

Zbornik radova

Petog susreta

Hrvatskog društva za mehaniku

Zagreb
6. lipnja 2013.

Zbornik radova Petog susreta Hrvatskog društva za mehaniku

Urednici: Igor KARŠAJ
Tomislav JARAK

Izdavač: Hrvatsko društvo za mehaniku

Oblikovanje korica: Marin BLAŽETIĆ

Tisk: Element, d.o.o., Zagreb

Naklada: 80 primjeraka

Organizator Susreta

HRVATSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKA
Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb
www.csm.hr

Organizacijski odbor:

Igor KARŠAJ, Sveučilište u Zagrebu, predsjednik
Tomislav JARAK, Sveučilište u Zagrebu, dopredsjenik
Mirjana BOŠNJAK-KLEČINA, Sveučilište u Osijeku
Pejo KONJATIĆ, Sveučilište u Osijeku
Gordan JELENIĆ Sveučilište u Rijeci
Pavao MAROVIĆ, Sveučilište u Splitu

Pokrovitelj:

Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu

Zbornik radova

Petog susreta
Hrvatskog društva za mehaniku

SADRŽAJ

ANTIN RAD	1
Bakić, A.....	1
POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE CILJANOГ UBRZANJA U VIŠEMODALNOJ METODI NAGURAVANJA	
Balić, I., Mihanović, A., Trogrlić, B.	7
NEIZOTERMNI TURBULENTNI MLAZ: ANALIZA SMANJENJA CENTRALNE BRZINE.....	
Cukrov, A., Horvat, T., Vrandečić, T. Švaić, S.....	21
O TOPLINSKIM POJAVAМА PRI ELASTIČNIM I PLASTIČNIM DEFORMACIJAMA	
Čanađija, M. & Munjas, N.	27
UDARNO OPTEREĆENJE HARFE IZMJENJIVAČA TOPLINE.....	
Damjanović, D., Kozak, D., Sertić, J., Gelo, I., Konjatić, P. & Novoselac, S.	33
GEOMETRIJSKI TOČAN 3D GREDNI KONAČNI ELEMENT – KONCEPT NEPOMIČNOG POLA	
Maja Gaćeša i Gordan Jelenić	39
USPOREDBA MIKROMEHANIČKIH KRITERIJA POPUŠTANJA KOMPOZITNIH MATERIJALA	
Ivančević, D. & Smoјver, I.....	51
OPTIMIZACIJA TRASE CJEVOVODA S OBZIROM NA ISPLATIVOST INSTALACIJE I EKSPLOATACIJE	
Ivić, S., Sušanj, A. & Družeta, S.	57
O BEZMREŽNOM MODELIRANJU HETEROGENIH MATERIJALA.....	
Jalušić, B., Jarak, T. & Sorić, J.	63
MODELIRANJE NESIGURNOSTI U SREDNJE-FREKVencijskom PODRUČJU 69	
Jokić, M., Ji, L.....	69
ANALIZA PULSIRAJUĆEG STRUJANJA U CIJEVI	
Korade, I., Virag, Z. & Korbar, R.	85
USPOREDBA SHEMA INTERPOLACIJE KVAZI-2D MODELA HIDRAULIČKOG UDARA	
Korbar, R., Korade, I., & Mustapić, N.	91
PREGLED MODELA KOŠTANE PREGRADNJE.....	
Leder Horina, J., Jurčević Lulić, T.	97
PROCES DEFORMIRANJA EPOKSIDNOG KOMPOZITA OJAČANOG STAKLENIM VLAKNIMA	
Lovrenić-Jugović, M., Tonković, Z. & Slokar, Lj.	109

NUMERIČKA ANALIZA KRUTOSTI SPOJA OKVIRNE KONSTRUKCIJE	115
Merdanović, E. & Turkalj, G.....	115
NUMERIČKO MODELIRANJE PARAMETARSKIH OSCILACIJA LANČANICE 121	
Nikolić, M., Raduka, V.....	121
UTJECAJ SILE PRITEZANJA VIJKA DENTALNIH IMPLANTATA NA VISOKOCIKLIČKI ZAMOR	127
Novoselac, S., Ergić, T., Kozak, D., Sertić, J. & Pacak, M.....	127
TOPOLOŠKO OPTIMIRANJE PARAMETRIZIRANOM LEVEL SET FUNKCIJOM I EVOLUCIJSKOM METODOM	133
Pehnec, I., Vučina, D	133
NUMERIČKA ANALIZA STABILNOSTI TANKOSTJENIH KOMPOZITNIH GREDA.....	139
Pešić, I., Lanc, D. & Šimon, I.....	139
UTJECAJ VLASTITE TEŽINE KUĆIŠTA STATORA HIDROGENERATORA NA VELIČINU UNUTARNJIH SILA I POMAKA	145
Pustaić, M., Wolf, H. & Pustaić, D.....	145
TRANSMISIJA ZVUKA KROZ PERIODIČKI OSLONJEN PANEL.....	155
Skoblar, A., Žigulić, R., Braut S. & Štimac, G.....	155
NUMERIČKO I EKSPERIMENTALNO MODELIRANJE PROCESA DEFORMIRANJA POLIETILENA PE100	161
Skozrit, I., Tonković, Z., Bakić, A., Kodvanj, J.	161
SEIZMIČKA ANALIZA KONSTRUKCIJE PROTIRONA U SPLITU	167
Smoljanović, H., Nikolić, Ž., Živaljić, N.	167
ANALIZA GEOMETRIJSKI NELINEARNIH VIŠESLOJNIH GREDA	173
Škec, L., Jelenić, G.	173
NUMERIČKE SIMULACIJE HIDRAULIČKIH TRANZIJENATA U HE VINODOL 179	
J. Škifić, G. Racić	179
NUMERIČKI MODEL PONAŠANJA INTRALUMINALNOG TROMBA KOD ANEURIZME ABDOMINALNE AORTE PRI DVOOSNOM OPTEREĆENJU.....	191
Vindiš, V., Virag, L. & Karšaj, I.	191
MEĐUDJELOVANJE INTRALUMINALNOG TROMBA I ANEURIZMATIČNE STIJENKE AORTE	197
Virag, L., Wilson, J. S., Karšaj, I. & Humphrey, J. D.	197
<u>ZLATAR RAD</u> 203	
<u>Zlatar dario</u>	203

PRIMJENA FEM/DEM METODE U ANALIZI ČVOROVA ARMIRANO-BETONSKIH OKVIRA.....
Živaljić, N., Nikolić, Ž., Smoljanović, H.	209

ANTIN RAD

Bakić, A.

POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE CILJANOГ UBRZANJA U VIŠEMODALNOJ METODI NAGURAVANJA

Balić, I., Mihanović, A., Trogrić, B.

Sažetak: Danas vodeća metoda određivanja potresne otpornosti je nelinearna statička metoda naguravanja koja je i u sastavu europske norme EN 1998. U praktičnoj primjeni dominantna je metoda naguravanja zasnovana na prvom modu osciliranja. U ovom radu prikazana je višemodalna metoda naguravanja uz formulaciju ciljanog ubrzanja tla kao mjera najniže potresne otpornosti. Kombinacijom metode naguravanja sa spektrom odgovora jednostupnjevnog sustava dobiva se ocjena kapaciteta nosivosti i deformacija konstrukcije uslijed djelovanja potresa. Izložen je iterativni postupak za određivanje ciljanog ubrzanja na način da se zadovolji princip anvelope i odredi najniža potresna otpornost sustava. U nekoliko koraka, za odabranu različito hipotetsko ubrzanje, postupak vodi ciljanom ubrzaju koju predstavlja najmanje ubrzanje baze koje dovodi do računskog graničnog stanja nosivosti konstrukcije. Primjena ove metode pokazana je na primjeru prostornog 5-katnog a/b okvirnog sustava. Prikazano je naguravanje promatranih sustava linearnom (L) kombinacijom modova. Analiza je vršena za dva međusobno okomita smjera. Pokazuje se značajan utjecaj viših modova. Isto tako pokazuje se da je ciljano ubrzanje dobiveno višemodalnom metodom naguravanja značajno manje od slomnog ubrzanja s jednim modom.

