje moguće je upravo preko smartphone-a (vrlo nemetljiv i pristupačan uvod u to područje pruža iTunesU aplikacija za iOS uređaje).

2 Kratki pregled mogućnosti

U ovom se tekstu koristi pojам *smartphone* ali se on ne odnosi samo na pametni telefon, tu se podrazumijeva i tablet računalo koje u biti samo ima veći ekran jer nas ne zanima mogućnost klasične govorne komunikacije telefonom. U tom smislu, tu se ubrajaju i napredni ručni kalkulatori tvrtki Texas Instruments i Hewlett Packard, a posebno, njihove software-ske emulacije, tj., aplikacije koje na smarphone-u u potpunosti emuliraju rad kalkulatora.



Slika 1. Smartphone HP Elite X3 koji zamjenjuje osobno računalo, aplikacija koja emulira kalkulator TI-Nspire CAS i 'pametni' kalkulator HP Prime

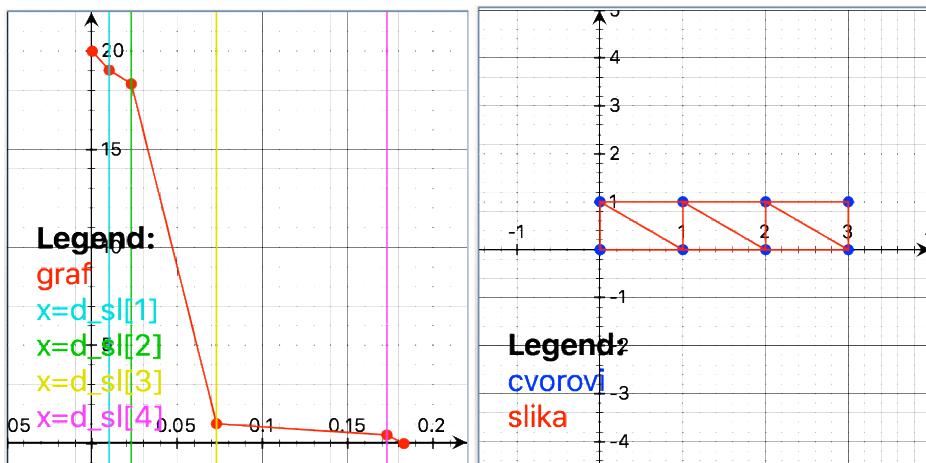
Na slici 1 vidimo smartphone koji zamjenjuje osobno računalo (4), što i nije nešto čudno kada znamo snagu procesora i količinu memorije koja se ugrađuje u moderne smarphone. Dodana je vanjska tipkovnica i veliki ekran radi olakšavanja rada ali centralna jedinica sa svim podacima je ostao smartphone. Treba napomenuti da za ozbiljno i intenzivno korištenje, podatke, radi lagane razmjene među uređajima i korisnicima, treba imati u oblaku (iCloud, OneDrive, Dropbox, Google Drive i dr.).

Sjetimo li se da razvoj operativnog sustava u oblaku Chrome ide u pravcu omogućavanja izvođenja aplikacija za Android operativni sustav, imamo dodatni pokazatelj što bi se moglo dogoditi s osobnim računalima i zašto trebamo poticati širenje upotrebe smartphone-a.

3 Inžinjerski programi za smartphon-e

Kada se spomenu inžinjerski programi uglavnom se misli na velike, složene i skupe programe čija se upotreba dugo uči a koji brzo zastarjevaju. Tu je i trend ugradnje umjetne inteligencije u navedene programe, čime će se olakšati upotreba ali će se i uloga ljudi pri njihovoj upotrebi drastično promijeniti. Na smartphone-ima se neće vrtiti složene simulacije konačnim elementima (ali smartphone može biti pristupna točka takvim programima). Smartphone svakako može poslužiti za edukaciju putem jednostavnijih programa i putem korištenja CAS programa.

Većina CAS programa za kalkulatori i njihove emulacije na smartphone uređajima temelje se na (besplatnom) CAS sustavu *Giac/xcas* koji je razvio Bernard Parisse (5) sa Sveučilišta u Grenoble, Francuska. Tako je *xcas* ugrađen u kalkulator HP Prime i TI-Nspire i njihove emulacije za smartphon-e. Također se koristi u programu PocketCAS koji postoji samo u inačici za iOS.



Slika 2. Prikaz upotrebe programa PocketCAS za izračun raspodjele topline u zidu i za izračun rešetke metodom konačnih (štapnih) elemenata

Kao što je vidljivo sa slike 2, ne radi se o specijaliziranim programima za smartphon-e, nego o programabilnom okruženju koje se prilagođuje nastavnom predmetu gdje se primjenjuje

(konkretno, fizika zgrade i modeliranje konstrukcija), studenti se potiču da sami proizvode rješenja, ne da samo koriste što im je pripremio netko drugi. To je u skladu s trendom da se studenti motiviraju na samostalno učenje (3), da stvori društvo bez škole u današnjem smislu (da citiram Ivana Illich iz Deschooling Society (1970), "School is the advertising agency which makes you believe that you need the society as it is.").

4 Umjesto zaključka

Prijemni ispitni na fakultete i općenito ocjenjivanje studenata, vrlo su detaljno razrađeni i kontrolirani u obrazovnom sustavu Sjedinjenih Država, Kanade i još nekih zemalja čija su sveučilišta, u pravilu, vrlo visoko pozicionirana na svjetskim rang-ljestvicama. Između ostalog, prednost takvog sustava vrednovanja studenata je lagana protočnost i razmjena.

Kalkulatori HP Prime i TI-Nspire odobreni su (4) za upotrebu od strane PSAT/NMSQT, SAT i SAT Subjects Tests, kao i za AP Exams i prijemne ispite odobrene od strane IB. Što znače ove kratice i zašto su za nas važne?

SAT – Scholastic Assessment Test, PSAT – Preliminary SAT

NMSQT – National Merit Scholarship Qualifying Test

SAT Subject Tests se odnosi na testiranja iz 20 školskih predmeta (mehanika je uključena kroz Fiziku C) a služe kao dopunski izvor informacija i sposobnostima studenta pri upisu na fakultet,

IB – International Baccalaureate, međunarodna fondacija koja se bavi edukacijom,

AP Exams – Advanced Placement exams, ispitni za prijeme na fakultete.

Pitanje je kakvi su to ispitni na kojima s mogu koristiti tako sofisticirani kalkulatori i imaju li naši studenti koji ne koriste takve kalkulatore, ikakve šanse?

Zahvala

Zahvala Sveučilištu u Rijeci na potpori 13.05.1.1.02. (voditelj Ivica Kožar).

Literatura

1. <https://www.ted.com/talks>
2. <http://reutersinstitute.politics.ox.ac.uk/publication/journalism-media-and-technology-trends-and-predictions-2017>
3. <https://www.diygenius.com>
4. <http://store.hp.com/us/en/mdp/laptops/hp-elite-x3--1>
5. <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/english.html>
6. <http://www8.hp.com/us/en/campaigns/prime-graphing-calculator/overview.html>

Razvoj numeričkog modela vijčanog priključka pri cikličkom djelovanju

Krolo, P.¹, Grandić, D.²

Sažetak

U radu je prikazan razvoj numeričkog modela vijčanog priključka stupa i grede s obostrano produljenom čelnom pločom primjenom numeričkog programa ABAQUS. Priključak je analiziran na utjecaj cikličkog savijanja koje djeluje na kraju grede. Numerički model obuhvaća geometrijsku i materijalnu nelinearnost osnovnih dijelova priključka, kontakte između spojenih elemenata te prednapinjanje vijaka. Ponašanje priključka pri cikličkom djelovanju prikazano je histereznom krivuljom koja predstavlja krivulju odnosa momenta savijanja i rotacije. Rezultati dobiveni numeričkim simulacijama verificirani su s rezultatima ponašanja priključka koji je prethodno laboratorijski ispitana i dostupan u literaturi. Provedena je analiza ponašanja te je dan kritički osvrt na rezultate dobivene numerički u odnosu na eksperimentalne rezultate. Na kraju je dan prijedlog za poboljšanje numeričkog modela priključka.

Ključne riječi: priključak, cikličko djelovanje, metoda konačnih elemenata, ABAQUS

¹ Dr. sc. Paulina Krolo, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet Rijeka, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmila Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: paulina.krolo@uniri.hr

² Izv. Prof. dr. sc. Davor Grandić, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet Rijeka, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmila Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: davor.grandic@gradri.uniri.hr

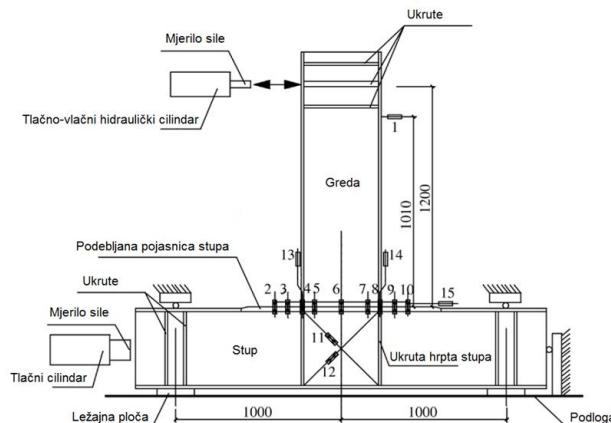
1 Uvod

Numeričke simulacije temeljene na metodi konačnih elemenata uvelike se primjenjuju za definiranje mehaničkih svojstava priključaka u čeličnim konstrukcijama. Ponašanje priključaka vrlo je složeno budući da je potrebno uzeti u obzir brojna svojstva kao što su materijalna nelinearnost (plastično ponašanje, očvršćivanje materijala), geometrijska nelinearnost, interakcije između spojenih elemenata priključka, trenje, proklizavanje, utjecaj prednapinjanja vijaka te komplikirana geometrija. Prvi trodimenzionalni numerički model priključka sa čelnom pločom razvili su Krishnamurty i Graddy, 1976. godine (Krishnamurthy & Graddy , 1976) koji su analizirani na utjecaje monotonog savijanja. Nakon toga provedene su brojne numeričke simulacije priključaka s čelnim pločama s ciljem procjene njihovog ponašanja ne utjecaj monotonog savijanja (Sherbourne & Bahaari, 1994; Bahaari & Sherbourne, 1996; Abolmaali, et al., 2005; Díaz, et al., 2011). Međutim, pod utjecajem dinamičkog opterećenja, ponašanje priključaka se dodatno komplificira zbog uzastopnih izmjena opterećenja i rasterećenja. Zbog složenih kontakata između spojenih elemenata i izrazito nelinearnog ponašanja, numeričke simulacije cikličkog ponašanja priključka s čelnom pločom su vrlo složene. Takvih simulacija nema mnogo i provedene su uglavnom u novije vrijeme (Gerami, et al., 2011; Wang, et al., 2013).

U radu će se prikazati razvoj numeričkog modela vijčanog priključka stupa i grede s obostrano produljenom čelnom pločom na utjecaj cikličkog djelovanja primjenom numeričkog programa ABAQUS. U nastavku je dan sažeti prikaz odabira modela materijala, formiranje mreže konačnih elemenata, odabir rubnih uvjeta i protokol deformiranja, definiranje kontaktnih područja te prednapinjanje vijaka. Rezultati dobiveni numeričkim simulacijama verificirati će se s rezultatima laboratorijski ispitanih priključka koji je dostupan u literaturi.

2 Numerički model

Numerički model priključka napravljen je za priključak kojeg su prethodno laboratorijski ispitivali Shi i sudradnici, 2007. godine (Shi, et al., 2007) te su eksperimentalni rezultati poslužili za verifikaciju dobivenih rezultata. U nastavku je prikazan razvoj numeričkog modela, u kojemu se težilo što točnije simulirati ponašanje priključka dobivenih u laboratorijskim uvjetima. Shematski prikaz eksperimenta na kojem se temelji numerički model prikazan je na slici 1.



Slika 1. Shematski prikaz laboratorijskog modela priključka [mm] (Shi, et al., 2007)

2.1 Geometrija modela

Priklučak se sastoji od: čelične grede, stupa, obostrano produljene čelne ploče, ukruta hrpta stupa i visokovrijednih prednapetih vijaka. Greda poprečnog presjeka H-300x200x8x12 mm duljine 120 cm zavarena je za čelnu ploču debljine 20 mm koja je potom spojena za pojascnicu stupa poprečnog presjeka H-300x250x8x12 mm duljine 200 cm s 8 visokovrijednih prednapetih vijaka M20, kvalitete čelika 10.9. Vrijednost sile prednapinjanja iznosi 155 kN dobivenih prema kineskoj normi JGJ82-91. Vijci su raspoređeni simetrično s obzirom na pojascnice grede. Koeficijent trenja između spojenih ploča izmjerен je na kontaktnim plohamama te iznosi 0,44. Debljina pojascnice stupa jednaka je debljini čelne ploče na području 100 mm iznad gornjeg ruba čelne ploče i 100 mm ispod donjeg ruba čelne ploče. Debljina ukruta hrpta stupa iznosi 12mm. Pločasti elementi priključka izvedeni su od čelika Q345B.

2.2 Svojstva materijala

Za modeliranje pločastih elemenata priključka koji su izvedeni od čelika Q345B odabran je Chabocheov izotropno-kinematički model materijala za kojeg su parametri dani u tablici 1, dok je za viskovrijedne vijke čelika 10.9 odabran izotropni trilinearni model materijala, tablica 2. Svojstva materijala za oba čelika preuzeta su iz (Wang, et al., 2013). C i γ su kinematički parametri očvršćivanja, dok su Q_∞ i b izotropni parametri očvršćivanja.

Tablica 1. Ciklička svojstva čelika Q345B

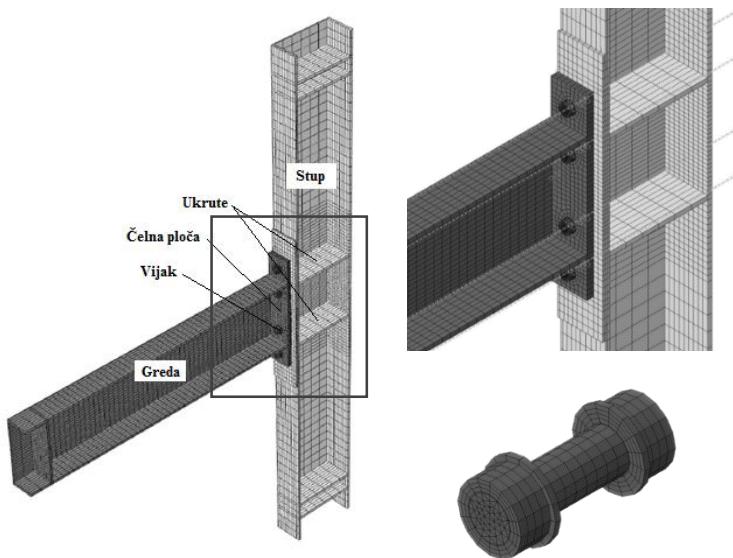
Elastično ponašanje		Plastično ponašanje										
		Kinematičko očvršćivanje								Izotropno očvršćivanje		
E [GPa]	ν	σ_l_0 [MPa]	C_1 [MPa]	γ_1	C_2 [MPa]	γ_2	C_3 [MPa]	γ_3	C_4 [MPa]	γ_4	Q_∞ [MPa]	b
207	0,3	363,3	7993	175	6773	116	2854	34	1450	29	21	1,2

Tablica 2. Svojstva čelika 10.9 za viskovrijedne vijke

Naprezanja σ [MPa]	990	1160	1160
Deformacije ϵ [-]	0,00483	0,136	0,15

2.3 Formiranje mreže konačnih elemenata

Stup, greda i čelna ploča modelirani su s linearnim osmočvornim heksagonalnim konačnim elementima C3D8I dok su za modeliranja vijaka odabrani linearni šestočvorni C3D6 konačni elementi. Glava vijka i matica modelirane su kao jedan „part“ zajedno s tijelom vijka i podložnim pločicama s objiju strana vijka. Navoji na tijelu vijka te produženi dio vijka izvan matice su zanemareni. Mreža je proglašena na mjestima gdje se ostvaruju kontakti između elemenata. Mreža konačnih elemenata priključka i vijka prikazana je na slici 2.

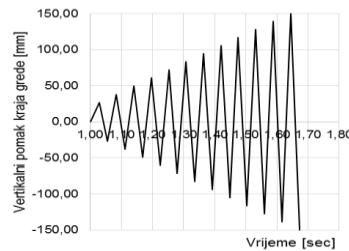


Slika 2. Prikaz mreže konačnih elemenata priključka s detaljima

2.4 Rubni uvjeti i plan djelovanja opterećenja

Statički sustav numeričkog modela priključka odabran je prema položaju bočnih pridržanja laboratorijskog modela priključka, prema slici 1. Po uzoru na oblikovanje laboratorijskog uzorka na krajevima stupova postavljene su ukrute, kako bi se sprječile deformacije uslijed djelovanja vanjskog opterećenja. U smjeru horizontalnih osi ukruta sa gornje i donje strane stupa spriječeni su horizontalni pomaci dok su u osloncu na dnu stupa spriječeni pomaci u svim smjerovima.

Cikličko savijanje simulirano je kontrolom pomaka na kraju grede na kraku od 1200 mm od ruba pojasmice stupa, prema protokolu opterećenja koji je prikazan na slici 3. Na krajevima stupova simulirana je vertikalna uzdužna sila od 500 kN.



Slika 3. Protokol za simulaciju cikličkog savijanja na priključku

2.5 Modeliranje kontaktnih područja i prednapinjanje vijaka

Točnost numeričkih modela uvelike ovisi o svojstvima kontakata između spojenih elemenata priključaka te o ponašanju vijaka. U slučaju djelovanja cikličkog opterećenja kao što je djelovanje potresa, uobičajeno je primjenjivati visokovrijedne vijke s prednapinjanjem. Primjena običnih

vijaka dovela bi do neželjenog popuštanja spoja te odvrtanja vijaka. Visokovrijedni vijak ima podložne pločice i ispod glave i ispod matice vijka kako bi se uslijed prednapinjanja spriječilo prodiranje vijaka u limove. U priključcima koji su spojeni prednapetim vijcima, naprezanja između elemenata prenose se trenjem između spojenih dijelova a ne posmikom vijka kao u slučaju primjene običnih vijaka. Promjer vijka i promjer rupe za vijak modelirani su jednakih dimenzija ($d = d_0 = 20 \text{ mm}$) radi pojednostavljenja numeričkog modela. Vijci su prednapeti primjenom „bolt load“ tehnike prednapinjanja.

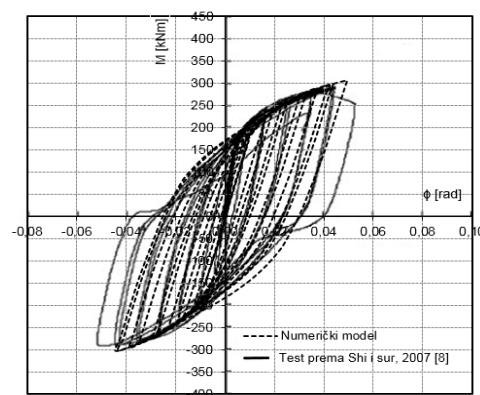
U priključku stupa i grede modelirana su kontakti između čelne ploče i pojasnice stupa, kontakti između podložne pločice vijka i čelne ploče, kontakti između podložne pločice i pojasnice stup, te kontakti između tijela vijka i rupe. Dodatne detalje o prednapinjanju vijaka i definiranju kontakata između elemenata pogledati u (Krolo, 2017; Krolo, et al., 2016).

3 Rezultati i verifikacija

Ponašanje priključka stupa i grede definirano je u obliku histerezne krivulje koja predstavlja odnos momenta savijanja i rotacije ($M - \phi$), slika 4. Isprekidana krivulja predstavlja rezultate dobivene numeričkim simulacijama, a usporedena je s rezultatima laboratorijskih ispitivanja iz (Shi, et al., 2007). Vrijednosti najveće otpornosti priključka na savijanje i pripadajuća djelujuća sila prikazani su u tablici 3. Rezultati dobiveni numeričkim simulacijama daju razliku u nosivosti od 5,89% u odnosu na eksperimentalno dobivenu vrijednost dok je otpornost na savijanje za 1,03% manja od vrijednosti dobivenih eksperimentalno. Nakon dostizanja najveće čvrstoće model ne može opisati degradaciju čvrstoće koja se javlja u realnom modelu. Kako bi se obuhvatili ovi učinci u numeričkom modelu priključka neophodno je u model materijala poboljšati ugradnjom modela loma, što će biti predmet dalnjih istraživanja.

Tablica 3. Usporedba rezultata numeričkih simulacija i laboratorijskih ispitivanja

Numerički model		Laboratorijska ispitivanja prema Shi i suradnici (Shi, et al., 2007)	
Djelujuća sila [kN]	Otpornost na savijanje [kNm]	Djelujuća sila [kN]	Otpornost na savijanje [kNm]
237,89	285,47	251,9	288,4



Slika 4. Usporebe histereznih $M - \phi$ krivulja

4 Zaključak

U radu je opisan razvoj numeričkog modela s ciljem provedbe simulacije cikličkog savijanja te analize mehaničkog ponašanja vijčanog priključka stupa i grede s obostrano produljenom čelnom pločom. Ponašanje priključka prikazano histereznom krivuljom daje zadovoljavajuće rezultate u odnosu na eksperimentalne. Međutim, kada se u priključku počnu očitovati efekti degradacije krutosti i čvrstoće, model priključka je potrebno poboljšati na način da se u svojstva čelika ugraditi model loma.

Zahvale

Rad je nastao kao rezultat istraživanja u okviru projekata „Procjena oštećenja i ojačanje građevinskih konstrukcija“ uz finansijsku potporu Sveučilišta u Rijeci (broj 13.05.1.1.01) te „Razvoj konstrukcija povećane pouzdanosti s obzirom na potres“ uz finansijsku potporu Sveučilišta u Rijeci (broj 402-01/14-01/11).

Literatura

- Abolmaali, A., Matthys, J. H., Farooqi, M. & Choi, Y., 2005. Development of moment-rotation model equations for flush end plate connections. *Journal of Constructional Steel Research*, 61(12), pp. 1595-1612.
- Bahaari, M. & Sherbourne, A., 1996. 3D simulation of bolted connections to unstiffened column-II Extended endplate connection. *Journal of Constructional Steel Research*, 40(3), pp. 189-223.
- Díaz, C. et al., 2011. FE model of beam-to column extended end-plate joins. *Journal of Constructional Steel Research*, 67(10), pp. 1578-1590.
- Gerami, M., Saberi, H., Saberi, V. & Daryan, A. S., 2011. Cyclic behavior of bolted connections with different arrangement of bolts. *Journal of Constructional Steel Research*, Volume 67, pp. 690-705.
- Krishnamurthy, N. & Graddy , D. E., 1976. Correlation between 2- and 3-dimensional finite element analysis of steel bolted end-plate connections. *Computers & Structures*, 6(4-5), pp. 381-389.
- Krolo, P., 2017. *Utjecaj ponašanja vijčanih priključaka na potresni odziv čeličnih okvira (Doktorski rad)*. Rijeka: Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci.
- Krolo, P., Grandić, D. & Bulić, M., 2016. The guidelines for modeling the preloading bolts in the structural connection using finite element method. *Journal of Computational Engineering*, Volume 2016.
- Lesičar, T., Sorić, J. & Tonković, Z., 2016. Large strain, two-scale computational approach using continuity finite element employing a second gradient theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1(1), pp. 298:303-24.
- Putar, F., Sorić, J., Lesičar, T. & Tonković, Z., 2017. Damage modeling employing strain gradient continuum theory. *International Journal of Solids and Structures*.

Sherbourne, A. & Bahaari, M., 1994. 3D Simulation of End-Plate Bolted Connections. *Journal of Structural Engineering*, Volume 120, pp. 3122-3136.

Shi, G., Shi, Y. & Wang, Y., 2007. Behaviour of end-plate moment connections under earthquake loading. *Engineering structures*, Volume 29, pp. 703-716.

Wang, M., Shi, Y., Wang, Y. & Shi, G., 2013. Numerical study on seismic behaviors of steel frame. *Journal of Constructional Steel Research*, Volume 90, pp. 140-152.

Jednodimenzijski numerički model dvoslojnog tečenja fluida različitih gustoća u koritima proizvoljne geometrije

Krvavica, N.¹, Ožanić, N.²

Sažetak

U ovom je radu dokumentiran razvoj numeričkog modela za prognoziranje nestacionarnog toka dva fluida različitih gustoća. Procesne jednadžbe za jednodimenzijski tok plitkih voda u koritima proizvoljne geometrije izvedene su iz zakona očuvanja mase i količine gibanja. Rezultirajuće jednadžbe čine sustav nelinearnih, hiperboličnih, parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, a iste se mogu zapisati i kao zakoni očuvanja s izvornim članovima. Za rješavanje ovog sustava jednadžbi korištena je Q-shema, temeljena na aproksimativnom Roevom rješavaču i metodi konačnih volumena. Navedena metoda je eksplicitna, drugog reda točnosti za stacionarna rješenja te zadovoljava prošireni uvjet ravnoteže. Originalni numerički algoritam je proširen kako bi uspješno aproksimirao i dodatne članove jednadžbe, koji opisuju posmično naprezanje i turbulentno miješanje među slojevima. Posebna pozornost je posvećena definiranju rubnih uvjeta te rješavanju problema napredovanja fronte donjeg sloja.

Predloženi model je ranije verificiran i validiran na primjeru tečenja slane i slatke vode u izrazito stratificiranim priobalnim ušćima, i to usporedbom s analitičkim rješenjima i terenskim mjerjenjima na ušću Rječine. U ovome se radu detaljnije analiziraju mogućnosti dvoslojnog modela u prognoziranju „ispiranja“ ušća, odnosno istiskivanju donjeg sloja, uslijed kontroliranog povećanja protoka slatke vode.

Ključne riječi: numerički model, metoda konačnih volumena, Q-shema, fluidi, jednadžba plitkih voda, ušća

¹ Dr. sc. Nino Krvavica, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za hidrotehniku i geotehniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: nino.krvavica@uniri.hr

² Prof. dr. sc. Nevenka Ožanić, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za hidrotehniku i geotehniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: nozanic@uniri.hr

1 Uvod

Tečenje fluida različitih gustoća česta je pojava u Zemljinoj atmosferi i hidrosferi. Uslijed izraženog gradijenta gustoće i zanemarivih vanjskih utjecaja, takvo tečenje je u pravilu uslojeno, odnosno definirano slojem fluida manje gustoće koji teče iznad sloja veće gustoće. Uslojeno tečenje se primjerice javlja u morskim tjesnacima između mora i oceana različitih saliniteta, pri ispuštanju vode u prijemnik zbog različitih temperatura ili na ušćima priobalnih rijeka uslijed različitih saliniteta i temperature (1).

Iako se danas za opisivanje tečenja fluida različitih fizikalnih karakteristika učestalo koriste 3D numerički modeli temeljeni na Navier-Stokesovim jednadžbama, uslojeno tečenje zahtijeva vrlo finu vertikalnu diskretizaciju prostorne domene ili promjenjivo lokalno proglašivanje mreže. Nažalost, oba navedena pristupa mogu rezultirati znatno produljenim trajanjem proračuna. S druge strane, dvoslojni modeli plitkih voda su jednostavniji za implementirati, računski su manje zahtjevni, a mogu podjednako precizno opisati hidrodinamičke procese u izrazito uslojenim uvjetima tečenja (2). U novije vrijeme, primjetan je znatan napredak u razvoju numeričkih modela dvoslojnog tečenja fluida različitih gustoća, koji se temelje na metodi konačnih volumena i aproksimativnim Roevim rješavačima. Navedeni modeli su razvijeni su s ciljem primjene u morskim tjesnacima te validirani na primjeru Gibraltarskog tjesnacu (3). Primjena sličnih modela na uslojena ušća podjednako je opravdana, ali nažalost rjeđe primjenjivana i još slabije istražena. Zbog svega navedenog, u ovom se radu prikazuju karakteristike i performanse numeričkog modela za dvoslojno tečenje plitkih voda, razvijenog s ciljem prognoziranja interakcije slane i slatke vode u uslojenim ušćima.

2 Numerički model

Procesne jednadžbe za tečenje u uslojenim ušćima definirane su proširenjem jednadžbi za dvoslojno tečenje u morskim tjesnacima (3) za dodatne članove koji opisuju posmično naprezanje i turbulentno miješanje među slojevima. Metoda konačnih volumena je primijenjena za aproksimaciju ovih jednadžbi, i to modificirana Q-sHEMA u kojoj su svi izvorni članovi, uključujući posmično naprezanje i miješanje među slojevima, tretirani *upwind* pristupom (2,4).

2.1 Procesne jednadžbe

Procesne jednadžbe plitkih voda izvedene su iz zakona očuvanja mase i količine gibanja za jednodimenzionalno dvoslojno tečenje u koritima proizvoljne geometrije. Sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi zapisan je u sljedećem obliku (2):

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})}{\partial x} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) + \mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}), \quad (1)$$

gdje je t vrijeme, x koordinata u smjeru toka, vektor nepoznanica je $\mathbf{w} = \{A_1 \ Q_1 \ A_2 \ Q_2\}^T$, a vektor numeričkog fluksa $\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})$ definiran je izrazom (2-4):

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = \left\{ Q_1 \quad \frac{Q_1^2}{A_1} + \frac{g}{2\sigma_1} A_1^2 \quad Q_2 \quad \frac{Q_2^2}{A_2} + \frac{g}{2\sigma_2} A_2^2 \right\}^T \quad (2)$$

gdje A_i površina poprečnog presjeka, Q_i protok, g ubrzanje sile teže, σ_i širina poprečnog presjeka, a indeks $i = 1, 2$ označava gornji, odnosno donji sloj. Pritom su matrica $\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})$ i vektor $\mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})$ definirani sljedećim izrazima (2-4):

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g \frac{A_1}{\sigma_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g \frac{A_2}{\sigma_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = \begin{cases} 0 \\ \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma_1} \right) A_1^2 \\ 0 \\ \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sigma_2} \right) A_2^2 \end{cases}. \quad (3)$$

Izvorni članovi $\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})$ i $\mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w})$ definiraju promjene u geometriji korita te fizikalne procese na razdjelnici među slojevima (trenje i vertikalno miješanje) (2):

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = \begin{cases} 0 \\ \frac{gA_1}{\sigma_1} (I_{3,1} + I_{3,2}) \\ 0 \\ \frac{rgA_2}{\sigma_1} I_{3,1} + \frac{gA_2}{\sigma_2} I_{3,1} \end{cases}, \quad \mathbf{s}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = \begin{cases} 0 \\ \frac{\tau_w}{\rho_1} O_1 + \frac{\tau_i}{\rho_1} \sigma_3 \\ 0 \\ \frac{\tau_b}{\rho_2} O_2 - \frac{\tau_i}{\rho_2} \sigma_3 \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{r} \sigma_3 w_e \\ \sigma_3 \frac{Q_1}{A_1} w_e \\ -\sigma_3 w_e \\ -\sigma_3 \frac{Q_2}{A_2} w_e \end{cases}, \quad (4)$$

gdje su $I_{3,1}$ i $I_{3,2}$ integrali koji opisuju proizvoljnu geometriju (2,3), b je visina dna kanala, h_i je dubina (debljina) sloja, r je omjer gustoće gornjeg i donjeg sloja, τ_b , τ_w i τ_i su posmična naprezanja između, redom, fluida i dna kanala, fluida i bočnih stranica te između dvaju fluida, O_i je omočeni obod, a w_e je vertikalna brzina transporta vode (eng. *entrainment*) iz donjeg sloja u gornji. Više detalja o procesnim jednadžbama dostupno je u literaturi (2).

2.2 Numerička shema

Numerički algoritam za rješavanje sustava jednadžbi (1-4) temelji se na metodi konačnih volumena, odnosno dobro uravnoteženoj Q-shemi (5,6). Korišten je aproksimativni Roeov rješavač, koji se pokazao vrlo uspješan u simuliranju nestacionarnog tečenja plitkih voda u prizmatičnim kanalima (5), a kasnije je nadograđen i za dvoslojne sustave (6) i korita nepravilne geometrije (3) te sustave koju uključuju trenje i miješanje među slojevima (2,4). Numerička shema je eksplicitna i drugog je reda točnosti za stacionarna rješenja (2,3).

Prostorna domena je podijeljena u kontrolne ćelije (volumene) definirane širinom $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$, gdje indeks $i + 1/2$ označava granicu između ćelije i i $i + 1$. Pritom, vremenski korak je označen s Δt . Indeks i , kao i u kod procesnih jednadžbi, označava prostorni položaj, dok eksponent n označava vremenski korak. Jednadžba (1) je na ovaj način aproksimirana sljedećim izrazom (2):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^{n+1} = & \mathbf{w}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{f}_{i-1/2} - \mathbf{f}_{i+1/2}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\mathbf{B}_{i-1/2}(\mathbf{w}_i^n - \mathbf{w}_{i-1}^n) + \\ & \mathbf{B}_{i+1/2}(\mathbf{w}_{i+1}^n - \mathbf{w}_i^n)] + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{v}_{i-1/2} + \mathbf{v}_{i+1/2}) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{P}_{i-1/2}^+ \mathbf{g}_{i-1/2} + \\ & \mathbf{P}_{i+1/2}^- \mathbf{g}_{i+1/2}) + \Delta t (\mathbf{P}_{i-1/2}^+ \mathbf{s}_{i-1/2} + \mathbf{P}_{i+1/2}^- \mathbf{s}_{i+1/2}). \end{aligned} \quad (5)$$

Pritom je numerički fluks definiran izrazom (2,3):

$$\mathbf{f}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_i^n, \mathbf{w}_i^n) + \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^n, \mathbf{w}_{i+1}^n)] - \frac{1}{2} |\mathcal{A}_{i+1/2}| (\mathbf{w}_{i+1}^n - \mathbf{w}_i^n), \quad (6)$$

gdje je matrica $\mathcal{A}_{i+1/2} = \mathbf{J}_{i+1/2} - \mathbf{B}_{i+1/2}$ razlika vrijednosti Jakobijane fluksa $\mathbf{J} = \partial \mathbf{f} / \partial t$ i matrice \mathbf{B} na granici $i + 1/2$ između čelija. Vrijednosti brzine u i dubine h na granici, izračunate su Roevim osrednjavanjem (2,3). Matrica $\mathbf{P}_{i-1/2}^+$ je projekcijska matrica koja služi *upwind* aproksimaciji izvornih članova (2,3). Preostali detalji aproksimacije pojedinih članova dokumentirani su u literaturi (2).

2.3 Fronta donjeg sloja

Fronta donjeg sloja predstavlja prijelaz između mokrog i „suhog“ dijela domena. Kako bi se izbjegle negativne dubine, definirana je granična dubina donjeg sloja ε . Na ovaj način, za slučaj $h_{i,2} < \varepsilon$, čelija i se smatra ispunjenom samo s gornjim slojem; dubina $h_{i,2}$ se zadržava, a brzina $u_{i,2}$ postaje jednaka nuli. Jednom kada dubina donjeg sloja postane veća od granične dubine ε , čelija i se smatra ispunjenom s oba sloja, te se dopušta tečenje fluida u donjem sloju (2).

Dodatni problem se može pojaviti kada se fronta donjeg sloja nalazi na kosom dnu. Naime, ako je dubina donjeg sloja $h_{i,2}$ u „mokroj“ čeliji i manja od razlike visine dna $\Delta b = b_{i+1} - b_i$, uravnoteženost izvornih članova može biti narušena, a što može rezultirati u ne-fizikalnim oscilacijama (3). Kako bi se osigurala uravnoteženost sheme (tzv. *extended C-property*) potrebno je modificirati član $b_{i+1} - b_i = \Delta b$ u aproksimaciji izvornog člana $\mathbf{g}_{i+1/2}$, na sljedeći način (2,4):

$$b_{i+1} - b_i = \begin{cases} r(b_{i+1} - b_i) + (1 - r)h_{i,2} & \text{ako } h_{i,2} \leq \Delta b \\ r(b_{i+1} - b_i) - (1 - r)h_{i+1,2} & \text{ako } h_{i+1,2} \leq -\Delta b \\ b_{i+1} - b_i & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases} \quad (7)$$

2.3 Rubni uvjeti

Uzvodni rubni uvjet zadan je hidrogramom ili nivogramom. S druge strane, na nizvodnom rubu treba pažljivo odabratи i lokaciju i hidraulički uvjet. Naime, nizvodni se rubni uvjet obično definira kao otvorena granica za protoke u oba sloja, ali potrebno je precizno definirati dubinu razdjelnice. Za 1D modele ušća priobalnih rijeka, nizvodni se rubni uvjet najčešće postavlja na samom ušću a dubina razdjelnice se definira iz uvjeta kritičnog tečenja (2):

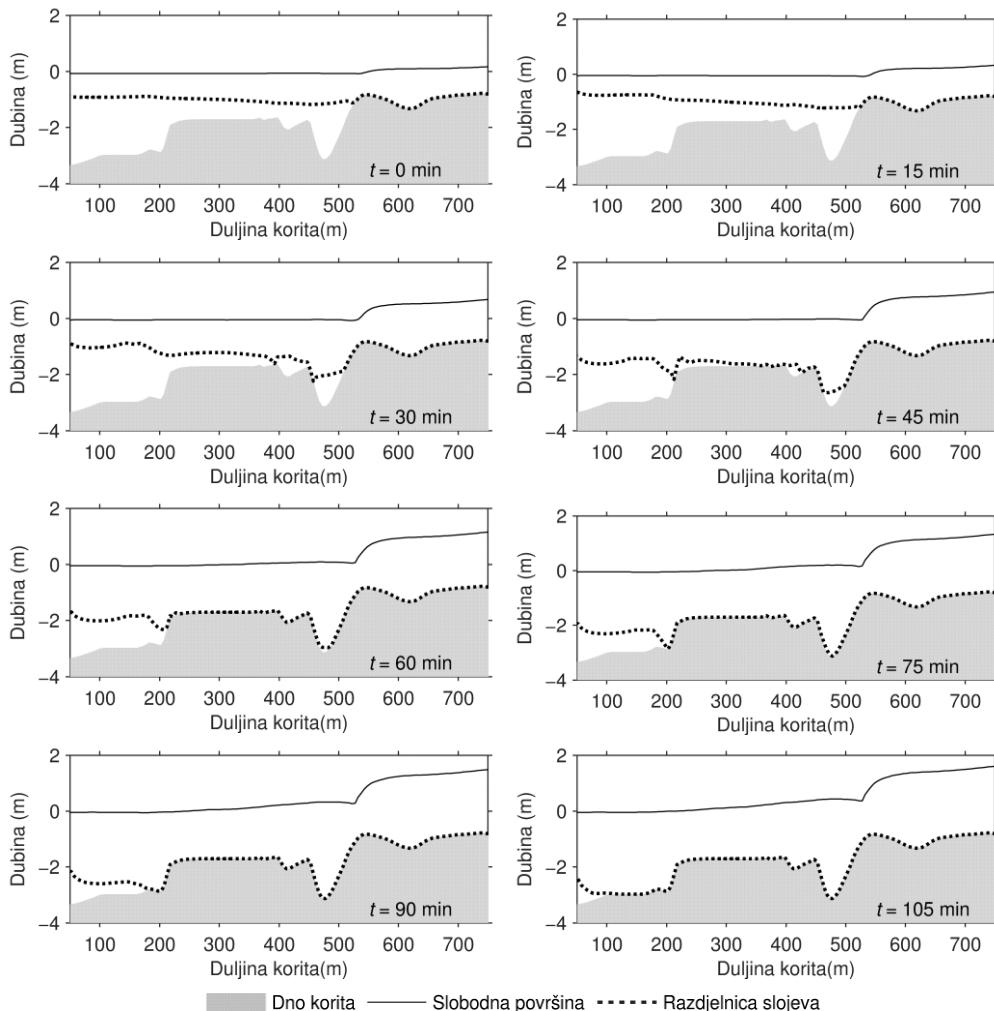
$$F_1^2 + F_2^2 + (1 - r)F_1^2 F_2^2 = 1, \quad (8)$$

gdje su F_1^2 i F_2^2 denzimetrijski Froudovi brojevi gornjeg i donjeg sloja (2,3). Rubni uvjet se u svakom vremenskom koraku rješava iterativno dok pretpostavljene vrijednosti nepoznanica A_1, A_2, Q_1 i Q_2 ne zadovolje izraz (8).

3 Rezultati

U predmetnoj analizi ispituju se mogućnosti modela u numerički izrazito zahtjevnom scenariju ispiranja ušća, odnosno pri istiskivanju donjeg sloja slane vode uslijed povećanja protoka rijeke.

Naime, ovaj scenarij uključuje pomicanje fronte donjeg sloja duž prostorne domene, koja može sadržavati vrlo nagle prijelaze i promjene geometrije korita. Uz to, uslijed naglog povećanja protoka rijeka, očekuje se povećanje brzine slatke vode, odnosno povećanje razlike između brzine vode u gornjem i donjem sloju. Pritom, velika razlika brzina može uzrokovati pojavu nestabilnosti na razdjelnici, uslijed čega jednadžba (1) gubi hiperbolni karakter, a vlastite vrijednosti matrice \mathcal{A} mogu poprimiti kompleksne vrijednosti (2,3). U ranijim analizama, pokazalo se kako dodatno uključivanje vertikalnog transporta mase i količine gibanja kroz posmično naprezanje i miješanje, može pomoći u očuvanju hiperbolnog karaktera procesnih jednadžbi i spriječiti pojavu nestabilnosti (2).