Ključne riječi: ciljano ubrzanje, višemodalna metoda naguravanja, linearna kombinacija modova, a/b okvir

1 UVOD

Jedna od metoda određivanja potresne otpornosti sustava je nelinearna statička metoda naguravanja koja je i sastavni dio europske norme EN 1998. U praktičnoj primjeni dominantna je metoda naguravanja zasnovana na raspodjeli ubrzanja prema prvom modu osciliranja i konstantnoj raspodjeli po visini konstrukcije. U mnogim radovima, kao što su [1,2,4-9], promatrani je utjecaj viših modova kod nelinearne metode naguravanja sa zaključkom da je znatan njihov utjecaj. U ovom radu prikazana je višemodalna metoda naguravanja uz formulaciju ciljanog ubrzanja tla kao mjera najniže potresne otpornosti. Opisan je postupak određivanja ciljanog ubrzanja tla do kojeg se dolazi iterativnim putem, višemodalnim naguravanjem po načelu anvelope. Prikazano je naguravanje 5-katnog a/b okvirnog sustava linearnom (L) kombinacijom modova.

U primjeru prikazanom u radu korišten je elastični spektar tipa *I* za tlo tipa *A* prema EN 1998. Krivulje kapaciteta nosivosti određene su metodom naguravanja za svaki mod zasebno, te zatim prebačene u ADRS format (spektar odgovora ubrzanje-pomak). Oblik modova i veličine perioda se određuju na osnovu linearno elastičnog modela.

Metoda se može primijeniti kroz slijedeći niz koraka:

- Postupak započinje izborom konkretnog elastičnog spektra.

- Odabire se iznos hipotetskog vršnog ubrzanja tla, uobičajeno ono koje je najniže od svih modova (ubrzanje prvog moda).
- Za svaki mod, na temelju krivulje kapaciteta nosivosti, određuje se razina spektralnog ubrzanja i opterećenja uzimajući u obzir ciljani pomak prema EN 1998. Oblik vektora opterećenja odgovara obliku odgovarajućeg moda.
- Opći slomni vektor formira se prema nekim mogućim kombinacijama modova. Kao moguća modalna kombinacija u radu je prikazana linearna (L) kombinacija.
- Za ovako formirano opterećenje, pomoću nelinearne analize konstrukcije višemodalnom metodom naguravanja određen je kapacitet nosivosti, odnosno računsko granično opterećenje. Postavljeni zadatak se smatra riješenim kada je u granicama zadane točnosti postignuta jednakost opterećenja iz općeg slomnog vektora i računskog graničnog opterećenja za pretpostavljeno ubrzanje tla. U nekoliko koraka, iterativnim postupkom, za odabrano različito hipotetsko ubrzanje i pripadne vektore, odredi se ciljano ubrzanje koje predstavlja najmanje ubrzanje baze koje dovodi do računskog graničnog stanja nosivosti konstrukcije.

2 ODREĐIVANJE CILJANOG UBRZANJA

Kako je prethodno navedeno, postupak traženja ciljanog ubrzanja počinje određivanjem vektora oblika Φ_i , pripadnih perioda T_i i sudjelujućih masa m_{ei} , na osnovu linearne elastične analize. Vektor opterećenja \mathbf{F}_i , za svaki i -ti mod, određen je preko faktora intenziteta djelovanja p_i , kao produkt matrice masa \mathbf{M} i vekora Φ_i :

$$\mathbf{F}_i = p_i \mathbf{M} \Phi_i \quad (1)$$

Krivulje kapaciteta nosivosti dobivene su numeričkim modelom stabilnosti i nosivosti prostornih linijskih konstrukcija s uvažavanjem materijalne i geometrijske nelinearnosti [10] s monotono rastućim vektorom opterećenja \mathbf{F}_i . Na taj način određene su slomne poprečne sile na bazu proračunskog modela za svaki mod pojedinačno.

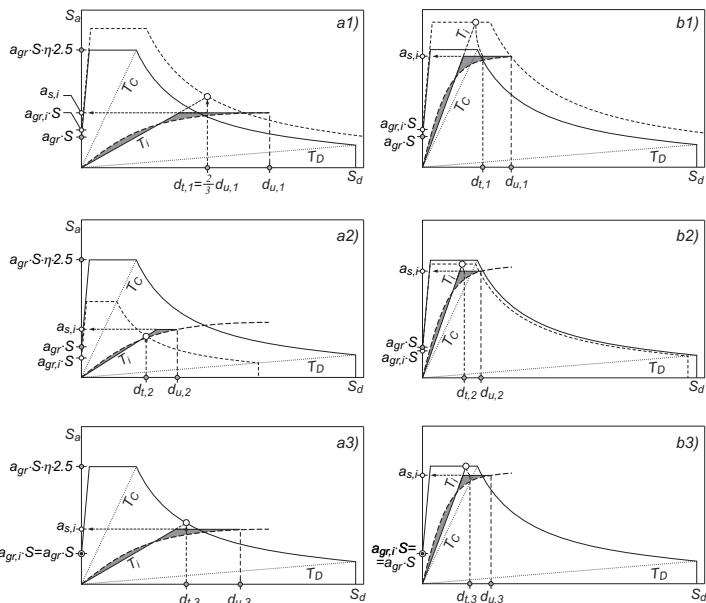
U traženju ciljanog ubrzanja, svaki pokušaj počinje s pretpostavljenom vrijednosti ciljanog ubrzanja tla a_{gr} . Za pretpostavljeni a_{gr} , tip elastičnog spektra (tip 1 ili tip 2), tip tla (parametar tla S) i korekcijski faktor prigušenja ($\eta=1$ za $\zeta=5\%$ viskozno prigušenje), konstruira se ADRS krivulja. U ADRS format prebačene su krivulje kapaciteta nosivosti svakog moda.

Spektralno ubrzanje $a_{s,i}$ određeno je za svaki mod, uvažavajući pravila EN 1998 i Dodatak B [3], tako da slomni pomak na krivulji nosivosti iznosi 150% ciljanog pomaka.

$$d_t = \frac{2}{3} d_u \quad (2)$$

Potreбно je odrediti pripadni elastoplastični ekvivalent kod kojeg sjecište perioda T_i i srodnog ciljanog pomaka d_t pada na ADRS krivulju za pretpostavljeno ubrzanje tla. Mora se pronaći jednakost dobivenog ubrzanja tla $a_{gr,i}$ u i -tom pokušaju s pretpostavljenim ubrzanjem tla a_{gr} , iz čega slijedi spektralno ubrzanje $a_{s,i}$. Postupak određivanja bilinearnog dijagrama sila-deformacija je prikazan na slici 1. Parametar δ definiran je kao omjer dobivenog spektralnog ubrzanja i pretpostavljenog ubrzanja tla.

$$\delta_i = \frac{a_{s,i}}{a_{gr}} = \delta_i(a_{gr}) \quad (3)$$



Sl. 1. Određivanje spektralnog ubrzanja $a_{s,i}$: a1)-a3) za $T_i \geq T_C$; b1)-b3) za $T_i < T_C$

Nadalje, potrebno je definirati linearnu (L) kombinaciju modova. Polazno hipotetsko granično opterećenje $\sum F_i$ za linearnu kombinaciju modova ovisi o odabranom polaznom ubrzanju a_{gr} , a može se prikazati u obliku

$$\sum F_i = \sum \pm m_{ei} a_{si} (a_{gr}) F_{fi} / |F_{fi}|, \quad (4)$$

gdje znak \pm znači više nepovoljan učinak na karakterističnom presjeku. Izraz F_{fi} predstavlja slomnu silu pojedinog vlastitog vektora.

Kao rezultat metode naguravanja dobiveno je pridruženo granično opterećenje, odnosno ukupna poprečna sila F_L na bazi cijelog sustava. Omjer iznosa računskog graničnog opterećenja F_L i polaznog hipotetskog vektora opterećenja $\sum F_i$ pokazuje realnost polazne postavke. Kada se postigne njihova jednakost, dobiveno je ekstremno granično ubrzanje, tj. ciljano ubrzanje $a_{gr,i}$ koje je najmanje računsko ubrzanje tla.

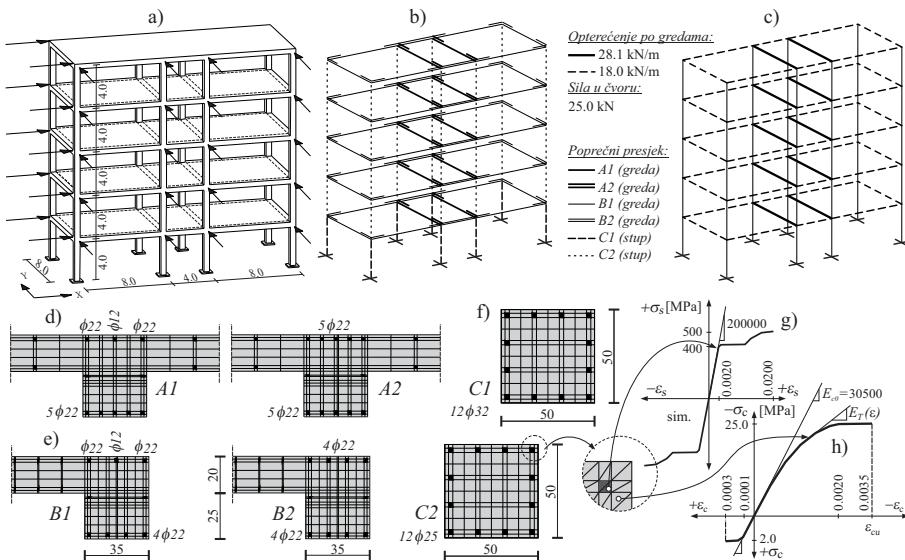
3 PRIMJER

3.1 Opis modela i proračun vektora opterećenja

Analizira se 5-katni prostorni a/b okvir dimenzija kako je prikazano na slici 2. Dimenzijski i diskretizacijski poprečni presjek greda prikazani su na slikama 2.d i 2.e, a stupova na slici 2.f. Svojstva poprečnih presjeka dodijeljena su okviru kako je prikazano na slici 2.b.

Za proračun vlastitih vektora zadana je vlastita težina modela, dodatno stalno opterećenje po ploči u iznosu 2.0 kN/m^2 i promjenjivo opterećenje po ploči u iznosu 2.0 kN/m^2 , te modul materijala $E_{c0}=30.50 \text{ GPa}$, kao ishodišni modul na modelu betona.

Za proračun krivulje nosivosti korišten je numerički model betona i armaturnog čelika prikazan na slikama 2.g i 2.h. Raspodijeljeno opterećenje je zadano po gredama kako je prikazano na slici 2.c, a koncentrirane vertikalne sile u iznosu 25.0 kN su zadane u čvorovima na svim križanjima greda i stupova. Ukupna težina modela iznosi $W=8290 \text{ kN}$, a ukupna masa modela iznosi $M=845.0 \text{ tone}$.

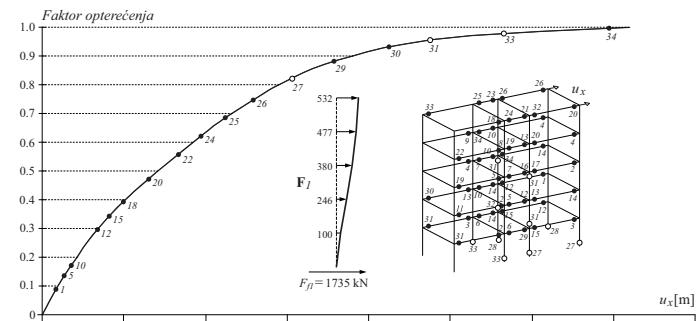


Svojstva vektora opterećenja promatranih pet modova za smjer x prikazana su u tablici 1.

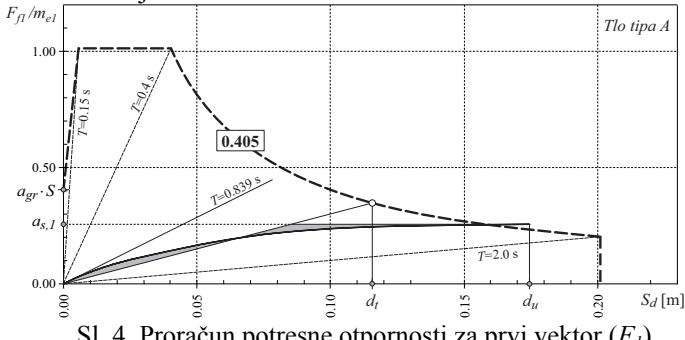
Vektor-x smjer	T_i [s]	m_{ei} [%]	m_{ei} [t]	F_{fi} [kN]	a_{gri}/g
ϕ_1	0.839	81.47	688.42	1735	0.405
ϕ_2	0.265	10.51	88.81	1823	1.75
ϕ_3	0.146	4.12	34.81	2786	7.90
ϕ_4	0.097	1.98	16.73	1954	6.32
ϕ_5	0.076	0.67	5.66	1838	41.70

Tablica 1. Svojstva vektora horizontalnog opterećenja za smjer x

Oblik prvog vektora opterećenja u graničnom stanju, pripadna krivulja nosivosti kao i redoslijed nastajanja plastifikacijskih zglobova za smjer x prikazani su na slici 3.



Konverzija krivulje nosivosti u ADRS format, određivanje elasto-plastičnog ekvivalenta kao i graničnog ciljanog ubrzanja tla sukladno EN 1998, prikazani su na slici 4. za prvi mod u x smjeru.

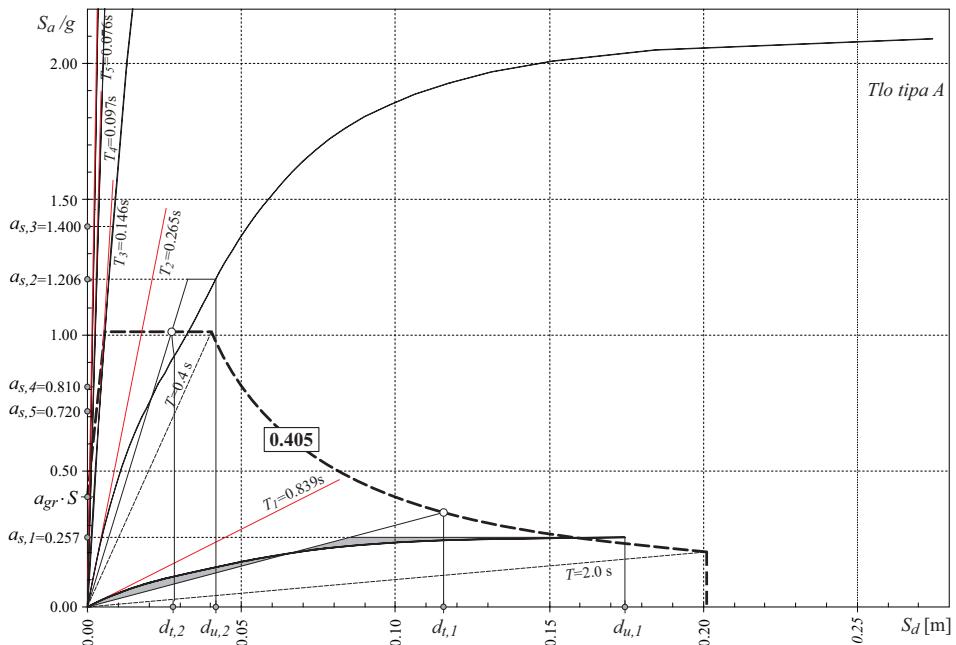


Sl. 4. Proračun potresne otpornosti za prvi vektor (F_f)

3.2 Određivanje ciljanog ubrzanja za smjer x

Kod određivanja ciljanog ubrzanja za smjer x , kao polazno ubrzanje u prvom koraku, prepostavlja se granično ubrzanje dobiveno za prvi vektor, koje iznosi $a_{gr,1} = 0.405g$.