Slika 1. Rezultati numeričke analize ispiranja ušća Rječine uslijed povećanja protoka

Kako bi se pobliže ispitale gore navedene pretpostavke, analiziran je slučaj ispiranja morske vode iz korita Rječine, pri povećanju protoka od $40 \text{ m}^3/\text{s}$ u periodu od 90 min. Korito

ušća Rječine u duljini od 1000 m podijeljeno je u 200 ćelija, a vremenski korak je definiran da zadovolji $CFL = 0,9$. Početni uvjet dobiven je stacionarnom analizom za zadani protok od $4,3 \text{ m}^3/\text{s}$ i razinu mora $-0,05 \text{ m}$ n. m., ubrzanje gravitacije je $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, a razlika gustoća je $r = 0,975$. Na slici 1. prikazani su rezultati modela u različitim vremenskim koracima (uzdužni presjeci s izračunatim profilima razdjelnice). Primjetno je kako se uslijed povećanja protoka donji sloj morske vode povlači nizvodno, sve dok nije u potpunosti istisnut iz korita za $t > 105 \text{ min}$. Model je uspješno izračunao dubine razdjelnice te zadržao stabilnost (bez pojave kompleksnih vlastitih vrijednosti) tijekom trajanja simulacije.

4 Zaključak

Predloženi model uspješno je simulirao proces ispiranja morske vode iz ušća Rječine. Iako su dvoslojni modeli plitkih voda podložni pojavi nestabilnosti na razdjelnici slojeva kod naglih promjena protoka ili na fronti donjeg sloja u koritima promjenjive geometrije, pokazalo se kako odgovarajuća modifikacija izvornih članova na fronti te uključivanje fizikalnih procesa trenja i vertikalnog miješanja doprinoze stabilnosti modela. U budućem periodu planira se navedeni model proširiti za dvodimenzionalne probleme te uključiti treći među-sloj, kako bi se preciznije opisali izrazito dinamički i turbulentni procesi na razdjelnici slojeva pri različitim scenarijima tečenja u stratificiranim ušćima.

Zahvale

Ovaj rad je financiralo Sveučilište u Rijeci projektom broj 13.05.1.1.03 (Hidrologija vodnih resursa i identifikacija rizika od poplava i blatnih tokova na krškom području).

Literatura

1. Krvavica N, Mofardin B, Ružić I i Ožanić N. Mjerenje i analiza zaslanjivanja na ušće Rječine. Građevinar. 2012;64(11):923-933.
2. Krvavica N. One-dimensional numerical model for layered shallow water flow in highly stratified estuaries. Doktorski rad. Sveučilište u Rijeci, 2016.
3. Castro MJ, Garcia-Rodriguez JA, González-Vida JM, Macias J, Parés C i Vázquez-Cendón, ME. Numerical simulation of two-layer shallow water flows through channels with irregular geometry. Journal of Computational Physics. 2014;195(1):202–235.
4. Krvavica N, Kožar I, Travaš V i Ožanić N. Numerical modelling of two-layer shallow water flow in microtidal salt-wedge estuaries: Finite volume solver and field validation. Journal of Hydrology and Hydromechanics. 2017;65(1):49–59.
5. Vázquez-Cendón ME. Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. Journal of Computational Physics. 1999;148(2):497–526.
6. Castro MJ, Macias J i Parés C. A Q-scheme for a class of systems of coupled conservation laws with source term. Application to a two-layer 1-D shallow water system. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2001;35(1):107–127.

Utjecaj rubnih uvjeta u višerazinskom modeliranju oštećenja duktilnih materijala

Lesičar, T.¹, Sorić, J.² i Tonković, Z.³

Sažetak

U današnje vrijeme sve je izraženija potreba za razvojem novih materijala, pri čemu su heterogeni materijali s izraženim svojstvom plastičnog deformiranja vrlo atraktivni za primjenu u mehaničkim konstrukcijama. Nažalost, za slučaj popuštanja materijala klasični numerički postupci ne mogu opisati mehaničko ponašanje takvih materijala na odgovarajući način. Točnije, tijekom nastanka i rasta oštećenja u materijalu dolazi do gubitka eliptičnosti diferencijalnih jednadžbi, a dobivena numerička rješenja pokazuju ovisnost o gustoći i usmjerenosti mreže konačnih elemenata. Višerazinski postupak numeričke analize obuhvaća relevantne mikrostruktturne mehanizme, a među brojnim dostupnim metodama, višerazinska analiza primjenom računalne homogenizacije pokazala se kao jedna od najpogodnijih.

U radu je razvijena višerazinska metoda kojom se utjecaj lokalizacije na mikrorazini prenosi na makrorazinu, gdje se manifestira u obliku pukotine. Primijenjena je metoda računalne homogenizacije prvog reda, uz pretpostavku malih deformacija i materijalne nelinearnosti. Za diskretizaciju makrorazine primijenjen je osnovni pravokutni konačni element. Izvedena je metodologija prijenosa varijabli između razina te su testirani rubni uvjeti pomaka i periodičnosti na reprezentativnom volumenskom elementu. Za opisivanje procesa popuštanja materijala, na mikrorazini je primijenjen implicitni nelokalni model duktilnog oštećenja. Za diskretizaciju mikrorazine izведен je mješoviti konačni element, u kojem su čvorne nepoznance osim pomaka i nelokalne ekvivalentne plastične deformacije. Višerazinski algoritam je ugrađen u programski paket ABAQUS i verificiran na numeričkim primjerima.

Ključne riječi: duktilni materijali, homogenizacija prvog reda, višerazinska analiza, implicitni nelokalni model duktilnog oštećenja, reprezentativni volumenski element.

¹ Dr. sc. Tomislav Lesičar, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: tomislav.lesicar@fsb.hr

² Prof. dr. sc. Jurica Sorić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: jurica.soric@fsb.hr

³ Prof. dr. sc. Zdenko Tonković, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: zdenko.tonkovic@fsb.hr

1 Uvod

Posljednjih godina se povećava potreba za razvojem novih i naprednijih materijala, koji će moći zadovoljiti rastuće zahtjeve na čvrstoču i izdržljivost novih konstrukcija. Stoga je razvoj novih i unapređenje postojećih duktilnih materijala postalo vrlo atraktivno zbog mehaničkih svojstava koja oni posjeduju. Time je potaknut i razvoj novijih i naprednijih numeričkih metoda koje mogu dovoljno točno opisati ponašanje takvih materijala, posebice u uvjetima popuštanja. Općenito je poznato da heterogenost mikrostrukture dovodi do anizotropnog ponašanja i da mikrokonstituenti utječu na relevantne mehanizme koji se odvijaju na mikroskopskoj razini, kao što su npr., pojava mikropukotina, razvoj dislokacija. Nažalost, klasični numerički postupci ne mogu dovoljno točno opisati mehaničko ponašanje duktilnih materijala, upravo zato jer ne razmatraju pojave na mikrostrukturnoj razini. Pritom dolazi do slabe uvjetovanosti parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju razvoj oštećenja, što uzrokuje gubitak njihove eliptičnosti. Osim toga, dobivena numerička rješenja pokazuju ovisnost o gustoći i usmjerenoći mreže (1). Stoga je posljednjih godina posebna pozornost posvećena pronalasku veze između makroskopskih svojstava materijala i njegove mikrostrukturi. U višerazinskom numeričkom postupku fizikalni procesi na nižim razinama su ugrađeni u ponašanje materijala na makrorazini. Kod ovakve vrste analize, rezultati dobiveni simulacijom ponašanja reprezentativnog uzorka materijala (RVEa) se koriste za analizu ponašanja makrostrukture. Pritom je za prijenos informacija između različitih razina metoda računalne homogenizacije posljednjih godina postala vrlo popularna (2, 3). Među brojnim metodama računalne homogenizacije dostupnim u literaturi, računalna homogenizacija prvog reda se pokazala izrazito učinkovitom (4, 5).

U ovom radu je prikazan višerazinski numerički postupak, u kojem se primjenjuje metoda računalne homogenizacije na mikrorazini, s ciljem konzistentnog prijenosa lokalizacije s mikrorazine na makrorazinu. Ispitan je utjecaj rubnih uvjeta na fizikalno ponašanje RVEa kada dolazi do popuštanja materijala. Primijenjena je računalna homogenizacija prvog reda uz prepostavku malih deformacija i materijalne elastoplastičnosti. Za diskretizaciju mikro- i makrorazine korišten je osnovni pravokutni konačni element. Razvoj oštećenja na mikrorazini je opisan implicitnim nelokalnim modelom duktilnog oštećenja (6). Cjelokupni višerazinski postupak je ugrađen u programski paket ABAQUS primjenom korisničkih rutina UMAT i UEL.

2 Nelokalni implicitni model duktilnog oštećenja

U nastavku je sažeto prikazana formulacija modela duktilnog oštećenja korištenog u konačnom elementu na mikrorazini. Osim uobičajene jednadžbe ravnoteže, u konačnom elementu je potrebno riješiti dodatnu diferencijalnu jednadžbu

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}; \quad \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_p - l^2 \nabla^2 \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \boldsymbol{\epsilon}_p. \quad (1)$$

U drugoj jednadžbi izraza (1), $\boldsymbol{\epsilon}_p$ je klasična ekvivalentna plastična deformacija, dok $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ predstavlja nelokalnu ekvivalentnu plastičnu deformaciju. Uz to, Laplacian $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_p$ je pomnožen mikrostrukturnim parametrom l . Na taj način, raspodjela nelokalne ekvivalentne plastične

deformacije je kontinuirana po čitavoj računalnoj domeni, što omogućava lakše zadovoljavanje rubnih uvjeta koji se javljaju u gradijentnoj formulaciji plastičnosti (7)

$$\nabla \otimes \bar{\varepsilon}_p \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2)$$

Uvjet (2) je u implicitnoj formulaciji potrebno zadovoljiti samo po vanjskom rubu proračunskog modela $\partial\Omega$, što predstavlja prednost u odnosu na eksplisitne modele, gdje je taj uvjet potrebno nametnuti na granicu elastične i plastične zone, koja se konstantno mijenja tijekom deformiranja. U predstavljenom modelu oštećenja korišten je standardni zakon linearog izotropnog očvršćenja, ali uz izmijenjenu funkciju tečenja

$$F(\sigma, \varepsilon_p, \bar{\varepsilon}_p) = \sigma_e(\sigma) - (1 - D(\bar{\varepsilon}_p))\sigma_y(\varepsilon_p), \quad (3)$$

pri čemu je σ_e ekvivalentno naprezanje prema von Misesu, a σ_y granica tečenja. Promjena u funkciji tečenja slijedi iz množitelja $(1 - D(\bar{\varepsilon}_p))$, gdje D predstavlja varijablu oštećenja koja je funkcija nelokalne plastične deformacije. U formulaciji metode konačnih elemenata, osim pomaka, diskretizirana je i ekvivalentna nelokalna plastična deformacija uz primjenu odgovarajućih funkcija oblika. Uz to, primijenjene su konstitutivne relacije u obliku

$$\delta\sigma = \mathbf{C}_{\sigma\sigma}\delta\varepsilon - \mathbf{C}_{\sigma\bar{\varepsilon}_p}\delta\bar{\varepsilon}_p; \quad \delta\varepsilon_p = \mathbf{C}_{\varepsilon_p\varepsilon_p}\delta\varepsilon - C_{\varepsilon_p\bar{\varepsilon}_p}\delta\bar{\varepsilon}_p, \quad (4)$$

gdje su $\mathbf{C}_{\sigma\sigma}, \mathbf{C}_{\sigma\bar{\varepsilon}_p}, \mathbf{C}_{\varepsilon_p\varepsilon_p}$ i $C_{\varepsilon_p\bar{\varepsilon}_p}$ konstitutivne matrice. Korištenjem uobičajenih matematičkih postupaka u metodi konačnih elemenata lako je dobiti jednadžbu konačnog elementa

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\bar{\varepsilon}_p} \\ \mathbf{K}_{\bar{\varepsilon}_p u} & \mathbf{K}_{\bar{\varepsilon}_p \bar{\varepsilon}_p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_e^u - \mathbf{F}_i^u \\ \mathbf{F}_i^{\bar{\varepsilon}_p} \end{pmatrix} \quad (5)$$

u kojoj se kao čvorne nepoznanice javljaju pomaci (\mathbf{u}) i nelokalna ekvivalentna plastična deformacija ($\bar{\varepsilon}_p$). Izvedeni model oštećenja ugrađen je u osnovni pravokutni konačni element s tri stupnja slobode u čvoru (2 pomaka i nelokalna plastična deformacija) za ravninsko stanje deformacija.

3 Računalna homogenizacija prvog reda

U nastavku su objašnjene osnove prijenosa varijabli između razina. Sve varijable mikrorazine su označene indeksom „m“, a varijable koje se odnose na makrorazinu u indeksu imaju „M“. U računalnoj homogenizaciji prvog reda polje pomaka RVE-a je iskazano u obliku

$$\mathbf{u}_m = \boldsymbol{\varepsilon}_M \cdot \mathbf{x} + \mathbf{r}. \quad (6)$$

U jednadžbi (6), \mathbf{x} je prostorna koordinata RVE-a, a \mathbf{r} je polje mikrofluktuacija (5). Na temelju jednadžbe (6), deformacija na mikrorazini je jednaka

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \boldsymbol{\varepsilon}_M + \nabla \otimes \mathbf{r}. \quad (7)$$

Da bi se deformacija na makrorazini prikazala kao volumenski prosjek deformacije na mikrorazini, očito je da mikrofluktuacije u prosječnom smislu moraju iščeznuti

$$\frac{1}{V} \int_V (\nabla \otimes \mathbf{r}) dV = \frac{1}{V} \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{r}) d\Gamma = \mathbf{0}, \quad (8)$$

gdje Γ predstavlja vanjski rub RVE-a, a \mathbf{n} vektor normale. U slučaju rubnih uvjeta pomaka, svi rubni čvorovi RVE-a imaju propisane pomake na temelju izraza (6), pri čemu su mikrofluktuacije zanemarene. Nadalje, uvođenjem koordinatne matrice \mathbf{D} , izraz (6) se može preoblikovati u matrični oblik

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\varepsilon}_M, \quad (9)$$

pri čemu indeks „b“ označava rubne čvorove RVE-a. U slučaju rubnih uvjeta periodičnosti, pomaci kutnih čvorova su propisani. Gibanje ostalih rubnih čvorova je vezano prema pretpostavci periodičnosti mikrofluktuacija suprotnih bridova (gore (T) - dolje (B), lijevo (L) - desno (R)), što omogućuje dobivanje jednadžbi periodičnosti

$$\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L = (\mathbf{D}_R^T - \mathbf{D}_L^T) \boldsymbol{\varepsilon}_M; \quad \mathbf{u}_T - \mathbf{u}_B = (\mathbf{D}_T^T - \mathbf{D}_B^T) \boldsymbol{\varepsilon}_M. \quad (10)$$

U računalnoj homogenizaciji, homogenizirani tenzor naprezanja na makrorazini slijedi iz Hill-Mandelovog energijskog uvjeta (3)

$$\boldsymbol{\sigma}_M = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}_m dV. \quad (11)$$

Kako bi se obuhvatio utjecaj heterogenosti mikrostrukture, konstitutivna matrica na makrorazini dobiva se iz matrice $\tilde{\mathbf{K}}_{bb}$, koja se izvodi postupkom statičke kondenzacije globalne matrice krutosti RVE-a. Kondenzirana matrica krutosti $\tilde{\mathbf{K}}_{bb}$ množi se s koordinatnom matricom \mathbf{D} , što daje

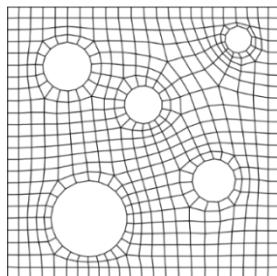
$$\mathbf{C}_M = \frac{1}{V} \mathbf{D} \tilde{\mathbf{K}}_{bb} \mathbf{D}^T. \quad (12)$$

4 Numerički primjer

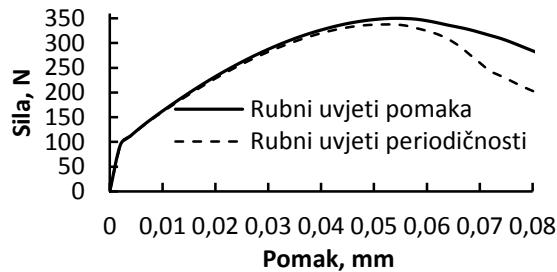
Utjecaj rubnih uvjeta na homogenizirano ponašanje heterogenog oštećenog duktilnog materijala je testirano na problemu jednostavnog vlaka uzorka dimenzije 1x1 mm. Odabran je akademski

primjer duktilnog čelika s 13% poroznosti. Matrica ima modul elastičnosti $E = 210\text{GPa}$ i Poissonov faktor $\nu = 0,3$. Materijal očvršćuje linearno izotropno, pri čemu su granica tečenja $\sigma_y = 200 \text{ MPa}$ i elastoplastični tangentni modul $E_T = 20000 \text{ MPa}$. Reprezentativni volumenski element mikrostrukture je prikazan na slici 1. Veličina stranice RVE-a iznosi 0,2 mm. Diskretiziran je s 508 osnovnih pravokutnih konačnih elemenata. U modelu je odabran linearni zakon oštećenja u obliku $D = \bar{\varepsilon}_p / \bar{\varepsilon}_p^c$, uz kritičnu vrijednost nelokalne plastične deformacije $\bar{\varepsilon}_p^c = 5 \cdot 10^{-4}$. Dijagram sila-pomak na makrorazini za različite rubne uvjete je prikazan na slici 2.

Iz dijagrama je vidljivo da rubni uvjeti periodičnosti daju podatljivije ponašanje materijala, osobito nakon razvoja zone oštećenja. Iz literature je poznato da rubni uvjeti pomaka daju kruće ponašanje neoštećenog materijala, a ovdje je pokazano da je isto ponašanje zadržano i tijekom razvoja oštećenja.

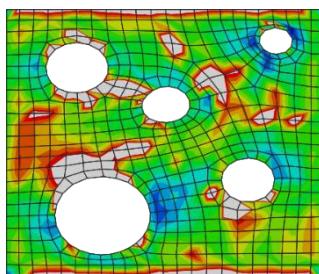


Slika 1. RVE

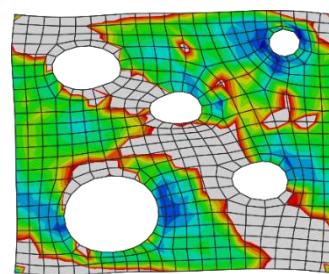


Slika 2. Dijagram sila-pomak

Slike 3 i 4 prikazuju raspodjelu nelokalne ekvivalentne plastične deformacije po RVE-u za različite rubne uvjete. Sivom bojom su označena područja gdje je dosegnuta kritična vrijednost nelokalne plastične deformacije $\bar{\varepsilon}_p^c$. Na temelju slika 3 i 4, može se zaključiti da rubni uvjeti pomaka nisu prikladni za opisivanje razvoja oštećenja. Očigledno je da rubni uvjeti pomaka sprječavaju formiranje zone lokalizacije oštećenja unutar RVE-a. S daljnjim porastom opterećenja će doći do lokalizacije oštećenja, ali pri mnogo većim deformacijama u usporedbi s rubnim uvjetima periodičnosti. Uzrok tome je eksplicitno propisivanje pomaka po rubu RVE-a, što dovodi do njegovog nefizikalnog krutog ponašanja.



Slika 3. Raspodjela $\bar{\varepsilon}_p$ za r. u. pomaka



Slika 4. Raspodjela $\bar{\varepsilon}_p$ za r. u. periodičnosti

5 Zaključak

U radu je prikazan algoritam višerazinskog modeliranja duktilnog oštećenja u heterogenim materijalima primjenom računalne homogenizacije prvog reda. Prikazana je formulacija nelokalnog implicitnog modela duktilnog oštećenja, koji je primijenjen na RVE-u. Izvedeni su osnovni izrazi prijenosa varijabli između razina u višerazinskoj analizi. Testirani su rubni uvjeti pomaka i periodičnosti na akademskom primjeru heterogenog materijala. Pokazano je da tijekom popuštanja materijala rubni uvjeti pomaka ukrućuju ponašanje RVE-a, a time uzrokuju nefizikalno ponašanje mikrostrukture i ograničavaju razvoj zone lokalizacije oštećenja unutar RVEa.

Zahvala

Istraživanje je u potpunosti financirano od Hrvatske zasluge za znanost u okviru projekta „Multiscale Numerical Modeling of Material Deformation Responses from Macro- to Nanolevel“ (2516) - MNumMacroNano.

Literatura

1. Pijaudier-Cabot G, Bazant ZP. Nonlocal damage theory. *Journal of engineering mechanics*. 1987;113(10):1512-33.
2. Wu T, Temizer İ, Wriggers P. Computational thermal homogenization of concrete. *Cement and Concrete Composites*. 2013 1//;35(1):59-70.
3. Lesičar T, Sorić J, Tonković Z. Large strain, two-scale computational approach using continuity finite element employing a second gradient theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2016 1//;298:303-24.
4. Kouznetsova V, Brekelmans WAM, Baaijens FPT. An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. *Comput Mech*. 2001;27(1):37-48.
5. Miehe C, Koch A. Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains. *Arch Appl Mech*. 2002 Jul;72(4-5):300-17. PubMed PMID: WOS:000177734400008. English.
6. Engelen RAB, Geers MGD, Baaijens FPT. Nonlocal implicit gradient-enhanced elasto-plasticity for the modelling of softening behaviour. *International Journal of Plasticity*. 2003 4//;19(4):403-33.
7. De Borst R, Pamin J. Some novel developments in finite element procedures for gradient-dependent plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996;39(14):2477-505.

Numeričko modeliranje procesa kompaktiranja praha metala

Lovrenić-Jugović, M.¹, Skozrit, I.² i Slokar, Lj.³

Sažetak

Proces proizvodnje inženjerskih dijelova metalurgijom praha (*engl. powder metallurgy PM*) sastoji se od tri faze: punjenje kalupa, kompaktiranje (prešanje) praha i sinteriranje. Kompaktiranje praha provodi se u kalupu primjenom vertikalnog kretanja žiga, stavljajući time ograničenja na izmjere i oblik gotovog proizvoda. Raspodjela gustoće otpreska izravno utječe na mehaničke karakteristike i na točnost izmjera krajnjih komponenti izrađenih metodom metalurgije praha (PM). Poželjno je dobiti po gustoći što homogeniji otpresak.

Kako bi se u potpunosti razumjela faza kompaktiranja i optimizirao proces proizvodnje inženjerskih dijelova metalurgijom praha (PM) sve se više proučava modeliranje i simulacija kalupnog kompaktiranja pomoću metode konačnih elemenata. Fenomenološki Drucker-Prager Cap (DPC) konstitutivni model izvorno je namijenjen za modeliranje geoloških materijala, a izmijenjen je i prilagođen za kompaktiranje praha metala. DPC model predstavlja ponašanje praha tijekom procesa kompaktiranja što obuhvaća faze preuređenja i konsolidacije.

Cilj ovog rada je predstaviti DPC model i numeričku simulaciju kompaktiranja praha metala u programskom paketu ABAQUS. Numerička simulacija pomaže u razumijevanju učinaka primjene alata, podmazivanja i parametara procesa kompaktiranja (brzina, sekvenca, udarna sila) na raspodjelu naprezanja, deformacija i gustoće otpreska, čime se osiguravaju smjernice u optimiranju dizajna alata i parametara procesa.

Ključne riječi: kompaktiranje praha metala, metalurgija praha, gustoća otpreska, metoda konačnih elemenata, Drucker-Prager Cap model

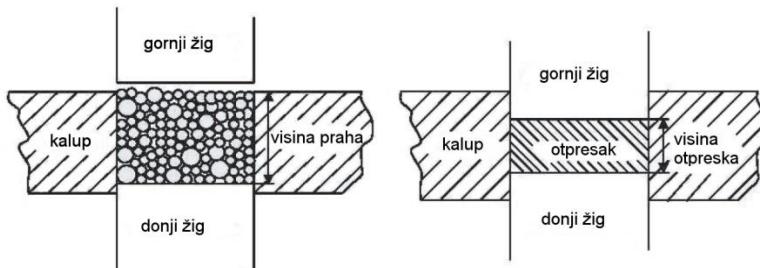
¹ Doc. dr. sc. Martina Lovrenić-Jugović, dipl. ing. stroj., Sveučilište u Zagrebu, Metalurški fakultet, Zavod za mehaničku metalurgiju, Aleja narodnih heroja 3, 44103 Sisak, e-mail: mlovrenic@simet.hr

² Doc. dr. sc. Ivica Skozrit, dipl. ing. stroj., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: ivica.skozrit@fsb.hr

³ Izv. Prof. dr. sc. Ljerka Slokar, dipl. ing.met., Sveučilište u Zagrebu, Metalurški fakultet, Zavod za fizičku metalurgiju, Aleja narodnih heroja 3, 44103 Sisak, e-mail: slokar@simet.hr

1 Uvod

Metalurgija praha je široko korišten način proizvodnje inženjerskih dijelova u metaloprerađivačkoj industriji. Jednoosno kompaktiranje je najčešći oblik konsolidacijskog procesa u metalurgiji praha. U tom procesu rastresite čestice praha prešane su u kalupnoj šupljini primjenom tlaka kako bi se dobio otpresak (*engl. green compact*) relativno visoke gustoće koji odgovara obliku šupljine. Tlak se primjenjuje duž uzdužne osi, dok kalupna šupljina daje bočno ograničenje, kako je prikazano na slici 1. Proces je vrlo brz i ima veliki potencijal za masovnu proizvodnju dijelova poput onih u automobilskoj industriji (1, 2).



Slika 1. Shematski prikaz jednoosnog procesa kompaktiranja (1)

Što je veći pritisak tijekom kompaktiranja, to je veća gustoća otpreska. Otpresak dobivene gustoće i čvrstoće je krhak i može se slomiti pri udaru i zbog toga je potrebno otpresak sinterirati u peći u kontroliranoj atmosferi pri temperaturi od otprilike 80% temperature taljenja materijala kako bi se postigla željena čvrstoća. Tijekom sinteriranja, čestice praha zajedno se povezuju. Povezivanje čestica može rezultirati dimenzijskim izobličenjem otpreska. Gradijenti gustoće u otpresku stvaraju deformacije oblika pri sinteriranju. Stoga, kako bi se osigurala ujednačenost u dimenzijama i svojstvima nakon sinteriranja, varijacije gustoće otpreska moraju se minimizirati i razumjeti. Numerička simulacija procesa kompaktiranja u kalupu je učinkovito sredstvo predviđanja profila gustoće otpreska, ovisno o parametrima procesa i osigurava smanjenje materijalnih troškova.

2 Materijalni model procesa kompaktiranja praha metala

Simulacija procesa kompaktiranja praha metala konačnim elementima zahtijeva dobro poznavanje ponašanja materijala tijekom procesa kompaktiranja. Tijekom procesa rastresite čestice praha podvrgnute su pomacima praćenim elastičnom deformacijom i zatim plastičnom deformacijom kako bi se formirala struktura kontinuma sa šupljinama. Ovo istraživanje koristi pristup definiranja praškastog metala kao granularnog materijala, a modificirani Drucker-Prager "Cap" model koristi se za određivanje konstitutivnog ponašanja materijala tijekom simulacije. Mnogi istraživači koriste modificirani DPC model, koji je originalno razvijen za geološke ili zemljane materijale, kako bi opisali ponašanje pri kompaktiranju metalnih materijala (2), kozmetičkih proizvoda (3), farmaceutskih materijala (4, 5) i keramičkih materijala (6) baziran na metodi modela kontinuma.

Prikaz stanja naprezanja izotropnih materijala pojednostavljen je korištenjem invarijanti naprezanja (2). Tečenje i potencijal plastičnog tečenja ovisni su o dvije invariante naprezanja: hidrostatski tlak p , koji je definiran kao trag ukupnog tenzora naprezanja σ_{ij}

$$p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii}, \quad (1)$$

i ekvivalentno Misesovo naprezanje q , koje je definirano kao unutarnji produkt tenzora devijatora naprezanja

$$q = \sqrt{\frac{3}{2}S_{ij}S_{ij}}, \quad (2)$$

gdje je $S_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$ devijator naprezanja. Hidrostatsko naprezanje uzrokuje volumne promjene (dilataciju) u materijalnom elementu dok ekvivalentno Misesovo naprezanje rezultira promjenom oblika (distorzijom) elementa.

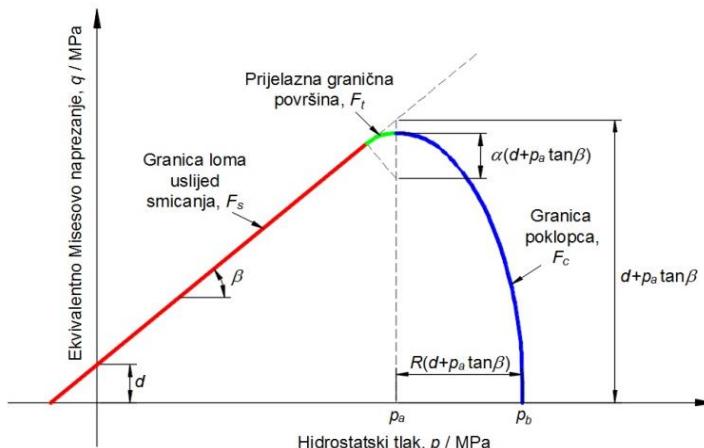
Zgušnjavanje i stvrđivanje praha može se definirati kao funkcija volumenske deformacije. Ukupna volumenska deformacija praha rezultat je vanjskog opterećenja i može se rastaviti na povratnu i nepovratnu komponentu prema sljedećem izrazu

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij}^{el} + \Delta\varepsilon_{ij}^{pl}, \quad (3)$$

gdje je $\Delta\varepsilon_{ij}^{el}$ inkrement elastične deformacije, a $\Delta\varepsilon_{ij}^{pl}$ inkrement plastične deformacije.

2.1 Modificirani Drucker-Prager "Cap" model

Modificirani DPC model je implementiran u programski paket ABAQUS/Standard. Slika 2 prikazuje shematski površine tečenja modificiranog DPC modela u $p-q$ ravnini prema (2, 5).



Slika 2. Površina tečenja modificiranog Drucker-Prager Cap modela

Površina loma uslijed smicanja definirana je izrazom

$$F_s = q - p \cdot \tan \beta - d = 0 , \quad (4)$$

gdje je: d kohezija materijala i β unutarnji kut trenja materijala.

Površinu poklopca regulira poguščavanje / stvrdnjavanje pri velikim tlakovima kompaktiranja (5). Poklopac upravljan volumenskom plastičnom deformacijom može se proširiti kad se neelastična volumenska deformacija poveća ili skupiti kad se ona smanjuje. Površina poklopca je modelirana kao elipsa i p - q prostoru i definirana izrazom

$$F_c = \sqrt{\left(p - p_a\right)^2 + \left[\frac{R \cdot q}{1 + \alpha - \alpha / \cos \beta}\right]^2} - R(d + p_a \tan \beta) = 0 \quad (5)$$

gdje je: R parametar materijala koji kontrolira oblik poklopca (jednak je omjeru veće i manje poluosni eliptičnog poklopca), p_a evolucijski parametar tlaka i α konstanta koja osigurava glatki prijelaz između površine smicanje i poklopca (obično je u granicama 0,01-0,05). Poklopac je kontinuirana obitelj elipsa od kojih svaka odgovara jednoj vrijednosti neelastičnog stanja deformacija tj. relativne gustoće otpreska. Evolucijski parametar tlaka (p_a) predstavlja volumensku neelastičnu deformaciju očvršćavanja/omekšavanja i prikazuje se izrazom

$$p_a = \frac{p_b - R \cdot d}{(1 + R \cdot \tan \beta)} , \quad (6)$$

gdje je p_b hidrostatski tlak granice tečenja koji definira položaj poklopca i obično se izražava kao nelinearna funkcija volumenske plastične deformacije ε_v^{pl} kao

$$p_b = f(\varepsilon_v^{pl}) . \quad (7)$$

Kako bi se postigla glatka površina tečenja definirana je prijelazna zona između linije loma prilikom smicanja i površine poklopca upotrebom α . Ta površina definirana je izrazom

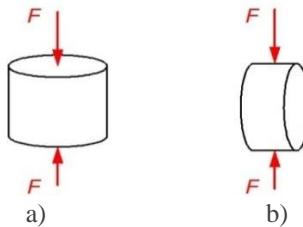
$$F_t = \sqrt{\left(p - p_a\right)^2 + \left[q - \left(1 - \frac{\alpha}{\cos \beta}\right)(d + p_a \tan \beta)\right]^2} - \alpha(d + p_a \tan \beta) = 0 \quad (8)$$

Ovaj glatki prijelaz između površine poklopca i loma uslijed smicanja je neophodan kako bi se izbjegli oštri prijelazi između površina i time spriječile numeričke nestabilnosti.

3 Parametri konstitutivnog modela

Kako bi se definirale površine tečenja modificiranog DPC modela potrebno je odrediti šest parametara: β , d , p_a , R , p_b i α . Parametri β , d , p_a i R funkcije su relativne gustoće, a p_b je u funkciji volumenske plastične deformacije kako bi se definirao zakon očvršćavanja / omekšavanja. Dva elastična parametra, modul elastičnosti E i Poissonov faktor ν koriste se za opisivanje elastičnog ponašanja praha metala, a faktor trenja μ za opisivanje trenja između praha i stjenke kalupa (1, 2 i 7).

Parametri koji određuju granicu loma uslijed smicanja Drucker-Pragerovog kriterija (d i β) mogu biti određeni pomoću jednostavnih tlačnih testova prikazanih na slici 3. Na slici disk je promjera D i debljine t .



Slika 3. Tlačni testovi: a) osni i b) radikalni

Tlačna čvrstoća otpreska određuje se osnim tlačnim testom (slika 3a) na sljedeći način

$$\sigma_T = \frac{4F_T}{\pi D^2}. \quad (9)$$

Vlačna čvrstoća otpreska može biti određena pomoću radikalnog tlačnog testa (slika 3b). Vlačno stanje naprezanja stvara se u centru otpreska i računa se prema maksimalnoj sili loma na sljedeći način

$$\sigma_V = \frac{2F_{\max}}{\pi D t}. \quad (10)$$

Ako dobivene vrijednosti σ_T i σ_V uvrtimo u izraze (1) i (2) dobijemo za radikalni tlačni test: $p = (2/3) \cdot \sigma_V$ i $q = \sqrt{13} \cdot \sigma_V$, a za osni tlačni test: $p = (-1/3) \cdot \sigma_T$ i $q = -\sigma_T$. Time su d i β definirani sljedećim izrazima

$$d = \frac{\sigma_T \cdot \sigma_V (\sqrt{13} - 2)}{\sigma_T - 2\sigma_V}, \quad (11)$$

$$\beta = \tan^{-1} \left[\frac{3(\sigma_T - d)}{\sigma_T} \right]. \quad (12)$$

Određivanje svih parametara materijala ukratko je prikazano tablicom 1.

Tablica 1. Kalibracija parametara konstitutivnog modela (7)

Parametar	Opis	Testna procedura
Plastično ponašanje: Drucker-Prager Cap model		
d , MPa	kohezija	tlačni test u smjeru: - uzdužne osi - polumjera
β , °	unutarnji kut trenja	
R	parametar oblika poklopca	test kompaktiranja; opterećenje
p_b	zakon očvršćavanja	
Elastično ponašanje: Linearno elastično		
E , GPa	modul elastičnosti	test kompaktiranja; rasterećenje
ν	Poissonov faktor	

Iz navedenog slijedi da numeričko modeliranje može pružiti relevantne informacije za bolje razumijevanje te predviđanje proizvodnje inženjerskih dijelova metalurgijom praha.

4 Buduća istraživanja

Primjer kompaktiranja s preuzetim parametrima materijala iz literature biti će implementiran u programski paket ABAQUS/Standard korištenjem modificiranog DPC modela.

Literatura

- Wagle G S. Die compaction simulation: Simplifying the application of a complex constitutive model using numerical and physical experiments. PhD Thesis. The Pennsylvania State University. 2006.
- Zhou M, Huang S, Hu J, Lei Y, Xiao Y, Li B, Yan S, Zou F. A density-dependent modified Drucker-Prager Cap model for die compaction of Ag57.6-Cu22.4-Sn10-In10 mixed metal powders. Powder Technology. 2017; 305:183-196.
- Diarra H, Mazel V, Boillon A, Rehault L, Busignies V, Bureau S, Tchoreloff P. Finite element method (FEM) modeling of the powder compaction of cosmetics products: comparison between simulated and experimental results. Powder Technol. 2012;224: 233-240.
- Michrafy A, Ringenbacher D, Tchoreloff P. Modelling the compaction behaviour of powders: application to pharmaceutical powders. Powder Technol. 2002; 127: 257-266.
- Sinha T, Curtis J S, Hancock B C, Wassgren C. A study on the sensitivity of Drucker-Prager Cap model parameters during the decompression phase of powder compaction simulations. Powder Technology. 2010; 198:315-324.
- Park H, I Kim K T. Consolidation behaviour of SiC powder under cold compaction. Mater. Sci. Eng. A 2011; 299: 116-124.
- Shang C. Modelling powder compaction and breakage of compacts. PhD Thesis. University of Leicester. 2012.

Hidrodinamički otpor trupa jedrilice klase Optimist

Markučić, V.¹, Cindori, M.² i Krizmanić, S.³

Sažetak

U radu je istražena ovisnost hidrodinamičkog otpora uronjenog dijela trupa jedrilice klase Optimist o volumenu istisnine. Analiza je napravljena nizom računalnih simulacija variranjem volumena istisnine pri brzini od 1,5 m/s (3 čvora). Svi proračuni su provedeni uz maksimalnu dubinu urona kobilice, bez uzdužnih i poprečnih nagiba jedrilice (ravno uronjena jedrilica). Računalne simulacije su provedene za volumene istisnine koji odgovaraju masama jedriličara od 30, 40, 45, 50 i 60 kg. Za svaki volumen istisnine je napravljen zaseban 3D model koji je diskretiziran odgovarajućom mrežom konačnih volumena. Računalne simulacije provedene su za stacionarne uvjete strujanja s $k - \epsilon$ modelom turbulencije. Slobodna površina je promatrana kao ravnina simetrije te je zanemaren utjecaj valova. U radu je izračunat otpor oblika i viskozni otpor uronjenog dijela trupa jedrilice te je izvršena analiza i usporedba rezultata.

Ključne riječi: Računalna dinamika fluida, metoda konačnih volumena, hidrodinamički otpor jedrilice, masa jedriličara

¹ **Vedrana Markučić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: vedrana.markucic@fsb.hr

² **Mihael Cindori, mag.ing.mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: mihael.cindori@fsb.hr

³ **Doc. dr. sc. Severino Krizmanić, dipl. ing. stroj.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: severino.krizmanic@fsb.hr

1 Uvod

U natjecateljskom jedrenju kao i u drugim sportskim natjecanjima bitan je svaki, pa i naizgled nebitan djelić, koji u konačnici može dati razliku u postizanju boljeg odnosno nešto slabijeg rezultata. U jedrenju je mnoštvo utjecaja izvan mogućnosti kontrole, poput smjera i jačine vjetra, a od jedriličara se očekuje da ostvare najbolje moguće rezultate s onim varijablama koje mogu kontrolirati i na koje mogu utjecati (1, 2, 3). Utjecaji pojedinih faktora na hidrodinamički otpor trupa (utjecaj brzine, mase, kuta nagiba jedrilice, dubine urona kobilice itd.) su poznati jedriličarima u relativnom smislu, a ne kvantitativno. Cilj rada je odrediti kvantitativni iznos parametra volumena istisnine te njegov utjecaj na ukupni hidrodinamički otpor trupa jedrilice.

Odabrana je jedrilica klase Optimist za sve numeričke simulacije ponajprije zbog jednostavnosti same konstrukcije jedrilice i dostupnosti tehničkih nacrta (4). Također jedan od razloga zašto je upravo jedrilica klase Optimist promatrana u ovom radu je ta što je upravo ovo tip jedrilice poznat većini, ako ne i svim jedriličarima, te sama činjenica da većina jedriličara započinje svoj jedriličarski put upravo u ovom tipu tzv. školske jedrilice.

Primjenom metode računalne dinamike fluida (engl. Computational fluid dynamics, CFD) odrediti će se promjena sile otpora u ovisnosti o volumenu istisnine jedrilice pri čemu će se za pojednostavljenje koristiti horizontalna ravnina simetrije umjesto slobodne površine (5, 6). Osim hidrodinamičkog koeficijenta otpora, promatrati će se iznosi koeficijenti otpora oblika i otpora trenja kako bi se dobio što potpuniji uvid u promjene koeficijenta otpora.

2 3D modeli i numerička simulacija

2.1 3D modeli za različite volumene istisnine

Promatrani su volumeni istisnine koji odgovaraju masama jedriličara od 30, 40, 45, 50 i 60 kg što su najzastupljenije mase jedriličara u klasi jedrilica Optimist. Veličina ukupnog volumena istisnine uronjenog dijela jedrilice je određena ukupnom masom jedrilice i jedriličara uz konstantnu vrijednost gustoće fluida ($\rho=1000 \text{ kg/m}^3$). Budući da su masa cijele jedrilice Optimist i gustoća fluida poznati i konstantni, u ovom radu se volumen istisnine naznačuje iznosom mase jedriličara. Promatran je trup jedrilice pri maksimalnoj dubini urona kobilice, bez uzdužnih i poprečnih nagiba jedrilice (ravno uronjena jedrilica).

Izrađen je 3D model trupa jedrilice prema nacrтima jedrilice Optimist (4). U tablici (Tablica 1.) su navedene osnovne dimenzije jedrilice Optimist.

Tablica 1. Osnovne dimenzije jedrilice Optimist

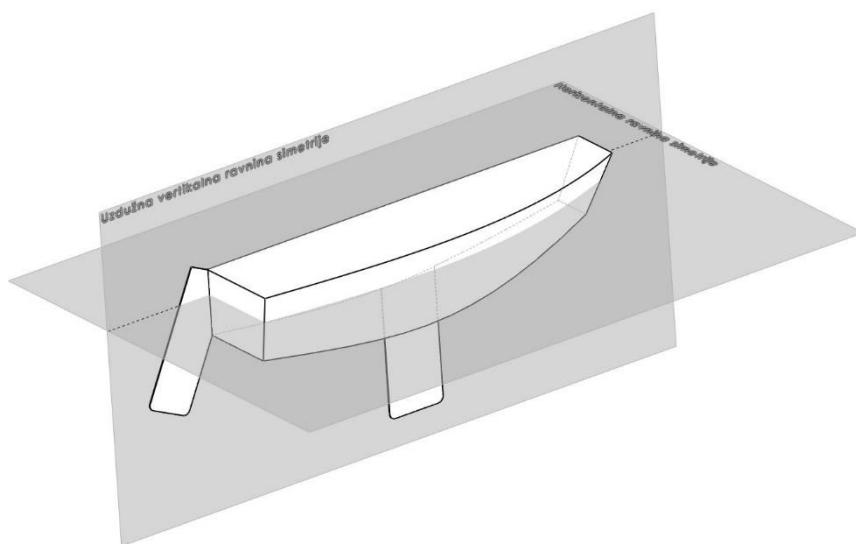
Dužina	2,30 m
Širina	1,13 m
Masa	35,00 kg
Površina jedra	3,25 m ²

Za svaku masu jedriličara napravljen je zaseban 3D model s odgovarajućim volumenom istisnine (Slika 1.).



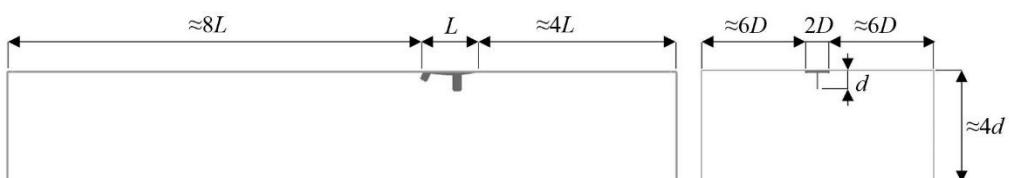
Slika 1. 3D model trupa jedrilice te 3D modeli za mase jedriličara 30 i 60 kg

Domena proračuna je definirana uvođenjem uzdužne vertikalne ravnine simetrije zbog simetričnosti same jedrilice te horizontalnom ravnninom simetrije na slobodnoj površini (Slika 2.).



Slika 2. Ravnine simetrije

Dimenzije domene proračuna su višestruko veće od dimenzija jedrilice, jer je potrebno na granicama domene ostvariti uvjete što sličnije neporemećenom strujanju (Slika 3.). Stupanj začepljenosti presjeka (engl. blockage factor), za koji je preporučeno da je manje od 5%, iznosi 1% (6).



Slika 3. Dimenzije domene proračuna

Za svaki volumen istisnine je napravljen zaseban 3D model koji je diskretiziran odgovarajućom mrežom konačnih volumena. Finija mreža je napravljena na područjima rubnog sloja te na mjestima promjene geometrije trupa jedrilice. S udaljavanjem od trupa prema rubovima domene, mreža postaje sve rjeđa. Mrežom konačnih elemenata dominiraju strukturirani heksaedarski konačni volumeni, a zbog složenosti oblika trupa jedrilice uz trup jedrilice mreža je nestrukturirana tetraedarska mreža konačnih volumena.

2.2 Postavke numeričke simulacije

Korišten je model trodimenzijskog nestlačivog turbulentnog strujanja, koji obuhvaća sljedeće jednadžbe: jednadžba kontinuiteta, jednadžba količine gibanja, a za opis turbulentnih veličina koristi se standardni $k - \varepsilon$ model turbulentcije upotpunjeno standardnim zidnim funkcijama (7, 8).

Za rubne uvijete su korišteni: ulaz (zadana brzina), izlazna granica, ravnina simetrije na svim granicama domene te nepropusna stjenka (wall) na trupu jedrilice. Brzina strujanja vode zadana je na ulaznoj granici iznosom od 1,5 m/s (3 čvora) koja prema međunarodnom savezu jedriličara (ISAF) odgovara prosječnoj brzini jedrenja u klasi Optimist. Na ulazu su zadane vrijednosti intenziteta turbulentcije (engl. Turbulent intensity, TI=1%) i karakteristične duljine vrtloga (engl. Turbulent length scale, TLS=0,01) koje odgovaraju slučaju srednje mirne struje fluida (3, 7). Odabirom ove vrijednosti brzine osigurano je da se proračun odvija pri visokim Reynoldsovim brojevima što odgovara turbulentnoj naravi prolaska trupa jedrilice kroz vodu, odnosno stvarnim uvjetima plovidbe jedrilice.

Problem je rješavan pomoću nestacionarnog rješavača, iako je strujanje stacionarno, zbog lakšeg kontroliranja konvergencije proračunskog postupka (6). Korištena je shema diskretizacije drugog reda točnosti.

Proračuni svakog od slučajeva različitih volumena istisnine je uspješno provedeni. Reziduali svih jednadžbi su manji od 10^{-4} , a vrijednost sile hidrodinamičkog otpora jedrilice se ustalila u četvrtoj značajnoj znamenki.

3 Rezultati

Rezultati proračuna koeficijenta otpora i hidrodinamičke sile otpora uronjenog dijela jedrilice za različite slučajevе volumena istisnine tj. mase jedriličara prikazani su u tablici (Tablica 2.).

Bezdimenzijski koeficijent otpora je izračunat prema izrazu (1):

$$C_D = \frac{F_D}{A_{ref} \rho \frac{v_\infty^2}{2}}, \quad (1)$$

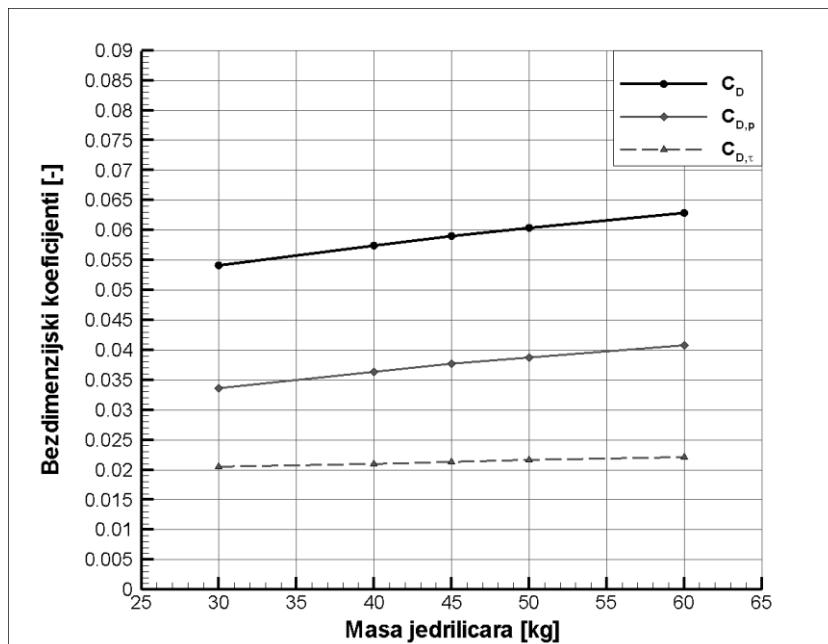
gdje A_{ref} označava referentnu površinu uronjenog dijela jedrilice, ρ gustoću fluida, a veličina v_∞ označava brzinu neporemećenog strujanja, te iznose:

$$A_{ref} = 0,25 \text{ m}^2; \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3; \quad v_\infty = 1,5 \text{ m/s} \quad (2)$$

Tablica 2. Koeficijenti otpora i hidrodinamičke sile otpora

Naziv slučaja	Masa jedriličara [kg]	F_D [N]	C_D
30 kg	30	15,22	0,05412
40 kg	40	16,14	0,05739
45 kg	45	16,60	0,05902
50 kg	50	16,98	0,06037
60 kg	60	17,68	0,06286

S porastom mase jedriličara, tj. s povećanjem volumena istisnine raste i koeficijent hidrodinamičkog otpora. Hidrodinamička sila otpora je ukupna sila otpora nastala zbrojem sile otpora oblika koja nastaje zbog razlike tlakova i sile otpora trenja koja je posljedica tangencijalnih naprezanja po površini jedrilice. Bezdimenzijski koeficijenti otpora oblika ($C_{D,p}$) i koeficijenti otpora trenja ($C_{D,\tau}$), definirani na isti način kao i ukupni koeficijent otpora.



Slika 4. Ovisnost koeficijenata otpora o masi jedriličara

Na slici (Slika 4.) su prikazani utjecaji otpora trenja i otpora oblika na ukupni iznos koeficijenta otpora. Koeficijent otpora oblika raste s porastom mase jedriličara tj. s povećanjem volumena istisnine. Koeficijent otpora trenja nema znatnog porasta ili smanjenja bez obzira na promjenu mase jedriličara. Za razliku od koeficijenta otpora trenja, koeficijent otpora oblika u većoj mjeri doprinosi ukupnom hidrodinamičkom koeficijentu otpora.

4 Zaključak

Ispitan je utjecaj volumena istisnine uronjenog dijela jedrilice koji ovisi o masi jedriličara, na hidrodinamičku silu otpora za pet različitih slučajeva. Proračuni su izvedeni s pojednostavljenom geometrijom uronjenog dijela jedrilice i zadanim ravninama simetrije uz primjenu standardnog $k - \epsilon$ modela turbulencije i standardnih zidnih funkcija. Usvojeni proračunski model rezultirao je stacionarnim rješenjima za svaki od slučajeva. Izračunati su iznosi hidrodinamičke sile i koeficijenti otpora, prema kojima je moguće pratiti trendove i međusobne odnose kroz promatrane slučajeve.

Hidrodinamička sila otpora raste s porastom volumena istisnine tj. s porastom mase jedriličara. Pri povećanju mase jedriličara za 100% (sa 30 kg na 60 kg), koeficijent hidrodinamičke sile otpora se promijeni za 14 % (sa 0,05412 na 0,06286).

U svrhu analize promjene hidrodinamičke sile otpora praćene su promjene iznosa sila otpora trenja i sila otpora oblika. Promjena sile otpora trenja je neznatna pri promjeni volumena istisnine tj. mase jedriličara. Iz navedenog se može zaključiti da na ukupnu silu hidrodinamičkog otpora jedrilice dominantno utječe sila otpora oblika.

Rezultati obuhvaćeni ovim radom pružaju uvid u trendove promjena hidrodinamičkih sila otpora pri konstantnoj brzini kretanja jedrilice te bez pojave valova na površini. Dodatnim proračunima i simulacijama mogu se ispitati daljnje promjene hidrodinamičke sile otpora za različite brzine jedrilice, s pojavom otpora valova te s bočnim nagibima jedrilice koji su karakteristični za jedrenje.

Literatura

1. Pennanen M, Levin RL, Larsson L, Finnsgard C. Numerical prediction of the best heel and trim of a Laser dinghy. *Engineering of Sport* 11. 2016;147:336-41.
2. Viola IM, Flay RGJ, Ponzini R. CFD Analysis of the Hydrodynamic Performance of Two Candidate America's Cup AC33 Hulls. *The International Journal of Small Craft Technology*. 2012;154(B1):1-12.
3. Levin RL, Finnsgard C, Peter J. Hydrodynamic Resistance Prediction of an Olympic Class Sailing Dinghy Using CFD and Towing Tank Testing. *Sports Science Research and Technology Support, Icsports* 2014. 2015;556:85-106.
4. Cerinić I. Kako sagraditi jedrilicu za naše najmlađe. *Brodogradnja, časopis brodogradnje i brodograđevne industrije*. 1973;7:199-202.
5. Ferziger JH, Perić M. Computational Methods for Fluid Dynamics 3rd edition. Springer. Germany. 2002.
6. Hirsch C. Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. John Wiley & Sons. Great Britain. 2007.
7. Kim WJ, Kim DH, Van SH. Computational study on turbulent flows around modern tanker hull forms. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2002;38(4):377-406.
8. Park S, Park SW, Rhee SH, Lee SB, Choi JE, Kang SH. Investigation on the wall function implementation for the prediction of ship resistance. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*. 2013;5(1):33-46.

Priča o jednoj fotografiji – prilog povijesti HDM-a

Marović, P.¹

Sažetak

U posljednjih nekoliko godina se u raznim prigodama (otvaranje raznih skupova, pozvana predavanja, članci u časopisima posvećeni poznatim znanstvenicima i slično) pojavljuje jedna fotografija za koju se nikad ne navede gdje i kada je snimljena, kojom prigodom kao ni tko je sve na njoj. Pošto fotografija objedinjuje obilježavanje jednog povijesnog sportskog događaja i nekoliko ljudi koji su istaknuti članovi hrvatske, europske i svjetske znanosti iz područja mehanike, smatram da bi to trebalo na određeni način obilježiti i revalorizirati.

Obzirom na gore navedeno, u ovom članku sam opisao, kao jedan od sudionika navedenog skupa odnosno jedna od osoba s fotografije, kada i kojom prigodom je ta fotografija snimljena odnosno tko se sve na njoj nalazi.

Ključne riječi: fotografija, povijest, HDM, mehanika

¹ Prof. dr. sc. Pavao Marović, dipl. ing. grad., Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za otpornost materijala i ispitivanje konstrukcija, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: marovic@gradst.hr

1 Uvod

U posljednjih nekoliko godina se u raznim prigodama (članci u časopisima posvećeni poznatim znanstvenicima (1), otvaranje raznih skupova, pozvana predavanja (2), i slično) pojavljuje jedna fotografija za koju se nikad ne navede gdje (Split, stadion HNK Hajduk u Poljudu) i kada je snimljena (u noći s 8. na 9. svibnja, 1991. godine), kojom prigodom (doček nogometaša Hajduka) kao ni tko je sve na njoj (I. Bego, V. Jović, P. Marović, V. Schoenauer, D.R.J. Owen, F.B. Damjanić, N. Bićanić, A. Mihanović). Pošto fotografija objedinjuje obilježavanje jednog povijesnog sportskog događaja (doček nogometaša Hajduka nakon osvajanja posljednjeg nogometnog kupa bivše države Jugoslavije) i nekoliko ljudi koji su istaknuti članovi hrvatske, europske i svjetske znanosti iz područja mehanike, smatram da bi to trebalo na određeni način obilježiti odnosno oteti zaboravu.

U članku će se u kratkim crtama opisati kako je došlo do navedenog događaja – okupljanje ove, na prvi pogled šarolike grupe ljudi (dva starija bivša nogometaša Hajduka i šest znanstvenika iz područja mehanike), na tom mjestu (Hajdukov stadion u Poljudu) i tom prigodom (doček nogometaša Hajduka) i kakve to ima veze s Hrvatskim društvom za mehaniku.

2 Okolnosti nastanka predmetne fotografije

Hrvatsko društvo za mehaniku (HDM) je znanstvena udruga koja okuplja hrvatske znanstvenike iz svih područja mehanike a jedna od zadaća mu je i organiziranje raznih znanstvenih skupova, kako domaćih tako i međunarodnih. Tako su članovi HDM-a profesori F.B. Damjanić, N. Bićanić i P. Marović zajedno s profesorima D.R.J. Owen i E. Hinton organizirali konferenciju ***Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*** (3) u Splitu 1984. godine, a F.B. Damjanić, P. Marović i V. Jović zajedno s D.R.J. Owen-om, E. Hinton-om i C. Taylor-om organizirali konferenciju ***Numerical Methods for Non-linear Problems*** (4) u Dubrovniku 1986. godine. Nastavak suradnje s kolegama iz Swansea (University College of Swansea, Department of Civil Engineering, Swansea, Wales, United Kingdom) je trebala biti organizacija konferencije ***Nonlinear Engineering Computations*** koja se je trebala održati u Splitu u jesen 1991. godine. Kod organiziranja svih ovih konferencija treba istaknuti suglasnost kao i institucionalnu i logističku pomoć Izvršnog odbora HDM-a te prof. dr. sc. Ivu Alfirevića i tajnicu gđu Jasminku Biondić.

Za napomenuti je da je konferencija ***Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*** (3) u Splitu 1984. godine okupila 100-tinjak tada najvažnijih i najznačajnijih znanstvenika iz cijelog svijeta iz područja razvoja numeričkih metoda a posebice primjene u računalnom modeliranju i analiziranju ponašanja betonskih konstrukcija. Nastavak održavanja serije ove konferencije je preuzeo profesor N. Bićanić koja se zajedno s profesorima H.A. Mang-om, R. de Boerst-om, G. Meschke-om, B. Pichler-om i J.G. Rots-om pod nazivom ***EURO-C Computational Modelling of Concrete Structures*** održava svakih nekoliko godina u proljeće u austrijskim alpama (1990., Zell am See; 1994., Innsbruck; 1998., Badgastein; 2003., St. Johann im Pongau; 2006., Mayrhofen; 2010. Rohrmoos/Schladming; 2014., St. Anton am Arlsberg; 2018., Bad Hofgastein – biti će posvećena uspomeni na prof. N. Bićanića).

Organizacija konferencije ***Nonlinear Engineering Computations*** koja se je trebala održati u Splitu u jesen 1991. godine odvijala se preko HDM-a vrlo uspješno ali su se nad njom počeli okupljati crni oblaci. Naime, u proljeće 1991. godine (početak osamostaljenja Republike

Hrvatske, tzv. balvan-revolucija, izgledna agresija na Republiku Hrvatsku, itd.) sigurnosna situacija je počela biti vrlo nepovoljna posebice sa stajališta kolega iz inozemstva. Trebalo je odlučiti što s konferencijom: održati je u nepovoljnem politički-sigurnosnom okruženju, otkazati je u potpunosti ili je premjestiti negdje drugdje. Kontakti između profesora F.B. Damjanića, N. Bićanića, P. Marovića, A. Mihanovića (u to vrijeme Dekan Građevinskog fakulteta u Splitu) i D.R.J. Owena bili su vrlo intenzivni. Organizacija konferencije se odvijala uobičajeno (dogovori s hotelom, prijave sudionika, itd.) ali se stalno razmatrala sigurnosna situacija dok se s donošenjem konačne odluke čekao posljednji trenutak. S tim ciljem je dogovoren sastanak svih organizatora u Splitu početkom svibnja 1991. godine.

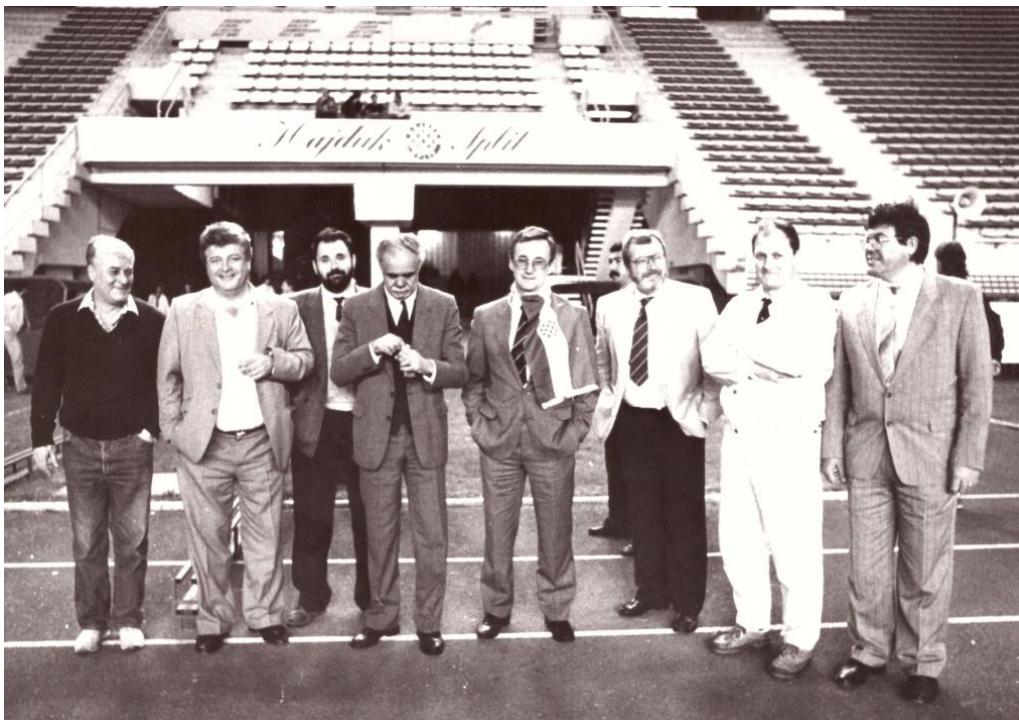
Profesori D.R.J. Owen i N. Bićanić su iz Swansea-a došli u Splitu te su u razdoblju od 8. do 10. svibnja održali nekoliko sastanaka s profesorima F.B. Damjanićem, P. Marovićem, A. Mihanovićem i V. Jovićem. Razgledan je hotel gdje se je konferencija trebala održati, dogovoreni su i usuglašeni svi detalji oko održavanja konferencije u odabranom hotelu, postignuti su dogovori oko Zbornika radova, riješeno je dosta sitnijih organizacijskih pitanja, itd. Konačna odluka o održavanju konferencije nije donesena, ali su odabrana dva moguća rješenja: održati konferenciju u Splitu ili održavanje premjestiti u Swansea (naime, temeljem velikog iskustva kolege iz Swansea bi relativno brzo mogle organizirati održavanje konferencije u nekom od hotela u Swansea-u).

Slijedom opisanih događanja u srijedu, 8. svibnja 1991. godine, nakon razgovora su profesori F.B. Damjanić, D.R.J. Owen, N. Bićanić, A. Mihanović, P. Marović i V. Jović otišli na večeru.

Stjecajem okolnosti, tog istog dana 8. svibnja 1991. godine održala se u popodnevним satima finalna utakmica nogometnog kupa Jugoslavije, poznatog pod nazivom Kup Maršala Tita, na Stadionu JNA u Beogradu, pred cca 7.000 gledatelja. Finalna utakmica se igrala između Crvene Zvezde iz Beograda i Hajduka iz Splita. Jedini gol na utakmici postigao je Alen Bokšić (5) u 65. minuti i time je Hajduk (6) osvojio Kup Jugoslavije, što se kasnije pokazalo da je to bio zadnji nogometni kup države koja je polako nestajala. Hajduk je igrao u sastavu: V. Mihačić, M. Hadžiađabić, G. Kovač (M. Osibov), I. Štimac (kapetan), D. Setinov, S. Bilić, A. Kozniku, A. Miše (J. Jeličić), A. Bokšić, G. Vučević, R. Jarni. Trener Hajduka je bio Joško Skoblar.

Kako je u to vrijeme znanstveni novak Miroslav Schoenauer kod profesora A. Mihanovića trebao otići na doktorski studij na Department of Civil Engineering, University College of Swansea kod profesora D.R.J. Owen-a to je društvo s večere (profesori F.B. Damjanić, D.R.J. Owen, N. Bićanić, A. Mihanović, P. Marović i V. Jović) otišlo na Stadion u Poljudu kod V. Schoenauer-a, oca novaka M. Schoenauer-a, koji je u to vrijeme obnašao dužnost Direktora Stadiona (7).

U slavljeničkoj atmosferi, pred skoro punim stadionom, očekivao se dolazak nogometara Hajduka iz zračne luke u Kaštelima. U tom očekivanju i naše društvo je sišlo na travnjak stadiona u Poljudu. Tu je bilo više ljudi, između ostalih i neki stariji igrači Hajduka. Iz oružarnice se donijelo nekoliko nogometnih lopti (jedna je s potpisima svih igrača Hajduka poklonjena profesoru Owenu koja se još nalazi u njegovoj radnoj sobi na fakultetu u Swansea-u), navijači su slavili po tribinama, a bilo je i dosta fotoreportera i novinara. Svi su željno iščekivali dolazak nogometara Hajduka i zasluženi trofej. U toj atmosferi nastala se je ova fotografija (Slika 1) koju je napravio Feđa Klarić, poznati splitski fotoreporter. Na njoj se nalaze redom s lijeva na desno: Ivo Bego, Vinko Jović, Pavao Marović, Vladimir Schoenauer, Roger Owen, Frano Damjanić, Nenad Bićanić i Ante Mihanović.



Slika 1. U očekivanju dolaska nogometnika Hajduka na stadionu u Poljudu (s lijeva na desno): Ivo Bego, Vinko Jović, Pavao Marović, Vladimir Schoenauer, Roger Owen, Frano Damjanić, Nenad Bićanić i Ante Mihanović (foto: Feđa Klarić)

3 Još ponešto o konferenciji *Nonlinear Engineering Computations*

Kako je prethodno navedeno, dana 8. svibnja 1991. godine nije donesena konačna odluka o mjestu održavanja konferencije *Nonlinear Engineering Computations* te je nastavljeno sa svim poslovima vezanim s organiziranjem iste (dogovori u hotelu, komunikacija s autorima članaka, prikupljanje prijava i članaka, itd.). Pratio se razvoj političke i sigurnosne situacije. Tako je još 12. lipnja 1991. godine dogovoren da se nastave sve aktivnosti u svezi organiziranja konferencije u Splitu. Konačna odluka je donešena 9. srpnja 1991. godine u telefonskom razgovoru između profesora N. Bićanića, koji je u to vrijeme radio u Swansea-u, i profesora P. Marovića kao glavnog operativca u Splitu: održavanje konferencije se zbog sigurnosti sudionika premješta u Swansea.

Konferencija *Nonlinear Engineering Computations* je održana u Swansea-u u vremenu od 16. do 20 rujna 1991. godine (8). Službeno se mjesto održavanja konferencije vodi kao Swansea-Split.

Da je procjena sigurnosne situacije bila dobra može potvrditi i činjenica da je 15. rujna 1991. godine, dana kada se mogao očekivati dolazak najvećeg broja sudionika kako iz zemlje tako i iz inozemstva, zračna luka u Kaštelima napadnuta i bombardirana od strane zrakoplova bivše države.

4 Ukratko ponešto o ljudima s fotografije

Na predmetnoj fotografiji (Slika 1) se nalaze redom s lijeva na desno: Ivo Bego, Vinko Jović, Pavao Marović, Vladimir Schoenauer, David Roger Jones Owen, Frano Boris Damjanić, Nenad Bičanić i Ante Mihanović. U nastavku, ponešto o svakome u najkraćim crtama zbog ograničenja u prostoru. Opširnije se o njima odnosno njihovim radovima može naći u naznačenoj literaturi odnosno na njihovim web-stranicama i u IRBI bazi radova.

4.1 Ivo Bego

Jedan od tri brata Bego (Ivo, Boran i Zvonko) koji su igrali za Hajduk, Ivo (Split, 23.02.1937.) je bio čvrsti obrambeni igrač (na jednoj utakmici s Dinamom poslao je dvojicu igrača s terena direktno u bolnicu). Za Hajduk je nastupao od 1955. do 1965. godine odigravši 253 utakmice, te je postigao 14 pogodaka (9).

4.2 Vinko Jović

Profesor Vinko Jović (Dragljane kod Vrgorca, 24.01.1945.) je bio dugogodišnji, ali i prvi, profesor na Građevinskom fakultetu u Splitu. Najmlađi doktor tehničkih znanosti u bivšoj državi i prvi nastavnik (docent – 1974. godine) na novootvorenom Građevinskom fakultetu u Splitu, (1). Znanstvenik i stručnjak koji je ostavio neizbrisiv trag u području hidromehanike, (10) i (11), ali i u razvitučku numeričkim algoritama i numeričkog modeliranja inženjerskih problema (12). Tijekom akademске 1985.-1986. godine boravio u Swansea-u kod prof. Owena.

4.3 Pavao Marović

Profesor Pavao Marović (Split, 26.01.1954.) je cijeli svoj radni vijek proveo na Građevinskom fakultetu u Splitu. Posljednji predsjednik Skupštine Sveučilišta u Splitu (1991.-1993.), prodekan (1991.-1994.), prorektor (1994.-1998.), dekan fakulteta (2000.-2006.). Jedan od važnijih činitelja u osnivanju sveučilišnog studija Arhitekture u Splitu. Bavio se razvojem numeričkih metoda u rješavanju inženjerskih problema (preslikani beskonačni elementi) i ispitivanjem raznih građevinskih konstrukcija, elemenata i modela konstrukcija. U nekoliko navrata boravio u Swansea-u a s prof. Owen-om vodio nekoliko ALIS projekata (HR-UK). Bio je prvi predsjednik HDM-a (1998.-2002.) izabran između znanstvenika izvan Zagreba. Jedan od osnivača i dugogodišnji urednik časopisa *International Journal for Engineering Modelling* (ISSN 1330-1365). Član Akademije tehničkih znanosti Hrvatske (HATZ).

4.4 Vladimir Schoenauer

Vladimir Schoenauer, zvan Geza, (Split, 29.11.1930. – Split, 05.01.2013.) je jedan od legendarnih igrača Hajduka za kojeg je nastupao od 1950. do 1955. odigravši 471 utakmicu i postigavši 132 pogotka (7). S Hajdukom osvojio tri naslova državnog prvaka (1950., 1952. i 1955). Prema mišljenju suigrača, bio je vrlo "spretan" u padanju unutar protivničkog šesnaesterca. Osim za Hajduk, igrao je i za OFK Beograd, Austria Klagenfurt i RNK Split. Završio je Ekonomski fakultet te je nakon završetka igračke karijere bio šef recepcije hotela Marjan u Splitu (do 1979.) i direktor stadiona u Poljudu (1979.-1991).

4.5 David Roger Jones Owen

Profesor David Roger Jones Owen (Swansea, 27.05.1942.) je jedan od najvažnijih, najznačajnijih i najplodnijih svjetskih znanstvenika u području računalne mehanike posebice u razvoju i primjeni numeričkih metoda proračuna (metoda konačnih elemenata, metoda diskretnih elemenata, FDEM, itd.) u inženjerstvu općenito. Odgojio je preko 70 svjetski poznatih znanstvenika (među njima su i tri naša člana iz Splita: F.B. Damjanić, A. Munjiza i M. Schoenauer), ali je posredno utjecao na izradu desetak doktorskih i magistarskih radova na raznim fakultetima u Splitu, Zagrebu i Rijeci. Napisao je veliki broj raznih djela od kojih bi kao najznačajnije trebalo istaknuti znanstvene knjige / udžbenike (13), (14), (15) i (16). S kolegama E. Hinton-om, C. Taylor-om i J. Middleton-om osnivač izdavačke kuće Pineridge Press Ltd. Swansea. Jedan od utemeljitelja i glavnih urednika časopisa *Engineering Computations* (ISSN 0264-4401). Dobitnik velikog broja nagrada, priznanja, medalja, članstva u raznih akademijama (Velika Britanija, Vels, S.A.D., Kina), počasnih doktorata (Porto, Cachan, Barcelona, Split). Uvijek je nesebično pomagao, poticao i promicao hrvatske znanstvenike, posebice iz Splita, s kojima je zadržao trajne i plodne ne samo znanstvene nego u prvom redu i osobne, prijateljske veze. Na svim dosadašnjim međunarodnim kongresima HDM-a bio je član Znanstvenog odbora, a aktivno je sudjelovao na 1. kongresu u Puli 1994. godine i 6. kongresu u Dubrovniku 2009. godine.

4.6 Frano Boris Damjanić

Profesor Frano Boris Damjanić (Split, 29.10.1944. – Ljubljana, 28.05.1998.) doktorirao u Swansea-u (17) kod prof. Owena odakle je od njega i njegovog tima donio veliku količinu raznoraznih materijala ali i ideja o razvoju i unaprjeđenju znanstveno-istraživačkog rada u području mehanike posebice računalne mehanike i njene primjene u inženjerskoj praksi u Splitu i Hrvatskoj. Tako je bio idejni začetnik i glavni organizator i koordinator tri velike međunarodne konferencije (3), (4) i (8), održane u Hrvatskoj, pokretanja časopisa *International Journal for Engineering Modelling* (ISSN 1330-1365), te TEMPUS projekta ACEM (Advanced Computational Engineering Mechanics) kojim je okupio 15 europskih sveučilišta/fakulteta iz 8 zemalja. Bavio se razvojem jednostavnog numeričkog modela betonskih i armirano betonskih konstrukcija posebice pod utjecajem toplinskih djelovanja. Slijedom navedenog, analizirao je utjecaj djelovanja topline iz tunela ispod kanala La Manche na okolno morsko tlo (18). Kao član General Council-a udruge IACM (International Association for Computational Mechanics) jedan od pokretača inicijative za osnivanje udruge Central European Association for Computational Mechanics – CEACM, te prvi predstavnik Hrvatske u CEACM-u, (19) i (20). Nažalost, zbog nerazumjevanja i neslaganja s upravljačkim strukturama u Splitu i Zagrebu, 1987. godine otišao na Fakultet za gradbeništvo in geodeziju Sveučilišta u Ljubljani. Više cijenjen u inozemstvu nego u domovini (21).

4.7 Nenad Bićanić

Profesor Nenad Bićanić (Zagreb, 06.09.1945. – Mali Lošinj, 08.10.2016.) radio je i istraživao na građevinskim fakultetima u Zagrebu, Delft-u, Swansea-u, Boulder-u, Glasgow-u i Rijeci (22) i (23). Bavio se razvojem numeričkih metoda, posebice tada novoj metodi konačnih elemenata, pri čemu je stečena teorijska znanja prenosio u inženjersku praksu razvojem programa za proračun

raznih inženjerskih konstrukcija (procesi gubitka nosivosti i lokalizacija deformacija vezane za nastajanje i razvoj pukotina u betonu, dinamička djelovanja, nereflektirajući rubni uvjeti, kombinirana metoda konačnih i diskretnih elemenata kod višepoljnih problema, itd.). Bio je prvi ne-britanski znanstvenik koji je dobio titulu "Kraljevski profesor" (Regius Professor). Osim što je bio koordinator dva TEMPUS projekta (ACEM – Advanced Computational Engineering Mechanics i RUCE – Restructuring and Updating of Civil Engineering Curriculum) koji su uključivali sva četiri hrvatska građevinska fakulteta valja istaknuti da je bio jedan od osnivača alumni udruge AMAC-UK (Udruga bivših studenata sveučilišta iz Hrvatske u Velikoj Britaniji). Veliki zaljubljenik u narodne plesove i međunarodni folklor tako da je pri SKUD "Ivan Goran Kovačić" osnovao 1981. godine jedinstvenu grupu na ovim prostorima, Grupu za međunarodni folklor, u kojoj se plešu narodni plesovi iz cijelog svijeta i koja još uvijek djeluje. Kao neumorni osnivač i organizator treba napomenuti da je u Velikoj Britaniji osnovao njihovo društvo za računalnu mehaniku u inženjerstvu – ACME UK (Association for Computational Mechanics in Engineering). Dugogodišnji aktivni član udruge IACM (International Association for Computational Mechanics) i CEACM (Central European Association for Computational mechanics).

4.8 Ante Mihanović

Profesor Ante Mihanović (Donje Sitno kod Žrnovnice, 26.11.1948.) je cijeli svoj radni vijek proveo na Građevinskom fakultetu u Splitu gdje je bio prvi "domaći" magistar (1976. godine) i prvi "domaći" doktor znanosti (1980. godine). Dekan u burnom razdoblju deintegracije Građevinskog instituta i bivše države (1987.-1996.). U tom razdoblju treba istaknuti i njegovu značajnu ulogu u očuvanju i kasnijem razvitku Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Mostaru. Bavio se izradom raznovrsnih kompjutorskih programa kao direktnom posljedicom bavljenja razvojem numeričkih metoda i numeričkog programiranja u području mehanike konstrukcija, posebice u području dinamike konstrukcija, provedbe nelinearnih analiza i izgradnje lakovetskih konstrukcija. Autor 30 patentnih prijava od kojih 13 ima status cjelovitog patenta u Hrvatskoj i inozemstvu. Jedan od osnivača i dugogodišnji glavni urednik časopisa *International Journal for Engineering Modelling* (ISSN 1330-1365). Član Akademije tehničkih znanosti Hrvatske (HATZ) i Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti (HAZU).

Umjesto zahvale

Na ovome mjestu bih se izvinuo svim kolegama i prijateljima ako sam nešto o njima ispušto a što bi oni mogli smatrati da je važno za njihov život i njihovo djelovanje. Nastojao sam navesti samo najvažnije detalje posebice one iz opisanog razdoblja. Oprostite mi, nije bilo prostora za sva Vaša djelovanja i postignuća. Naime, prostorno sam bio ograničen na šest stranica što se ljubaznošću organizatora dr. sc. Davorina Penave proširilo na osam stranica na čemu mu srdačno zahvaljujem. Nadam se da će mu povijest i budući članovi Hrvatskog društva za mehaniku na tome isto tako biti zahvalni. Zainteresirani se upućuju na osobne web-stranice ili baze s popisima radova prethodno navedenih znanstvenika (IRBI, Google Scholar, itd.).

Literatura

1. Nadilo B. Pionir matematičkog modeliranja u hidrotehnici. Građevinar. 2013;65(10):944-951.
2. Owen D.R.J. The Finite Element Method: Historical Perspective and Future Prospects. Predavanje održano u povodu dodjele Počasnog doktorata Sveučilišta u Splitu. Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije. Split. 16.06.2016.
3. Damjanić F, Hinton E, Owen DRJ, Bičanić N i Simović V. Proceedings of the International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures. Split, September 1984. Pineridge Press, Swansea. 1984.
4. Taylor C, Owen DRJ, Hinton E i Damjanić FB. Proceedings of the 3rd International Conference on Numerical Methods for Non-linear Problems. Dubrovnik, September 1986. Pineridge Press, Swansea. 1986.
5. Alen Bokšić. Wikipedia. (pristupljeno 24.03.2017.)
6. Hajduk. <http://hajduk.hr> (pristupljeno 24.03.2017.)
7. Vladimir Schoenauer. Wikipedia. (pristupljeno 24.03.2017.)
8. Bičanić N, Marović P, Owen DRJ, Jović V i Mihanović A. Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Engineering Computations. Swansea-Split, September 1991. Pineridge Press, Swansea. 1991.
9. Ivo Bego. Wikipedia. (pristupljeno 24.03.2017.)
10. Jović V. Osnove hidromehanike. Element, Zagreb. 2006.
11. Jović V. Analysis and Modelling of Non-Steady Flow in Pipe and Channel Networks. John Wiley and Sons, West Sussex. 2013.
12. Jović V. Uvod u inženjersko numeričko modeliranje. Aquarius Engineering, Split. 1993.
13. Hinton E i Owen DRJ. Finite Element Programming. Academic Press, London. 1977.
14. Hinton E i Owen DRJ. An Introduction to Finite Element Computations. Pineridge Press, Swansea. 1979.
15. Owen DRJ i Hinton E. Finite Elements in Plasticity: Theory and Applications. Pineridge Press, Swansea. 1980.
16. de Souza Neto E, Perić Đ i Owen DRJ. Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications. Wiley, Chichester. 2008.
17. Damjanić FB. Reinforced Concrete Failure Prediction under Both Static and Transient Conditions. Ph.D. Thesis, University College of Swansea, Swansea. 1983.
18. Damjanić FB. Numerical analysis of heat dissipation in the Euro-Tunnel under Channel La Manche. Engineering, Programs & Services Ltd., Swansea. 1981.
19. Alfirević I. Hrvatsko društvo za mehaniku 1969.-2007. Zbornik radova Prvoga susreta Hrvatskoga društva za mehaniku. Ur. Čanađija M, Rijeka, lipanj 2007. HDM, Rijeka. str. 1-24, 2007.
20. Smojver I i Sorić J. Central European Association for Computational Mechanics. IACM Expressions. 2008;22:47-49.
21. Grgurević B. Nema budućnosti bez istraživanja: Susret s drom Franom Damjanićem, znanstvenikom svjetskog glasa. Slobodna Dalmacija, 1985; 31.08.1985.
22. Džeba I. Prof. dr. sc. Nenad Bičanić, alumnus Građevinskog fakulteta. AMAC Universitatis Zagrebiensis, 2012;15(20):18.
23. Krstulović-Opara L. In Memoriam prof. dr. sc. Nenad Bičanić. <http://www.csm.hr> (pristupljeno 24.03.2017.)

Relaksacija momenta uvijanja u poprečnom presjeku osovine

Pustaić, D.^{*1}

Sažetak

Rezultati prikazani u ovome radu dio su sveobuhvatnih istraživanja o viskoelastičnom ponašanju osovine kružnoga poprečnog presjeka opterećene na uvijanje. Poprečni presjek može biti i kružni vijenac. Raspodjela naprezanja u poprečnom presjeku osovine, u uvjetima *stacionarnoga puzanja*, prikazana je u radu objavljenome na 8. kongresu HDM-a. U ovome radu razmatra se *relaksacija* momenta uvijanja u poprečnom presjeku osovine. U početnom trenutku na osovini djeluje moment uvijanja $M_0(0)$. Ako se kut zakreta osovine drži *konstantnim* tijekom vremena, istražuje se promjena momenta uvijanja $M_t(t)$.

U analizi su korištene analitičke metode kao što je npr. *Fourierova metoda*. Ta metoda prikladna je za rješavanje raznih problema u teoriji viskoelastičnosti kao i problema u teoriji vibracija (mehanički sustavi s kontinuirano raspodijeljenom masom). Ovisnost *kutne deformacije puzanja o naprezanju i vremenu* pri određenoj *temperaturi* može se zapisati u obliku umnoška dviju funkcija, od kojih je prva, funkcija naprezanja i temperature, a druga, funkcija vremena i temperature. U inženjerskim proračunima puzanja i relaksacije konstrukcijskih komponenata pretpostavlja se da funkcija Q ovisi o naprezanju na neku potenciju n , pri određenoj temperaturi. Funkcija Ω određuje se eksperimentalno za određeni materijal, pri *konstantnom* naprezanju i stalnoj temperaturi.