Na slici 5. prikazano je određivanje spektralnog ubrzanja promatranih pet modova, 5-katnog a/b okvira u x smjeru, za prepostavljeno polazno ubrzanje $a_{gr,1} = 0.405g$, odnosno pokazan je prvi korak u iterativnom postupku određivanja ciljanog ubrzanja kod linearne (L) kombinacije modova. Na slici su prikazani periodi T_i i krivulje nosivosti promatranih modova. Krivulje nosivosti prvog i drugog moda su vidljive cijele na slici, dok su krivulje trećeg, četvrтog i petog moda odsječene nešto iznad spektralnog ubrzanja od $2.00g$.



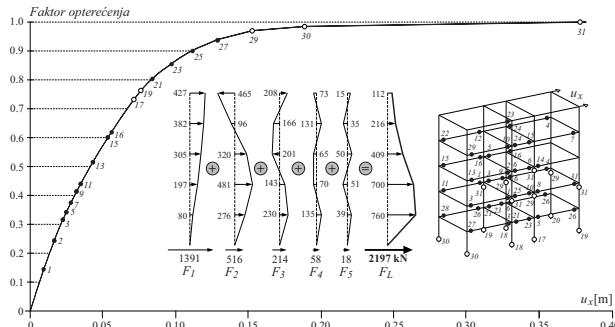
Sl. 5. Određivanje spektralnog ubrzanja modova, 5-katnog a/b okvira u smjeru x , na elastičnom spektru za ubrzanje tla $0.405g$

U tablici 2. pokazan je iterativni tok metode s rezultatom za minimalni a_{gr} , za slučaj ciljanog ubrzanja linearne kombinacije modova za smjer x . Dobiveno ciljano ubrzanje iznosi $a_{gr,t} = 0.18g$, a njemu pripadna sila u presjeku pri bazi proračunskog modela iznosi 2197 kN.

$a_{gr,i}$	$a_{s,1}$	F_1	$a_{s,2}$	F_2	$a_{s,3}$	F_3	$a_{s,4}$	F_4	$a_{s,5}$	F_5	ΣF_i	F_L	$F_L/\Sigma F_i$	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5
0.405	0.257	1735	1.206	1051	1.400	478	0.810	133	0.720	40	3437	2303	0.67	0.63	2.98	3.46	2.00	1.78
0.27	0.244	1648	0.815	710	0.930	318	0.534	88	0.479	27	2790	2232	0.80	0.90	3.02	3.44	1.98	1.77
0.22	0.228	1540	0.700	610	0.750	256	0.443	73	0.390	22	2500	2175	0.87	1.04	3.18	3.41	2.01	1.77
0.19	0.212	1432	0.620	540	0.667	228	0.383	63	0.330	18	2281	2190	0.96	1.12	3.26	3.51	2.02	1.74
0.18	0.206	1391	0.592	516	0.628	214	0.352	58	0.320	18	2197	2197	1.00	1.14	3.29	3.49	1.96	1.78
0.17	0.198	1337	0.585	510	0.608	208	0.338	56	0.308	17	2127	2191	1.03	1.16	3.44	3.58	1.99	1.81

Tablica 2. Ciljano ubrzanje pri linearnoj kombinaciji modova za smjer x

Na slici 6. prikazani su vektori opterećenja svih sudjelujućih modova, krivulja nosivosti i redoslijed nastajanja plastifikacijskih zglobova za linearnu kombinaciju modova za smjer x .



Sl. 6. Krivulja nosivosti za linearnu kombinaciju modova za smjer x

3.3 Određivanje ciljanog ubrzanja za smjer y

Svojstva vektora opterećenja promatranih modova u y smjeru prikazana su u tablici 3.

Vektor- y smjer	T_i [s]	m_{ei} [%]	m_{ei} [t]	F_{fi} [kN]	a_{gr}/g
Φ_1	0.953	80.34	678.87	1427	0.39
Φ_2	0.293	10.94	92.44	1572	1.65
Φ_3	0.156	4.51	38.11	2593	4.62
Φ_4	0.101	2.27	19.18	2146	8.08
Φ_5	0.077	0.78	6.59	1576	17.70

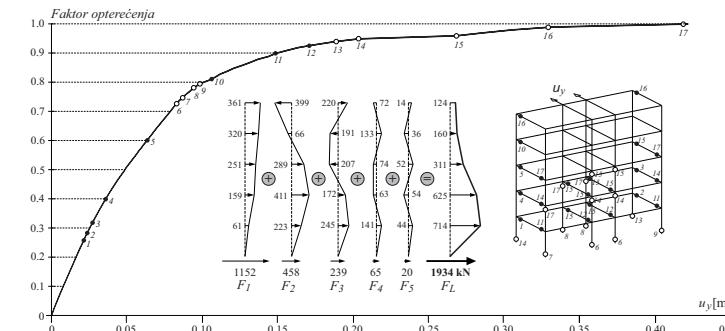
Tablica 3. Svojstva vektora horizontalnog opterećenja za smjer y

Određivanje ciljanog ubrzanja za linearnu kombinaciju modova za smjer y prikazano je u tablici 4. Kao polazno ubrzanje u prvom koraku, pretpostavlja se granično ubrzanje dobiveno za prvi vektor, koje iznosi $a_{gr,1} = 0.39g$. Dobiveno je ciljano ubrzanje $a_{gr,t} = 0.17g$, i njemu pripadna sila pri bazi modela iznosa 1934 kN.

$a_{gr,i}$	$a_{s,1}$	F_1	$a_{s,2}$	F_2	$a_{s,3}$	F_3	$a_{s,4}$	F_4	$a_{s,5}$	F_5	ΣF_i	F_L	$F_L/\Sigma F_i$	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5
0.39	0.214	1427	1.142	1036	1.388	519	0.803	151	0.698	45	3178	2097	0.66	0.55	2.93	3.56	2.06	1.79
0.25	0.202	1345	0.722	655	0.843	315	0.510	96	0.443	29	2440	1927	0.79	0.81	2.89	3.37	2.04	1.77
0.19	0.184	1225	0.560	508	0.713	267	0.390	73	0.330	21	2094	1927	0.92	0.97	2.95	3.75	2.05	1.74
0.17	0.173	1152	0.505	458	0.638	239	0.345	65	0.308	20	1934	1934	1.00	1.02	2.97	3.75	2.03	1.81

Tablica 4. Ciljano ubrzanje pri linearnoj kombinaciji modova za smjer y

Na slici 7. prikazani su vektori opterećenja svih sudjelujućih modova, krivulja nosivosti i redoslijed nastajanja plastifikacijskih zglobova za linearnu kombinaciju modova za smjer y.



Sl. 7. Krivulja nosivosti za linearnu kombinaciju modova za smjer y

4 ZAKLJUČAK

U radu je prikazana formulacija ciljanog ubrzanja i postupak za njegovo određivanje, definiranog kao najmanje ubrzanje baze koje dovodi do graničnog stanja nosivosti konstrukcije pomoću višemodalnog naguravanja, što predstavlja najnižu potresnu otpornost. Postupak se temelji na uzastopnoj primjeni nelinearne analize konstrukcije višemodalnom metodom naguravanja i uzastopnim traženjem ciljanog ubrzanja.