Rješenja nekih određenih integrala pronađena su na klasičan način, potpuno egzaktno, za vrijednosti eksponenta $n = 1, 2, 3$ i 4 , supstitucijom, parcijalnom integracijom, razvojem funkcije u beskonačni red (binomni red) itd. Za vrijednosti parametra n od 5 do 10 rješenja nije moguće pronaći na klasičan način u zatvorenome obliku pa je korišten programski paket *Wolfram Mathematica 7.0*. Rješenja za *relaksaciju* momenta uvijanja u osovini daju se, u tome slučaju, pomoću *hipergeometrijskih funkcija*.

Ključne riječi: relaksacija momenta uvijanja, osovina kružnoga poprečnog presjeka, viskoelastična kutna deformacija, Fourierova metoda, Wolfram Mathematica 7.0, hipergeometrijska funkcija

^{*} sveučilišni profesor u mirovini

¹ Prof. dr. sc. Dragan Pustaić, dipl. ing. stroj., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: dragan.pustaic@fsb.hr

1 Uvod

Osovina, punoga kružnoga poprečnog presjeka promjera D , opterećena je na uvijanje momentom koji u početnom trenutku iznosi $M_t(0)$. Poprečni presjek osovine može biti i kružni vijenac unutarnjega promjera d i vanjskoga promjera D . Moment torzije $M_t(t)$ mijenja se s vremenom, tj. opada, pod uvjetom da se kut zakreta osovine α drži konstantnim. Pri uvijanju poprečni presjeci osovine ostaju ravni i okomiti na uzdužnu os x . Jednako tako, materijalni polumjeri se ne iskrivljuju, već ostaju ravni. Posljedica tih pretpostavki bit će *linearna raspodjela kutnih deformacija* γ_c po poprečnom presjeku osovine. Ukupna deformacija u proizvoljnoj točki poprečnoga presjeka osovine sastavljena je od elastične (e), plastične (p) i viskoelastične deformacije, ili deformacije puzanja (c). Pretpostavlja se da su deformacije male te da se plastične deformacije ne pojavljuju.

2 Ovisnost deformacije puzanja o naprezanju, vremenu i temperaturi

Ovisnost *deformacije puzanja o naprezanju i vremenu* pri određenoj *temperaturi* može se zapisati u obliku umnoška dviju funkcija, prema literaturi (4)

$$\gamma_c(r,t) = Q(\tau, T) \cdot \Omega(t, T). \quad (1)$$

To je poznato *Fourierovo rješenje*. Funkcija Ω određuje se eksperimentalno za određeni materijal, pri konstantnom naprezanju i stalnoj temperaturi. Pri određivanju raspodjele naprezanja u konstrukcijskoj komponenti u uvjetima stacionarnoga puzanja nije potrebno tu funkciju aproksimirati nekim analitičkim izrazom budući da se raspodjela naprezanja može odrediti i bez poznavanja strukture te funkcije, kako je pokazano u radu (1). S druge strane, relativni kut uvijanja osovine u uvjetima stacionarnoga puzanja, ovisit će ne samo o materijalu, opterećenju i geometriji osovine, već i o vremenu t i temperaturi T . To znači da će se, općenito, kut zakreta osovine α_c , za neki proizvoljni presjek x , mijenjati s vremenom pri nekoj konstantnoj temperaturi T . Da bi našli tu ovisnost $\alpha_c = \alpha_c(t, T)$ sada je nužno poznavati analitički izraz za funkciju $\Omega(t, T)$.

3 Diferencijalna jednadžba za određivanje raspodjele tangencijalnih naprezanja po poprečnom presjeku osovine i njezino opće rješenje

Moment uvijanja koji u početnom trenutku djeluje na osovinu iznosi

$$M_t(0) = \alpha \cdot G I_p / l. \quad (2)$$

Tangencijalno naprezanje u početnom trenutku ($t = 0$), u proizvoljnoj točki poprečnog presjeka osovine, bit će

$$\tau(0) = M_t(0) \cdot \rho / I_p, \quad (3)$$

dok će maksimalno tangencijalno naprezanje na površini osovine, u tome trenutku, biti jednako

$$\tau_{\max}(0) = M_i(0) \cdot (D/2)/I_p. \quad (4)$$

Pomoću izraza (3) i (4) odredi se omjer naprezanja koji iznosi

$$\tau(0)/\tau_{\max}(0) = \rho/(D/2) = r. \quad (5)$$

Ovisnost ukupne kutne deformacije γ o tangencijalnom naprezanju τ može se izraziti pomoću *ekvivalentnog naprezanja* σ_e na sljedeći način, prema literaturi (4) i (1)

$$\gamma = 3\tau/E + (3\tau/\sigma_e) \cdot \int_0^t \sigma_e^n \cdot B \cdot dt, \quad (6)$$

pri čemu je, vidjeti u referencama (4) i (1)

$$\sigma_e = \sqrt{3} \cdot \tau, \quad \varepsilon_{e,c} = \gamma_c / \sqrt{3}, \quad \gamma_c = \vartheta_c \cdot \rho, \quad \text{i} \quad (7)$$

$$\varepsilon_c = \sigma_e^n \cdot \Omega(t, T), \quad \varepsilon_{e,c} = \sigma_e^n \cdot \Omega(t, T), \quad B(t, T) = d\Omega(t, T)/dt. \quad (8)$$

Koristeći konstitutivne relacije (7) i (8), izraz (6) može se dalje transformirati i zapisati u sljedećem obliku

$$3\tau/E + 3^{(n+1)/2} \cdot \int_0^t \tau^n \cdot B \cdot dt = \vartheta \cdot \rho. \quad (9)$$

Da bi dobili diferencijalnu jednadžbu čije opće rješenje daje raspodjelu tangencijalnih naprezanja po poprečnom presjeku osovine derivirajmo izraz (9) po vremenu. Uzmimo pri tome u obzir da je $\alpha = \text{konst.}$ i $\vartheta = \text{konst.}$ s vremenom, tj. $d\vartheta/dt = 0$. Nakon što se provede separacija varijabli u diferencijalnoj jednadžbi, dobije se

$$d\tau/\tau^n = -3^{(n-1)/2} \cdot E \cdot B \cdot dt. \quad (10)$$

Opće rješenje te diferencijalne jednadžbe bit će

$$\tau^{1-n}/(1-n) + C = -3^{(n-1)/2} \cdot E \cdot \Omega \quad (11)$$

Konstanta integracije C odredi se iz *početnih uvjeta* koji glase

$$\text{za } t=0, \quad \tau = \tau(0) \quad \text{i} \quad \Omega = \Omega(0) = 0. \quad (12)$$

Konstanta C iznosi

$$C = -\tau(0)^{1-n}/(1-n). \quad (13)$$

Kada se vrijednost konstante, prema (13), uvrsti u opće rješenje (11) slijedi, nakon sređivanja

$$\tau(t) = \tau(0) \cdot \left(1 + \tau(0)^{n-1} \cdot 3^{(n-1)/2} \cdot (n-1) \cdot E \cdot \Omega(t, T)\right)^{1/(1-n)}, \quad (14)$$

odnosno, koristeći omjer naprezanja prema (5), može se pisati

$$\tau(t) = \tau_{\max}(0) \cdot r \cdot \left(1 + r^{n-1} \cdot \tau_{\max}^{n-1}(0) \cdot 3^{(n-1)/2} \cdot (n-1) \cdot E \cdot \Omega(t, T)\right)^{1/(1-n)}. \quad (15)$$

Ako se uvede pojam *bezdimenzijskog vremena* t^* , definiranog na sljedeći način, prema (4)

$$t^* = 3^{(n-1)/2} \cdot (n-1) \tau_{\max}^{n-1}(0) \cdot E \cdot \Omega(t, T), \quad (16)$$

onda se analitički izraz (15) može zapisati na jednostavniji način kao

$$\tau(t) = \tau_{\max}(0) \cdot r \cdot \left(1 + r^{n-1} \cdot t^*\right)^{1/(1-n)}. \quad (17)$$

4 Veza momenta torzije $M_t(t)$ i tangencijalnog naprezanja $\tau(t)$

Moment uvijanja u poprečnom presjeku osovine $M_t(t)$ povezan je s tangencijalnim naprezanjem $\tau(t)$ poznatom relacijom. Ako se u podintegralnu funkciju umjesto $\tau(t)$ uvrsti desna strana prema izrazu (17), dobije se

$$M_t(t) = 2\pi \cdot \int_{d/2}^{D/2} \tau_{\max}(0) \cdot r \cdot \left(1 + r^{n-1} \cdot t^*\right)^{1/(1-n)} \cdot \rho^2 \cdot d\rho. \quad (18)$$

Izraz (18) može se transformirati uvodeći bezdimenzijsku varijablu r , prema (5). Tada je $d\rho = (D/2) \cdot dr$. Potrebno je promijeniti granice integracije. Za $\rho = d/2$ slijedi da je $r = d/D = \beta$, gdje je β samo oznaka. S druge strane, kada je $\rho = D/2$, onda je $r = 1$. Tako transformirani izraz (18) poprima oblik

$$M_t(t) = 2\pi \cdot \frac{M_t(0)}{I_p} \cdot \int_{\beta}^1 \left(\frac{D}{2}\right)^4 \cdot r^3 \cdot \left(1 + r^{n-1} \cdot t^*\right)^{1/(1-n)} \cdot dr. \quad (19)$$

5 Relaksacija momenta uvijanja u poprečnom presjeku osovine

Analitički izraz za *relaksaciju* momenta uvijanja u poprečnom presjeku šuplje osovine

$$\frac{M_t(t)}{M_t(0)} = \frac{4}{1 - \beta^4} \cdot \int_{\beta}^1 r^3 \cdot \left(1 + r^{n-1} \cdot t^*\right)^{1/(1-n)} \cdot dr. \quad (20)$$

U slučaju *pune osovine* ($d = 0$, $D =$ vanjski promjer osovine, $\beta = 0$) izraz (20) se mijenja te glasi

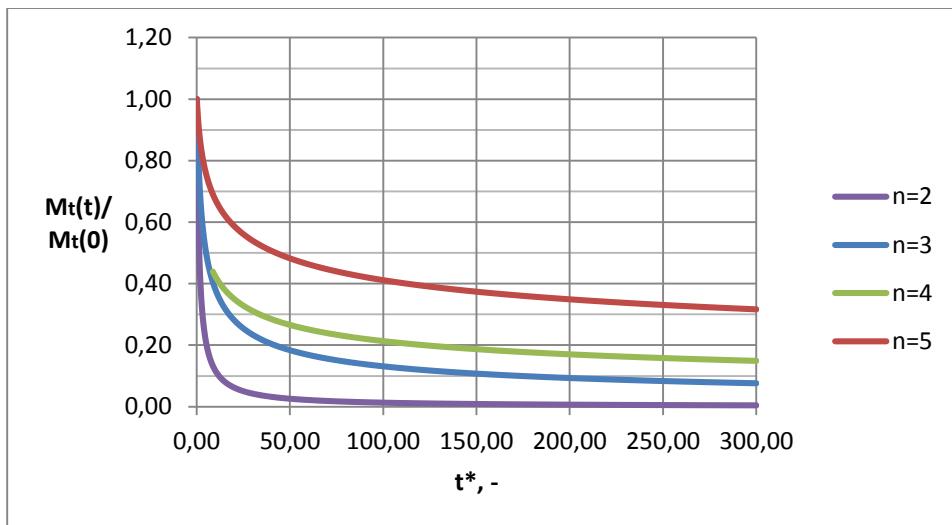
$$\frac{M_t(t)}{M_t(0)} = 4 \cdot \int_0^1 r^3 \cdot \left(1 + r^{n-1} \cdot t^*\right)^{1/(1-n)} \cdot dr. \quad (21)$$

6 Egzaktno analitičko rješenje za punu osovini za $n = 2, 3, 4$ i 5

Analitički izraz (21) daje promjenu momenta uvijanja $M_t(t)$ u poprečnom presjeku pune osovine. Za vrijednosti parametra $n = 2, 3, 4$ i 5 integral se može riješiti egzaktno koristeći metode supstitucije, parcijalne integracije, razvojem funkcije u beskonačni red (binomni red), itd. Kod razvoja funkcije u red potencija (za $n = 4$) i integriranja dovoljno je uzeti samo jedan ili dva člana reda, jer je u tome slučaju ispunjen uvjet konvergencije. Kada bi se uzela tri, četiri, ili više članova reda kriterij konvergencije više nije zadovoljen. U tablici 1 prikazana su rješenja integrala (21), dok su na slici 1 nacrtane krivulje relaksacije momenta uvijanja u punoj osovini.

Tablica 1. Rješenja određenoga integrala (21) za punu osovini za $n = 2, 3, 4$ i 5

n	$\int_0^1 r^3 \cdot (1 + r^{n-1} \cdot t^*)^{1/(1-n)} \cdot dr$
2	$\frac{t^* \cdot (6 - 3t^* + 2(t^*)^2) - 6 \cdot \ln(1+t^*)}{6 \cdot (t^*)^4}$
3	$\frac{2 + (-2 + t^*) \cdot \sqrt{1+t^*}}{3 \cdot (t^*)^2}$
4	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+t^*}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(t^*)^4}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{1+t^*}} + 1 - \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{(1+t^*)^2} + \frac{2}{3} \right) + \dots$
5	$\frac{-1 + (1+t^*)^{3/4}}{3t^*}$

Slika 1. Krivulje relaksacije momenta uvijanja u poprečnom presjeku pune osovine, $n = 2, 3, 4, 5$

7 Rješenje za punu osovini dobiveno programskim paketom *Wolfram Mathematica 7.0* za $n = 6, 7, 8, 9$ i 10

Za vrijednosti parametra $6 \leq n \leq 10$ određeni integral (21) više nije moguće riješiti na klasičan način. Zato se rješenje pokušalo pronaći pomoću programskega paketa *Wolfram Mathematica 7.0*. Rješenje, toga tipa integrala (21), daje se pomoću specijalnih funkcija tzv. *hipergeometrijskih funkcija* tipa ${}_2F_1(a, b, c, z)$. Za proizvoljnu vrijednost eksponenta n vrijednost integrala u (21) jednaka je

$$\int_0^1 r^3 \cdot (1 + r^{n-1} \cdot t^*)^{1/(1-n)} \cdot dr = \frac{1}{4} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{-1+n}, \frac{4}{-1+n}, \frac{3+n}{-1+n}, -t^*\right), \quad \text{za: } n \geq 1 \quad (22)$$

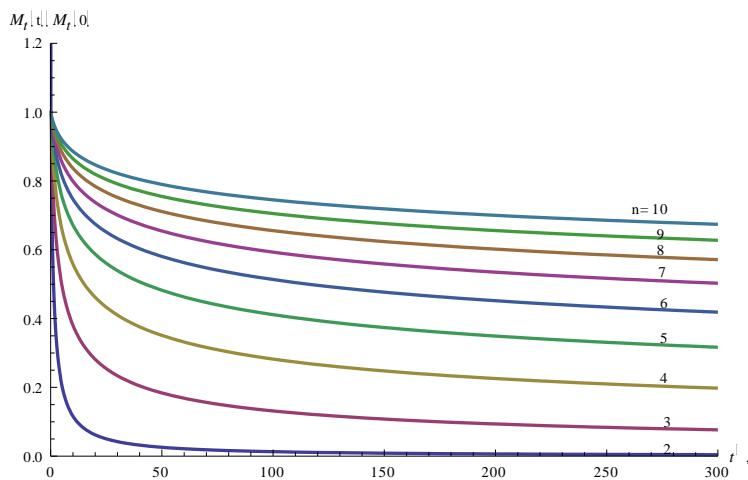
Za diskretne vrijednosti parametra $n = 6, 7, 8, 9$ i 10 rješenja integrala (22) prikazana su u *tablici 2*, a odgovarajuće *krivulje relaksacije* nacrtane su, te dijagramske prikazane na slici 2.

Tablica 2. Rješenja određenoga integrala (22), za punu osovini i za $n = 6, 7, 8, 9$ i 10

n	$\int_0^1 r^3 \cdot (1 + r^{n-1} \cdot t^*)^{1/(1-n)} \cdot dr$
6	$\frac{1}{4} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{9}{5}, -t^*\right)$
7	$\frac{1}{4} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -t^*\right)$
8	$\frac{1}{4} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{11}{7}, -t^*\right)$
9	$\frac{1}{4} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -t^*\right)$
10	$\frac{1}{4} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{13}{9}, -t^*\right)$

8 Rješenje za relaksaciju momenta uvijanja u šupljoj osovinu izraženo pomoću hipergeometrijskih funkcija

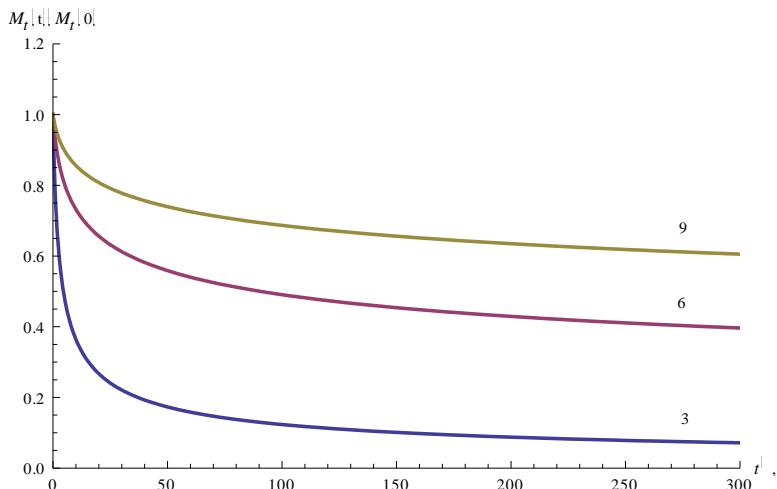
Analitički izraz (20) daje *relaksaciju* momenta uvijanja u poprečnom presjeku šuplje osovine. Rješenje integrala u tome izrazu pronađeno je pomoću programskega paketa *Wolfram Mathematica 7.0*. Rješenja se daju preko specijalnih funkcija, tipa *hipergeometrijskih funkcija* ${}_2F_1(a, b, c, z)$. Da bi se pobliže definirala geometrija osovine čiji je poprečni presjek kružni vijenac, uzeto je $d = 50$ mm, $D = 100$ mm, tako da parametar β iznosi $\beta = d/D = 0,5$. Eksponent n sada poprima vrijednosti $n = 3, 6$ i 9 . Za te diskretne vrijednosti parametara β i n , rješenja integrala (20) prikazana su u *tablici 3*, a odgovarajuće krivulje *relaksacije momenta uvijanja* nacrtane su i prikazane na slici 3.



Slika 2. Krivulje relaksacije momenta uvijanja u poprečnom presjeku pune osovine

Tablica 3. Rješenja određenoga integrala u (20) za šuplju osovinu i za $n = 3, 6 \text{ i } 9$

n	$\int_{0,5}^1 r^3 \cdot (1 + r^{n-1} \cdot t^*)^{1/(1-n)} \cdot dr$
3	$\frac{-(-0,666667 + 0,0833333 \cdot t^*) \cdot \sqrt{1+0,25 \cdot t^*} + (-0,666667 + 0,333333 \cdot t^*) \cdot \sqrt{1+t^*}}{(t^*)^2}$
6	$0,25 \cdot {}_2F_1(0,2; 0,8; 1,8; -t^*) - 0,015625 \cdot {}_2F_1(0,2; 0,8; 1,8; -0,03125 \cdot t^*)$
9	$0,25 \cdot {}_2F_1(0,125; 0,5; 1,5; -t^*) - 0,015625 \cdot {}_2F_1(0,125; 0,5; 1,5; -0,00390625 \cdot t^*)$



Slika 3. Krivulje relaksacije momenta uvijanja u poprečnom presjeku šuplje osovine

9 Zaključak

U članku su prikazani rezultati istraživanja viskoelastičnog ponašanja osovine kružnoga poprečnog presjeka, ili poprečnoga presjeka u obliku kružnoga vijenca. Osovina je opterećena na uvijanje momentom koji u početnom trenutku iznosi $M_0(0)$. Istražena je *relaksacija* momenta uvijanja u osovini pod uvjetom da se kut zakreta osovine α drži *konstantnim* tijekom vremena. Iz dobivenih krivulja relaksacije prikazanih na slikama 1, 2 i 3, generalno se može zaključiti da, što je eksponent n veći u konstitutivnim jednadžbama (6) i (8) to moment uvijanja u osovini $M(t)$ sporije opada s vremenom. Riješen je realni inženjerski problem čiji se rezultati mogu neposredno primijeniti u analizi puzanja i relaksacije konstrukcijskih komponenata. Rezultati imaju vrijednost zbog praktične primjene u strojarstvu.

Problem je formuliran i riješen analitičkim metodama kao što je *Fourierova metoda*. Time je ujedno pokazano da se takve metode mogu uspješno primijeniti na rješavanje takvih fizikalnih problema kod kojih su fizikalne veličine funkcije *prostora i vremena* pri nekoj konstantnoj *temperaturi*. Takvi se problemi javljaju upravo u teoriji viskoelastičnosti. U analizi relaksacije momenta uvijanja u radu, pokazano je da se neki tipovi određenih integrala kao npr. (20) i (21) i ne mogu riješiti u zatvorenome obliku na klasičan način pa su primjenjeni suvremeni kompjutorski alati kao što je software *Wolfram Mathematica 7.0*. Time se došlo do rješenja prikazanih u tablicama 2 i 3, odnosno nacrtane su krivulje relaksacije na slikama 2 i 3.

Literatura

1. Pustaić, D. and Pustaić, M., Torsion of a Circular Cross Section Shaft in the Steady-State Creep Conditions, In: I. Kožar, N. Bićanić, G. Jelenić and M. Čanađija, eds., Proceedings of the 8th International Congress of Croatian Society of Mechanics – 8th ICCSM, Book of Abstracts, p. 83, Printed in Grafika Helvetica, CD-ROM (full papers), Croatian Society of Mechanics, Zagreb (Opatija), 2015.
2. Pustaić, D., Steady-State Creep Analysis of Thick-Walled Pressure Vessels and Piping, In: Z. Virag, H. Kozmar and I. Smoјver, eds., Proceedings of 7th International Congress of Croatian Society of Mechanics – 7th ICCSM, 197-198., CD-ROM (full papers), Studio Hrg for Croatian Society of Mechanics, Zagreb (Zadar), 2012.
3. Kobelev, V., Some basic Solutions for Nonlinear Creep, International Journal of Solids and Structures, Vol. 51 (2014), 19-20, 3372 – 3381.
4. Malinin, N. N., *Prikladnaja teorija plastičnosti i polzučesti*, Mašinostroenie, Moskva, 1975.
5. Lubhan, J. D. and Felgar, R. P., *Plasticity and Creep of Metals*, John Wiley & Sons. Inc., New York, London, 1961.
6. Ržanin, A. R., *Teorija puženja materijala*, Građevinska knjiga, Beograd, 1974.
7. Marques, S. P. C. and Creus, G. J., *Computational Viscoelasticity*, Springer, Berlin, 2012.
8. Mase, G. E., *Theory and Problems of Continuum Mechanics*, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill Book Co., New York, London, Sydney, 1970.
9. Alfrević, I., *Uvod u tenzore i mehaniku kontinuuma*, Golden marketing, Zagreb, 2003.
10. Šikić, Z., *Diferencijalni i integralni račun*, Profil International, Zagreb, 1997.
11. Wolfram, S., *The Mathematica Book*, 4th ed., Wolfram Media/Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
12. *Wolfram Mathematica*, Version 7.0, Wolfram Research Inc., Champaign II. (2017), <http://www.wolfram.com/products/mathematica/>.
13. Bronštejn, I. N. i Semendjajev, K. A., *Matematički priručnik – za inženjere i studente*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.

Gradijentno deformacijska formulacija za modeliranje oštećenja

Putar, F.¹, Sorić, J.², Lesičar, T.³ i Tonković, Z.⁴

Sažetak

Provedenim istraživanjem razmatrano je modeliranje oštećenja u kvazi-krhkim materijalima, pri čemu je predložen numerički učinkovit model ugrađen u dvodimenzionalni konačni element C^1 kontinuiteta temeljen na teoriji gradijentnih deformacija. Konstitutivni model višeg reda proširen je izotropnom formulacijom oštećenja, čime je omogućena analiza popuštanja homogenih i heterogenih materijala. Korištenjem navedene formulacije, pri povećanju oštećenja dolazi do degradacije materijalnih svojstava opisanih preko konstitutivnih tenzora, a samim time i do smanjivanja nelokalnosti u modelu, što je neophodno za točno opisivanje lokaliziranog deformacijskog pojasa. Konstitutivni tenzori dobiveni su direktno s mikrostrukturne razine materijala primjenom računalne homogenizacije drugog reda, u svrhu čega je korišten odgovarajući reprezentativni volumeni element. Izvedena formulacija konačnog elementa ugrađena je u programski paket ABAQUS. Točnost i učinkovitost predloženog gradijentnog modela popuštanja pokazani su na primjeru tlačno opterećene ploče, za koju je karakteristična pojava tzv. smičnog pojasa.

Ključne riječi: kvazi-krhko oštećenje, konačni element C^1 kontinuiteta, teorija gradijentnih deformacija, lokalizacija, smični pojas

¹ **Filip Putar, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: filip.putar@fsb.hr

² **Prof. dr. sc. Jurica Sorić**, e-mail: jurica.soric@fsb.hr

³ **Dr. sc. Tomislav Lesičar**, e-mail: tomislav.lesicar@fsb.hr

⁴ **Prof. dr. sc. Zdenko Tonković**, e-mail: zdenko.tonkovic@fsb.hr

1 Uvod

Rješenja dobivena korištenjem klasične mehanike kontinuma pri analiziranju pojave oštećenja ne mogu se smatrati točnima jer diferencijalne jednadžbe koje opisuju proces deformiranja mogu izgubiti svojstvo eliptičnosti u trenutku kada materijal počne popuštati. Matematički model analiziranog problema pritom postaje loše uvjetovan i njegova numerička rješenja ne konvergiraju realnom rješenju [1]. Većina regularizacijskih tehnika izvedenih za rješavanje tog problema temeljena je na poboljšanju modela klasičnog kontinuma njegovim obogaćivanjem parametrima unutarnje duljinske skale na više različitih načina. Među tim tehnikama do izražaja posebice dolaze one temeljene na nelokalnoj mehanici kontinuma, i to zbog njihove primjenjivosti pri razmatranju raznovrsnih problema. Gledano s fizikalne strane, nelokalnost predstavlja različite heterogenosti i međudjelovanja što se odvijaju na mikrostrukturnoj razini materijala, a matematički se najčešće eksplisitno opisuje preko spomenutog parametra unutarnje duljinske skale koji je u literaturi poznat i kao mikrostrukturalni parametar. Iako rjeđe korišteno, uvođenje nelokalnosti moguće je i putem dodatnog člana višeg reda u funkciju gustoće energije deformiranja, a koji uključuje gradiente deformacije, odnosno deformacije drugog reda te njihove energijski konjugirane veličine, naprezaanja drugog reda [2]. S tim u vezi, a u sklopu višerazinskog modeliranja deformiranja materijala poznata je takozvana poopćena gradijentna teorija koja nelokalnost ne uključuje direktno preko parametra mikrostrukturne skale, već je ona implicitno sadržana u veličini reprezentativnog volumognog elementa (RVE-a). Veličina RVE-a je u modelu obuhvaćena vrijednostima tangentnih matrica krutosti višeg reda, koje se ovdje izračunavaju primjenom računalne homogenizacije drugog reda [3].

2 Algoritam za analizu oštećenja temeljen na teoriji gradijentnih deformacija

Degradacija elastičnih svojstava krutosti u izotropnom modelu oštećenja opisuje se na temelju sljedeće konstitutivne relacije

$$\mathbf{C}^{\text{eff}} = (1 - D) \mathbf{C}, \quad (1)$$

gdje je D je skalarna varijabla oštećenja koja može poprimiti vrijednosti između 0 i 1, a što su granične vrijednosti za neoštećeni i potpuno oštećeni materijal. \mathbf{C}^{eff} i \mathbf{C} redom predstavljaju efektivnu i elastičnu krutost. Stanje oštećenja ovisno je o monotono rastućem skalarnom parametru κ , koji odgovara najvećem lokalnom deformacijskom odazivu postignutom u određenoj točki do razmatranog trenutka, što se standardno zapisuje preko Kuhn-Tuckerovih relacija

$$\kappa \geq 0, \quad \varepsilon_{\text{eq}} - \kappa \leq 0, \quad \dot{\kappa}(\varepsilon_{\text{eq}} - \kappa) = 0. \quad (2)$$

U gornjem izrazu ε_{eq} predstavlja ekvivalentu elastičnu deformaciju koja se ovdje izračunava putem von Misesove relacije

$$\varepsilon_{\text{eq}} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1 + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2}, \quad (3)$$

u kojoj I_1 i J_2 redom predstavljaju prvu invarijantu tenzora deformacije te drugu invarijantu devijatora tenzora deformacije, dok parametar k opisuje omjer između jednoosne tlačne i vlačne čvrstoće materijala. U provedenom istraživanju korišten je eksponencijalni zakon nastajanja oštećenja koji se često koristi pri realnim razmatranjima popuštanja kvazi-krhkih materijala

$$D = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} \left\{ 1 - \alpha + \alpha \exp \left[\beta(\kappa_0 - \kappa) \right] \right\} \quad \text{za } \kappa > \kappa_0, \quad (4)$$

pri čemu su α i β parametri modela, a κ_0 materijalni parametar koji predstavlja graničnu vrijednost kod koje dolazi do iniciranja oštećenja. Formulacija modela oštećenja izvedena u ovom radu implementirana je u trokutni konačni element C^1 kontinuiteta za ravninsko stanje deformacija [3]. Element sadrži tri čvora uz ukupno 36 stupnjeva slobode, a polje pomaka aproksimirano je nepotpunim polinomom petog stupnja. Stupnjevi slobode su dva pomaka te njihove prve i druge derivacije s obzirom na Kartezijeve koordinate. Prema uobičajenom postupku, izvod jednadžbi konačnog elementa slijedi iz principa virtualnih radova, koji je za gradijentni kontinuum jednak

$$\int_A \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA + \int_A \delta \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\mu} dA = \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} ds + \int_s \delta (\operatorname{grad} \mathbf{u}^T) \mathbf{T} ds. \quad (5)$$

U jednadžbi (5), A i s su redom površina i rub elementa, $\boldsymbol{\varepsilon}$ i $\boldsymbol{\sigma}$ tenzor deformacije te Cauchyjev tenzor naprezanja, $\boldsymbol{\eta}$ predstavlja tenzor deformacije drugog reda koji sadrži druge derivacije vektora pomaka \mathbf{u} , a $\boldsymbol{\mu}$ je energijski konjugirana veličina tenzora deformacije drugog reda, takozvani tenzor naprezanja drugog reda ili „double stress“ tenzor. \mathbf{t} i \mathbf{T} su vektori rubnih sila pridruženi vektoru pomaka i gradijentu vektora pomaka. Uključivanjem izotropnog zakona oštećenja u konstitutivne relacije koje proizlaze iz poopćene gradijentne teorije, dobiva se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (1-D) \mathbf{C}_{\sigma\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + (1-D) \mathbf{C}_{\sigma\eta} \boldsymbol{\eta}, \\ \boldsymbol{\mu} &= (1-D) \mathbf{C}_{\mu\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + (1-D) \mathbf{C}_{\mu\eta} \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (6)$$

gdje su veličine $\mathbf{C}_{\sigma\varepsilon}$, $\mathbf{C}_{\sigma\eta}$, $\mathbf{C}_{\mu\varepsilon}$ i $\mathbf{C}_{\mu\eta}$ konstitutivne tangentne matrice koje se izračunavaju za odgovarajući RVE korištenjem homogenizacije drugog reda [3]. U slučaju materijalne homogenosti, materijalne izotropije i simetrije razmatranog RVE-a, konstitutivne matrice $\mathbf{C}_{\sigma\eta}$ i $\mathbf{C}_{\mu\varepsilon}$ jednake su nuli, a preostale dvije matrice mogu se naći koristeći analitičke izraze u obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\sigma\varepsilon} &= \mathbf{C}_{\sigma\varepsilon}(E, \nu), \\ \mathbf{C}_{\mu\eta} &= \mathbf{C}_{\mu\eta}(E, \nu, L). \end{aligned} \quad (7)$$

U relaciji (7), E i ν su elastični materijalni parametri, a L predstavlja veličinu RVE-a, koja se kod homogenizacije drugog reda može povezati s unutarnjom duljinskom skalom l putem relacije

$$l^2 = \frac{L^2}{12}. \quad (8)$$

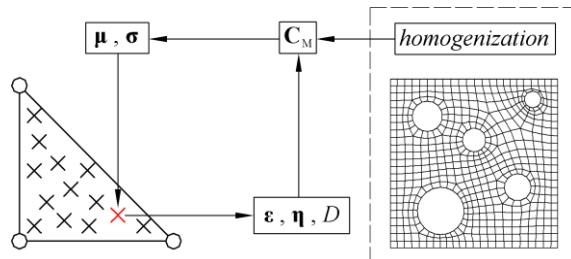
Uvrštavanjem izraza (6) u (5) te naknadnim inkrementiranjem tako dobivene relacije, uz korištenje dodatnih izraza koje se mogu naći u [3], dobiva se jednadžba konačnog elementa

$$(\mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} + \mathbf{K}_{\varepsilon\eta} + \mathbf{K}_{\eta\varepsilon} + \mathbf{K}_{\eta\eta}) \Delta \mathbf{v} = \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_i, \quad (9)$$

gdje su pojedine matrice krutosti elementa jednake

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\varepsilon\varepsilon} &= \int_A \mathbf{B}_\varepsilon^T \left[(1 - D^{i-1}) \mathbf{C}_{\sigma\varepsilon} - \mathbf{C}_{\sigma\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^{i-1} \left(\frac{dD}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^{i-1} - \mathbf{C}_{\sigma\eta} \boldsymbol{\eta}^{i-1} \left(\frac{dD}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^{i-1} \right] \mathbf{B}_\varepsilon dA, \\ \mathbf{K}_{\varepsilon\eta} &= \int_A \mathbf{B}_\varepsilon^T (1 - D^{i-1}) \mathbf{C}_{\sigma\eta} \mathbf{B}_\eta dA, \\ \mathbf{K}_{\eta\varepsilon} &= \int_A \mathbf{B}_\eta^T (1 - D^{i-1}) \mathbf{C}_{\mu\varepsilon} - \mathbf{C}_{\mu\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^{i-1} \left(\frac{dD}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^{i-1} - \mathbf{C}_{\mu\eta} \boldsymbol{\eta}^{i-1} \left(\frac{dD}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^{i-1} \right] \mathbf{B}_\varepsilon dA, \\ \mathbf{K}_{\eta\eta} &= \int_A \mathbf{B}_\eta^T (1 - D^{i-1}) \mathbf{C}_{\mu\eta} \mathbf{B}_\eta dA. \end{aligned} \quad (10)$$

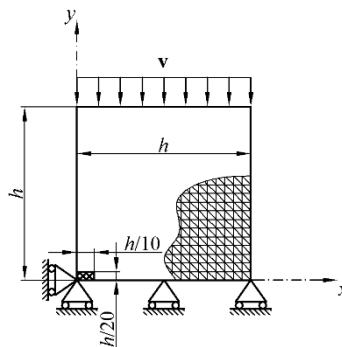
U navedenim izrazima gornji indeks ($i-1$) označava zadnje konvergirano ravnotežno stanje. Definicije vektora unutarnjih i vanjskih čvornih sila u jednadžbi (9) navedene su u [3]. Postupak analize prezentiranim algoritmom ukratko je prikazan dijagramom na slici 1. Prije početka inkrementalno-iterativne petlje, vrijednosti tangentnih krutosti koje se pojavljuju u relaciji (6) izračunavaju se homogenizacijom drugog reda koristeći odgovarajući RVE. Budući da se u radu razmatra linearno elastično ponašanje materijala, homogenizaciju je potrebno provesti samo jednom, i to prije analize popuštanja. Tako homogenizirane vrijednosti tenzora krutosti ostaju konstantnima tijekom cijele analize, a degradacija krutosti odvija se izotropnim zakonom oštećenja. Detaljniji izvod i opis prezentiranog algoritma oštećenja prikazan je u [4].



Slika 1. Shema algoritma oštećenja

3 Numerički primjer

Mogućnost opisivanja pravilnog širenja oštećenja pomoću prezentiranog algoritma prikazana je na primjeru tlačno opterećene ploče čiji se numerički model nalazi na slici 2. Tlačno opterećenje nametnuto je vertikalnim pomakom od 0.08 mm. Korišten je materijal homogene mikrostrukture unutarnje duljinske skale $l = 2$ mm, uz Youngov modul $E = 20000 \text{ N/mm}^2$ te Poissonov faktor $\nu = 0.2$. Za modeliranje oštećenja korišteni su sljedeći parametri: $\kappa_0 = 0.0001$, $\alpha = 0.99$, $\beta = 300$ i $k = 1$. Kako bi se izazvala lokalizacija, u donjem lijevom kutu ploče parametar κ_0 smanjen je za 50%.

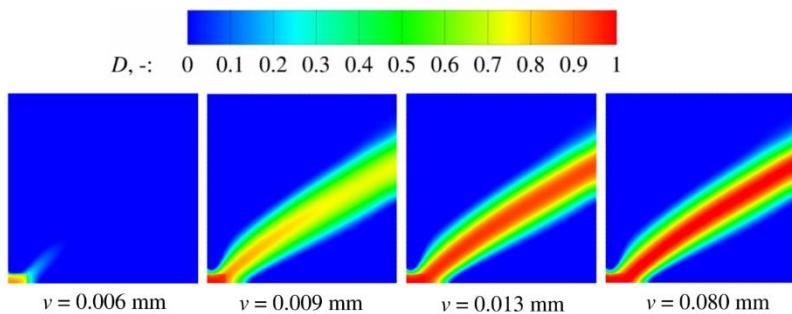


Slika 2. Geometrija i rubni uvjeti numeričkog modela tlačno opterećene ploče, $h = 60 \text{ mm}$

Isti primjer analiziran je u [5] uz primjenu modela oštećenja temeljenog na standardnoj implicitnoj gradijentnoj formulaciji, a tako dobivena rješenja pokazala su netočno širenje oštećenja duž donjeg horizontalnog ruba. Kao što je opisano u [6], uzrok takvom ponašanju je nepromijenjena veličina područja mikrostrukturnog međudjelovanja materijala tijekom cijelog deformacijskog procesa. Posljedica navedenog je kontinuirano prenošenje energije iz zone materijala zahvaćene oštećenjem u susjednu zonu gdje materijal elastično popušta, što dovodi do nefizikalne raspodijele oštećenja, a samim time i do nemogućnosti stvaranja makropukotine. Na slici 3. jasno je vidljivo kako se prezentiranim algoritmom dobiva ujednačena raspodjela oštećenja tijekom cijelog procesa deformiranja. Stvaranje smičnog pojasa započinje u zoni materijalne nesavršenosti te se nastavlja širenjem prema desnom rubu ploče. Pojas poprima završnu debljinu u veoma ranoj fazi procesa popuštanja, a lokalizacija se nastavlja u njegovoj sredini sve do pojave loma. Sličan razvoj smičnog pojasa popraćen jakom lokalizacijom uz točno širenje oštećenja dobiven je i u [6], gdje je korišten tzv. lokalizacijski gradijentni model oštećenja.

4 Zaključak

Predložena je nova formulacija za modeliranje kvazi-krhke pojave popuštanja materijala koja je ugrađena u trokutni konačni element C^1 kontinuiteta temeljen na teoriji gradijentnih deformacija. Korištenjem izotropnog modela oštećenja u konstitutivnim relacijama višeg reda, ne samo da je omogućeno popuštanje smanjivanjem elastičnih svojstava materijala s porastom oštećenja, već se direktno utječe i na veličinu područja mikrostrukturnog međudjelovanja. Posljednje navedeno je nužno za fizikalnan opis završnog lokaliziranog deformacijskog pojasa koji nastaje iz raspršene



Slika 3. Raspodjela oštećenja D kroz nekoliko faza opterećenja

mreže mikropukotina na početku popuštanja, kada je spomenuta veličina mikrostrukturnog utjecaja najveća. Mogućnosti predloženog algoritma pokazane su u simulaciji lokalizacije smičnog pojasa na tipičnom testnom primjeru tlačno opterećene ploče s materijalnom nesavršenošću. U usporedbi s rezultatima iz literature u kojoj je korištena standardna implicitna gradijentna formulacija, ovdje dobiveni rezultati pokazuju u potpunosti lokaliziran deformacijski pojas uz točno širenje oštećenja. Provedena analiza pokazuje da se predloženim modelom oštećenja temeljenim na teoriji gradijentnih deformacija može uspješno predvidjeti područje iniciranja rasta oštećenja, kao i naknadna lokalizacija deformacije prema makroskopskoj pukotini.

Finansijska potpora

Ovaj rad je financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom „Multiscale Numerical Modeling of Material Deformation Responses from Macro- to Nanolevel“ (2516).

Literatura

1. De Borst R., Sluys L.J., Mühlhaus H.B. i Pamin, J. Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation. *Engineering Computations*. 1993;10:99-121.
2. Mindlin R.D. i Eshel N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 1968;4:109-124.
3. Lesičar T., Tonković Z. i Sorić J. A second-order two-scale homogenization procedure using C-1 macrolevel discretization. *Computational Mechanics*. 2014;54(2):425-441.
4. Putar F., Sorić J., Lesičar T. i Tonković Z. Damage modeling employing strain gradient continuum theory. *International Journal of Solids and Structures*. 2017;000:0-15.
5. Simone A., Askes H. i Sluys, L.J. Incorrect initiation and propagation of failure in non-local and gradient enhanced media. *International Journal of Solids and Structures*. 2004; 41:351-363.
6. Poh L.H. i Sun G. Localizing gradient damage model with decreasing interactions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2017;110:503-522.

Četveročvorni konačni elementi ljski sa usvojenim interpolacijama za deformacije smicanja

Ribarić, D.¹

Sažetak

Četveročvorni konačni elementi za modeliranje ploča po Mindlinovoj teoriji razvijeni su s usvojenim interpolacijama polja smicanja, te su pokazali vrlo dobro ponašanje kod numeričkog modeliranja umjerenog debelih, ali i tankih ploča, u usporedbi s drugim poznatim konačnim elementima iz literature. Polazne interpolacijske funkcije ovog pločastog elementa su potpuni kubni polinom za polje transverzalnih pomaka i kvadratni za polje rotacija presjeka, ali je pri tome model ovisan o materijalnim vrijednostima („problem dependent“). U ovom radu takav model elementa proširen je za primjenu na probleme prostornih ljski dodavanjem membranskih utjecaja na već postojeće utjecaje savijanja i smicanja kod formiranje matrice krutosti elementa. Interpolacijske funkcije membranskih pomaka su pak potpune kvadratne funkcije neovisne od materijalnih vrijednosti.

U membranski dio deformacija uključeni su za sada samo pomaci u ravnini elementa, pa novi element zajedno s deformacijama savijanja ima ukupno 20 čvornih i 5 internih parametara. Konačna matrica krutosti dobije se nakon statičke kondenzacije internih stupnjeva slobode. Novi element ljski ima nakon kondenzacije 6 stupnjeva slobode po svakom čvoru, odnosno ukupno 20 parametara koji definiraju njegovu matricu krutosti.

Novi element dobio je oznaku SQ4-U3-AS („shell 4-node quadrilateral with cubic interpolation and assumed strain“), te je testiran na standardnim numeričkim modelima za ljskaste elemente. Opis elementa, rezultati modeliranja, te usporedba s drugim konačnim elementima iz literature dani su u ovome radu i prezentaciji.

Membranski dio matrice krutosti može se proširiti za efekte rotacijskih stupnjeva slobode („drilling degrees of freedom“), kao i za nekompatibilne unutarnje membranske stupnjeve slobode radi podizanja reda membranskih interpolacijskih polinoma i povećanja točnosti elementa i biti će predmet budućih istraživanja.

Ključne riječi: ljske, Mindlinova teorija ploča, konačni elementi, usvojene prirodne deformacije, vezane interpolacije ovisne o problemu, vezane interpolacije neovisne o problemu.

¹ Doc. dr. sc. Dragan Ribarić, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Ul. Radmila Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: davorin.penava@gfos.hr

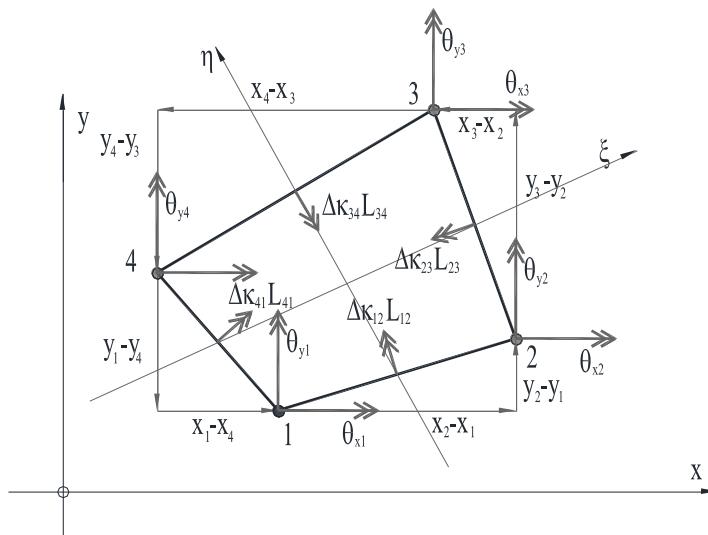
1 Četveročvorni konačni element ljske

U ovom radu prikazati će se dosadašnji rezultati na izgradnji konačnog plošnog elementa namijenjenog modeliranju prostornih ljski i uslojenih struktura. Konačni element ima četiri čvora sa po pet stupnjeva slobode u svakom čvoru, a opisan je isključivo interpolacijskim funkcijama pomaka i rotacija presjeka. Nastao je kao rezultat spajanja već postojećeg provjerjenog pločastog i membranskog konačnog elementa.

Upotrijebljen je pločasti konačni element kojeg smo nedavno razvili na bazi usvojenih deformacija smicanja dobivenih selekcijom članova punog izraza za deformaciju smicanja unutar elementa s kubnom interpolacijom pomaka i pratećim kvadratnim interpolacijama rotacija presjeka. Pločasti element je spregnut sa za sada linearnim membranskim elementom u prostorni element ljske koji se ovdje pobliže opisuje.

1.1 Interpolacijske funkcije

Transverzalni pomak na plohu elementa interpoliran je kubnim polinomom, a pripadajuće rotacije od savijanja presjeka ploče (i ljske) interpolirane su kvadratnim funkcijama, a koje su definirane čvornim parametrima kao stupnjevima slobode, ali i dodatnim unutarnim stupnjevima slobode. Neki su unutarnji stupnjevi slobode na kvadratnoj razini interpolacije za pomak izraženi projekcijama čvornih rotacija, što je u literaturi poznato kao vezana kvadratna interpolacija (1), drugi su na kubnoj razini izraženi kao integrirana zakrivljenost stranice (2) pa su vezani za čvorne parametre uz pomoć materijalnih vrijednosti problema („problem dependent interpolation“, vidjeti sliku 1), a treći su ostali unutarnji parametri slobode („bubble degrees of freedom“) koji se eliminiraju na razini elementa statičkom kondenzacijom.



Slika 1. Četveročvorni element, vektori čvornih rotacija i vektori hijerarhijskih rotacija okomitih na stranicu (integrirana zakrivljenost stranice)

Interpolacijske funkcije pomaka i rotacija presjeka date su slijedećim izrazima:

$$\begin{aligned}
 w = & \sum_{i=1}^4 N_i w_i \\
 & + \frac{1-\xi^2}{4} \frac{1-\eta}{2} \frac{1}{2} [(\theta_{y2} - \theta_{y1})(x_2 - x_1) - (\theta_{x2} - \theta_{x1})(y_2 - y_1)] \\
 & + \frac{1-\xi^2}{4} \frac{1+\eta}{2} \frac{1}{2} [(\theta_{y3} - \theta_{y4})(x_3 - x_4) - (\theta_{x3} - \theta_{x4})(y_3 - y_4)] \\
 & + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta^2}{4} \frac{1}{2} [(\theta_{y3} - \theta_{y2})(x_3 - x_2) - (\theta_{x3} - \theta_{x2})(y_3 - y_2)] \\
 & + \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta^2}{4} \frac{1}{2} [(\theta_{y4} - \theta_{y1})(x_4 - x_1) - (\theta_{x4} - \theta_{x1})(y_4 - y_1)] \\
 & + \frac{1-\xi^2}{4} \frac{1-\eta^2}{4} w_{Bb0} \\
 & - \frac{\xi - \xi^3}{4} \frac{1-\eta}{2} \Delta\kappa_{12} \frac{L_{12}^2}{6} - \frac{1+\xi}{2} \frac{\eta - \eta^3}{4} \Delta\kappa_{23} \frac{L_{23}^2}{6} \\
 & + \frac{\xi - \xi^3}{4} \frac{1+\eta}{2} \Delta\kappa_{34} \frac{L_{34}^2}{6} + \frac{\xi - \xi^3}{4} \frac{1+\eta}{2} \Delta\kappa_{34} \frac{L_{34}^2}{6} \\
 & + \frac{\xi - \xi^3}{4} \frac{1-\eta^2}{4} \frac{1}{3} w_{Bb,3} + \frac{1-\xi^2}{4} \frac{\eta - \eta^3}{4} \frac{1}{3} w_{Bb,4} \\
 & + \frac{\xi - \xi^3}{4} \frac{\eta - \eta^3}{4} \frac{1}{3} w_{Bb,5},
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_x = & \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi} \\
 & - \frac{1-\xi^2}{4} \frac{1-\eta}{2} \Delta\kappa_{12} (y_2 - y_1) - \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta^2}{4} \Delta\kappa_{23} (y_3 - y_2) \\
 & - \frac{1-\xi^2}{4} \frac{1+\eta}{2} \Delta\kappa_{34} (y_4 - y_3) - \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta^2}{4} \Delta\kappa_{41} (y_1 - y_4) \\
 & - \frac{1-\xi^2}{4} \frac{1-\eta^2}{4} \theta_{Bb,1},
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 \theta_y = & \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi} \\
 & + \frac{1-\xi^2}{4} \frac{1-\eta}{2} \Delta\kappa_{12} (x_2 - x_1) + \frac{1+\xi}{2} \frac{1-\eta^2}{4} \Delta\kappa_{23} (x_3 - x_2) \\
 & + \frac{1-\xi^2}{4} \frac{1+\eta}{2} \Delta\kappa_{34} (x_4 - x_3) + \frac{1-\xi}{2} \frac{1-\eta^2}{4} \Delta\kappa_{41} (x_1 - x_4) \\
 & + \frac{1-\xi^2}{4} \frac{1-\eta^2}{4} \theta_{Bb,2},
 \end{aligned} \tag{3}$$

gdje su w , θ_x i θ_y transverzalni pomak, odnosno rotacije presjeka oko x i y lokalnih osi respektabilno, N_i standardne Lagrangeove bilinearne interpolacijske funkcije, a integrirane zakrivljenosti $\Delta\kappa_{ij}$ stranica između čvorova i i j su vezani parametri uz čvorne stupnjeve slobode prema izrazu:

$$\Delta\kappa_{ij} = -\left(w_j - w_i - \frac{\theta_{xi} + \theta_{xj}}{2} \cdot (y_j - y_i) + \frac{\theta_{yi} + \theta_{yj}}{2} \cdot (x_j - x_i)\right) \frac{1}{1 + \frac{12D}{L_{ij}^2(Gtk)}} \frac{6}{L_{ij}^2} \quad (4)$$

U gornjim izrazima x_i i y_i su koordinatne pozicije čvorova $i=1,\dots,4$, L_{ij} su duljine stranica između čvorova i i j , D je otpornost presjeka ploče za savijanje $D=Et^3/12(1-v^2)$, E i G su modul elastičnosti i modul smicanja gradiva ljske, v je Poisson-ov koeficijent, a t debljina ljske i k korekcijski koeficijent smicanja presjeka, uobičajeno uzet sa $k=5/6$.

Pomaci u ravni plohe elementa za membranska djelovanja, interpolirani su linearno standardnim Lagrange-ovim interpolacijskim funkcijama:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \quad (5)$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i, \quad (6)$$

1.2 Usvojene deformacije smicanja za poprečna djelovanja

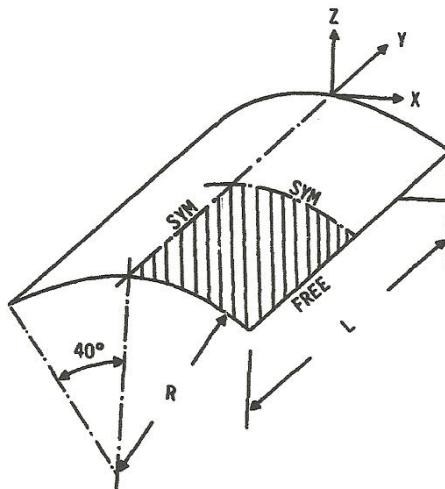
Razvijene deformacije smicanja dobivene iz gore navedenih interpolacija polja pomaka i rotacija pokazuju efekte pretjeranih posmičnih krutosti („shear locking“), te sporiju konvergenciju točnim rješenjima problema pri proglašenju proračunskih mreža ali samo kod relativno tankih ploča. Stoga su mnogi autori iz literature primijenili dodatne uvjete u odnosu na deformacije smicanja ili razne mješovite metode, s različitim uspjehom.

U ovdje predloženom konačnom elementu izvedena je korekcija u polju smicanja na način da su najprije identificirani članovi koji uzrokuju *shear locking effect*, te su namjerno eliminirani iz polja smicanja, a matrica krutosti za savijanje formirana bez nepovoljnih članova. Detaljniji opis ovog postupka biti će opisan u drugim radovima ovog autora pripremljenim za objavljivanje, te u prezentaciji ovog rada.

2 Numerički primjer

Za usporedbu ponašanja novog elementa za ljske u odnosu na druge elemente iz literature odabran je tipični kontrolni zadatak (3) poznat kao Scordelis-Lo bačvasti krov. Model je simetričan po dvije okomite ravnine, te ima jedinstvenu kružnu formu unutar kuta od 2 puta 40° s polumjerom $R = 25.0$, te uz raspon $L = 50.0$ i debljinu ljske $t = 0.25$. Materijalne vrijednosti su $E = 4.32 \cdot 10^8$ za modul elastičnosti i $v = 0.00$ za Poissonov koeficijent, dok je opterećenje $q = 90.0$ podijeljeno preko cijele površine svoda u z-smjeru, a oslonci opisani sprječenim pomacima $u_x =$

$u_z = 0$ uzduž zakrivljenih rubova. Mrežom konačnih elemenata s jednolikom podjelom $N \times N$ opisana je samo osjenčana četvrtina svoda (vidi sliku 2).



Slika 2. Bačvasti svod prema Scordelis-Lo modelu

Novi element za ljsuske ima oznaku *SQ4-U3-AS*, te je u tablici 1. uspoređen s drugim elementima iz literature ili iz programa otvorenog tipa kao što je *FEAP* (Finite Element Analysis Program, Univrsity of California, Berkeley). *SQ4-U2* je element ljsuski s kvadratnom vezanom interpolacijom. *SQ4-U3-R5* je element ljsuski s kubnom vezanom interpolacijom bez redukcije polja smicanja. *PLATE* je element za ploče mješovitog tipa i vezanom interpolacijom, a *SHELL* je element za ljsuske s vezanom interpolacijom i rotacijskim stupnjevima slobode u membranskom dijelu interpolacije.

Tablica 1. Scordelis-Lo bačvasti krov: rezultati za kontrolni vertikalni pomak na sredini slobodnog ruba modela

Broj čvorova po stranici	<i>SQ4-U2</i> (4)	<i>SQ4-U3-R5</i> (2)	<i>SQ4-U3-AS</i>	<i>PLATE</i> element iz <i>FEAP-a</i>	<i>SHELL</i> element iz <i>FEAP-a</i>
4	-0.2375	-0.2646	-0.2760	-0.2852	-0.3169
6	-0.2772	-0.2826	-0.2861	-0.2977	-0.3068
8	-0.2895	-0.2900	-0.2916	-0.3046	-0.3039
12	-0.2987	-0.2958	-0.2963	-0.3116	-0.3020
16	-0.3036	-0.2979	-0.2983	-0.3159	-0.3013
32	-0.3213	-0.3029	-0.3032	-0.3312	0.3007
<i>Referenca [3]</i>	-0.3024	-0.3024	-0.3024	-0.3024	-0.3024

3 Zaključak

Novi konačni element za ljske na osnovi kubne interpolacije transverzalnih pomaka i uz kontroliranu redukciju polja deformacija smicanja predstavlja napredak u modeliranju ljski i uslojenih ploča u pogledu numeričke točnosti i brzine konvergencije, ali i ostavlja mogućnosti za nova poboljšanja, posebno u opisu membranskog ponašanja, kao i u uzajamnom djelovanju membranskih i savijajućih efekata, na čemu se naša istraživanja i nastavljaju.

Zahvala

Ovaj je članak rezultat rada u okviru projekata „Configuration-dependent Approximation in Non-linear Finite-element Analysis of Structures – CANFAS“ (IP-11-2013) i „Metoda usvojenih deformacija za konačne elemente slojevitih ploča i ljski i njena primjena na probleme delaminacije - ASDEL“ (IP-06-2016) koji je oba u cijelosti financirana sredstvima Hrvatske zaklade za znanost.

Literatura

1. Ribarić D., Jelenić G., „Higher-order linked interpolation in quadrilateral thick plate finite elements“, *Finite Elements in Analysis and Design*, 2012; 51: 67-80.
2. Ribarić D., „Problem-dependent cubic linked interpolation for Mindlin plate four-node quadrilateral finite elements“, *Structural Engineering and Mechanics*, 2016; 59(6): 1071-1094.
3. MacNeal R.H., Harder R.L., „A proposed standard set of problems to test finite element accuracy“, *Finite Elements in Analysis and Design*, 1985; 1: 2-20
4. Ribarić D., „Higher-order linked interpolation in moderately thick plate and facet shell finite elements“, PhD Thesis, Univrsity of Rijeka, 2012.

Numeričko modeliranje procesa kvazi-krhkog loma primjenom faznog modeliranja

Seleš, K.¹, Lesičar, T.², Tonković, Z.³ i Sorić, J.⁴

Sažetak

Numeričko modeliranje nastanka i rasta pukotina u materijalu predstavlja važan interes u inženjerskoj praksi te već dulje vrijeme privlači pozornost mnogih istraživača. Za krhke materijale dostupno je više različitih metoda koje se temelje na Griffithovoj teoriji gdje se formiranje pukotine određuje pomoću energije površinske napetosti, odnosno energije potrebne za stvaranje dvaju novih površina prijeloma. Pritom se najviše primjenjuju diskrete metode u kojima je rast pukotine kao geometrijskog diskontinuiteta definiran kriterijem loma za razdvajanje čvorova u mreži konačnih elemenata. Najveći nedostatak ovih metoda je što se rast pukotine odvija samo duž rubova konačnih elemenata te su rezultati ovisni o gustoći i usmjerenosti mreže.

Kako bi se prevladalo nefizikalno ponašanje standardnih formulacija za modeliranje oštećenja u materijalu, zadnjih godina aktualni su principi faznog modeliranja (eng. *Phase-field modeling*). Ovi principi omogućuju modeliranje mikrostruktura materijala koja se sastoji od više različitih faza na način da prepostavljaju kontinuiranu transformaciju između tih faza. Za slučaj oštećenja materijala, različite faze odnose se na cjeloviti materijal, odnosno pukotinu. Umjesto diskretnog opisa, fazno modeliranje temelji se na kontinuumskom opisu pukotine u kojoj je diskontinuitet raspodijeljen preko određenog volumena. Na taj način, pomoću faznog modeliranja moguće je pratiti nastanak, rast i srastanje pukotina do konačnog loma.

U radu je dan prikaz algoritma faznog modeliranja za numeričku simulaciju procesa nastanka i rasta pukotina u kvazi-krhkem materijalu. Algoritam faznog modeliranja ugrađen je u programski paket ABAQUS primjenom korisničkih rutina UEL i UMAT.

Ključne riječi: kvazi-krhki lom, fazno modeliranje, metoda konačnih elemenata, mehanika oštećenja i loma

¹ **Karlo Seleš, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: karlo.seles@fsb.hr

² **Dr. sc. Tomislav Lesičar**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: tomislav.lesicar@fsb.hr

³ **Prof. dr. sc. Zdenko Tonković**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: zdenko.tonkovic@fsb.hr

⁴ **Prof. dr. sc. Jurica Sorić**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: jurica.soric@fsb.hr

1 Uvod

Razvojem računalne tehnologije proširene su mogućnosti klasične mehanike loma. Umjesto klasično odvojenih konstitutivnih relacija i kriterija loma, lokalni gubitak cjeleovitosti materijala moguće je uvrstiti u konstitutivne relacije. Lom se tada smatra konačnom posljedicom procesa degradacije materijala. Važan utjecaj na nastanak i rast oštećenja ima mikrostruktura materijala (1). Kako mikrostrukturna razina nije uključena u klasične kontinuumske modelle oštećenja (2), (3), (4), numeričkim rješavanjem problema dolazi do lokalizacije rasta oštećenja što doprinosi fizičkom nerealnom rješenju uz prisustvo singularnosti brzine oštećenja i ovisnosti rješenja o gustoći i usmjerenoći mreže konačnih elemenata (5). Kako bi se riješio navedeni problem, razvijene su različite regularizacijske tehnike temeljene na poboljšanju modela klasičnog kontinuuma njegovim obogaćivanjem parametrima unutarne duljinske skale na više različitih načina. Jedna od tih tehnika temelji se na uvođenju nelokalnosti u model putem dodatnog člana višeg reda u funkciju gustoće energije deformiranja, a koji uključuje gradiente deformacije, odnosno deformacije drugog reda te njihove konjugirane vrijednosti, naprezanja drugog reda (2).

U zadnje vrijeme vrlo su atraktivni principi faznog modeliranja (eng. *Phase-field modeling*) kojima se pukotina regularizira na način da se umjesto diskretnе definicije pukotine, odnosno diskontinuiteta, isti raspodjeli po određenom volumenu (6). To se postiže uvođenjem dodatne skalarne varijable ϕ koja poprima vrijednost 1 za slučaj pukotine, odnosno 0 za neoštećeni materijal. Ono što čini ovaj pristup posebno atraktivnim je njegova sposobnost učinkovitog simuliranja složenih procesa oštećenja i loma uključujući nastanak, rast, srastanje i grananje oštećenja, kako za dvodimenzionske tako i za trodimenzionske probleme. Rast pukotine automatski se prati razvojem glatkog polja ϕ na fiksnoj mreži konačnih elemenata. Prema tome, fazno modeliranje spada u kontinuumski opis diskontinuiteta što ima značajne prednosti nad diskretenim opisom pukotine čija numerička implementacija zahtijeva eksplicitno (u klasičnoj metodi konačnih elemenata, MKE) ili implicitno (u proširenoj MKE, XFEM) rješavanje problema diskontinuiteta.

U literaturi (6) je vidljivo da se primjenom klasične (izotropne) formulacije faznog modeliranja dobiva nefizikalno ponašanje konstrukcijske komponente s pukotinom. Za eliminiranje tog problema, razvijene su anizotropne formulacije faznog modeliranja. Pritom se vrši aditivna dekompozicija energije deformiranja na dio uzrokovani vlačnim, odnosno tlačnim naprezanjima primjenom spektralne dekompozicije (7), odnosno sferno-devijatorske dekompozicije (8). Na taj način se degradacijska funkcija primjenjuje samo na dio energije koji izaziva rast pukotine. U radu je dan prikaz algoritma faznog modeliranja za numeričku simulaciju kvazi-krhkog loma. Naglasak je stavljen upravo na nefizikalno ponašanje uslijed izotropne formulacije faznog modeliranja. Učinkovitost numeričkog algoritma prikazana je na primjeru rastezanja membrane sa zarezom.

2 Izvod konstitutivnih jednadžbi

Princip faznog modeliranja za opisivanje problema kvazi-krhkog oštećenja materijala temelji se na proširenju Helmholtzove slobodne energije dodatnim članom koji se odnosi na energiju pukotine

$$\Psi = \Psi^b + \Psi^s = \int_{\Omega/\Gamma} \psi(\varepsilon) d\Omega + \int_{\Gamma} G_c d\Gamma. \quad (1)$$

U prethodnoj jednadžbi koja opisuje ukupnu potencijalnu energiju Ψ , Ψ^b se odnosi na slobodnu energiju cjelovitog materijala, dok se Ψ^s odnosi na pukotinu. Ovdje je $\psi(\varepsilon)$ gustoća energije elastičnog deformiranja, G_c je Griffithova energija otvaranja pukotine, dok su Ω razmatrani volumen, odnosno Γ površina pukotine. Regularizacijom pukotine preko cijelog volumena, gubi se nepoznana površina pukotine te se jednadžbu (1) svodi na

$$\Psi = \int_{\Omega} g(\phi) \psi(\varepsilon) d\Omega + G_c \int_{\Omega} \gamma(\phi) d\Omega. \quad (2)$$

Na taj način se podintegralna funkcija u drugom članu izraza (1) zamjenjuje s $\gamma(\phi)$, tzv. funkcijom gustoće površine pukotine, a u prvi član se dodaje degradacijska funkcija $g(\phi)$. Time se diskretni opis pukotine zamjenjuje kontinuumskim pristupom, čime se izbjegava eksplicitno praćenje površine pukotine. Funkcija $\gamma(\phi)$ je izvedena iz 1D primjera, gdje je diskretna, oštra pukotina zamjenjena eksponencijalnom funkcijom

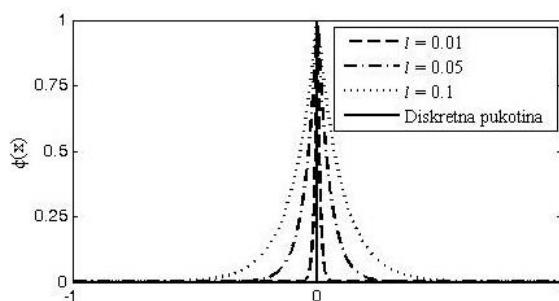
$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow 0 \text{ za } x \rightarrow \pm\infty, \\ \phi(x) &= \exp\left(\frac{-|x|}{\ell}\right), \quad \phi(x) \rightarrow 1 \text{ za } x = 0, \\ \phi'(x) &\rightarrow 0 \text{ za } x \rightarrow \pm\infty, \end{aligned} \quad (3)$$

kao što je prikazano na slici 1. Za 1D slučaj vrijedi $\Psi^s = G_c \int_{\Omega} \gamma(\phi) dx dA = G_c A$, pa je zadovoljavajuća funkcija

$$\gamma(\phi) = \frac{1}{2} \left[\ell (\phi')^2 + \frac{1}{\ell} \phi^2 \right], \quad (4)$$

odnosno u općem slučaju

$$\gamma(\phi) = \frac{1}{2} \left[\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\ell} \phi^2 \right]. \quad (5)$$



Slika 2. Regularizacija pukotine za različite vrijednosti „l“

Ovdje je još potrebno izvesti degradacijsku funkciju koja množi energiju deformiranja $\psi(\varepsilon)$ i na taj način smanjuje krutost materijala uslijed pojave oštećenja. Uobičajena forma degradacijske funkcije kod faznog modeliranja je prikazana jednadžbom prema (7)

$$g(\phi) = (1-\phi)^2 + k. \quad (6)$$

Konačno, nakon regularizacije, dobivamo proširenu funkciju slobodne energije koja glasi

$$\Psi(\phi) = \int_{\Omega} \left[(1-\phi)^2 + k \right] \psi(\varepsilon) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{G_c}{2} \left[\ell \nabla \phi \cdot \nabla \phi + \frac{1}{\ell} \phi^2 \right] d\Omega. \quad (7)$$

Primjenom principa virtualnog rada

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}}; \quad \int_{\Omega} b_j \delta u_j d\Omega + \int_{\partial\Omega} h_j \delta u_j d\partial\Omega = \delta \Psi, \quad (8)$$

sada je moguće doći do konstitutivnih relacija faznog modeliranja u obliku

$$\begin{aligned} & \left[(1-\phi)^2 + k \right] \partial \sigma_{ij} / \partial x_i + b_j = 0 \text{ na } \Omega, \\ & \left[(1-\phi)^2 + k \right] n_i \sigma_{ij} = h_j \text{ na } \partial\Omega_h, \\ & u_j = \bar{u}_j \text{ na } \partial\Omega_u, \\ & -G_c \ell \partial^2 \phi / \partial x_i \partial x_i + \left[\frac{G_c}{\ell} + 2\psi(\varepsilon) \right] \phi = 2\psi(\varepsilon) \text{ na } \Omega, \\ & \partial \phi / \partial x_i n_i = 0 \text{ na } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Iz jednadžbe (9) vidljivo je kako $\psi(\varepsilon)$ upravlja razvojem oštećenja. Kako ove relacije ne zadovoljavaju uvjet ireverzibilnosti, uvodi se parametar povijesti oštećenja prema (7)

$$H(x, t) \doteq \max_{\tau \in [0, t]} \psi(\varepsilon(x, \tau)), \quad (10)$$

koji zamjenjuje $\psi(\varepsilon)$ u jednadžbi (9) i sprječava smanjenje oštećenja tijekom deformiranja.

3 Dekompozicija energije deformiranja

U mehanici loma je poznato da vlačna naprezanja otvaraju pukotine, dok ih tlačna zatvaraju. Kako bi se izbjegla interpenetracija površine pukotine i kriva putanja rasta pukotine uslijed utjecaja tlačnih naprezanja, u jednadžbi razvoja parametra faznog modeliranja potrebno je razdvojiti energiju deformiranja na dio koji se odnosi na vlačna, odnosno tlačna naprezanja. Dva najčešćestalija načina razdvajanja energije deformiranja u literaturi su spektralna dekompozicija

$$\Psi^\pm = \frac{\lambda}{2} \langle \text{tr}(\varepsilon) \rangle_\pm^2 + \mu \text{tr}(\varepsilon_\pm^2), \quad \varepsilon_\pm := \sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i^* \rangle n_i \otimes n_i, \quad (11)$$

i sferno – devijatorska dekompozicija

$$\Psi^+ = \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \langle \text{tr}(\varepsilon) \rangle_+^2 + \mu \text{tr}(\varepsilon^{dev} : \varepsilon^{dev}); \quad \Psi^- = \frac{1}{2} \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \langle \text{tr}(\varepsilon) \rangle_-^2 \quad (12)$$

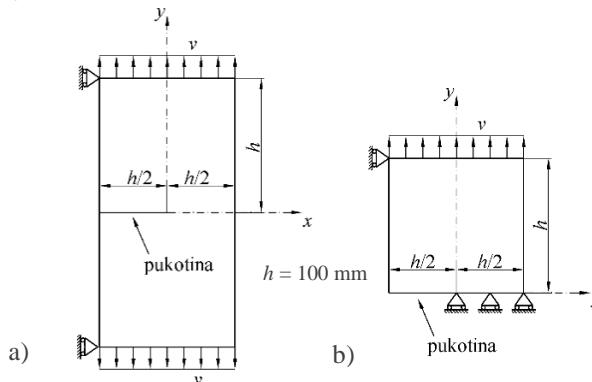
Primjenom neke od navedenih dekompozicija, iz početne jednadžbe faznog modeliranja (2) se dobiva

$$\Psi = \int_{\Omega} \{ g(\phi) \psi^+ + \psi^- \} d\Omega + G_c \int_{\Omega} \gamma(\phi) d\Omega, \quad (13)$$

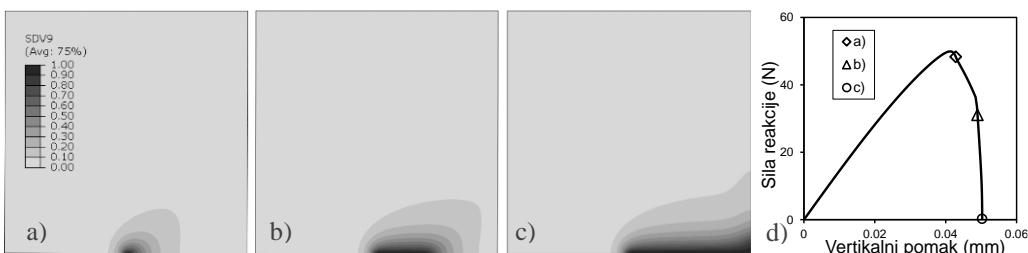
gdje je očito kako degradacijska funkcija djeluje samo na pozitivni dio, dok negativni dio ostaje ne degradiran. Također, daljnjim izvodom u jednadžbi razvoja oštećenja (9), ψ se zamjenjuje s ψ^+ . Korištenjem takvih dekompozicija uvodi se anizotropnost zbog čega se javljaju nesimetrične matrice krutosti. Zbog navedenog, anizotropnost još nije uspješno implementirana u ovom radu.

4 Numerički primjer

Fazno modeliranje kvazi-krhkog oštećenja prikazano je na jednostavnom akademskom primjeru razvlačenja membrane s pukotinom. Geometrija i rubni uvjeti prikazani su na slici 2. Zbog simetrije, modelirana je samo polovica ploče kako bi se smanjili računalni resursi. Mreža konačnih elemenata je jednolika i sastoji se od 10000 četverokutnih konačnih elemenata s 3 stupnja slobode u čvoru (2 pomaka i parametar faznog modeliranja ϕ) za ravninsko stanje deformacija. Mreža je jednolika upravo iz razloga da ne utječe na smjer rasta pukotine. Materijalna svojstva su preuzeta iz (7): $\lambda=121,15 \text{ kN/mm}^2$, $\mu=80,77 \text{ kN/mm}^2$, $G_c=2,7 \times 10^{-3} \text{ kN/mm}^2$, $l=4 \text{ mm}$.



Slika 3. a) Geometrija i b) rubni uvjeti



Slika 4. Polje varijable ϕ za 3 različita stanja opterećenja a), b), c) i d) dijagram sila-pomak

Slike 3.a)-c) prikazuju polje varijable ϕ za 3 različita stanja opterećenja. Vidljivo je da se na ovom jednostavnom primjeru ne pojavljuje nefizikalni rast pukotine uslijed korištenja izotropnog

algoritma bez dekompozicije energije deformiranja. Za složenje primjere, bit će ipak potrebno uključiti anizotropnost. Slika 3.d) je dijagram ovisnosti sile i pomaka te jasno prikazuje kako nosivost materijala pada sa širenjem oštećenja te je pri konačnom lomu jednaka nuli.

5 Zaključak

U radu je prikazan postupak faznog modeliranja za rješavanje problema kvazi-krhkog loma. Prikazan je termodinamički i varijacijski konzistentan izvod algoritma za rješavanje navedenog problema. Pozornost je posvećena dekompoziciji energije deformiranja za slučaj vlačnih i tlačnih naprezanja. Kako u ovoj fazi istraživanja navedena dekompozicija još nije uspješno implementirana u algoritam, mogućnosti faznog modeliranja prikazane su na jednostavnom primjeru razvlačenja membrane s pukotinom.

Zahvala

Istraživanje je u potpunosti financirano sredstvima Hrvatske zaklade za znanost u okviru projekta „Multiscale Numerical Modeling of Material Deformation Responses from Macro- to Nanolevel“ (2516) - MNumMacroNano.

Literatura

1. Putar F., Sorić J., Lesičar T. i Tonković Z. Damage modeling employing strain gradient continuum theory. International Journal of Solids and Structures. 2017, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2017.04.039.
2. Lesičar T., Tonković Z. i Sorić J. A Second-Order Two-Scale Homogenization Procedure Using C1 Macrolevel Discretization. Computational Mechanics. 2014;54(2):425-441.
3. Lesičar T., Sorić J. i Tonković Z. Large strain, two-scale computational approach using continuity finite element employing a second gradient theory. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2016;1(1):298-303.
4. Lesičar, T., Tonković, Z., Sorić, J. Two-Scale Computational Approach Using Strain Gradient Theory at Microlevel. International Journal of Mechanical Sciences, 2017;126:67-78.
5. Pijaudier-Cabot G. i Bažant Z. Nonlocal damage theory. Journal of engineering mechanics. 1987;113(10):1512-33.
6. Ambati M., Gerasimov T. i De Lorenzis L. A review on phase-field models of brittle fracture. Computational Mechanics. 2015;55:383–405.
7. Miehe C., Welschinger F. i Hofacker M. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture:Variational principles and multi-field FE implementations. Int. J. Numer. Meth. Engng. 2010;83:1273–1311.
8. Amor H., Marigo J.-J. i Maurini C. Regularized formulation of the variational brittle fracture with unilateral contact: Numerical experiments. J Mech Ph Solid. 2009;57 (8):1209–1229.

Eksperimentalna analiza pada tlaka u spiralnom isparivaču

Dalla Libera, G.¹, Soldo, V.², Boban, L.³, De Carli, M.⁴ i
Cukrov, A.⁵

Sažetak

Ovim radom su analizirane različite korelacije za izračun pada tlaka pri dvofaznom strujanju propana unutar isparivača uređaja za hlađenje pića. Analizirani rashladni uređaj je izведен kao spremnik vode unutar kojeg su uronjene isparivačke cijevi. Predmetni isparivač izведен je kao spiralni izmjenjivač topline pravokutne geometrije. Kroz cijevi isparivača struji propan koji, primajući na sebe toplinski tok koji odaje voda, potpuno isparava. Kako se stjenka cijevi izmjenjivača nalazi na temperaturi nižoj od temperature ledišta vode, oko vanjske stjenke isparivača formira se sloj leda koji omogućuje akumulaciju rashladnog učina za potrebe hlađenja pića. Pri analizi isparivača korišteni su programski paketi MATLAB® i REFPROP®.

Ključne riječi: propan, rashladnik, spiralni isparivač, pad tlaka,

1 Gastone Dalla Libera, mag. ing. energ., Università degli Studi di Padova, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Via Gradenigo, 6/a, 35131 Padova, e-mail: gastone.dallalibera@studenti.unipd.it

2 Prof. dr. sc. Vladimir Soldo, dipl. ing. stroj., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za termodinamiku, toplinsku i procesnu tehniku, Ivana Lučića 5,10000 Zagreb, e-mail: vladimir.soldo@fsb.hr

3 Luka Boban, mag. ing. mech., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za termodinamiku, toplinsku i procesnu tehniku, Ivana Lučića 5,10000 Zagreb, e-mail: luka.boban@fsb.hr

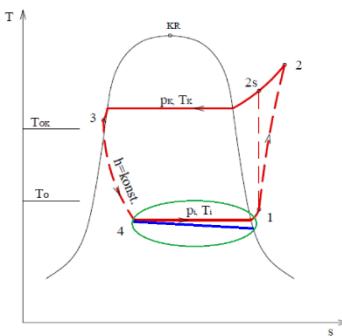
4 Prof. dr. sc. Michele De Carli., Università degli Studi di Padova, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Via Gradenigo, 6/a, 35131 Padova, e-mail: michele.decarli@unipd.it

5 Alen Cukrov, mag. ing. mech., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za termodinamiku, toplinsku i procesnu tehniku, Ivana Lučića 5,10000 Zagreb, e-mail: alen.cukrov@fsb.hr

1 Uvod

Procesnim hlađenjem se neko tijelo hlađi na temperaturu nižu od temperature okoliša. Intenzivan prijenos topline s hlađenog tijela na rashladni medij se postiže isparivanjem potonjeg uslijed toplinskog toka kojeg odaje hlađeno tijelo. Proses isparivanja radne tvari se odvija unutar isparivača. Procesi hlađenja imaju izrazit značaj u mnogim granama industrije, pa tako i prehrambenoj industriji gdje se hlađenjem ponajprije onemogućuje razvoj mikroorganizama u namirnicama.

U ovom radu je analizirano ponašanje isparivača u sustavu za hlađenje pića. Radna tvar u sustavu je propan. Propan (R290) odlikuju izrazito povoljna termodinamička svojstva, poput visoke specifične topline isparivanja, te relativno niske vrijednosti tlakova kondenzacije. Također, posjeduje veoma niske vrijednosti potencijala globalnog zagrijavanja (*engl. Global Warming Potential, GWP*) u usporedbi s konvencionalnim radnim tvarima (1).

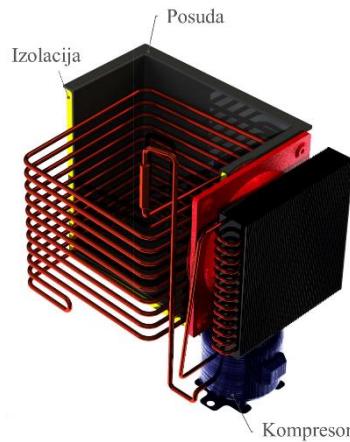


Slika 5. T-s dijagram procesa s R290 te prikaz utjecaja pada tlaka na temperaturu isparavanja

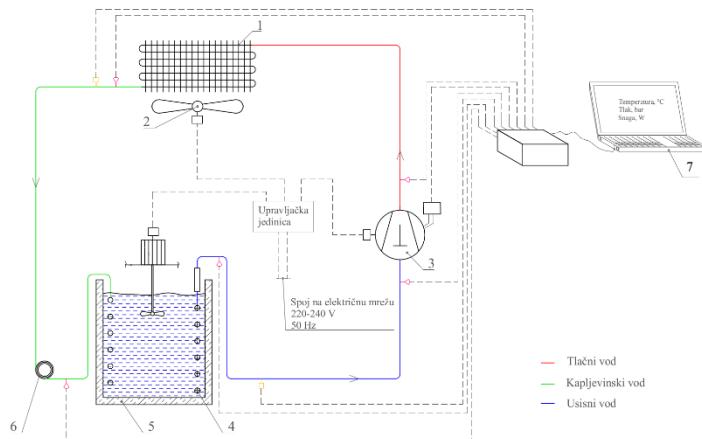
2 Eksperimentalni sustav

Promatrani isparivač dio je rashladnog uređaja koji se koristi za hlađenje pića akumulacijom rashladne energije u ledu. Spiralni izmjenjivač uronjen je u spremnik vode te propan u izmjenjivač ulazi kao pothlađena kapljevina te prolaskom kroz isparivač mijenja agregatno stanje. Ekspanzijski ventil osigurava pregrijanje radne tvari kako bi kompresor usisavao pregrijanu paru. Nakon uključivanja uređaj radi dok se na cijevima isparivača ne formira dovoljna debljina sloja leda koja se kontrolira pomoću tri osjetnika temperature postavljena s konstantnim korakom na određenoj udaljenosti od cijevi isparivača. Sami uređaj te shema spajanja mjerne opreme prikazani su na Slikama 2 i 3, a mjerena su provedena na Fakultetu strojarstva i brodogradnje, Sveučilišta u Zagrebu.