Na osnovu dobivenih rezultata na konkretnim primjerima može se zaključiti:

- Utjecaj viših modova, posebno drugog i trećeg moda, je veoma značajan.
- Ciljano ubrzanje uvijek je niže od graničnog ubrzanja svakog moda pojedinačno.
- Ciljanom ubrzanju pripadni opći slomni vektor oblikom se značajno razlikuje od oblika opterećenja prvog vektora ali i od oblika opterećenja s konstantnim ubrzanjem po visini konstrukcije sadržanim u EN 1998.
- Višemodalna metoda naguravanja apriori polazi od pretpostavke da su u stvarnom potresnom djelovanju svi relevantni modovi i aktivirani.
- Praktična primjena višemodalnog naguravanja pokazuje da je potresna otpornost, promatranih okvirnih a/b konstrukcija, niža od one prema kriteriju ciljanog pomaka u skladu s EN 1998 (Dodatak B).
- Uključivanje viših modova u prikazanim primjerima redovito značajno smanjuje granično vršno ubrzanje tla, a u nekim situacijama i za više od dva puta, što je znatno nepovoljnije od zahtjeva za rezervom u krivulji kapaciteta nosivosti od 150% u odnosu na karakteristični ciljani pomak vrha konstrukcije.

Literatura:

- [1] Chopra, A.K., Goel, R.K.: "A modal pushover analysis procedures for estimating seismic demands for buildings", Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Vol.31, No.3., 2002, str. 561–582.
- [2] Chopra, A.K., Goel, R.K., Chintanapakdee, C.: "Evaluation of a modified MPA procedure assuming higher modes as elastic to estimate seismic demands", Earthquake Spectra, Vol.20, No.3., 2004, str. 757-778.
- [3] European Committee for Standardization (CEN): "EN 1998-1. Eurocode 8: Design of Structures for earthquake resistance – Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings", Brussels, Belgium, 2004.
- [4] Goel, R.K., Chopra, A.K.: "Role of Higher-“Mode” Pushover Analyses in Seismic Analysis of Buildings", Earthquake Spectra, Vol.21, No.4., 2005, str. 1027-1041.
- [5] Jiang, Y., Li, G., Yang, D.: "A modified approach of energy balance concept based multimode pushover analysis to estimate seismic demands for buildings", Engineering Structures, Vol.32, No.5., 2010, str. 1272–1283.
- [6] Kalkan, E., Kunnath, S.K.: "Assessment of current nonlinear static procedures for seismic evaluation of buildings", Engineering Structures, Vol.29, 2007, str. 305–316.
- [7] Kalkan, E., Kunnath, S.K.: "Adaptive modal combination procedure for nonlinear static analysis of building structures", Journal of Structural Engineering, Vol.132, No.11., 2006, str. 1721–1731.
- [8] Sasaki, K.K., Freeman, S.A., Paret, T.F.: "Multi-mode pushover procedure (MMP) - a method to identify the effects of higher modes in a pushover analysis", Proceedings of 6th U.S. National Conference on Earthquake Engineering, Seattle, USA, 1998, str. 1-12.
- [9] Shakeri, K., Mohebbi, M.: "Single-run modal pushover procedure based on the modal shear and moment in the stories", Proceedings of 14th European Conference on Earthquake Engineering, Ohrid, Republic of Macedonia, 2010, str. 6199-6207.
- [10] Trogrić, B., Mihanović, A.: "The comparative body model in material and geometric nonlinear analysis of space R/C frames", Engineering Computations, Vol.25, No.2., 2008, str. 155-171.

Autori:

Ivan Balić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-378, e-mail: ivan.balic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

Ante Mihanović, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-357, e-mail: ante.mihanovic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

Boris Trogrić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-352, e-mail: boris.trogrlic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

MODELIRANJE ZAOSTALIH NAPREZANJA U ZAVARENIM OREBRENIM PANELIMA

Barjašić, D., Božić, Ž.

Sažetak: Koristeći programski paket ANSYS, metodom konačnih elemenata istražena je raspodjela faktora intenzivnosti naprezanja K_I kao funkcija duljine pukotine u eksperimentalnom uzorku orebrenog panela sa središnjom pukotinom, pri čemu su zaostala naprezanja uslijed zavarivanja uzeta u obzir. Ukupni faktor intenzivnosti naprezanja K_{tot} utvrđuje se superpozicijom vrijednosti uslijed vanjskog opterećenja te uslijed zaostalih naprezanja, K_{app} i K_{res} . U konkretnom primjeru pokazano je da zaostala vlačna naprezanja početno povećavaju vrijednost K_{tot} , a zatim zaostala tlačna naprezanja snižavaju vrijednost K_{tot} . Faktor intenzivnosti naprezanja uslijed zaostalih naprezanja K_{res} ima značajan utjecaj na ukupnu vrijednost faktora intenzivnosti naprezanja K_{tot} .

Ključne riječi: zaostala naprezanja, faktor intenzivnosti naprezanja, orebreni panel

1. UVOD

Tijekom procesa zavarivanja u osnovni materijal se unosi toplina, a nakon hlađenja se zbog nastalih plastičnih deformacija javljaju zaostala naprezanja. Tipična raspodjela zaostalih naprezanja u ploči sa zavarom po sredini dana je na slici 1 [1]. Vidi se da su zaostala naprezanja na području zavara vlačna i dosežu granicu tečenja, a s udaljavanjem od zavara opadaju i postaju negativna, te se na taj način međusobno uravnotežavaju.

Mahmoud and Dexter [2, 3] su istraživali ponašanje rasta pukotine zavarenog orebrenog panela. Probni uzorak je bio dio brodske oplate s četiri ukrute, koji je bio pola veličine od originalnog brodskog dijela. Rezultate simulacije su usporedili s eksperimentom. Izmjerena zaostala naprezanja su aproksimirali pravokutnom odnosno trokutnom raspodjelom.

Xian and Yazhi [4] su istraživali rast pukotine orebrenog panela oplate krila zrakoplova. Prvi eksperimentalni uzorak se sastojao od integriranog rebra u panelu, dok se drugi uzorak sastojao od zavarenog rebra na panel. Pokazalo se da integrirani panel ima manju brzinu rasta pukotine od zavarenog panela.

Od usvajanja modernih tehnika zavarivanja za proizvodnju zrakoplovnih konstrukcija, procjena faktora intenzivnosti naprezanja (FIN) uzrokovanih zaostalim naprezanjima zbog postupka zavarivanja postala je neizostavni dio u analizi oštećenja

konstrukcije. U linearno elastičnoj mehanici loma FIN se koristi kao mjerodavan parametar za predviđanje napredovanja pukotine.

U ovom radu su proučavana tri različita profila aproksimacije stvarnih zaostalih naprezanja s primjenom na uzorke orebrenih panela. Korištene su pravokutna, trokutna i aproksimacija pomoću Green-ove funkcije. Ukupni faktor intenzivnosti naprezanja K_{tot} utvrđuje se superpozicijom vrijednosti uslijed vanjskog opterećenja te uslijed zaostalih naprezanja, K_{app} i K_{res} . Cilj rada je validirati izračun FIN za jednostavnu geometriju i uspostaviti proceduru koja se može primjeniti za izračun FIN-a za složene geometrije zavarenih konstrukcija koristeći metodu konačnih elemenata.

2. Modeliranje zaostalih naprezanja u zavarenoj ploči

Utvrđivanje faktora intenzivnosti naprezanja metodom konačnih elemenata je važan zadatka u numeričkoj mehanici loma. U ovom radu je ramatran faktor intenzivnosti naprezanja povezan s prvim načinom otvaranja pukotine, K_l . Bao i ostali [5] definiraju zaostala naprezanja kao unutarnje sile koje su uravnotežene same sa sobom kroz cijelu ploču, bez djelovanja vanjskih sila. Zaostala naprezanja su uravnotežena u smislu da je integral funkcije naprezanja po širini slobodne neopterećene ploče jednak nuli. Razvijeni su razni modeli koji opisuju funkciju raspodjele zaostalih naprezanja. Vrlo često se koristi Green-ova metoda [2] dana jednadžbom 1, (Slika 1).

$$\sigma(x) = \sigma_0 e^{-\frac{|x|}{c}} \left[1 - \left(\frac{|x|}{c} \right)^2 \right] \quad (1)$$

Wu i Carlsson [6] su dali izraz za računanje faktora intenzivnosti naprezanja uslijed zaostalih naprezanja, K_{ress} . σ_y je granica tečenja materijala, a je polovična duljina pukotine i c je odsječak na kojem krivulja naprezanja siječe os x.