Stanja radne tvari mjerena su s dva pretvarača tlaka te termoparovima. Pretvarači tlaka postavljeni su na usisni vod kompresora i kapljevinski vod, dok termoparovi mjere stanje na ulazu u isparivač, izlazu iz isparivača, usisu u kompresor, tlačnom i kapljevinskom vodu. Temperatura pregrijanja se mjeri na izlazu iz isparivača u samoj kupci te na ulazu u kompresor.



Slika 6. Rashladni uređaj s prikazom cijevnog isparivača



Slika 7. Eksperimentalni postav: (1) kondenzator, (2) ventilator, (3) kompresor, (4) isparivač, (5) izolirani spremnik, (6) prigušna kapilara i (7) akvizicija

Maseni protok radne tvari koreliran je s električnom snagom kompresora te bilanciranjem entalpija na usisnoj i tlačnoj strani kompresora. Sam isparivač sastoji se od 12 četverokutnih prstena u spiralnoj formi te je prikazan na Slici 2.

Tablica 1 Dimenziije isparivača

Unutarnji promjer cijevi	$d_i = 9 \text{ mm}$
Vanjski promjer cijevi	$d_e = 10 \text{ mm}$
Broj prstena	$N = 12$
Duljina izmjenjivača	$L_{\text{circ}} = 15,8 \text{ m}$
Materijal	Cu
Hrapavost cijevi	$R_p = 0,2 \mu\text{m}$

Ukupni pad tlaka u dvofaznom strujanju može se raspisati kao (2):

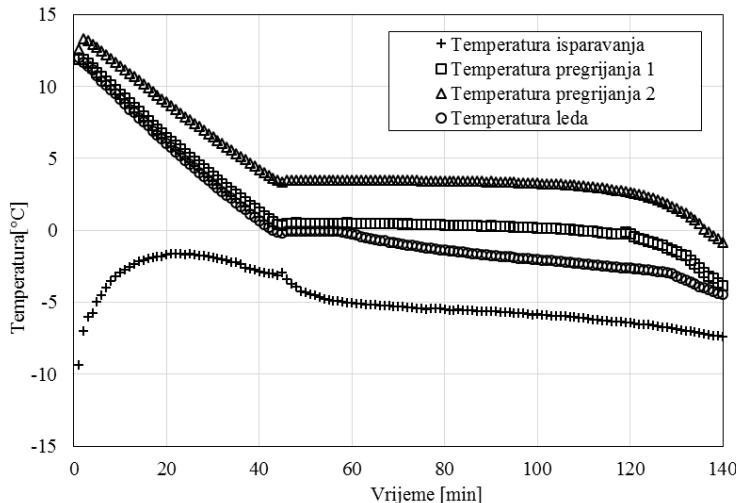
$$\Delta p_{tot} = \Delta p_f + \Delta p_{ac} + \Delta p_g$$

pri čemu je Δp_f pad tlaka uslijed trenja, Δp_{ac} uslijed ubrzanja struje te Δp_g uslijed gravitacije. Za potrebe usporedbe korištene su četiri korelacije često korištene u literaturi: Churchill-ova (3) za jednofazno strujanje pare propana, te Friedel-ova (4), Bankoff-ova (5) i Martinelli-eva (6) za dvofazno strujanje.

3 Rezultati i diskusija

Eksperimentalni rezultati provedenog mjerjenja prikazani su na Slici 4 dok su pojedine karakteristične točke sumirane u Tablici 2. Prikazane su temperature isparavanja, temperature prugljane radne tvari na izlazu iz isparivača te na usisu kompresora te temperatura leda. Sam proces može se podijeliti u nekoliko karakterističnih procesa:

- a) hlađenje vode od 1. do 42. minute
- b) stvaranje leda na cijevima isparivača do 60. minute
- c) pothlađivanje leda te daljnje povećanje mase leda

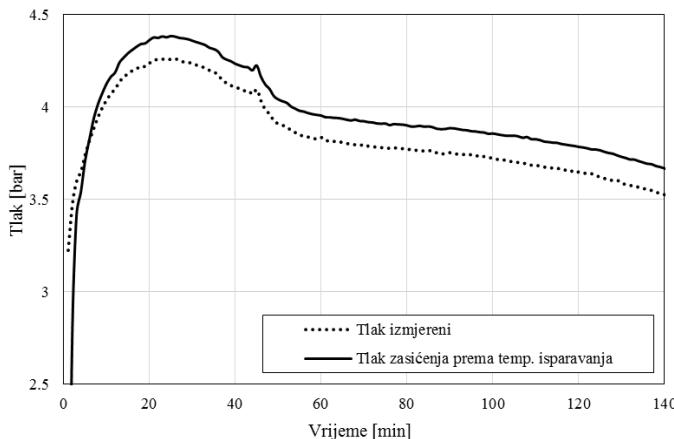


Slika 8. Promjene temperature prilikom rada uređaja

Tablica 2. Prikaz rezultata mjerjenja u pojedinim točkama

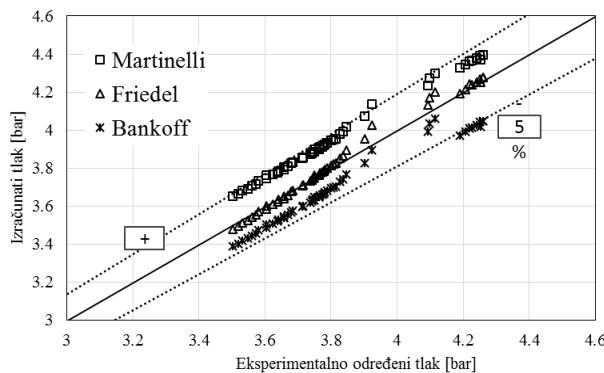
Vrijeme [min]	Tlok isparavanja [bar]	Temperatura isparavanja [°C]	Temp. pregrijanja 1 [°C]	Temp. pregrijanja 2 [°C]	Pad tlaka [bar]
3	3,60	-6,03	11,59	13,18	0,893
15	4,18	-2,05	7,94	10,16	0,322
60	3,84	-5,03	0,49	3,51	0,217
134	3,57	-7,09	-2,32	0,76	0,265

U prvoj fazi prilikom pokretanja uređaja temperatura isparavanja se povećava od početne vrijednosti -8°C i približava temperaturi hlađene vode. Nakon uspostavljanja ravnotežnog rada rashladnog uređaja temperatura isparavanja se linearno smanjuje od $-1,8^{\circ}\text{C}$ do $-2,8^{\circ}\text{C}$ kada dolazi do zamrzavanja vode i stvaranja leda na cijevima isparivača. U drugoj fazi temperatura leda i temperature pregrijanja konstantnog su iznosa do 58. minute kada nastali sloj leda predstavlja dominantni toplinski otpor pri prijelazu topline. Posljedica je pothlađenje leda ispod 0°C te snižavanje temperature isparavanja. U posljednjih 40 minuta rada uređaja dolazi do naglog pada temperature isparavanja i leda što se pripisuje činjenici da se u tom trenutku formira sloj leda koji obuhvaća i dio isparivača na izlazu na kojem struji pregrijana para propana. Navedeni zaključak temelji se na činjenici da dolazi do izjednačavanja temperature leda i temperature pregrijanja na izlazu iz isparivača oko 140. minute. Temperature nastalog leda na kraju procesa hlađenja iznosi -5°C dok se prilikom zamrzavanja leda temperatura isparavanja smanjuje s 3°C na -7°C . Tlak i temperatura jednoznačno su definirani tijekom isparavanja, stoga je moguće usporediti izmjereni tlak pretvaračem tlaka te tlak određen prema temperaturi na ulazu u isparivač na temelju linije zasićenja propana. Usporedba dobivenih vrijednosti tlaka mjeranjem i preračunavanjem prikazana je na Slici 5. Vidljivo je da je razlika konstantna, izuzev pri početku rada uređaja dok neravnotežnosti u radu rashladnika dominiraju. Tijekom eksperimenta utvrđen je pad tlaka od 0,23 bar nakon ustaljivanja rada rashladnog uređaja.

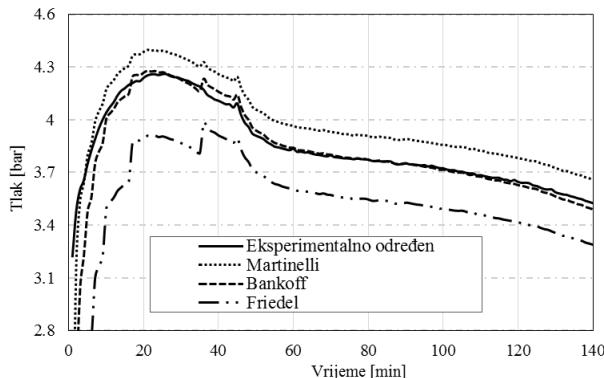


Slika 9. Tlakovi prije i nakon isparivača

Za proračun pada tlaka tri različite korelacije su upotrijebljene i uspoređene. Rezultati su prikazani na zajedničkom dijagramu na kojem je naglašen raspon odstupanja $\pm 5\%$. Dijagram je prikazan na Slici 6 te daje usporedbu izmjerenog tlaka nakon isparivača te korigiranih tlakova uzimajući u obzir izračunati pad tlaka. Najmanje odstupanje dobiveno je koristeći korelaciju prema *Bankoff*-u, a najveće odstupanje za *Martinelli*-evu.



Slika 10. Odstupanja tlakova na izlazu iz isparivača za različite korelacije



Slika 11. Promjena tlaka u vremenu: izmjerena i izračunata korelacijsima za pad tlaka

4 Zaključak

U radu je predstavljena analiza isparivača s propanom kao rashladnom radnom tvari. Za potrebe spiralnog isparivača sastavljenog od pravokutnih elemenata određen je pad tlaka sa svrhom usporedbe različitih korelacija dostupnih u literaturi. Uz horizontalne elemente cijevi, u analizi su uzeta u obzir i koljena od 90° . Sve tri uspoređene korelacije nalaze se unutar raspona od +/- 5% u odnosu na mjerene vrijednosti. Ipak, od uspoređenih korelacija, najbolje poklapanje pokazuje *Bankoff*-ova korelacija te će se u budućim analizama koristiti za potrebe modeliranje cijelokupnog uredaja. Osim pada tlaka, za opis rada isparivača ključan je i prijelaz topline što je ujedno i cilj budućih istraživanja.

Nomenklatura

d_i	– promjer	[m]	Fr_L	– tekući Froudeov broj	[-]
ρ_L	– gustoća	[kg/m ³]	We_L	– tekući Weberov broj	[-]
L	– duljina cijevi	[m]	SH	– temperature pregrijanja (razlika)	[°C]
m	– maseni protok	[kg/s]	T_{ev}	– temperaturna isparavanja	[°C]
Re	– Reynoldsov broj	[-]	E, F, H	– konstante Friedelove korelacije	[-]

Literatura

1. I. Colombo, G. G Maidment, D. Cowan (2015): *Whole life emission for air to water heat pumps: an investigation*, International Congress of Refrigeration, Yokohama
2. G. Dalla Libera (2017). *Modelling of finned coil evaporators with air dehumidification*. Master thesis in Energetic Engineering, University of Padua, Italy.
3. S. W. Churchill (1973). *Empirical expressions for the shear stress in turbulent flow in commercial pipe*. American Institute of Chemical Engineering Journal, pag. 375-376.
4. L. Friedel (1979). *Improved friction pressure drop correlations for horizontal and vertical two-phase flow*. 3 R Int., pag. 485-491.
5. S. G. Bankoff (1960). *A variable density single-fluid model for two-phase flow with particular reference to steam-water flow*. J. Heat Transfer, 11, pag. 165-172.
6. R. W. Lockhart and R. C. Martinelli (1949). *Proposed correlation of data for isothermal two-phase two-component flow in pipes*. Chem. Eng. Progr., 4.5, pag. 39-48.
7. ASHRAE Standard 34-2007, *Designation and Safety Classification of Refrigerants*, 2008.
8. S. M. Sami and B. Song (1995). *Heat transfer and pressure drop characteristics of HFC quaternary refrigerant mixtures inside horizontal enhanced surface tubing*. Mechanical Engineering, School of Engineering, University of Moncton, Moncton.

Modeliranje pukotina osnim betonskim elementima s ugrađenim diskontinuitetom

Šćulac, P.¹, Rukavina, T.² i Jelenić, G.³

Sažetak

Konačni elementi s ugrađenim diskontinuitetom jedan su od mogućih alata za analizu nastanka i razvoja pukotina u betonu. Pristup jakog diskontinuiteta unutar kontinuuma koji je primjenjen u ovom radu temelji se na obogaćivanju neprekinitog polja pomaka dodatnim stupnjem slobode kojim se modelira skok u polju pomaka na mjestu pukotine.

Ponašanje betona u vlaku opisano je bilinearnim zakonom oštećenja: prije dosezanja vlačne čvrstoće beton se ponaša kao linearno-elastičan materijal, a nakon prekoračenja vlačne čvrstoće naprezanje u betonu smanjuje se s povećanjem širine pukotine (*softening*). Disipacija energije na mjestu diskontinuiteta uslijed otvaranja pukotine opisana je kohezivnim zakonom ponašanja.

U ovom radu prikazana su dva štapna (osna) konačna elementa s bitno različitim algoritmima za analizu oštećenja u betonu. Prvi pristup koristi *operator split* postupak za razdvajanje proračuna u lokalnu i globalnu fazu. U lokalnoj fazi rješavaju se jednadžbe razvoja unutarnjih varijabli kojima se modelira oštećenje na lokalnoj razini, dok se u globalnoj fazi rješavaju jednadžbe s ciljem određivanja globalnih stupnjeva slobode. U drugom pristupu nema razdvajanja na lokalnu i globalnu fazu. Modeli su testirani na nekoliko primjera, a u nastavku je prikazan primjer vlačnog štapa s oslabljenjem.

Ključne riječi: beton, štapni konačni element, ugrađeni diskontinuitet, oštećenje

¹ Doc. dr. sc. Paulo Šćulac, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmila Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: paulo.sculac@uniri.hr

² Tea Rukavina, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za računalno modeliranje materijala i konstrukcija, Radmila Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: tea.rukavina@uniri.hr

³ Prof. dr. sc. Gordan Jelenić, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmila Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

1 Uvod

Modeliranje procesa nastajanja i razvoja pukotina složeni je proces koji se samo u iznimno pojednostavljenim slučajevima može riješiti analitički. Iako je od prve primjene numeričke metode konačnih elemenata u modeliranju raspucavanja prošlo točno 50 godina (vidjeti (1) i (2): Ngo i Scordelis, 1967. te Rashid, 1968.), ovo je područje i dalje vrlo aktivno i predmet je istraživanja mnogih istraživača. Navedeni autori ujedno su i začetnici dva bitno različita pristupa u modeliranju pukotina: prvi uključuje diskrette pukotine, dok se drugi bavi razmazanim pukotinama.

U ovom radu primijenjen je pristup jakog diskontinuiteta unutar kontinuuma koji se temelji na ugradnji jakog diskontinuiteta u konačni element na način da se neprekinuto polje pomaka konačnog elementa obogaćuje dodatnim stupnjevima slobode kojima modeliramo skok u polju pomaka na mjestu pukotine. Prednost ovog pristupa je što se njime izbjegava problem utjecaja ovisnosti veličine mreže na rezultate (koji se javlja kod modela s razmazanim pukotinama) i problem ovisnosti propagacije pukotine o rasporedu konačnih elemenata (koji se javlja kod elemenata s diskretnim pukotinama).

Cilj ovog istraživanja je razviti model za analizu pukotina u betonu i sličnim kvazikrtim materijalima koji se temelji na najjednostavnijem štapnom konačnom elementu. Kako ovdje modeliramo samo ponašanje u vlaku, definiramo da se materijal prije dosezanja vlačne čvrstoće ponaša linearno elastično. Slom štapa opterećenog na vlak nastat će nakon prekoračenja vlačne čvrstoće u najslabijem presjeku i otvaranjem pukotine. Prema modelu kohezivnih pukotina kojeg su predložili Hillerborg i suradnici (3) naprezanja postoje na stjenkama pukotine dok god je pukotina dovoljno uska. U trenutku otvaranja pukotine naprezanja ne iščezavaju odjednom, već se smanjuju s povećanjem širine pukotine dok se ne potroši ukupna energija loma, koja ovisi o razredu betona i granulometrijskom sastavu.

U nastavku su detaljnije prikazana dva modela temeljena na istim pretpostavkama, ali s bitno različitim algoritmima rješavanja.

2 Pristup s razdvajanjem proračuna u faze

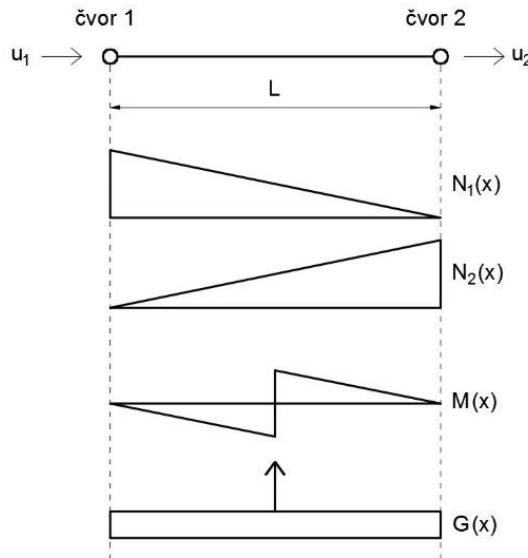
U ovom pristupu koristi se model oštećenja s omekšanjem za štapni konačni element koji je opisan u (4). Promotrimo štapni konačni element duljine L i površine A , s jednim osnim stupnjem slobode u svakom čvoru u_i , $i=1,2$ (vidjeti sliku 1.). N_1 i N_2 predstavljaju standardne interpolacijske funkcije, dok je M funkcija kojom se opisuje skok u polju pomaka na sredini elementa, a G je njena derivacija. Strelica na sredini predstavlja Diracovu delta funkciju koja opisuje singularni dio polja deformacija.

Uvođenje diskontinuiteta zahtijeva intervenciju u kinematičke jednadžbe pa je polje pomaka definirano kao zbroj standardnog i obogaćenog polja pomaka

$$u(x) = \mathbf{N}u + M(x)\alpha, \quad (1)$$

gdje α predstavlja širinu pukotine, tj. pomak u diskontinuitetu, koji je uveden u formulaciju kao nekompatibilni oblik (5), dok je funkcija M kojom se opisuje skok na mjestu pukotine definirana kao

$$M(x) = \begin{cases} -\frac{x}{L} & x \in [0, \frac{L}{2}] \\ 1 - \frac{x}{L} & x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}. \quad (2)$$

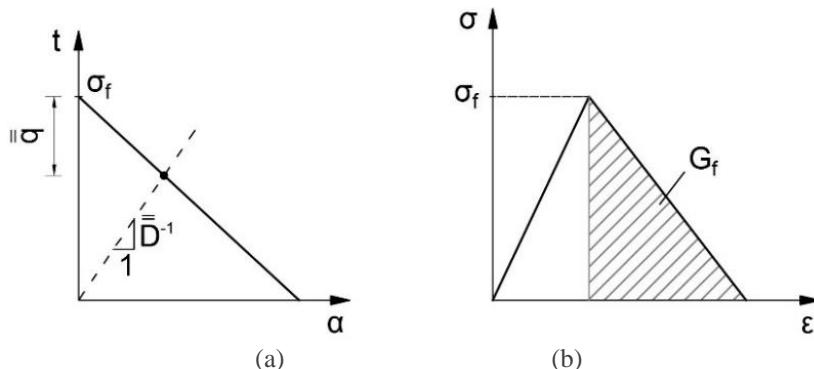


Slika 1. Interpolacijske funkcije za štapni konačni element s ugrađenim diskontinuitetom

Konstitutivni model betona određen je Hookeovim zakonom, dok je ponašanje materijala u diskontinuitetu opisano kohezivnim zakonom (vidjeti sliku 2.a)

$$t = \bar{\bar{D}}^{-1} \alpha \quad (3)$$

gdje je t sila u diskontinuitetu, a $\bar{\bar{D}}$ varijabla oštećenja koja može poprimiti vrijednosti od nula do beskonačno.



Slika 2. (a) Kohezivni zakon ponašanja u diskontinuitetu (b) Energija loma G_f

Oštećenje materijala opisano je uz pomoć još nekoliko unutarnjih varijabli, kao što su modul omešanja, varijable oštećenja, te funkcija oštećenja koja provjerava je li vrijednost sile u diskontinuitetu dopustiva ili nije. Detalji postupka mogu se pronaći u (6). Na dijagramu naprezanje-deformacija (vidjeti sliku 2.b) površina ispod dijela kojim je opisano omešanje materijala predstavlja energiju loma G_f .

Kako bi se omogućila efikasna numerička implementacija predloženog pristupa, proračun će se razdvojiti u dvije faze pomoću *operator split* postupka (6). U lokalnoj fazi rješavaju se jednadžbe razvoja oštećenja opisane unutarnjim varijablama, dok se u globalnoj fazi rješavaju jednadžbe ravnoteže na razini cijele konstrukcije. Proračun je inkrementalan i iterativan i koristi Newton-Raphsonovu metodu za rješavanje diferencijalnih jednadžbi, te implicitnu Eulerovu metodu za integraciju jednadžbi unutarnjih varijabli.

U lokalnoj fazi prvo računamo funkciju oštećenja $\bar{\Phi}$: ako je $\bar{\Phi} \leq 0$, korak je elastičan, a ako je $\bar{\Phi} > 0$, korak nije elastičan i došlo je do oštećenja. Nakon računanja vrijednosti svih unutarnjih varijabli, prelazimo u globalnu fazu gdje provjeravamo je li ravnoteža zadovoljena u cijeloj konstrukciji

$$\hat{K} \Delta d = -r \quad (4)$$

gdje \hat{K} označava kondenziranu matricu krutosti, Δd je inkrement pomaka, a r je rezidual koji predstavlja razliku unutarnjih i vanjskih sila. Ako je vrijednost reziduala $\|r\| > tol$, gdje je tol odabrana tolerancija greške, moramo provesti još iteracija, sve dok ne dobijemo $\|r\| \leq tol$, što znači da je ravnoteža zadovoljena i da možemo prijeći u novi korak.

Naposljetku dobivamo vrijednosti čvornih pomaka, pomaka u diskontinuitetu, unutarnjih varijabli i naprezanja u svakom vremenskom koraku.

3 Pristup s cjelovitim proračunom

Ovaj pristup podrazumijeva kako nema razdvajanja na lokalnu i globalnu fazu. Kohezivna naprezanja koja nastaju na mjestu otvaranju pukotine definirana su kao dodatna sila koja je jednaka umnošku površine poprečnog presjeka i kohezivnog naprezanja koje je zavisno o širini pukotine α u promatranoj iteraciji.

Nakon otvaranja pukotine izraz (3) sada se definira kao

$$t = \begin{cases} \sigma_f \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) & 0 < \alpha \leq \alpha_0 \\ 0 & \alpha > \alpha_0 \end{cases}, \quad (5)$$

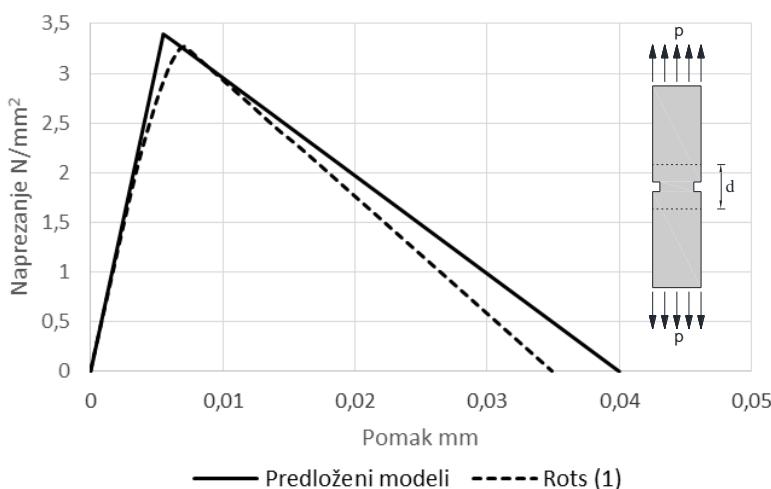
gdje je $\alpha_0 = 2G_f/\sigma_f$ najveća širina pukotine pri kojoj pukotina još može prenositi naprezanja. Varijable i funkcija oštećenja u ovom se pristupu ne računaju, a nepoznanice problema (čvorni pomaci i širine pukotina) dobivaju se rješavanjem globalne jednadžbe ravnoteže.

4 Numerički primjer

Kako bi se validirali predloženi modeli, razvijen je računalni kod u softverima *Mathematica* i *FEAP (Finite Element Analysis Program)*. Modeli su testirani na nekoliko primjera, a u nastavku se prikazuje primjer vlačnog štapa sa zarezom (oslabljenjem) u polovici duljine koji je numerički obrađen u (1) četveročvornim ravninskim elementima koristeći princip s razmazanim pukotinama. Analizirani štap je duljine 250 mm, širine 60 mm i visine 50 mm, a na mjestu oslabljenja širina iznosi 50 mm. Korištene su sljedeće materijalne karakteristike: modul elastičnosti $E = 18\,000 \text{ N/mm}^2$, vlačna čvrstoća $\sigma_f = 3,4 \text{ N/mm}^2$, dok je za energiju loma usvojeno $G_f = 68 \text{ J/m}^2$ što daje širinu pukotine $a_0 = 0,04 \text{ mm}$ (u (4) je za G_f korišteno $= 59,3 \text{ J/m}^2$, ali pri toj vrijednosti ovdje prikazani postupci nisu konvergirali, stoga je u predloženim modelima usvojena gore navedena malo veća vrijednost).

Rezultati u (1) prikazani su u ovisnosti o pomaku koji se ostvaruje na sredini štapa na bazi duljine $d = 35 \text{ mm}$, pa su prilikom modeliranja broj, odnosno duljina elementa odabrani tako da čvorovi središnjeg elementa (u kojem se nalazi oslabljenje) odgovaraju toj duljini, pa je štap modeliran sa 7 štapnih elemenata duljine 35 mm ($7 \times 35 = 245 \text{ mm}$). Oslabljenje u sredini štapa modelirano je smanjenjem vlačne čvrstoće središnjeg elementa za 16,7% (postotak je dobiven iz odnosa dimenzija oslabljenog i neoslabljenog presjeka). Na donjem rubu štapa pomak je spriječen, dok na gornjem rubu nanosimo pomak slobodnog kraja.

Na slici 3 prikazan je dijagram srednjeg naprezanja u štapu u ovisnosti o razlici pomaka čvorova središnjeg elementa u kojem se zbog oslabljenja otvara pukotina. Srednje naprezanje definirano je kao nanesena vlačna sila podijeljena s površinom poprečnog presjeka na mjestu oslabljenja ($50 \times 50 \text{ mm}^2$). Oba predložena modela daju iste rezultate, te se može primijetiti vrlo dobro podudaranje s rezultatima iz (1), a neznatno odstupanje rezultata posljedica je primjene različitih vrijednosti za energiju loma G_f . Na grafu možemo primijetiti linearno elastični odziv sve do dostizanja vršne vlačne čvrstoće, a nakon dosezanja vršne čvrstoće cjelokupna se deformacija lokalizira na mjestu pukotine (koja napisljektu razdvaja uzorak na dva dijela), dok se ostatak uzorka rasterećuje.



Slika 3. Dijagram srednjeg naprezanja u ovisnosti o pomaku

5 Zaključak

U ovom radu prikazana su dva algoritamski bitno različita štapna konačna elementa s ugrađenom pukotinom za analizu raspucavanja u betonu i sličnim kvazikrtim materijalima, koja se temelje na pristupu jakog diskontinuiteta unutar kontinuma. Na primjeru vlačnog štapa s oslabljenjem pokazano je kako oba pristupa daju iste rezultate.

Za pravilno modeliranje bitno je poznавanje materijalnih svojstava, posebice parametara kojim se definira *softening* funkcija koja opisuje zakonitost smanjenja naprezanja uslijed povećanja širine pukotine. Planirana nadogradnja modela uključit će korištenje složenije *softening* funkcije poput bilinearne ili eksponencijalne, koje će omogućiti i realnije modeliranje stvarnog ponašanja materijala.

Zahvale

Izradu ovog rada finansijski je poduprla Hrvatska zaklada za znanost preko projekta br. IP-11-2013-9068 "Multi-scale concrete model with parameter identification" i projekta br. IP 11-2013-1631 "Configuration-dependent approximation in non-linear finite-element analysis of structures", te Sveučilište u Rijeci preko potpore br. 13.05.1.1.02. "Multi-rezolucijsko modeliranje konstrukcija s parametarskom identifikacijom", potpore br. 13.05.1.1.01 "Procjena oštećenja i ojačanje građevinskih konstrukcija" te potpore br. 13.05.1.3.06 "Ispitivanje vitkih grednih prostornih konstrukcija s naglaskom na validaciju modela".

Literatura

1. Rots JG. Computational modeling of concrete structures, PhD thesis, Delft University of Technology, Delft, 1988.
2. Bažant ZP i Planas J. Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials. CRC Press, 1998.
3. Hillerborg, A, Modeer M i Petersson, PE. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, Cement and Concrete Research, 1976;6:773-782.
4. Jukic, M, Brank, B i Ibrahimbegovic, A. Failure analysis of reinforced concrete frames by beam finite element that combines damage, plasticity and embedded discontinuity. Engineering Structures. 2014;75:507-527.
5. Ibrahimbegovic, A i Wilson, E. A modified method of incompatible modes. Communications in Applied Numerical Methods. 1991;7:187–194.
6. Ibrahimbegovic, A. Nonlinear solid mechanics, theoretical formulations and finite element solution methods. Springer, 2009.

Ujednačavanje raspodjele naprezanja vijčanog spoja optimiranjem veličine uspona

Šimunović, V.¹, Kozak, D.²

Sažetak

Poznato je da su profili navoja u vijčanom spolu nejednoliko opterećeni, stoga je u radu analizirana i optimirana upravo raspodjela naprezanja na primjeru vijčanog spola s ISO metričkim navojem.

Izrađen je CAD parametarski model vijčanog spola u svrhu analiziranja i optimiranja raspodjele naprezanja povećanjem uspona matice. Također uspoređeno je ponašanje klasičnog i optimiranog vijčanog spola i izrađena tablica optimiranih rješenja uspona.

Analizom pomoću MKE prikazano je stanje naprezanja klasičnog vijčanog spola na odabranom primjeru s navojem M16. Pokazalo se i potvrdilo klasično ponašanje vijčanih spojeva gdje prvi profili navoja u kontaktu prenose većinu opterećenja dok su ostali znatno manje opterećeni.

Pretpostavka je da se povećanjem uspona matice, odnosno postojanjem određene pozitivne razlike između uspona matice i vijka, ponašanje klasičnih vijčanih spojeva može poboljšati. Navedeno je primijenjeno te je rezultiralo smanjenjem ekvivalentnog naprezanja za ≈30%. Na ovaj način poboljšava se raspodjela naprezanja kao i dinamička izdržljivost vijčanih spojeva.

Određivanjem korigirane veličine uspona za navoje opće primjene, prikazanih u tablicama, može se zaključiti kako je metoda primjerenija za navoje većih nazivnih promjera. Veličine razlike uspona, koje su dosta male, rastu s porastom nazivnog promjera pa tako poprimaju veličine koje su lakše i jeftinije izvedive.

Ključne riječi: vijčani spojevi, raspodjela naprezanja, optimiranje uspona, metoda konačnih elemenata

¹ Vjekoslav Šimunović, mag. ing. mech., Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane Brlić-Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: vsimunovic@sfsb.hr

² Prof. dr. sc. Dražan Kozak, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane Brlić-Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: dkozak@sfsb.hr

1 Uvod



Slika 12. Raspodjela naprezanja u vijčanom spoju (1)

Vijčani spojevi nisu jednoliko opterećeni kroz profile u kontaktu, što je poznato i dokazano, svega prva dva do tri nose većinu opterećenja. Uobičajena raspodjela po profilima vidljiva je na slici 1.

Otkazi vijčanih spojeva obično se iniciraju na korijenu prvog navoja vijka u blizini nosive površine matice zbog zamornih ciklusa i taj je otkaz potpomognut visokim koncentracijama naprezanja na korijenu navoja (2).

Kod uobičajenih vijčanih spojeva prilikom pritezanja dolazi do aksijalnog rastezanja vijka dok se matica tlači. Iz toga nastaju razlike uspona unutrašnjeg i vanjskog navoja koji su u neopterećenom stanju jednaki.

Pretpostavka je da se nejednolična raspodjelu naprezanja kroz vijčani spoj može poboljšati korištenjem vijčanih spojeva koji u neopterećenom stanju imaju odgovarajuću razliku uspona.

2 Podaci i metode korištene u istraživanju

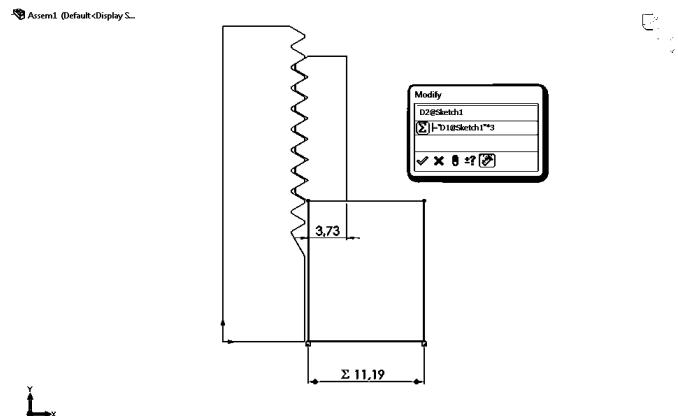
Modeliran je površinski model vijčanog spoja u softveru SolidWorks 2012 (3), u sukladnosti s ISO metričkim profilom navoja i analiziran pomoću softvera Ansys 16.2 (4).

2.1 Model

Model se sastoji od navojnog dijela vijka, matice i ploče na koju se matica oslanja, slika 2. Za razliku od stvarnog modela, promatra se model koji je u potpunosti osnosimetričan, kako bi se dalje u radu mogao analizirati dvodimenzionalni problem koji je pri numeričkoj analizi računalno manje zahtijevan (5).

Debljina ploče jednaka je duljini slobodnog dijela vijka, unutarnji promjer jednak je promjeru na kojem se nalazi korijen navoja matice, a vanjski promjer uvećan je od unutarnjeg za trostruki iznos duljine kontakta matice i ploče (5).

Dimenzije vijaka i matice uzete su kao srednje vrijednosti prema toleranciji 6g/6H kako bi se pomoću zračnosti u vijčanom spoju stvorio prostor koji je potreban za mijenjanje uspona.



Slika 13. Modeliranje spoja (5)

2.2 Analiza pomoću MKE

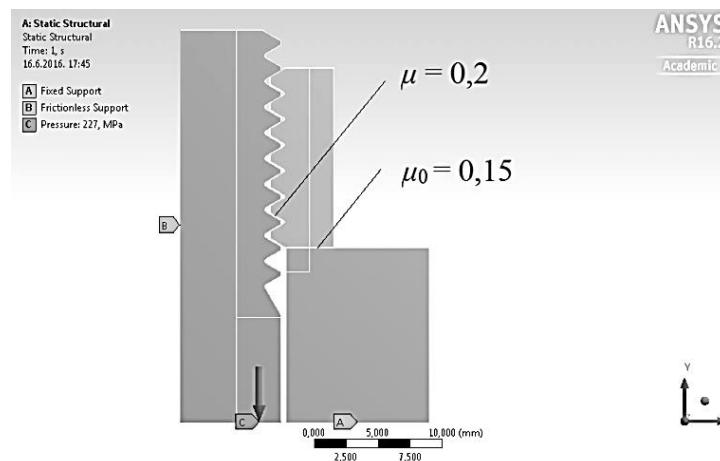
Dopušteno naprezanje σ_{dop} za vijke određuje se obično ovisno o naprezanju tečenja R_e ($R_{p0,2}$) (6):

$$\sigma_{\text{dop}} \approx 0,3 R_e \quad (1)$$

U analizi je korišten materijal 42CrMo4 koji se često koristi za vijke klase čvrstoće 10.9. Značajke materijala prikazane su u tablici 1, a rubni uvjeti modela prikazani su na slici 3 i opisani u nastavku.

Tablica 3. Značajke čelika 42CrMo4 (5)

Modul elastičnosti, E	Poissonov faktor, ν	Rastezna čvrstoća, R_m	Naprezanje tečenja, R_e
210000 MPa	0,3	1100 MPa	900 MPa



Slika 14. Rubni uvjeti (5)

Kontakt između vijka i matice definiran je na način da je vijak postavljen kao kontaktno tijelo, a matica kao ciljano tijelo te se dodiruju u sedam linija. Faktor trenja postavljen je s vrijednošću $\mu = 0,2$. Kontakt matice, kontaktnog tijela, i ciljanog tijela, odnosno u ovom slučaju ploče oslonca, definiran je s faktorom trenja $\mu_0 = 0,15$ u jednoj dodirnoj liniji (5).

Sila u vijku zadana je kao ekvivalentni tlak na donjem dijelu vijka.

Korišteni su slijedeći tipovi konačnih elemenata:

- PLANE183
- SURF153
- CONTA172
- TARGE169

2.3 Optimiranje uspona

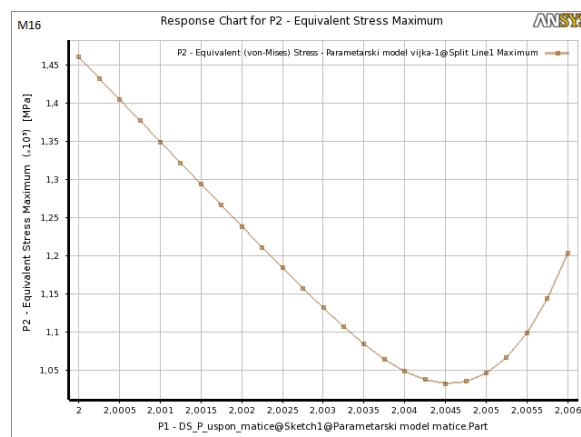
Na postojeću statičku analizu, u Ansys Workbench shemi projekta, dodan je dio za optimiranje odzivnom površinom. Ulazni parametar, uspon matice, postavljen je da se povećava u malim inkrementima dok je kao izlazni parametar označeno maksimalno ekvivalentno (von Mises) naprezanje.

Prikupljanjem rezultata i iznosa naprezanja za svaki inkrement moguće je utvrditi kako povećanje uspona matice utječe na vrijednosti i raspodjelu naprezanja vijčanog spoja.

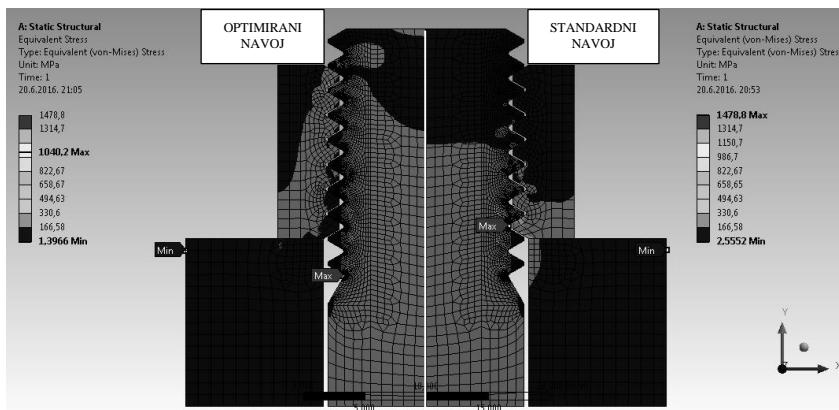
3 Rezultati i zaključci

Ovisnost vrijednosti naprezanja o veličini uspona matice, dobivena na način opisan ranije, prikazana je na slici 4.

Porastom uspona matice maksimalni iznosi ekvivalentnog naprezanja opadaju do određenog minimuma koji se javlja pri točno određenoj veličini uspona te nakon toga ponovno rastu.



Slika 15. Ovisnosti vrijednosti maksimalnog ekvivalentnog (von Mises) naprezanja o usponu
(5)



Slika 16. Usporedni prikaz naprezanja optimiranog i standardnog rješenja (5)

Usporedni prikaz rješenja naprezanja, na primjeru navoja M16, slika 5., dan je za optimirani, prikazan lijevo i standardni slučaj koji je prikazan na desnoj strani slike. Kako bi se efekt optimiranja lakše uočio i tumačio, legende, odnosno raspodjele boja su ujednačene. Primjetna je znatno ujednačenija raspodjela naprezanja optimiranog rješenja duž tijela vijka, a posebice kroz visinu maticе. Iz prikaza se može protumačiti da se naprezanje ujednačenije prenosi preko svih profila navoja koji su u kontaktu, za razliku od standardnog rješenja. Poboljšanjem raspodjele kroz maticu, smanjena je i koncentracija naprezanja zbog kontakta s podlogom na samome rubu prvrta gdje prolazi vijak.

Također, može se zamijetiti pomicanje mesta maksimalnog naprezanja sa korijena navoja vijka kod prvog profila u kontaktu s maticom, na mjesto izlaska navoja iz tijela vijka. Prema tome, dodatna bi se smanjenja mogla postići i drukčijom izvedbom tijela vijka, dok se u ovom slučaju, samo optimiranjem uspona maksimalna naprezanja smanjuju $\approx 30\%$.

Parametarskim modelom su pored ovdje prikazanog navoja M16 analizirani grubi i fini navoji od M8 do M64 te su u tablicama 2 i 3 prikazani rezultati ekvivalentnih naprezanja kao i postotak smanjenja naprezanja postignut optimiranjem uspona.

Tablica 4. Optimirana rješenja za standardne grube navoje (5)

Naziv	Povećanje uspona maticе, $a/\mu\text{m}$	Maksimalno ekvivalentno von Mises naprezanje $\sigma_{\text{maks.ekv}}/\text{MPa}$		Smanjenje naprezanja
		Klasični spoj	Optimirani spoj	
M8 x 1,25	2	1258,9	995,39	22,59%
M10 x 1,5	3	1293,7	983,7	23,96%
M12 x 1,75	3	1309,2	985,53	24,72%
M16 x 2	5	1478,8	1040,2	29,66%
M20 x 2,5	5	1386,5	989,15	28,66%
M24 x 3	7	1369,4	983,33	28,19%
M30 x 3,5	7	1398,7	992,58	29,04%
M36 x 4	8	1419,3	993,04	30,03%
M42 x 4,5	10	1478,6	1027,2	30,53%
M48 x 5	10	1477	1028,9	30,34%
M56 x 5,5	12	1493	1008,4	32,46%
M64 x 6	12	1514,5	1044,2	31,05%

Tablica 5. Optimirana rješenja za standardne fine navoje (5)

Naziv	Povećanje uspona maticice, $a/\mu\text{m}$	Maksimalno ekvivalentno von Mises naprezanje $\sigma_{\text{maks},\text{ekv}}/\text{MPa}$		Smanjenje naprezanja
		Klasični spoj	Optimirani spoj	
M8 x 1	2	1337,7	991,4	25,88%
M10 x 1,25	2	1348,5	999,92	25,85%
M12 x 1,5	3	1343,4	990,66	26,26%
M16 x 1,5	3	1476,3	992,92	32,74%
M20 x 2	4	1444,4	963,17	33,32%
M24 x 2	4	1526	1005,1	34,13%
M30 x 2	4	1637,1	1093,5	33,21%
M36 x 3	6	1540,8	1008,1	34,57%
M42 x 3	6	1627,1	1032,6	36,54%
M48 x 3	6	1687,2	1053,2	37,58%
M56 x 4	8	1631,8	1051,9	35,54%
M64 x 4	8	1834	1142,5	37,7%

4 Zaključak

U radu je optimirana i analizirana raspodjela naprezanja vijčanog spoja s ISO metričkim navojem. Potvrđena je pretpostavka da se raspodjela, time i iznosi naprezanja, mogu poboljšati uvođenjem pozitivne razlike uspona matice i vijka, tj. povećanjem uspona matice.

Dan je grafički prikaz funkcije ovisnosti naprezanja o povećanju uspona na jednom primjeru, iz kojeg je vidljivo kako je pravilnom korekcijom uspona moguće značajno smanjenje iznosa maksimalnog naprezanja od 30%.

Povećanje uspona opravdano je samo do određene vrijednosti, tako da je najveći nedostatak metode upravo to što su potrebni iznosi povećanja jako mali, od $2 \mu\text{m} - 12 \mu\text{m}$. Kako iznosi rastu povećanjem nazivnog promjera, može se zaključiti kako je metoda primjerenija za navoje većeg nazivnog promjera ili navoje za specijalne primjene.

Literatura

- Stanley Black & Decker, New Britain, SAD: *Spiralock Load distribution*, 2016., (prospekti materijal).
URL: <http://www.stanleyengineeredfastening.com/brands/spiralock/technology/load-distribution> (13.4.2016.)
- Fukuoka, T., *Evaluation of the Method for Lowering Stress Concentration at the Thread Root of Bolted Joints With Modifications of Nut Shape*, Journal of pressure vessel technology, Vol. 119(1), veljača 1997., 1-9 str.
- SolidWorks, 2012, Dassault Systèmes, 2011.
- ANSYS, v16.2, Ansys Inc., 2015.
- Šimunović, Vjekoslav: *Ujednačavanje raspodjele naprezanja vijčanog spoja optimiranjem geometrije uspona* (diplomski rad). Slavonski Brod; Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, 2016., 61 str.
- Kraut, Bojan: *Strojarski priručnik*. Zagreb; Tehnička knjiga Zagreb, 1988., 685 str.

Numeričko modeliranje delaminacije ovisne o brzini kod grednih slojevitih nosača

Škec, L.¹, Alfano, G.² i Jelenić, G.³

Sažetak

Slojeviti kompozitni nosači imaju široku primjenu u raznim granama industrije i inženjertsva, ali se također i često susreću u prirodi. Karakteristični način sloma takvih nosača najčešće je delaminacija ili raslojavanje. Iako se često delaminacija može proučavati koristeći relativno jednostavne principe linearno-elastične mehanike loma u spredi s Euler-Bernoullijevom ili Timošenkovom grednom teorijom, u ovom radu predstavljen je numerički model koji koristi uslojene geometrijski egzaktne gredne konačne elemente bazirane na Reissnerovoj grednoj teoriji povezane kontaktnim elementima na bazi modela kohezivne zone. Dosadašnje analize i publikacije potvrđile su da je takav numerički model, korišten s odgovarajućim iterativnim procedurama za rješavanje, vrlo robustan te da u usporedbi s modelima koji umjesto grednih, koriste ravninske konačne elemente, podjednako točan, ali računski znatno efikasniji (broj stupnjeva slobode je reducirana).

U ovom radu biti će predstavljeni novi rezultati, nastali u sklopu znanstveno-istraživačkog projekta H2020-MSCA-IF 2015 „MOLAY-STRUDEL“, koji spaja višeslojni gredni model za delaminaciju u mješovitom modu razvijen na Građevinskom fakultetu Sveučilišta u Rijeci od strane prvog i trećeg autora, s novim originalnim modelima kohezivne zone za delaminaciju ovisnu o brzini nanošenja opterećenja, razvijenih od strane drugog autora, koji je ujedno i domaćin spomenutog projekta na sveučilištu Brunel u Londonu.

Ključne riječi: delaminacija, model kohezivne zone, kompozitne grede, metoda konačnih elemenata, nelinearna analiza

¹ **Doc. dr. sc. Leo Škec, dipl. ing. grad.**, Brunel University London, Department of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering, Kingston Lane, UB8 3PH, Uxbridge, UK, e-mail: leo.skec@brunel.ac.uk

² **Dr. Giulio Alfano, Reader in Computational Mechanics and PGR Director**, Brunel University London, Department of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering, Kingston Lane, UB8 3PH, Uxbridge, UK, e-mail: giulio.alfano@brunel.ac.uk

³ **Red. Prof. dr. sc. Gordan Jelenić, dipl. ing. grad.**, Građevinski fakultet Sveučilišta u Rijeci, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

1 Uvod

Upotreba slojevitih kompozitnih nosača danas je izrazito rasprostranjena u svim granama inženjerstva. Takvi nosači po pitanju dimenzija, nosivosti te ostalih mehaničkih, fizikalnih i kemijskih osobina mogu postići izvanredne performanse. Koncept slojevitih nosača raširen je u prirodi, od zemljine kore, preko biljaka, pa sve do ljudskog tijela. U ovom radu naglasak je na primjeni slojevitih nosača u inženjerstvu.

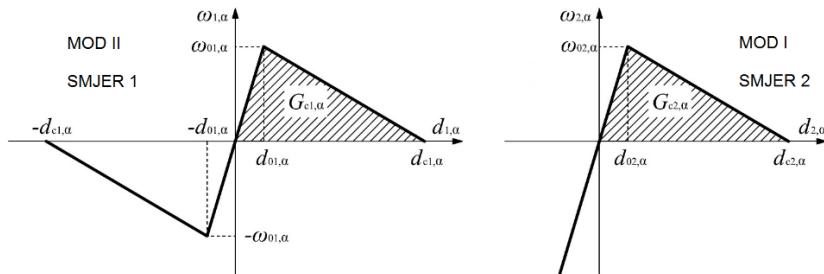
Iako se u inženjerskim problemima često prepostavlja da je veza između slojeva kompozitnih nosača nepopustljiva (1) ili rijeđe djelomično popustljiva (2), najčešći način gubitka nosivosti slojevitih nosača je upravo gubitak veze među slojevima kojeg nazivamo raslojavanje ili delaminacija. Uvriježeno je delaminaciju podijeliti u tri kategorije: delaminacija u modu I (otvaranje), modu II (klizanje) i modu III (kidanje). Kombinacijom osnovnih modova može se dobiti delaminacija u mješovitom modu. Za primjenu slojevitih nosača u inženjerstvu i njihovo projektiranje iznimno je važno poznavati svojstva veznog materijala koji se koristi kako se ne bi ugrozila nosivost cjelokupne konstrukcije.

Danas su diljem svijeta u primjeni standardi koji definiraju eksperimente za određivanje materijalnih parametara ljepila (adheziva) koja se koriste u slojevitim kompozitnim nosačima. Takvi standardni uglavnom su bazirani na linearno-elastičnoj mehanici loma i jednostavnim grednim teorijama (Euler-Bernoullijeva ili Timošenkova gredna teorija). S druge strane u znanstvenoj zajednici razvijen je niz naprednih numeričkih modela kojima se simulira delaminacija, među kojima najširu primjernu imaju modeli kohezivne zone. Za razliku od linearno-elastične teorije loma, gdje se prepostavlja da su naprezanja na kontaktu među slojevima koncentrirana na vrhu pukotine, modeli kohezivne zone prepostavljaju da su naprezanja na kontaktu rasprostranjena na određenoj zoni iza vrha pukotine. Numeričko modeliranje delaminacije s modelom kohezivne zone najčešće se provodi metodom konačnih elemenata, gdje se slojevi modeliraju ravninskim ili prostornim elementima, a za vezu među slojevima se koriste posebni kontaktni elementi koji uključuju model kohezivne zone.

U ovom radu predstavljen je ravninski gredni model za višeslojne nosače s kontaktom koji uključuje model kohezivne zone za delaminaciju u mješovitom modu (kombinacija modova I i II). Za ravninske probleme (koji su vrlo česti, pogotovo kod eksperimenta za ispitivanje ljepila gdje su uzorci najjednostavnije geometrije) može se lako ustanoviti da upotreba grednih, umjesto ravninskih konačnih elemenata dovodi do velike uštede po pitanju stupnjeva slobode, a da pritom rezultati ne gube na točnosti (3). Uz to, prvi i treći autor ovog rada pokazali su da se grednim modelom za slojevite nosače mogu uspješno rješavati i geometrijski nelinearni problemi (uključujući i izvijanje) gdje su pomaci i rotacije konstrukcije veliki (4). Drugi autor ovog rada, koji se već gotovo 20 godina bavi delaminacijom i modelima kohezivne zone (5), u posljednjih je nekoliko godina razvio nove modele kohezivne zone kod kojih je nosivost ovisna o brzini nanošenja opterećenja ili pomaka (6-8). Projekt „MOLAY-STRUDEL“, na kojem trenutno surađuju prvi i drugi autor, objedinjuje efikasni i robusni geometrijski nelinearni gredni model za ravninske slojevite grede s novim modelima kohezivne zone koji uzimaju u obzir brzinu nanošenja opterećenja ili pomaka i koji su pokazali izvrsno ponašanje u usporedbi s eksperimentalnim rezultatima. Iako u ovoj fazi projekta rezultati novog modela još nisu dostupni, ovdje će se ukratko predstaviti dosadašnji višeslojni gredni model, modeli kohezivne zone ovisni o brzini nanošenja opterećenja ili pomaka te najznačajniji rezultati svakoga od njih.

2 Višeslojni geometrijski nelinearni gredni model

Prvi i treći autor razvili su numerički model baziran na ravninskim geometrijski linearnim Timošenkovim (3) i nelinearnim egzaktnim Reissnerovim (4) grednim konačnim elementima u kombinaciji s kontaktanim elementima koji uključuju model kohezivne zone koji omogućava delaminaciju u mješovitom modu. Broj slojeva je neograničen, a za grede su korišteni dvočvorni i tročvorni konačni elementi. Kinematičke jednadžbe slojeva mogu biti linearne ili nelinearne, ovisno o tome jesu li uzeti u obzir veliki pomaci i rotacije. Konstitutivne jednadžbe slojeva su linearno-elastične, a ravnotežne su izvedene iz principa virtualnog rada. Kod kontaktnih konačnih elemenata nelinearnost je sadržana u konstitutivnim jednadžbama koje uključuju oštećenje. Budući da je oštećenje nepovratno i da se tijekom proračuna „pamti“, analiza je kvazi-statična (kao parametar se koristi „pseudo vrijeme“). Veza između kontaktih naprezanja i relativnih pomaka na kontaktu je bi-linearna, što znači da su pretpostavljene dvije zone linearog ponašanja (vidjeti sliku 1). U prvoj zoni imamo linearno-elastično ponašanje, a u drugoj linearno oštećenje. Prijelaz iz prve u drugu zonu događa se kada su dosegnuta maksimalna naprezanja koje materijal na kontaktu može podnjeti. Nakon toga, uz porast relativnog pomaka, dolazi do pada kontaktih naprezanja sve do nule, odnosno mjesta kada je nastupio potpuni gubitak nosivosti kontaktog sloja. Povšina ispod krivulje označena na slici 1 predstavlja kritičnu energiju loma (G_c), koja je u primjeni poznata kao najvažniji parametar ljeplila. Nosivost u mješovitom modu određuje se kombinacijom nosivosti u svakom od osnovnih modova na način predložen u (5).

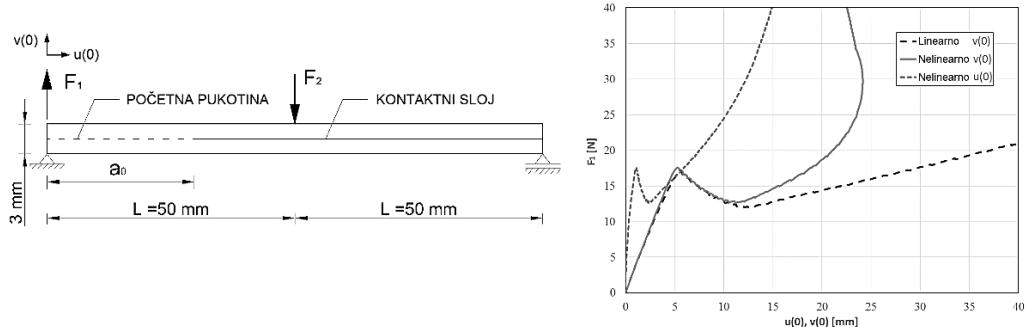


Slika 1. Bi-linearni konstitutivni zakon kontaktog sloja u modu II i modu I

Budući da je problem delaminacije nelinearni problem, u ovom se radu za diskretizaciju koristila metoda konačnih elemenata, a za rješavanje Newton-Raphsonova iterativna procedura. Uobičajena pojava kod takvih modela su i oscilacije oko točnog rješenja u dijagramu sila-pomak, koje ovise o gustoći mreže i parametrima koji definiraju konstitutivni zakon kontaktog sloja (5). Stoga su autori u (4) razvili novu modificiranu metodu lučne duljine za odabir točnog rješenja u nelinearnoj proceduri rješavanja čime je postignuta izvrsna konvergencija i u najzahtjevnijim testovima.

Ovaj numerički model pokazao se iznimno točnim, robusnim i učinkovitim u čitavom nizu testova za ravninske probleme koji uključuju čiste modove (I i II) i mješoviti mod. U ovom radu prikazan je rezultat koji je dobiven usporedbom geometrijski linearnih i nelinearnih grednih konačnih elemenata na primjeru mješovitog raslojavanja. Geometrijske veličine prikazane su na slici 2, a materijalni parametri su $E = 135\ 300 \text{ N/mm}^2$ i $G = 5200 \text{ N/mm}^2$ za slojeve i $G_{ci} = 4 \text{ N/mm}$, $\omega_{0i} = 57 \text{ N/mm}^2$ i $d_{0i} = 10^{-7} \text{ mm}$ ($i = 1, 2$) za kontaktni sloj. Sila F_1 uzrokuje otvaranje

kontaktnog sloja, sila F_2 savijanje grede i klizanje jednog sloja u odnosu na drugi, a u kombinaciji daju delaminaciju u mješovitom modu.

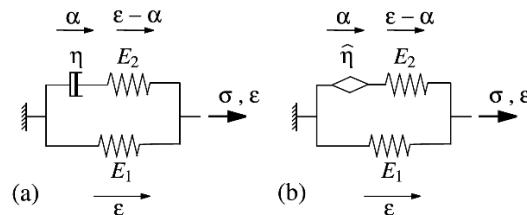


Slika 2. Usporedba geometrijski linearnih i nelinearnih grednih elemenata na primjeru mješovite delaminacije

Iz slike 2 može se vidjeti kako su pomaci lijevog kraja gornjeg sloja prilično veliki u odnosu na njegove dimenzije, što ukazuje na to da bi upotreba geometrijski linearnih grednih elemenata mogla dovesti do progrešnih rezultata. Međutim, u ovom slučaju razlika u rezultatima dobivenim koristeći geometrijski linearne i nelinearne elemente je drastična. Savijanje slojeva kod nelinearne teorije uključuje i horizontalni pomak slojeva čime se bitno utječe na ponašanje kontaktnog sloja. U radu (4) pokazano je da u problemima s velikim pomacima i rotacijama korištenje gredne teorije drugog reda ne daje točne rezultate u usporedbi s egzaktnim Reissnerovim grednim elementima.

3 Kohezivni model ovisan o brzini nanošenja opterećenja ili pomaka

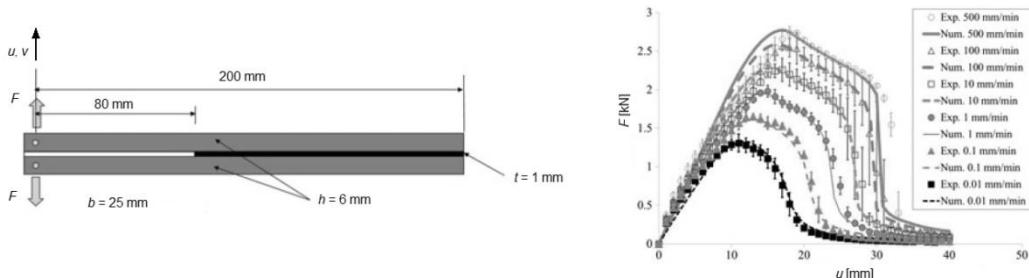
Drugi autor je u surarnji s Marcom Mustom u posljednjih nekoliko godina razvio čitavu familiju modela kohezivne zone ovisnih o brzini nanošenja opterećenja ili pomaka (6-8). Ti su modeli temeljeni na principima termodinamike i za sada razvijeni samo za delaminaciju u modu I. Reološki prikaz modela dan je da slici 3. Model se sastoji od elastične i neelastične grane, gdje α predstavlja neelastični pomak u viskoznom (slika 3.a) ili visko-elastičnom (slika 3.b) elementu.



Slika 3. Reološki prikaz modela s (a) viskoznim ili (b) visko-elastičnim elementom

Energija koja se oslobađa prilikom otvaranja pukotine rezultat je (i) kidanja elastičnih veza (dekohezije), čime upravlja parametar oštećenja D , i (ii) viskoznog toka, koji je opisan viskoznim ili visko-elastičnim dijelom α relativnog pomaka na kontaktnom sloju (vidjeti sliku 3). Pretpostavlja se da je dekohezija neovisna o brzini nanošenja opterećenja ili pomaka, a ono što u model uvodi ovisnost o brzini nanošenja opterećenja ili pomaka jesu upravo viskozni disipativni mehanizmi. Također se pretpostavlja da je energija pohranjena u elastičnoj grani reološkog modela zaslužna za razvoj oštećenja. To za posljedicu ima monotono rastuću energiju loma G_c obzirom na zadatu brzinu relativnog pomaka v što daje sigmoidalni oblik $G_c - v$ dijagrama. Međutim, u radu (8) je ta pretpostavka modificirana tako što se zaslužnim za razvoj oštećenja smatra ili energija pohranjena u oprugama elastične i neelastične grane ili energija pohranjena u svim elementima reološkog modela. Na taj način se, umjesto sigmoidalnog oblika, dobiva zvonasti oblik $G_c - v$ dijagrama.

U ovom radu biti će prikazani samo rezultati visko-elastičnog modela koji koristi „Scott Blair element“ i kod kojeg je naprezanje proporcionalno frakcionalnoj derivaciji reda μ relativnog pomaka na kontaktu ($\mu \in (0, 1)$). Pri različitim brzinama v (0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000 mm/min) izvedeni su eksperimenti za otvaranje u modu I te su rezultati uspoređeni s numeričkim modelom (vidjeti sliku 4). Slojevi su bili izrađeni od čelika, a kontaktni sloj od gume (detaljne informacije o svim materijalnim parametrima korištenim u modelu mogu se pronaći u (7)). Može se primjetiti kako numerički model izvrsno predviđa stvarno ponašanje ljepila u rasponu brzina nanošenja pomaka od gotovo 5 logaritamskih dekada .



Slika 4. Usporedba modela s eksperimentom za delaminaciju u modu I pri različitim brzinama nanošenja pomaka

3 Zaključci i smjernice za daljni rad

U radu su predstavljeni rezultati (i) ravninskog višeslojnog grednog modela za raslojavanje u mješovitom modu i (ii) novih modela kohezivne zone ovisnih o brzini nanošenja opterećenja ili pomaka. Prvi model značajno pojeftinjuje proračun u odnosu na modele koji koriste ravninske konačne elemente, a da se pritom ne gubi na točnosti. Treba dodati kako je model vrlo robustan i primjenjiv kod velikih pomaka i rotacija. Novi modeli kohezivne zone nude brojne mogućnosti daljnje razvoja i pokazuju obećavajuće rezultate. Za ljepilo na bazi gume dobiveno izvrsno poklapanje rezultata s eksperimentom preko gotovo 5 logaritamskih dekada brzine nanošenja pomaka. U sklopu projekta „MOLAY-STRUDEL“ novi modeli kohezivne zone ovisni o brzini nanošenja opterećenja ili pomaka uklopiti će se višeslojni gredni model, ali će se analiza proširiti

i na mod II te mješoviti mod. Cilj je dobiti robustan i efikasan numerički alat koji će na bazi jednostavnih eksperimenata biti u stanju pronaći odgovarajuće parametre kohezivnog modela pri raznim brzinama nanošenja pomaka i to u modovima I i II te mješovitom modu.

Zahvale

Rezultati ovog rada nastali su u sklopu istraživačkog projekta IP-11-2013-1631 (Configuration-dependent approximation in non-linear finite-element analysis of structures) financiranim od strane Hrvatske Zaklade za Znanost, zatim istraživačke potpore Sveučilišta u Rijeci br. 13.05.1.3.06 (Testing of slender spatial beam structures with emphasis on model validation) i konačno projekta H2020-MSCA-IF br. 701032 (Modelling mixed-mode rate-dependent delamination in layered structures using geometrically nonlinear beam finite elements) financiranim od strane Europske komisije.

Literatura

1. Škec L. i Jelenić G. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection. *Acta Mechanica*. 2014;225:523-541.
2. Škec L., Schanabl S., Planinc I. i Jelenić G. Analytical modelling of multilayer beams with compliant interfaces. *Structural Engineering and Mechanics*. 2012;44(4):465-485.
3. Škec L., Jelenić G. i Lustig N. Mixed-mode delamination in 2D layered beam finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2015;104(8):767-788.
4. Škec L. i Jelenić G. Geometrically non-linear multi-layer beam with interconnection allowing for mixed-mode delamination. *Engineering Fracture Mechanics*. 2017;169:1-17.
5. Alfano G. i Crisfield M. Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2001;50:1701-1736.
6. Musto M. i Alfano G. A novel rate-dependent cohesive zone model combining damage and visco-elasticity. *Computers and Structures*. 2013;18:126-133.
7. Musto M. i Alfano G. A fractional rate-dependent cohesive zone model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2015;103:313-341.
8. Alfano G. i Musto M. Thermodynamic derivation and damage evolution for a fractional cohesive zone model. *Journal of Engineering Mechanics*. 2017;143(7):1-1.

Analiza naprezanja u jednoslojnom grafenu primjenom molekularne mehanike

Trapić, I.¹, Pezer, R.² i Sorić, J.³

Sažetak

U svrhu usporedbe kontinuumskog i atomističkog pristupa modeliranju mehaničkih svojstava materijala određena je raspodjela naprezanja u realističnom 2D modelu metodama molekularne mehanike. Analitički rješiv problem koncentracije naprezanja u vlačno opterećenoj beskonačnoj ploči od linearнog materijala s kružnom rupom opterećenoj na vlak analiziran je primjenom molekularne mehanike simulacijom istezanja sloja grafena s kružnim otvorom. Međudjelovanje atoma modelirano je Tersoff potencijalom ugođenog za ugljik. Naprezanje po atomu je određeno Irving-Kirkwoodovom metodom korištenjem virijalnog izraza za naprezanje dok je volumen po atomu određen Voronoi tesalacijom. Numerički izračun navedenim metodama proveden je unutar programskog paketa *LAMMPS*. Posebno je analizirano stanje naprezanja u blizini ruba kružnog otvora. Jedan od razmatranih problema je odabir volumena usrednjavanja na atomskoj razini. Posebna pažnja posvećena je odabiru dimenzija i položaja volumena unutar kojeg se provode usrednjjenja naprezanja po atomu. U rezultatima je određeno maksimalno naprezanje u neposrednoj blizini kružnog otvora koje je sukladno predviđanjima mehanike kontinuma.

Ključne riječi: *Grafen, Koncentracija naprezanja, Molekularna mehanika, LAMMPS.*

¹ Ivan Trapić, mag. ing. stroj., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Katedra za mehaniku i čvrstoću, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: ivan.trapic@fsb.hr,

Prof. dr. sc. Jurica Sorić, dipl. ing. stroj., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Katedra za mehaniku i čvrstoću, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: jurica.soric@fsb.hr,

² Izv. Prof. dr. sc. Robert Pezer, dipl. ing.fiz., Sveučilište u Zagrebu, Metalurški fakultet, Zavod za fizičku metalurgiju, Aleja narodnih heroja 3, 44103 Sisak, e-mail: rpezer@simet.hr

1 Uvod

U mehanici kontinuuma naprezanje je veličina stanja koje je posljedica opterećenja i definirana je u svim točkama prostora razmatranog modela. Skokovite promjene u geometriji uzrokuju lokalni porast u iznosu naprezanja. Jedan od takvih slučaja, koji je uz to analitički riješen, je koncentracija naprezanja na rubu kružnog otvora vlačno opterećene beskonačne ploče poznat kao Kirschov problem [1]. Prema analitičkom rješenju neposredno uz otvor za linearno elastičan materijal predviđa se naprezanje tri puta veće od naprezanja daleko od kružnog otvora.

U analizi materijala molekularnom mehanikom, materijal je modeliran međudjelovanjem između atoma od kojih je sačinjen. Takvim pristupom se dobiva struktura koja se sastoji od materijalnih točaka koje predstavljaju položaje atoma. Budući da je struktura atomistička, tenzor naprezanja se definira na odgovarajući način korištenjem virijalnog razvoja [2].

Kako bi se mogli usporediti rezultati raspodjele naprezanja u kontinuiranom i diskretnom modelu potrebno je izvršiti prostorno usrednjavanje atomističkog naprezanja. Takav pristup se zasniva na činjenici da je u mehanici kontinuuma naprezanje definirano na površinama diferencijalnog elementa koji unatoč infitezimalnim dimenzijama sadržava više atoma.

2 Model i metode

Numerički eksperimenti deformiranja jednoslojnog grafena provedeni su pomoću programskog paketa s otvorenim pristupom naziva LAMMPS (eng. Large-scale Atomic/Molecular Massively Parallel Simulator). LAMMPS sadržava brojne algoritme za formiranje i analizu atomskega modela što omogućava brzo i efikasno integriranje Newtnovih jednadžbi gibanja te analizu rezultata.

2.1 Tersoffov potencijal

U atomističkom modelu međudjelovanje je opisano Tersoffovim potencijalom prilagođenim za opis energetska svojstva te opis mehaničkih i strukturnih značajki ugljika [3]. Potencijal formalno sadrži dvočestične i tročestične članove koji određuju svojstva i dinamičko ponašanje atoma prilikom deformiranja. Tročestično međudjelovanje je nužno kako bi se kvantitativno modelirale strukturalne značajke faza ugljika kao što je kut od 120° između vrhova šesterokuta u grafenu. Za odabrani potencijal ukupna potencijalna energija E_p sustava sačinjenog od N atoma može se prikazati kao suma interakcija prikazanih jednadžbom (1). V_{ij} je potencijalna energija jednog para atoma čiji je raspis prikazan u jednadžbi (2) za $r_{ij} = r_i - r_j$. Tročestična interakcija ugrađena je u potencijal funkcijom ζ_{ij} koja sadrži kut θ_{ijk} koji zatvaraju radijvektori r_{ij} i r_{ik} što je vidljivo iz jednadžbe (3). Detaljni raspis potencijala s odgovarajućim parametrima dostupan je u [3] i [4].

$$E_p = 0,5 \cdot \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N V_{ij} \quad (1)$$

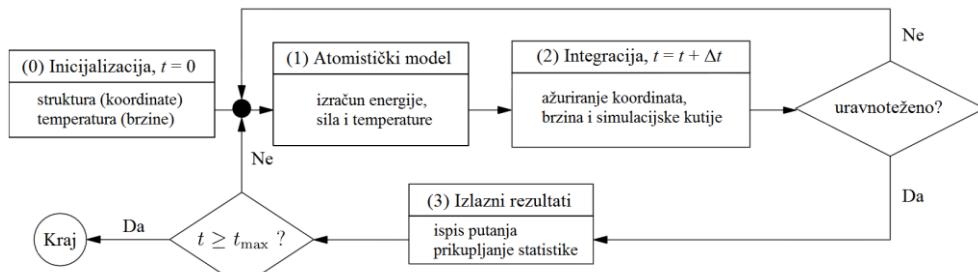
$$V_{ij}(r_{ij}) = f_c(r_{ij}) \cdot [f_R(r_{ij}) + b_{ij}f_R(r_{ij})] \quad (2)$$

$$b_{ij} = \left(1 + \beta^n \zeta_{ij}^n\right)^{-1/2n}, \quad \zeta_{ij} = \sum_{k=1}^N f_c(r_{ik}) \cdot g(\theta_{ijk}) \cdot \exp\left[\lambda_3^m \cdot (r_{ij} - r_{ik})^m\right]. \quad (3)$$

2.2 Simulacijski model

Budući da je grafen ravninska struktura, simulacijski prostor sveden je na dvije dimenzije onemogućavanjem pomaka atoma okomito na ravninu ploče. Početna struktura grafena je zadana bez kružnog otvora i relaksirana kako bi se uklonila sva naprezanja koja bi mogla proizaći iz geometrijski početno nametnutog prostornog rasporeda atoma. U središtu relaksirane strukture uveden je kružni otvor. Kako bi se postigla analogija između kontinumskog i atomističkog modela, omjer između veličine otvora i dimenzija grafena je manji od 0,1. Relaksacija je ponovno provedena i na modelu s otvorom. U obje relaksacije zadani su izobarno-izotermni (NpT) ansambl u trajanju od 10 ps pri čemu je tlak na svim bridovima 0 Pa. Nakon relaksacije uvedena je vlačna sila, u smjeru osi y , na atome na jednom brdu dok je na nasuprotnom brdu spriječen pomak atoma u smjeru zadane sile. Na preostala dva brida zadani su periodični rubni uvjeti i NpT ansamblom osiguran tlak od 0 Pa. Analize su provedene za nekoliko različitih temperatura kako bi se utvrdio utjecaj termalne aktivacije odnosno utjecaja dinamičkog člana virijalnog naprezanja (prvi član sume u jednadžbi (4)). Tablica 6. sadrži parametre modela.

Vremenski razvoj sustava proveden je primjenom Verletovog algoritma [5]. U modelu, sile na atome su određene odabranim potencijalom i zadanim vanjskim silama. Verletov algoritam primjenjen je na model prilikom relaksacije i opterećenja silom. Slika 17. prikazuje dijagram toka vremenskog razvoja prilikom analize sustava primjenom molekularne mehanike.



Slika 17. Dijagram toka vremenskog razvoja sustava [6]

2.3 Volumen usrednjavanja

Kada se provodi usredjivanje unutar premalog volumena, dobivene vrijednosti naprezanja sadrže prevelike prostorne varijacije koje nisu sukladne „zaglađenim“ vrijednostima kontinuumskog naprezanja. Ukoliko je pak volumen usrednjavanja prevelik, atomističko naprezanje je suviše „razmazano“ i nije u mogućnosti obuhvatiti lokalne gradiente kontinuumskog naprezanja. Između ta dva ekstrema stoga postoji raspon volumena usrednjavanja koji će moći ispravno prikazati naprezanje na kontinuumskoj razini interpretirajući stanje naprezanja na atomističkoj razini [7].

Tablica 6. Parametri modela

veličina modela prije početne relaksacije	60.76×61 nm
promjer otvora	6 nm
temperatura sustava	10, 100, 200, 300 K
broj atoma	139 160 (model bez otvora) 138 139 (model s otvorom)
vrijeme relaksacije	10 ps
brzina prirasta sile	$6 \cdot 10^{-4}$ nN/ps
dimenzije površina usrednjavanja	1×2 nm

Budući da je grafen modeliran u 2D prostoru, volumen usrednjavanja prelazi u površinu. Za izgled površine usrednjjenja odabran je pravokutnik omjera stranica 1:2, pri čemu je dulja stranica paralelna s osi y. U svrhu točnijeg opisa naprezanja, susjedne površine usrednjavanja se međusobno preklapaju 50%. Na taj je način naprezanje jednog atoma uzeto u obzir unutar dvije površine usrednjavanja. Iznimka su atomi koji se nalaze na rubovima modela, ali budući da na tom mjestu nije prisutan veliki gradijent naprezanja, neće doći do gubitka točnosti rezultata.

2 Naprezanje u molekularnoj mehanici

Irwing i Kirkwood postavili su osnove definicije naprezanja u području molekularne mehanike [8]. U njihovoј formulaciji naprezanje je definirano diskretno primjenom Dirac delta funkcije. Izračun virijalnog naprezanja njihovom formulacijom unutar volumena $\Omega(r)$, gdje je r koordinata središta volumena, prikazan je u jednadžbi (4). N označava broj atoma unutar volumena $\Omega(x)$, m_i je masa atoma, v_i je relativna brzina atoma u odnosu na srednju vrijednost brzine svih N atoma. f_{ij} i f_{ijk} označuju odgovarajuće dvočestičene i tročestične sile između atoma. Teoretski suma sadrži utjecaje N -čestičnih interakcija, ali budući da potencijal sadrži samo dvo- i tročestične interakcije, pored dinamičkog člana, nisu potrebni preostali članovi. Za zadanu konfiguraciju, sile na atome proizlaze izravno iz potencijala te stoga preostaje još samo procijeniti iznos volumena po atomu što je moguće učinkovito izvršiti Voroni tesalacijom [9]

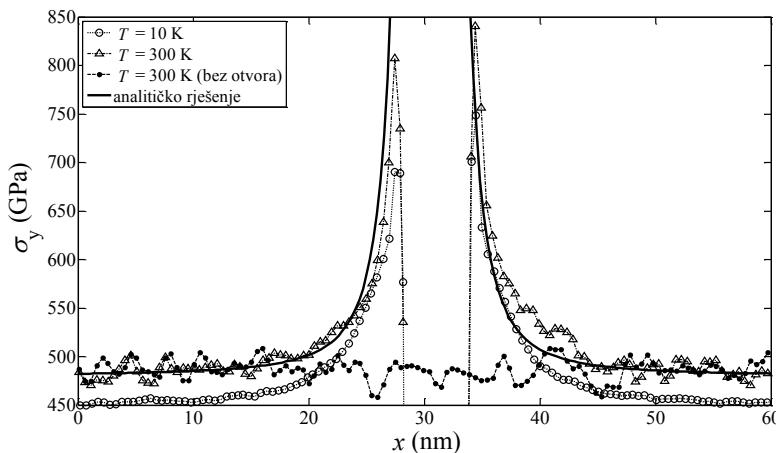
$$\sigma_v(r) = \frac{-1}{\Omega(r)} \left(\sum_{i=1}^N m_i v_i \otimes v_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N f_{ij} \otimes r_{ij} + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \sum_{k=1, k \neq j}^N f_{ijk} \otimes (r_{ij} + r_{ik}) + \dots \right). \quad (4)$$

4 Rezultati

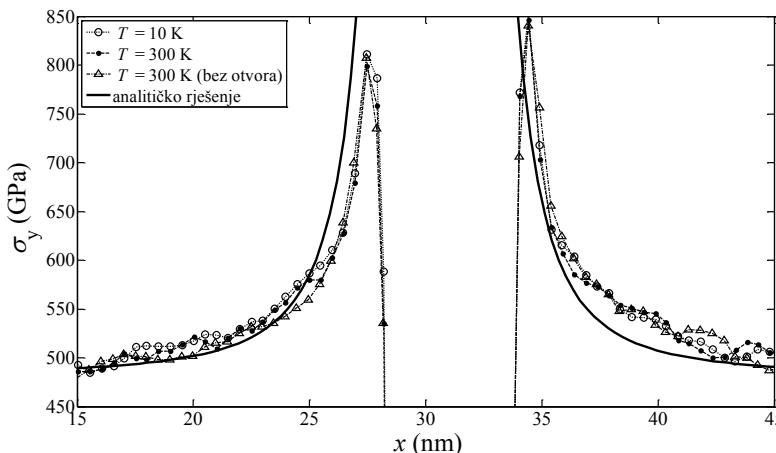
U rezultatima je analizirana raspodjela naprezanja σ_y odnosno normalnih naprezanja u smjeru zadane sile na atome. U dijagramima koordinata x označava položaj središta volumena usrednjavanja. Za usporedbu s kontinuumskim rješenjima središta volumena su postavljena na simetrali otvora paralelnom s osi x . Analitičke vrijednosti naprezanja konstruirane su prema Kirschovom rješenju za naprezanje duž osi simetrije. Svi rezultati su razmatrani u istom vremenskom trenutku, 100 ps nakon početka primjenjivanja sile.

Slika 18. prikazuje raspodjelu naprezanja oko kružnog otvora. Iznos nominalnog naprezanja $\sigma_\infty = 480$ GPa, koje bi opterećivalo beskonačnu ploču, određen je pomoću modela bez

otvora. Maksimalan iznos naprezanja prema mehanici kontinuuma za linearni materijal je tri puta veće od nominalnog odnosno 1440 GPa (vrh krivulje nije prikazan). Maksimalno naprezanje koje se ostvaruje za grafen pri sobnoj temperaturi je 825 GPa što je 1,75 puta veće od σ_∞ . Međutim, iz dijagrama je vidljivo da naprezanje na atomskoj razini prati jednaki trend raspodjele kao i naprezanje kontinuumskog modela. Nagli pad atomističkog naprezanja nakon što je postignut maksimum je posljedica realnih značajki sustava jer atomi uz rub otvora imaju drukčiji okoliš prema atomima udaljenim od granica te je stoga manje i naprezanje kojem su izloženi. Za usporedbu rezultata, dodana je krivulja raspodjele naprezanja za grafen pri temperaturi bliskoj apsolutnoj nuli odnosno 10 K, kada je utjecaj termičke aktivacije atoma znatno manji. U tom slučaju za istu nametnutu silu ostvaruje se manje σ_∞ naprezanje u modelu (450 GPa naspram 480 GPa), a omjer između maksimalnog naprezanja na rubu otvora i σ_∞ se smanjio na 1,53.



Slika 18. Usporedba raspodjela naprezanja σ_y uz kružni otvor za grafen s otvorom i bez njega



Slika 19. Detalj raspodjela naprezanja σ_y uz kružni otvor pri različitim temperaturama

Slika 19. prikazuje raspodjelu naprezanja za različite temperature neposredno uz kružni otvor grafena gdje je gradijent naprezanja najizraženiji. Iz dijagrama je vidljivo da raspodjela naprezanja ostaje nepromijenjena za temperaturni raspon od 100 do 300 K.

5 Zaključak

U okviru ovoga rada analizirano je stanje naprezanja sloja grafena u ravnini metodama molekularne mehanike korištenjem realističnog potencijala međudjelovanja ugođena na strukturne značajke faza ugljika [3]. Provedeni su numerički eksperimenti jednoosnog deformiranja grafena za niz temperaturu: od bliskih apsolutnoj nuli do sobne temperature. U svrhu povezivanja stanja naprezanja u atomističkom i kontinuumskom modelu, proučena je raspodjela naprezanja u vlačno opterećenoj ploči s kružnim otvorom. Naprezanja atomističkog modela uspoređena su s analitičkim rješenjem modela mehanike kontinuma. U rezultatima je uočeno kvalitativno podudaranje naprezanja između dvaju modela, ali odnos između vršnog i nominalnog naprezanja u atomističkom modelu je manji od vrijednosti koja predviđa mehanika kontinuma koja nije u stanju ispravno opisati područje neposredno blizu otvora.

Financijska potpora

Ovaj rad je financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom „Multiscale Numerical Modeling of Material Deformation Responses from Macro- to Nanolevel“ (2516).

Literatura

1. Kirsch, E. G.: *Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre*, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1898, 42:797-807,
2. Thompson, A. P.; Plimpton S. J.; Mattson, W.: *General formulation of pressure and stress tensor for arbitrary many-body interaction potentials under periodic boundary conditions*, The journal of chemical physics, 2009, 131(15):154107,
3. Tersoff, J: *Empirical Interatomic Potential for Carbon, with Applications to Amorphous Carbon*, Physical review letters, 1988, 61(25):2879-2882,
4. Tersoff, J.: *Empirical interatomic potential for silicon with improved elastic properties*, Physical review B., 1988, 38(14):9902-9905,
5. Verlet, L.: *Computer "Experiments" on Classical Fluids. I. Thermodynamical Properties of Lennard-Jones Molecules*, Physical review, 1967, 159(1):98-103,
6. Tadmor, E. B., Miller, R. E.: *Modeling Materials*, 2011, Cambridge University Press,
7. Ulz, M. H.; Mandadapu, K. K.; Papadopoulos, P.: *On the estimation of spatial averaging volume for determining stress using atomistic methods*, Modelling Simul. Mater. Sci. Eng., 2013, 21(1):015010,
8. Irving, J. H.; Kirkwood, J. G.: *The Statistical Mechanical Theory of Transport Processes. IV. The Equations of Hydrodynamics*, The journal of chemical physics, 1950, 18(6):817-829,
9. M. G. Voronoi: *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques*, J. reine angew. Math., 1908, 133:(97-178).