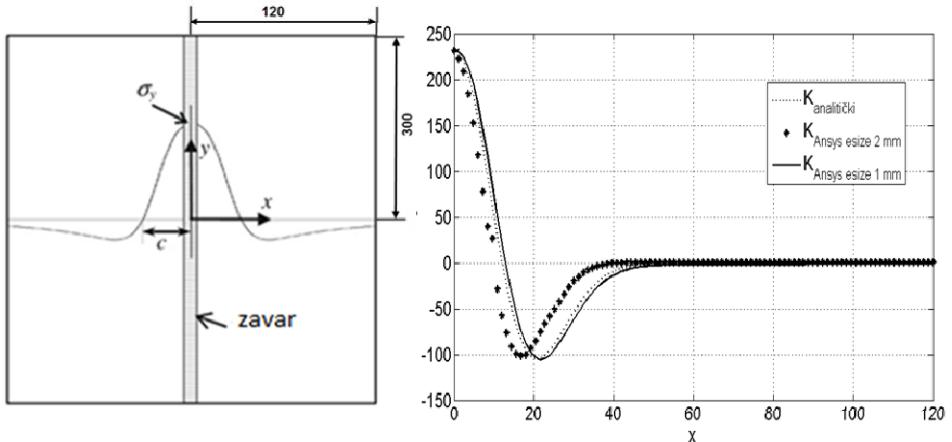
$$K_{\text{ress}} = \sigma_0 \sqrt{\pi a} e^{-0.42 \left(\frac{a}{c} \right)^2} \left[1 - \frac{1}{\pi} \left(\frac{a}{c} \right)^2 \right] \quad (2)$$

Ukupni faktor intenzivnosti naprezanja K_{tot} utvrđuje se superpozicijom vrijednosti FIN uslijed vanjskog opterećenja i uslijed zaostalih naprezanja K_{app} i K_{res} , prema jednadžbi 3,

$$K_{\text{tot}} = K_{\text{app}} + K_{\text{res}} \quad (3)$$

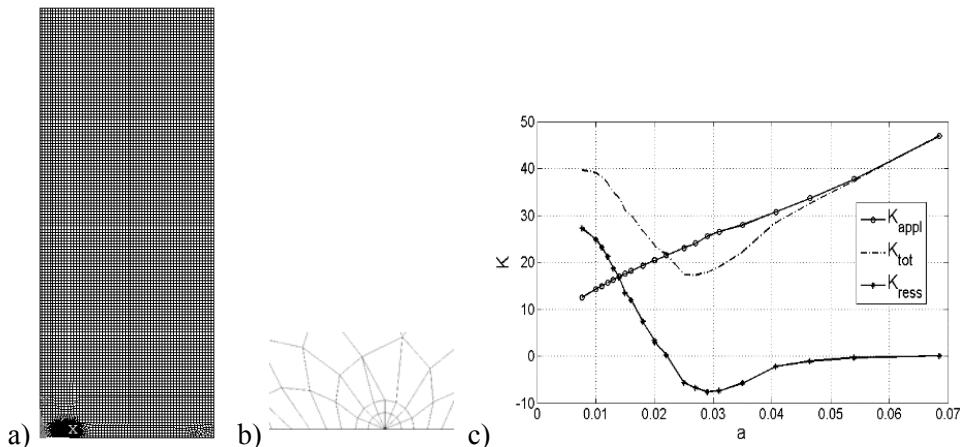
Posebnu pažnju treba posvetiti načinu unošenja vrijednosti zaostalih naprezanja u numerički model. Ako postavimo globalni koordinatni sustav tako da je y-os paralelna s linijom zavara, tada svi elementi na x udaljenosti od zavara moraju imati istu vrijednost zaostalih naprezanja. U dalnjem radu će se istražiti raspodjela naprezanja i deformacija u ploči polovične širine 120 mm i polovične duljine 300 mm (slika 1 a), sa i bez pukotine koristeći INISTATE naredbu. Uzeti parametri Green-ove funkcije su: $\sigma_t=235$ MPa i $c=12$ mm. Zbog dvostrukе simetrije dovoljno je modelirati samo jednu četvrtinu ploče. Primjer konvergencije numeričkog rješenja ovisno o finoći mreže konačnih elemenata za rezmatranu ploču je prikazan na slici 1b, gdje su prikazane

vrijednosti komponente naprezanja σ_y po širini ploče. Zaključeno je da se za finoću mreže kada je duljina stranice elementa veličina jedanog milimetra rezultati uravnoteženog naprezanja najbolje slažu s unesenim vrijednostima.



Slika 1 Geometrija analizirane ploče i raspodjela zaostalih naprezanja -konvergencija numeričkog rješenja ovisno o gustoći mreže u ploči

Na slici 2 je prikazana mreža konačnih elemenata analizirane ploče s detaljem vrha pukotine i K_I vrijednosti uslijed zaostalih naprezanja K_{res} , vanjskog opterećenja K_{app} , te ukupna vrijednost FIN K_{tot} .

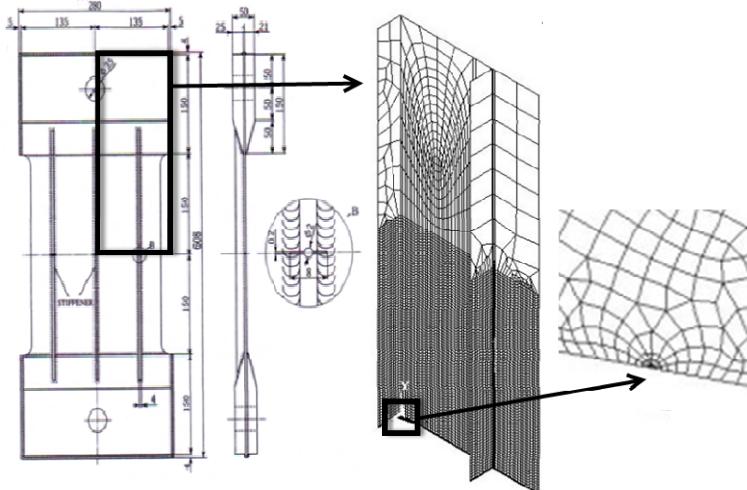


Slika 2 Analizirana ploča: a) mreža jedne četvrtine analizirane ploče, b) mreža u okolini vrha pukotine, c) K_I vrijednosti

3. Modeliranje zaostalih naprezanja za eksperimentalni uzorak orebrenog panela

U eksperimentalnom istraživanju napredovanja pukotine korišten je uzorak orebrenog panela koji ima tri ukrute zavarene na ploču [8]. Materijal uzorka je meki

konstrukcijski čelik ($E = 206\ 000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.3$, $\sigma_t = 235 \text{ MPa}$). Izgled i dimenzije uzorka orebrenog panela, oblik mreže panela, te oblik mreže u okolini vrha pukotine prikazani su na slici 3.



Slika 3 Orebreni panel: a) geometrija panela, b) mreža 1/4 orebrenog panela, c) mreža oko vrha pukotine

U analizi MKE koriste se izoparametrijski ljkustasti elementi drugog reda s osam čvorova, Shell 281 [7]. U okolini vrha pukotine koriste se singularni elementi pri čemu su međučvorovi postavljeni na jednu četvrtinu udaljenosti od vrha pukotine.