Ljuljanje bloka uslijed pomicanja podloge

Tuhtan, M.¹, Krulić, M.² i Jelenić, G.³

Sažetak

Uslijed pomicanja horizontalne podloge kruti blok oblika kvadra može se kretati na tri različita načina: (a) translatirati zajedno s podlogom, (b) zaljuljati i prevrnuti, (c) stabilno ljuljati bez prevrtanja.

Eksperimenti su provedeni za slučaj kada se blok nalazi na krutoj podlozi, kao i za slučajeve kada se nalazi na slobodno oslonjenom nosaču različitih krutosti (gdje se, osim rotiranja, pojavljuje i vertikalno pomicanje bloka), kako bi se ispitalo kako elastičnost oslanjanja utječe na ponašanje bloka. Rezultati eksperimenata uspoređeni su s rezultatima numeričkih modela, u kojima je blok modeliran kao kruto tijelo i gdje nema proklizavanja bloka.

Testirana je stabilnost kretanja bloka za različite vrijednosti amplituda i frekvencija uslijed sinusne pobude podloge. Utvrđena je jasna granica između prvog i drugog načina kretanja bloka, odnosno blok se ili nije ljuljao ili se prevrnuo, bez pojave trećeg slučaja u kojem bi se blok nastavio ljuljati bez prevrtanja. Primijećeno je da se navedena granica pojavljuje pri značajno manjim vrijednostima amplituda i frekvencija nego u numeričkom modelu.

Utvrđeno je da do neočekivanih rezultata kod eksperimenata dolazi zbog početnog trzaja podloge koji se javlja uslijed inercije sustava. Uklanjanjem početnog trzaja drukčijim zadavanjem željene sinusne pobude, eksperimentom su dobiveni rezultati koji bolje odgovaraju numeričkim rezultatima te je uočena pojava treće grupe ponašanja bloka – kontinuiranog ljuljanja bloka.

Ključne riječi: ljuljanje krutog bloka, elastično oslanjanje, sinusna pobuda, ne-glatka kontaktna dinamika

¹ Miran Tuhtan, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: miran.tuhtan@uniri.hr

² Morana Krulić, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: morana001@gmail.com

³ Prof. Gordan Jelenić, dipl. ing. grad., Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet u Rijeci, Zavod za tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

1 Uvod

Problem ljuljanja bloka na krutoj podlozi dobro je poznat u literaturi, primjerice Housner (1963) analizira ponašanje vitkih konstrukcija uslijed potresnog opterećenja. U ovom radu ispitati će se ponašanje bloka na krutoj podlozi uslijed sinusne pobude podloge. Ispitivanje će se proširiti i na deformabilne podloge različitih krutosti, kod kojih dolazi i do vertikalnog pomicanja bloka.

2 Eksperiment

Inicijalnim eksperimentima testirana je stabilnost kretanja aluminijskog bloka dimenzija 3 x 3 x 15 cm i mase 339 grama, uslijed sinusne pobude podloge za raspon amplituda od 0.1 do 2.0 cm s korakom od 0.1 cm, i za raspon frekvencija od 1 do 5 Hz s korakom od 0.2 Hz, u trajanju od deset sekundi.

Korištena je jednoosna potresna platforma Quanser Shake Table I-40. Potresna platforma ima maksimalni hod od ± 20 mm, maksimalnu frekvenciju od 5 Hz, te maksimalno ubrzanje (za opterećenje do 1.5 kg) od 1 g (1). Korišten je pripadajući softver u kojem se pomoću grafičkog sučelja upravlja željenom pobudom. Za sinusnu pobudu, moguće je unositi vrijednosti amplituda i frekvencija.

Kruta podloga dobivena je 3D printanjem na printeru Stratasys Connex 500, od materijala Full Cure Vero White 835. Na podlozi je napravljen utor širine 3 cm, koji odgovara širini bloka, kako bi se onemogućilo proklizavanje bloka, a podloga je vijcima pričvršćena za radnu plohu potresne platforme.

Za deformabilnu podlogu odabранo je balsa drvo, koje je vrlo lagano, mekano i deformabilno. Izrađene su podloge tlocrtnih dimenzija 23 x 10 cm različitih debljina: 2, 3, 4, 6, 8 i 10 mm. Napravljeni su ležajevi koji se montiraju na potresnu platformu, a razmak između ležajeva iznosi 20.3 cm. Na podlogama svih debljina ljepilom su pričvršćene trapezne letvice kojima se pokušalo onemogućiti horizontalno proklizavanje bloka, koji je postavljen točno u sredini raspona. Modul elastičnosti deformabilnih podloga dobiven je eksperimentalno, nanošenjem opterećenja i mjerjenjem pripadajućih progiba. Izmjereni modul elastičnosti korišten u prikazanom primjeru iznosi 2.29 GPa.

Očekivana su tri slučaja kretanja bloka uslijed pomicanja podloge: (a) translatiranje zajedno s podlogom, (b) ljuljanje i prevrtanje, (c) stabilno ljuljanje.

3 Numerički proračun

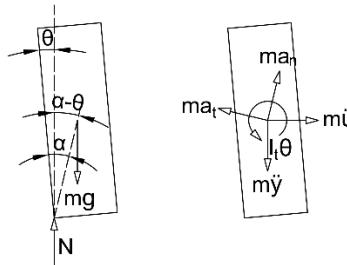
Jednadžba ravnoteže koja opisuje neprigušeni linearni dinamički odziv sustava s više stupnjeva slobode glasi

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (1)$$

gdje su \mathbf{M} i \mathbf{K} matrice masa i krutosti, \mathbf{R} je vektor vanjskih opterećenja, a \mathbf{U} i $\ddot{\mathbf{U}}$ su vektori položaja i ubrzanja (2).

3.1 Jednadžbe gibanja

Jednadžbe gibanja bloka ovise o predznaku kuta θ , odnosno o strani na koju se blok nagnje pri ljudjanju. Na slici 1 prikazani su dijagram slobodnog tijela i dijagram mase i ubrzanja za pozitivan kut θ .



Slika 1. Dijagram slobodnog tijela i dijagram masa-ubrzanje

Iz jednačavanjem momenata oko točke A, za krutu podlogu ($y = 0$) i male kuteve θ dobivamo

$$\frac{4}{3}R\ddot{\theta} + (-g \cos \alpha \mp \ddot{y} \sin \alpha)\theta = \ddot{y} \cos \alpha \mp g \sin \alpha \quad (2)$$

gdje je R polovica dijagonale bloka, g ubrzanje gravitacije, α kut određen omjerom širine i visine bloka, a \ddot{y} je ubrzanje podloge. Članovi koji imaju dvojaki predznak, imaju negativni predznak kada se blok nagnje ulijevo kao na slici 1, a pozitivan kada se nagnje udesno.

Kod analize ljudjanja bloka na deformabilnoj podlozi, u obzir uzimamo i krutost i progib podloge. Iz sume vertikalnih sila i sume momenata oko točke prevrtanja dobivamo

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3}R & \mp \sin \alpha \\ \mp \sin \alpha & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -g \cos \alpha \mp \ddot{y} \sin \alpha & 0 \\ 0 & \frac{k}{mR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{y} \cos \alpha \mp g \sin \alpha \\ \frac{g}{R} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

gdje je k krutost podloge na mjestu kontakta bloka s podlogom, dana izrazom:

$$k = \frac{48EI}{(L^2 - b^2)^2} \quad (4)$$

gdje su E i I modul elastičnosti i moment površine drugog reda presjeka grede, L je razmak ležajeva, a b je širina bloka.

Jednadžbe gibanja (2) i (3) moguće je zapisati i u pojednostavljenom obliku, uzimajući u obzir veliku vitkost bloka ($\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$) (3).

3.2 Newmarkova metoda integracije

Newmarkova metoda integracije temelji se na pretpostavci linearne promjene akceleracije unutar vremenskog koraka (2).

Korištene su sljedeće jednakosti:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + [(1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}] \Delta t \quad (5)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}} \Delta t \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\ddot{\mathbf{U}} + \beta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} \right] \Delta t^2 \quad (6)$$

gdje je Δt vremenski korak, ${}^t(\cdot)$ označava vrijednost veličine (\cdot) u nekom trenutku, a ${}^{t+\Delta t}(\cdot)$ označava vrijednost te veličine u sljedećem trenutku.

Variranjem parametara β i γ možemo utjecati na stabilnost i točnost integracijske metode (2). Korišteni su parametri $\beta = 0.25$ i $\gamma = 0.5$, što metodu čini bezuvjetno stabilnom, a za vremenski korak odabrana je vrijednost $\Delta t = 0.0001$ s.

3.3 Numerički model

Numerički model napravljen je koristeći Python 3.6.1 s paketom numpy 1.12.1.

U numeričkom modelu pretpostavljeno je da ne dolazi do proklizavanja bloka, da nema odskakivanja bloka prilikom udarca u podlogu, i da se radi o malim rotacijama bloka - korištena je linearizirana jednadžba gibanja.

Disipacija energije prilikom udarca bloka o podlogu uzeta je u obzir kroz faktor redukcije brzine nakon udarca:

$$\sqrt{r} = 1 - \frac{m R^2}{I_0} (1 - \cos 2\alpha) \quad (7)$$

gdje je r omjer kinetičke energije nakon i prije udarca o podlogu (4).

Za svaki vremenski korak provjerava se predznak kuta θ te se na temelju toga određuje koja će se verzija jednadžbe (3) koristiti u danom vremenskom koraku.

4 Rezultati

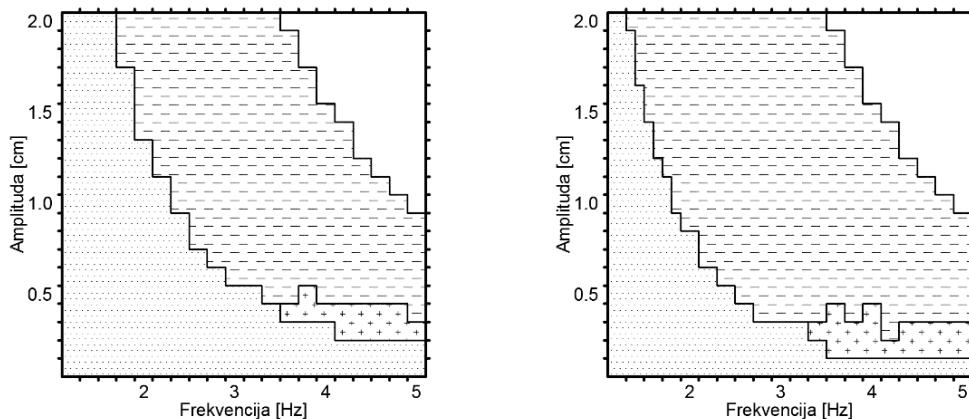
Iako su napravljeni eksperimenti za krutu podlogu i šest različitih debljina (2, 3, 4, 6, 8 i 10 mm) deformabilne podloge, u nastavku će biti prikazani rezultati samo za krutu podlogu i za deformabilnu podlogu debljine 8 mm.

Zadavanjem sinusne pobude podloge, utvrđena je jasna granica između prvog i drugog načina kretanja bloka, odnosno blok se ili nije ljudlja ili se prevrnuo, bez pojave trećeg slučaja u kojem bi se blok nastavio ljudljati bez prevrtanja. Primijećeno je da se navedena granica pojavljuje pri manjim vrijednostima amplituda i frekvencija nego u numeričkom modelu.

Utvrđeno je da do neočekivanih rezultata kod eksperimenata dolazi zbog početnog trzaja podloge koji se javlja uslijed inercije sustava. Trzaj je uklonjen promjenom sinusne pobude, odnosno uveden je pomak u fazi koji odgovara kosinusnoj pobudi kod koje je početna brzina nula te ne dolazi do inicijalnog trzaja. Takvom pobudom dobiveni su rezultati koji bolje odgovaraju numeričkim rezultatima te je uočena pojava treće grupe ponašanja bloka – kontinuiranog ljudlanja bloka.

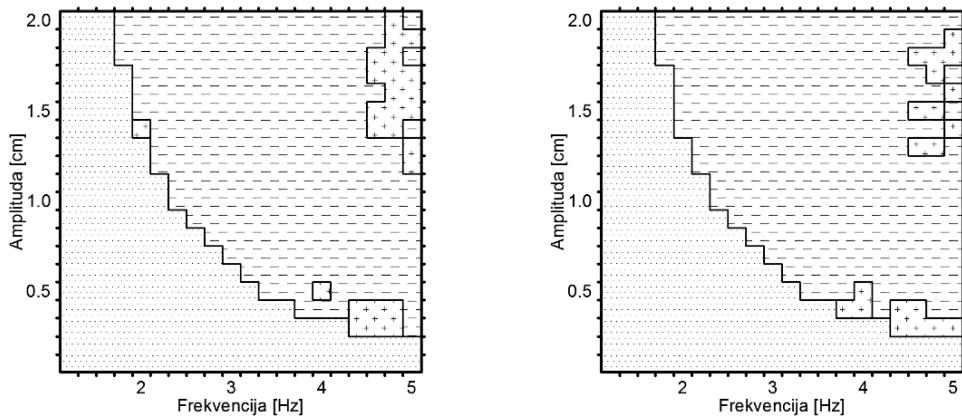
Na slici 2 vidimo sva tri različita načina kretanja bloka. U donje-ljevom dijelu (šrafirano točkicama) su slučajevi u kojima je ubrzanje podloge nedovoljno za pomicanje bloka. Dolje-

desno (šrafirano plusevima) su slučajevi u kojima se blok kontinuirano ljudi kroz svih 10 sekundi trajanja eksperimenta. Najveći dio (šrafirano minusima) čine slučajevi u kojima se je blok prevrnuo tijekom eksperimenta. Gornji-desni kut (nije šrafirano) čine vrijednosti amplituda i frekvencija kod kojih je ubrzanje veće od 1 g, što je granična vrijednost korištene potresne platforme, te za te vrijednosti nije bilo moguće provesti eksperimente.



Slika 2. Eksperimentalni rezultati za: a) krutu podlogu, b) deformabilnu podlogu debljine 8 mm

Na slici 3 prikazani su numerički rezultati za iste dvije podloge kao i kod eksperimenata. Moguće je uočiti da dolazi do stabilnog ljudjanja bloka za slične vrijednosti frekvencija i amplituda (dolje-desno) kao i kod eksperimenata, ali i postojanje stabilne zone za visoke vrijednosti ubrzanja, koje nije bilo moguće eksperimentalno ispitati.



Slika 3. Numerički rezultati za: a) krutu podlogu, b) deformabilnu podlogu debljine 8 mm

Kod numeričkog modela granično ubrzanje potrebno za početak ljudjanja za sve je podloge jednako i određeno je izrazom:

$$\ddot{u}_{\text{crit}} = g \tan \alpha \quad (8)$$

dok iz eksperimentalnih rezultata vidimo da je do ljudjanja bloka na deformabilnoj podlozi došlo i prije navedene vrijednosti.

5 Zaključak

Korištenjem kosinusne pobude kako bi se izbjegnuo početni trzaj, kod eksperimenata je moguće dobiti rezultate koji približno odgovaraju lineariziranom numeričkom modelu. Na primjeru usporedbi krute podloge i deformabilne podloge debljine 8 mm, vidljivo je da u eksperimentima na deformabilnim podlogama dolazi do ljudjanja pri nižim vrijednostima frekvencija i amplituda, odnosno potrebno je manje ubrzanje za početak ljudjanja. Isti efekt nije vidljiv u numeričkim modelima, kod kojih je granično ubrzanje jednako za sve tipove podloga.

U dalnjem radu eksperimentalno ćemo ispitati kakvo je ponašanje bloka pri ubrzanjima podloge većima od 1 g, koristeći snažnije potresne platforme. Također, ispitat ćemo zašto dolazi do diskrepancija između eksperimenata i numeričkog modela kod deformabilnih podloga – radi li se o imperfekcijama kod eksperimenata ili numerički model ne opisuje dovoljno precizno stvarno stanje.

Zahvale

Rad je napravljen u sklopu projekata Configuration-dependent Approximation in Non-linear Finite-element Analysis of Structures (CANFAS) Hrvatske Znakade za Znanost, i Razvoj istraživačke infrastrukture na Kampusu Sveučilišta u Rijeci (RISK).

Literatura

1. Quanser, Shake Table I-40 Technical Specifications, pristup 19.5.2017., http://www.quanser.com/products/shake_table_I
2. Bathe KJ. Finite Element Procedures. Prentice-Hall. 1996.
3. Krulić M. Eksperimentalna i numerička analiza ljudjanja krutog bloka uslijed harmonijskog pomicanja podloge. Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet. 2016.
4. Housner GW. The behaviour of inverted pendulum structures during earthquakes. Bulletin of the Seismological Society of America. 1963 Feb 1;53(2):403-17.

Analiza posipanja kolnika česticama metodom diskretnih elemenata

Žeželj, D.¹, Mađer, M² i Miler, D.³

Sažetak

Zimski uvjeti na prometnicama, poput snijega i leda, uzrokuju nepovoljna mehanička svojstva na površini, ugrožavajući pritom sigurnost sudionika u prometu. Stoga je tijekom zimskih mjeseci posebnu pažnju potrebno posvetiti održavanju prometnica. Tražene uvjete moguće je osigurati posipanjem prometnica česticama koje smanjuju opasnost od stvaranja leda. Zahtjevi za takav način održavanja opisani su trenutno važećim pravilnicima i propisima.

Kako bi se za njih ishodili potrebni certifikati, uređaji za posipavanje kolnika moraju biti u skladu s propisima europskog udruženja proizvođača komunalne opreme. Atestiranje se provodi probnim ispitivanjem koje se sastoji od statičkog i dinamičkog dijela. Budući da se dinamičko ispitivanje vrši probnim posipanjem ispitne površine, ovakva vrsta testiranja zahtjeva gotovu konstrukciju, odnosno proveden razvojni proces. Iako se eksperimentalnim ispitivanjem smanjuje mogućnost pojave potencijalno skupih grešaka u kasnijim fazama, negativan ishod također uzrokuje neželjene troškove.

Variranjem broja lopatica, njihovog oblika i položaja, položaja otvora štitnika i brzine vrtњe mijenja se profil posipanja. U ovom je radu proveden postupak određivanja vrijednosti parametara koji će osigurati tražene uvjete. Navedeni problem je riješen korištenjem metode diskretnih elemenata, čime je izbjegнутa potreba za izradom prototipa. Za rješavanje i analizu problema korišten je softverski paket *EDEM*. Prikazane su međuovisnosti parametara te je nakon provedene analize odabrana konfiguracija koja najbolje zadovoljava propisane uvjete.

Ključne riječi: posipač, održavanje prometnica, metoda diskretnih elemenata

¹ Doc. dr. sc. Dragan Žeželj, dipl. ing. stroj., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za konstruiranje, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: dzezelj@fsb.hr

² Marko Mađer, mag. ing. stroj., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: marko.mader@gmail.com

³ Daniel Miler, mag. ing. stroj., Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za konstruiranje, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: dmiler@fsb.hr

1 Uvod

Nepovoljni vremenski uvjeti uzrokuju lošija svojstva površine prometnica, ugrožavajući pritom sigurnost svih sudionika u prometu. Problem je osobito vidljiv tijekom zimskih mjeseci, kada je potrebno posvetiti posebnu pažnju održavanju prometnica u svrhu omogućavanja nesmetanog i sigurnog prometovanja. Nužne mjere održavanja propisane su Zakonom o cestama, Pravilnikom o održavanju cesta i regulativama Europske Unije [1, 2].

Posipanje prometnica aktivnom tvari spada u predviđene načine osiguravanja zahtijevanih uvjeta. Kako bi uređaj za posipanje bio u skladu s normama, mora zadovoljiti test definiran od strane Europskog udruženja proizvođača komunalne opreme (EU-nited), koji je osmišljen u suradnji sa tehnološkim institutom u Bygholmu, Danska. Predviđeno atestiranje provodi se probnim posipanjem koje se sastoji od statičkog i dinamičkog dijela [3]. Statičkim ispitivanjem provjerava se količina dovedenog posipnog materijala bez pomicanja uređaja, dok se dinamičkim provjerava profil posipana prilikom kretanja posipača ispitnom površinom.

Nedostatak je što oba tipa ispitivanja zahtijevaju izradu prototipa, odnosno provođenje cjelovitog razvojnog procesa. Kako je razvoj novog proizvoda skup, nezadovoljavanje statičkog ili dinamičkog ispitivanja rezultirala bi nepotrebnim troškovima. S ciljem izbjegavanja tih troškova, u ovom je radu prikazan postupak određivanja potrebnih konstrukcijskih parametara. Korištena je metoda diskretnih elemenata, odnosno programski paket *EDEM*. Promatran je utjecaj oblika, broja i položaja lopatica, brzine vrtnje i položaja otvora štitnika.

2 Metoda

Prema širini posipanja, količini posutog materijala i dopuštenoj brzini vozila, EU-nited razlikuje tri tipa posipača sa suhim posipanjem [3]. U radu je promatran tip A koji zahtjeva širinu posipanja od 1 do 6 m i količinu posipanja od 5 do 30 g/m². Najveća dopuštena brzina vozila je 40 km/h, a količina utrošenog posipnog sredstva 120 kg/min. Prilikom atestiranja predviđeno je statičko i dinamičko ispitivanje, no fokus rada je na dinamičkom, teže ostvarivom, dijelu. Lopatice su izrađene od čelika, površina ispitnog poligona od betona, dok je aktivna tvar natrijev klorid. Svojstva materijala i faktori međudjelovanja nalaze se u tablicama 1 i 2 [4, 5].

Tablica 1. Mehanička svojstva korištenih materijala

	Čelik	Natrijev klorid	Beton
Poissonov koeficijent ν	0,3	0,252	0,15
Modul smicanja G	$8 \cdot 10^{10}$ Pa	$8,97 \cdot 10^9$ Pa	$2,1 \cdot 10^8$ Pa
Gustoća ρ	7850 kg/m ³	2300 kg/m ³	2300 kg/m ³

Tablica 2. Faktori međudjelovanja korištenih materijala

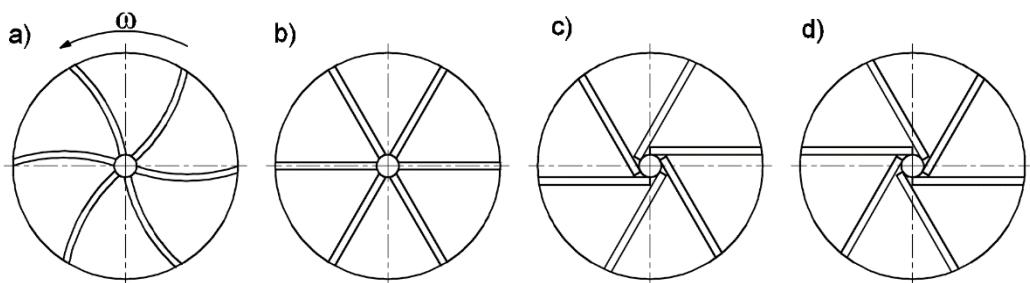
	NaCl – NaCl	NaCl – beton	NaCl – čelik
Faktor restitucije e	0,15	0,22	0,22
Faktor statičkog trenja μ_s	0,725	0,65	0,627
Faktor trenja kotrljanja μ_k	0,01	0,02	0,01

Tablica 3. Sastav NaCl s obzirom na veličinu čestica

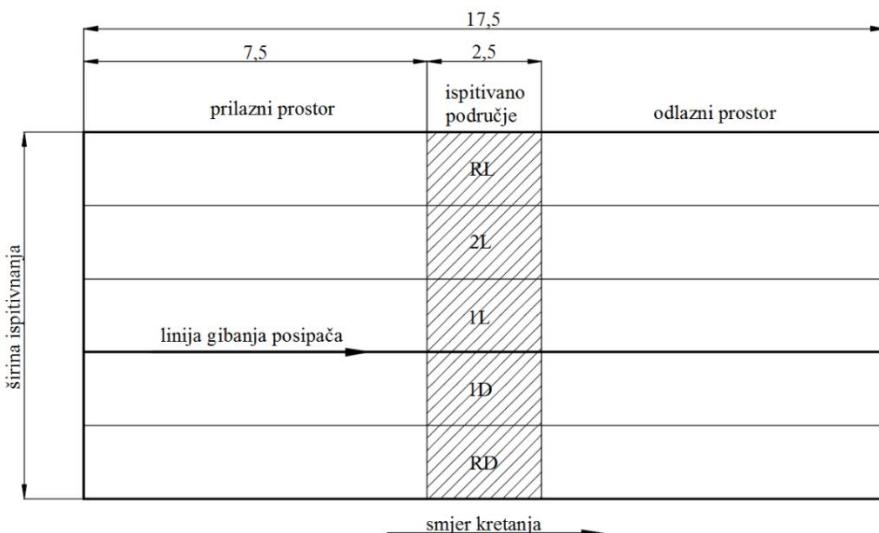
Veličina čestica [mm]	Postotak u ukupnoj težini [%]	Maseni protok [kg/min]	Masa čestice [kg]	Broj čestica [1/s]
> 5	1	0,15	$1,43 \cdot 10^{-4}$	17
3,15 – 5	15	2,25	$5,2 \cdot 10^{-5}$	721
1,6 – 3,15	40	6	$9 \cdot 10^{-6}$	11.111
0,8 – 1,6	30	4,5	$5 \cdot 10^{-6}$	15.000
0,16 – 0,8	10	1,5	$4,03 \cdot 10^{-7}$	62.127
< 0,16	4	0,6	$4,8 \cdot 10^{-8}$	2.077.706
Σ	100	15		

Prije analize potrebno je odrediti koje varijable će imati utjecaj na profil posipanja. Odabrani su oblik, broj i položaj lopatica, nagib otvora štitnika i brzina vrtnje. Setovi se sastoje od 4 ili 6 lopatica, koje su smještene radijalno ili tangencijalno u jednu od dvije pozicije. Promatrana su dva različita oblika lopatica, ravne i konkavne. Odabrani promjer diska iznosi 300 mm te su sve konfiguracije u izvedbi sa 6 lopatica prikazane na slici 1. Drugi element koji određuje sliku posipanja je štitnik, kod kojeg je moguće varirati veličinu i položaj otvora. Sve simulacije su provedene s veličinom otvora od 130° . Njegov položaj je variran od, gledano sa stražnje strane, simetrično postavljenog s obzirom na os rotora, pa do 30° zakrenutog u desnu stranu. Dimenzije usipnika uvećane su kako bi se osigurala numerička stabilnost uslijed neprestanog uvođenja novih čestica u simulaciju. Brzine vrtnje mijenjane su na intervalu od 110 do 180 okretaja u minuti s korakom od 10 okretaja u minuti.

S povećanjem broja čestica u simulaciji eksponencijalno raste broj interakcija među njima, povećavajući pritom broj jednadžbi. Kako bi simulacije bilo moguće provesti u prihvatljivom vremenskom roku, uvedena su pojednostavljenja. U tablici 3 prikazan je sastav smjese NaCl s obzirom na veličinu čestica [3]. Odbačene su čestice promjera manjeg od 0,8 mm, te ostatak čini 1,3% ukupnog broja čestica i 86% mase. Korištenje stvarnog oblika kristala sa oštrim bridovima nije preporučljivo jer smanjuje numeričku stabilnost modela. Stoga su čestice oblikovane od više međusobno spojenih sfera.



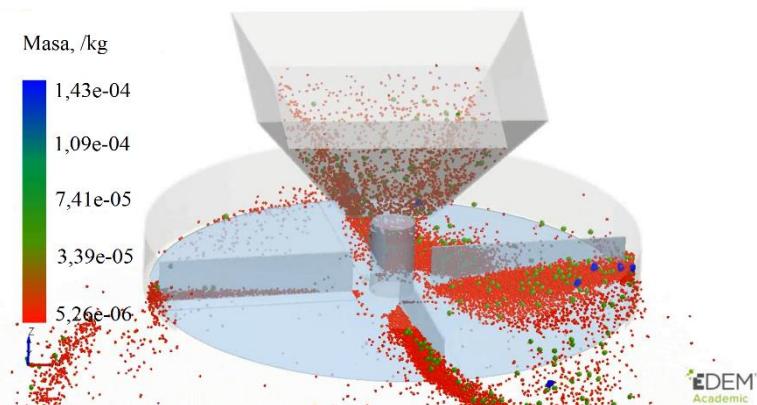
Slika 1. Oblici i konfiguracije lopatica: konkavne (a), radijalno postavljene ravne (b), te tangencijalno postavljene ravne – način I (c) i način II (d)



Slika 2. Ispitno mjerno područje za dinamičko ispitivanje

Ispitna traka podijeljena je na 5 polja, svako širine 1 m (slika 2). Polja 2L, 1L i 1D predstavljaju dijelove na koje je potrebno ravnomjerno posuti čestice, a polja RD i LD gubitke, te posipanje čestica na njima nije poželjno. Posipač se giba po liniji između 1L i 1D. Rubna polja mjernog ispitnog područja (1D i 2L) moraju biti posuta sa najmanje 50% efektivne doze, dok za polje 1L vrijedi granica od 60%. Potrebna temperatura okoline je između 5 i 30 °C.

Propsani parametri dinamičkog ispitivanja podrazumijevaju količinu posipanja od 30 g/m^2 , širinu posipanja 3 m, brzinu vozila 10 km/h, teorijsku maksimalnu količinu 15 kg/min te asimetriju profila posipanja u iznosu od 2 m lijevo, i 1 m desno. Uz pretpostavku da je razdioba čestica izuzetih iz simulacije ista kao i raspodjela simuliranih, količina posipanja u simulaciji je $25,8 \text{ g/m}^2$. Ispitno mjerno područje (slika 2) mora biti vlažno, duljine minimalno 17,5 m. Područje sakupljanja dugo je 2,5 m, uz dodatak od 1 m sa svake strane. Zbog ograničenih resursa, duljina sakupljanja numeričke simulacije je smanjena sa 2,5 na 1 m.



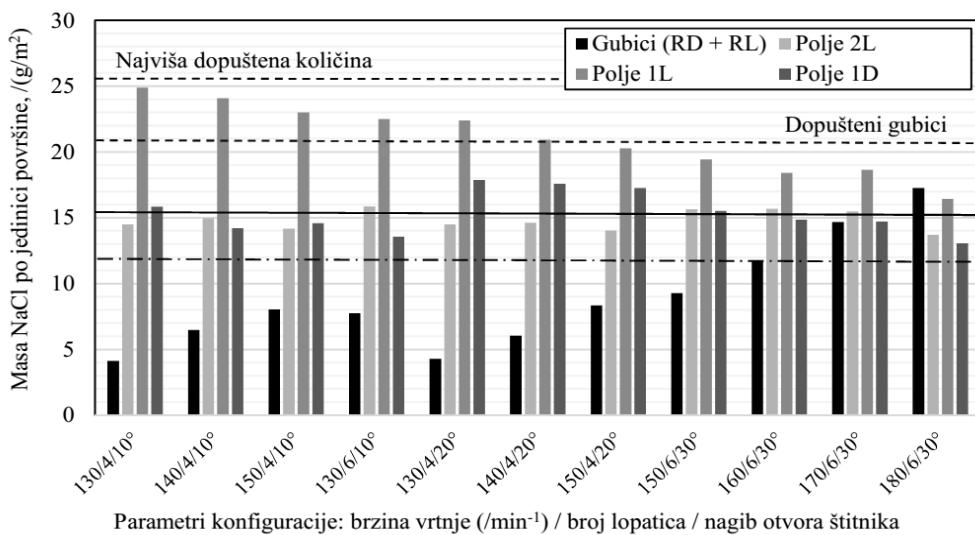
Slika 3. Vizualizacija numeričke analize konfiguracije sa 4 ravne lopatice

Numerička analiza je oblikovana tako da 0,5 s nakon pokretanja posipač počinje kretanje brzinom od 10 km/h. Aktivno vrijeme presjeka pomoću kojeg se uvode nove čestice je 2 s. U sučelje *EDEM Simulator* uneseni su potrebni parametri: Rayleighov vremenski korak od 30%, ukupno vrijeme 2,3 s, interval spremanja od 0,1 s, selektivno spremanje osnovnih informacija o čestici i veličina čelije od $7 R_{\min}$; gdje je R_{\min} polumjer najmanje čestice u simulaciji. Vizualizacija numeričke analize prikazana je na slici 3.

3 Rezultati i diskusija

Nakon variranja svih kombinacija parametara, provedeno je ukupno 108 numeričkih simulacija. Ukupno 11 setova konstrukcijskih parametara zadovoljilo je sve propisane zahtjeve. Količina čestica na ispitnom području promatrana je za svako od polja (RL, 2L, 1L, 1D i RD) odvojeno. Setovi parametara koji zadovoljavaju uvjete ispitivanja prikazani su na slici 4, uz ograničenja ispitivanje i gubitke. Puna crta predstavlja najnižu potrebnu količinu čestica na polju 1L, a simetrala na poljima 1D i 2L.

Za polje 2L vrijednosti posipanja najbliže srednjoj vrijednosti tolerancijskog polja postignute su za 6 tangencijalno (način II) smještenih ravnih lopatica, sa brzinama vrtnje 130 min^{-1} za nagib štitnika od 10° , te brzina vrtnje 150, 160 i 170 min^{-1} uz položaj otvora štitnika od 30° . Slični rezultati pojavljuju i kod polja 1L, gdje su najbolji rezultati također ostvareni korištenjem 6 ravnih tangencijalno smještenih lopatica brzina vrtnje od 150, 160 i 170 min^{-1} uz položaj otvora štitnika od 30° zakrenutog u desno, uz dodatak kombinacije sa 4 tangencijalno smještene (način II) lopatice pri brzinama od 140 i 150 min^{-1} te nagibom štitnika od 20° zakrenutog u desno. Najkvalitetnije posipanje polja 1D ostvareno je korištenjem 4 tangencijalno smještene (način II) lopatice, uz brzine vrtnje 130, 140 i 150 min^{-1} i položaj otvora štitnika od 20° zakrenutog u desno. Najlošiji rezultati ostvareni su korištenjem 4 ravne tangencijalno postavljene (način II) lopatice pri brzini vrtnje od 130 min^{-1} te položajem otvora štitnika od 10° i 20° zakrenutog u desno.



Slika 4. Rezultati simulacije posipanja čestica

Sa slike 4 jasno je vidljivo da će položaj otvora štitnika s manjim kutom otklona u desnu stranu u kombinaciji s nižom brzinom vrtnje uzrokovati lošiju razdiobu čestica. Najveći dio čestica tada je posut na polju 1L i gotovo doseže najvišu dopuštenu količinu. Povećavanjem brzine vrtnje dolazimo do kvalitetnije razdiobe, ali uz rast gubitaka. Korištenjem položaja otvora štitnika od 30° zakrenutog u desno, 6 lopatica i većih brzina vrtnje postiže se najbolja razdioba posipnog sredstva. No, prilikom posipanja razdioba je samo jedan od kriterija; navedeni slučajevi također imaju najviše udjele gubitaka, između 19,3% i 28,5%, koji su upravo njezina posljedica. Gubici rastu u toj mjeri da se u posljednjem slučaju, koji ima brzinu vrtnje od 180 min^{-1} , veći dio posipnog sredstva rasprši na polja RD i RL sumarno nego na bilo koje od polja 1D, 1L i 2L. Svi navedeni slučajevi koriste ravne lopatice smještene tangencijalno na način II (slika 1d). Broj lopatica imao je blago pozitivan utjecaj na razdiobu posipnog sredstva.

Kao najbolja kombinacija parametara za promatrani slučaj pokazala se kombinacija sa brzinom vrtnje od 130 min^{-1} , uz 4 ravne, tangencijalno smještene lopatice (način II) i nagib otvora štitnika od 20° . Pored najmanjeg udjela gubitaka od 7,25%, navedena kombinacija ostvaruje dobre rezultate i na ostalim poljima te ima relativno malena odstupanja između mase posute na polja 1D, 1L i 2L.

4 Zaključak

Provjeda je analiza posipanja česticama soli pomoću metode diskretnih elemenata. Simulirano je dinamičko ispitivanje posipača tipa A u skladu sa propisima udruženja EU-nited. Varirani su oblik, broj i smještaj lopatica, položaj otvora štitnika i brzina vrtnje. Nakon analize 108 kombinacija konstrukcijskih parametara, ukupno 11 konfiguracija je zadovoljilo sve kriterije. Povećanje brzine vrtnje pozitivno je utjecalo na ravnomjernost posipanja. Također, veći broj lopatica u kombinaciji s većim kutom zakreta položaja otvora štitnika u desno ostvarivao je bolje rezultate. Naposljetu, tangencijalno orijentirane ravne lopatice (način II) su imale bolje rezultate od radijalno postavljenih, kao i od konkavnih.

Korištenje metode diskretnih elemenata prilikom konstrukcijskog oblikovanja posipača omogućava razmatranje većeg broja mogućih rješenja. Provjera više kombinacija parametara bez znatnijeg povećanja troškova osigurava kvalitetnije konstrukcijsko rješenje. Nakon uspješne numeričke analize preostaje najbolji slučaj provjeriti eksperimentom na prototipu.

Literatura

1. Narodne Novine. Zakon o cestama – NN 92/2014, Narodne Novine d.d., Zagreb, Hrvatska, 2014.
2. Narodne Novine. Pravilnik o održavanju cesta – NN 90/2014, Narodne Novine d.d., Zagreb, Hrvatska, 2014. (način II)
3. EUnited Municipal Equipment – Section Winter maintenance equipment, Spreading machines (gritting machines) — Requirements for distribution and their test 2014-04-30, The European Engineering Industries Association, Brusseles, Belgium, 2014.
4. Filetin T, Kovačić F i Indolf J. Svojstva i primjena materijala, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, Hrvatska, 2007.
5. Šćap D. Transportni uređaji, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, Hrvatska, 2004.

INDEKS AUTORA

A

- Anić, F..... 1
Alfano, G..... 203

B

- Bagavac, P..... 9
Batistić, I..... 15
Bičanić, N..... 31, 37
Boban, L..... 183
Brčić, M..... 27
Burilo, D..... 21

C

- Cindori, M..... 143
Cukrov, A..... 15, 183
Cvitanić, V..... 107

Č

- Čanadija, M..... 27
Čarija, Z..... 83
Čeh, N..... 31, 37
Čorić, A..... 43
Črnjarić-Žic, N..... 89

D

- Dalla Libera, G..... 183
De Carli, M..... 183
Dobrilla, S..... 37
Družeta, S..... 49

F

- Frančeski, J..... 55

G

- Gaćeša, M..... 61
Grandić, D..... 117
Grbčić, L..... 49, 65
Guljaš, I..... 71

H

- Hlača, I..... 37
Horvat, N..... 77
Hreljac, I..... 83

I

- Ibrahimbegović, A..... 65
Ivanković A..... 101
Ivić, S..... 89

J

- Jalušić, B..... 95
Jarak, T..... 95
Jelenić, G..... 31, 37, 61, 65, 191, 203, 215

K

- Kačmarčik, J..... 101
Karač, A..... 101
Karšaj, I..... 43, 77
Konjatić, P..... 101
Kovačić, M..... 107
Kozak, D..... 197

- Kožar, I..... 21, 113

- Krizmanić, S..... 77, 143

- Krolo, P..... 117

- Krstulović-Opara, L..... 9, 107

- Krulić, M..... 215

- Krvavica, N..... 125

L

- Lahmer, T..... 21
Legatiuk, D..... 1
Lesičar T..... 55, 131, 165, 177
Lovrenić-Jugović, M..... 137
Lučin, B..... 83

M

- Mačešić, S..... 89
Mađer, M..... 221
Markučić, V..... 143
Marović, P..... 149
Miler, D..... 221

O

- Ožanić, N..... 125

P

- Penava, D..... 1, 21
Pezer, R..... 209
Pustaić, D..... 157
Putar, F..... 165

R

- Ribarić, D..... 171
Rukavina, T..... 191

S

- Seleš, K..... 177
Skozrit, I..... 55, 137
Slokar, Lj..... 137
Soldo, V..... 183
Sorić, J..... 95, 131, 165, 177, 209

Š

- Šćulac, P..... 191
Šimunović, V..... 197
Škec, L..... 203
Škifić, J..... 49

T

- Theophile, L..... 31
Tonković, Z..... 131, 165, 177
Trapić, I..... 209
Tuhtan, M..... 215
Tuković, Ž..... 15

V

- Vasilis, S..... 1
Virag, L..... 43

Ž

- Žeželj, D..... 221

POKROVITELJI



MINISTARSTVO ZNANOSTI
I OBRAZOVANJA
REPUBLIKE HRVATSKE



SIRRAH projekt d.o.o za projektiranje i nadzor





Teme susreta: eksperimentalna mehanika i mjerena, teorijska mehanika, numerička mehanika i numeričke metode, biomehanika, mehanika krutih i deformabilnih tijela, mehanika konstrukcija, mehanika loma, mehanika razvijenih materijala, mikromehanika materijala, rasprostiranje valova i akustika, dinamika konstrukcija i stabilnost, geomehanika, mehanika fluida.

ISBN 978-953-7539-22-1

CIP 140716088