Tabela 1 Specifikacija modela konačnih elemenata

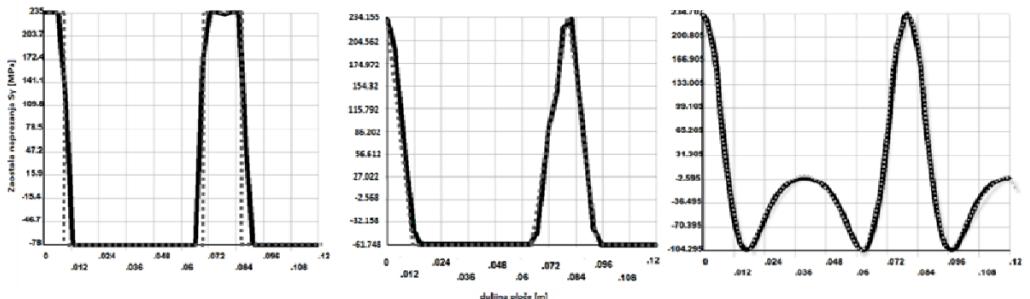
Vrsta konačnog elementa	Broj čvorova elementa	Ukupni broj elemenata
Shell 281	35757	11863
Shell 281 singularni	6	8

U orebreni panel su unesena zaostala naprezanja na način kako je to predložio Dexter [2] koristeći pravokutnu raspodjelu kao što je prikazano na slici 4a, odnosno trokutnu raspodjelu [3] kao što je prikazano na slici 4b, te u trećem slučaju je korištena Green-ova raspodjela [5], slika 4c. Puna linija predstavlja uravnovežena naprezanja dobivena kao rezultat simulacije, dok isprekidana linija predstavlja unesena zaostala naprezanja. Općenito, sve tri raspodjele se dobro slažu s narinutim vrijednostima.

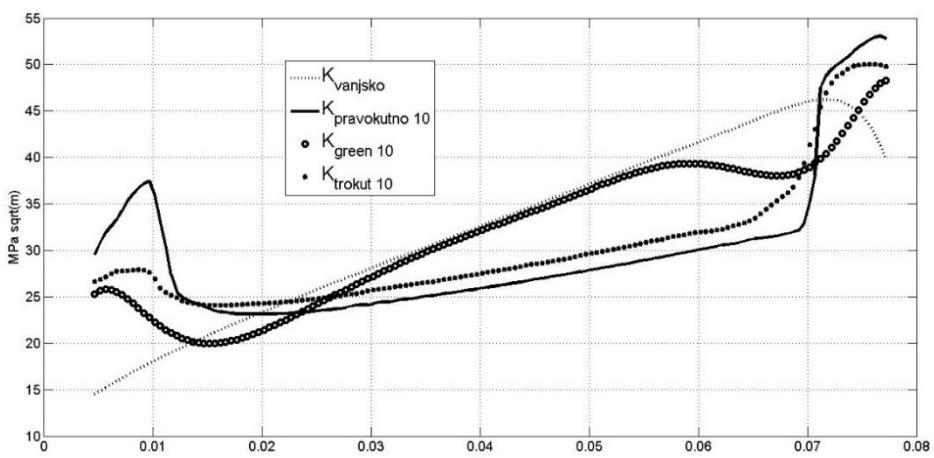
Utvrđena je promjena vrijednosti faktora K_I ovisno o duljini pukotine za slučaj vanjskog opterećenja i za slučaj kombiniranog vanjskog opterećenja i utjecaja zaostalih naprezanja. Za slučaj vanjskog opterećenja, bez zaostalih naprezanja, vrijednosti faktora intenzivnosti naprezanja K_{app} rastu s porastom duljine pukotine do 73 milimetra, a nakon toga počinju opadati zbog djelovanja drugog neoštećenog rebra, kao što se vidi na slici 5. Vlačna zaostala naprezanja u okolini ukruta značajno povećavaju vrijednost faktora intenzivnosti naprezanja. Između ukruta djeluju tlačna zaostala naprezanja i ona umanjuju vrijednost K_I .

Na slici 5 su prikazane vrijednosti faktora intenzivnosti naprezanja utvrđene metodom konačnih elemenata za pretpostavljenu raspodjelu zaostalih naprezanja prema pravokutnoj, trokutnoj i Green-ovoj razdiobi. Također, dane su vrijednosti

faktora intezivnosti naprezanja za vanjsko opterećenje. Pravokutna zaostala naprezanja najviše povčavaju vrijednosti faktora intezivnosti u blizini ukruta i najviše snižavaju vrijednosti faktora intezivnosti naprezanja između ukruta. To je iz razloga što pravokutnom aproksimacijom u blizini ukruta unosimo veća opterećenja nego u slučaju trokutne, odnosno raspodjele prema Green-u. Raspodjela zaostalih naprezanja prema Green-u najmanje snižava vrijednosti faktora intezivnosti u sredini panela jer su unešene vrijednosti zaostalih naprezanja na tom mjestu vrlo male.



Slika 4 Raspodjela zaostalih naprezanja, σ_y , u orebrenom panelu za pravokutnu, trokutnu i Green-ovu raspodjelu



Slika 5 Vrijednosti faktora intezivnosti naprezanja za pravokutnu, trokutni i Green-ovu raspodjelu

4. ZAKLJUČAK

Koristeći programski paket ANSYS istražena je raspodjela faktora intenzivnosti naprezanja K_I kao funkcija duljine pukotine u uzorku orebrenog panela sa središnjom pukotinom, pri čemu su zaostala naprezanja uslijed zavarivanja uzeta u obzir. Ukupna vrijednost faktora intenzivnosti naprezanja K_{tot} utvrđuje se superpozicijom vrijednosti FIN uslijed vanjskog opterećenja K_{app} i vrijednosti uslijed zaostalih naprezanja K_{res} . Zaostala naprezanja u okolini ukruta imaju vlačni karakter i povećavaju vrijednosti ukupnog faktora intenzivnosti naprezanja K_{tot} . Između ukruta zaostala naprezanja

djeluju tlačno i snižavaju vrijednosti faktora intenzivnosti naprezanja. Pokazano je da zaostala vlačna naprezanja u okolini ukruta povećavaju vrijednost K_{tot} , a između ukruta zaostala tlačna naprezanja snižavaju vrijednost K_{tot} . Faktor intenzivnosti naprezanja uslijed zaostalih naprezanja K_{res} ima značajan utjecaj na ukupnu vrijednost faktora intenzivnosti naprezanja K_{tot} .

Literatura

- [1] Lundback, A., *Finite Element Modelling and Simulation of Welding of Aerospace Components*, AIAA Journal, 2003
- [2] Mahmoud,H.M., Dexter, R.J., *Propagation rate of large cracks in stiffened panels under tension loading*, Marine Structures 18, 2005
- [3] Dexter, R.J., Pilarski P.J., Mahmoud,H.M, *Analysis of crack propagation in welded stiffened panels*, International Journal of Fatigue 25 (2003) 1169–1174
- [4] Xiang, Z., Yazhi, L., *Damage tolerance and fail safety of welded Aircraft wing panels*, AIAA Journal , July 2005
- [5] Bao, R., Xiang,Z., N.A. Yahaya., *Evaluating Stress Intensity Factors due to Weld Residual Stresses by the Weight Function and Finite Element Methods*, Engineering Fracture Mechanics 77 ,2010
- [6] Wu, X.R., Carlsson, A.J., *Weight Functions and Stress Intensity Factor Solutions*. 1st ed. Oxford: Pergamon Press; 1991.
- [7] Documentation for ANSYS Release 12.1. ANSYS Inc. on aeronautical fatigue. vol 11. 14–16 July 1999. p. 873–94.
- [8] Yoichi Sumi, Željko Božić, Hisashi Iyama, Yasumi Kawamura, *Multiple Fatigue Cracks Propagating in a Stiffened Panel*, Journal of The Society of Naval Architects of Japan. Vol. 179, Japan, 1996

Autori:

Danijel Barjašić, Alstom Hrvatska d.o.o., Mala Švarča 155, tel. 095 848 3307, e-mail: danijel.barjasic@power.alstom.com

Željko Božić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za zrakoplovstvo, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 098 186 3915, fax 01-6156 940, e-mail: zeljko.bozic@fsb.hr

NEIZOTERMNI TURBULENTNI MLAZ: ANALIZA SMANJENJA CENTRALNE BRZINE

Cukrov, A., Horvat, T., Vrandečić, T. Švaić, S.

O TOPLINSKIM POJAVAMA PRI ELASTIČNIM I PLASTIČNIM DEFORMACIJAMA

Čanađija, M. & Munjas, N.

Sažetak: Rad predstavlja izvore topline koji se pojavljuju prilikom elastičnog i plastičnog deformiranja metala. Naime, kako je to vrlo dobro poznato u problemima termodinamike plinova, ekspanzija plina uzrokuje sniženje temperature plina. Vrijedi i obrat. Iako se ovaj fenomen pojavljuje i kod čvrstih tijela, manje je poznat i uglavnom se zanemaruje. S druge pak strane, toplinske su pojave pri plastičnim procesima značajnije, te se ih stoga češće mora uzimati u obzir. U radu se ukratko predstavlja fizikalnu pozadinu ovakvih spregnutih pojava. Polazeći od osnovnih zakona mehanike kontinuma, koristeći varijacijski konzistentni pristup, dolazi se do evolucijskih jednadžbi osnovnih varijabli. Nakon predstavljanja osnovnih značajki numeričkih modela, cjelokupna se procedura verificira putem jednog primjera.

Ključne riječi: *Termoelastičnost, Termoplastičnost, Taylor-Quinney faktor, Varijacijska formulacija*

1 UVOD

Postojanje veze između mehaničkih i toplinskih pojava odavno je primijećena. U prvom se redu ovo odnosi na pojavu zagrijavanja metala prilikom njegove plastične obrade. Također, od antičkih vremena poznat je fenomen da se zagrijavanjem metala olakšava njegova plastična obrade. No, točan fizikalni opis ovih pojava nije bio postavljen i koristile su se određene empirijske relacije pri kvantificiranju istih. Posljednjih je godina ipak ostvaren značajan napredak u postavljanju fizikalnih modela koji objašnjavaju ovaku termomehaničku spregu.

Imajući u vidu gornje napomene, namjera je ovog rada ukratko predstaviti spregu između mehaničkih i toplinskih procesa. Isto će biti učinjeno u drugom odjeljku. Treći odjeljak postavit će fizikalne osnove za procese koji uključuju elastičnost, vremensku neovisnu plastičnost te pojavu oštećenja materijala. Posljednji odjeljak predstaviti će aplikaciju modela na problemu jednoosno opterećene epruvete te usporedbu numerički dobivenih rezultata sa eksperimentalno dobivenim pojavama.

2 SPREGA MEHANIČKIH I TOPLINSKIH PROCESA

Utjecaj topline na mehaničke pojave nešto je jednostavniji od inverznog problema. U prvome redu, isti se očituje u promjeni materijalnih značajki uslijed promjene temperature. Primjerice – modul elastičnosti mijenja se sa promjenom temperature. Isto se može primijetiti za sve materijalne značajke. Valja istaći da je ovakva ovisnost u pravilu linearna funkcija temperature, vidjeti [1] za više detalja.

Ipak, toplinske pojave mogu imati i složeniji utjecaj na mehaničko ponašanje. Tipičan su primjer fazne promjene – primjerice iz taline u krutinu. Takve se pojave neće razmatrati unutar ovog rada.

No, inverzni problem, utjecaj mehaničkih pojava na toplinske značajno je složeniji te još uvijek nije u potpunosti istražen. Već u području elastičnih deformacija dolazi do potencijalno zanimljivih pojava. Naime, u termodinamici plinova dobro je poznato da stlačivanje plina vodi porastu temperature. Vrijedi i obrat – nagla ekspanzija plina vodi snižavanju temperature. Dakle, promjena volumena i temperature međusobno su povezani. Isti se efekt može primijetiti i kod čvrstih tijela. Eksperimentalna istraživanja [2] jasno demonstriraju ovaj efekt – pri aksijalnom rastezanju epruvete u elastičnom području dolazi do povećanja volumena. Imajući u vidu analogiju sa termodinamikom plinova, i kod čvrstih tijela dolazi do pada temperature. Valja napomenuti i da je ovaj efekt linearan za većinu metala.

Nakon ulaska u područje trajnih deformacija dolazi do porasta temperature. Do ove pak pojave dolazi zbog loma veza unutar kristalne rešetke. Energija oslobođena ovakvim lomom pretvara se u toplinu. Iako je ova pojava već dugo poznata, njezina teorijska formulacija još nije u potpunosti postavljena. Naime, najčešći pristup koji se koristi u većini aplikacija temelji se na tzv. Taylor-Quinney faktoru [3]. Riječ je o sustavno provedenom eksperimentalnom istraživanju kojim je pokazano da se 85-95% utrošene snage na plastičnu deformaciju metalnih materijala pretvori u toplinu. Stoga je najčešći pristup u proračunima odabir konstantnog faktora iz spomenutog raspona. Vrlo je brzo postalo jasno da odabir konstante vrijednosti nije najbolje rješenje. Naime, daljnja su istraživanja pokazala ovisnost Taylor-Quinney faktora kako o razini deformacije, tako i o brzini deformacije. Time je problem dodatno usložen, no postoje i određeni problemi sa fizikalnom pozadinom takvog pristupa. Takav izračun topline koja se pojavi u procesima cikličkog plastičnog deformiranja vodi narušavanju drugog zakona termodinamike, pogledati u [4] za više detalja.

Naposljetku, iako se može činiti da je ranije opisan termoelastični efekt zanemariv, treba naglasiti da isti ima aplikaciju u eksperimentalnoj mehanici pri izračunu naprezanja u elastičnom području iz izmjerenoj polja temperature. Novije aplikacije uključuju i određivanje granice tečenja temeljem promatranja porasta temperature [2]. Ovakav se postupak može koristiti kao alternativna metoda konvencionalnom određivanju granice tečenja putem naprezanja koje odgovara 0.2% trajne deformacije.

3 TERMODINAMIČKI MODEL

Prema [4] varijacijska struktura termoplastičnosti može se rastaviti u lokalni i globalni oblik:

Lokalni oblik:

$$(p, \bar{N}, \dot{N}) = \arg \inf_{\dot{N}, p, \bar{N}} \dot{I}_{inc}(\dot{\phi}, p, \bar{N}, \dot{N}, \Theta) \Big|_{\dot{\phi}=const, \Theta=const} \quad (1)$$

Globalni oblik:

$$(\dot{\phi}, \Theta) = \arg \inf_{\dot{\phi}} \sup_{\Theta} \dot{I}_{inc}^{red}(\dot{\phi}, \Theta)$$

$$\dot{I}_{inc}^{red}(\dot{\phi}, \Theta) = \inf_{\dot{N}, p, \bar{N}} \dot{I}_{inc}(\dot{\phi}, p, \bar{N}, \dot{N}, \Theta) \Big|_{\dot{\phi}=const, \Theta=const},$$

gdje je

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_{inc} &= \int_B \left[\dot{E}(F, p, \bar{\Sigma}, \dot{N}) - \Theta \dot{N} + D_{int}(f(p, \bar{\Sigma})) - \chi(\Theta, \text{GRAD } \Theta) \right] dV - P_F(\dot{\phi}) + P_\Theta(\Theta) \\
 P_F(\dot{\phi}) &= \int_B \rho_0 \mathbf{B} \cdot \dot{\phi} dV + \int_{\partial F} \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\phi} dS \\
 P_\Theta(\Theta) &= \int_B \rho_0 R \log \frac{\Theta}{\Theta_0} dV - \int_{\partial H} \bar{H} \log \frac{\Theta}{\Theta_0} dS.
 \end{aligned} \tag{2}$$

D_{int} je unutrašnja disipacija, P_F je snaga uslijed vanjskog volumenskog i površinskog opterećenja i P_Θ je snaga zbog zadanog toplinskog toka i toplinskih izvora.

Na problem (1-2) mogu se narinuti uvjeti stacionarnosti, što vodi sljedećem skupu jednadžbi [4]:

Local:

$$\begin{aligned}
 \delta_{\bar{\Sigma}} \dot{I}_{inc} = 0 &\rightarrow -p \tilde{\Xi} : \partial_{\bar{\Sigma}}^2 \phi \Big|_{\tilde{\Xi}=\bar{\Sigma}} = 0 \\
 \delta_p I \geq 0 &\rightarrow -\phi = 0 \\
 \delta_{\dot{N}} I = 0 &\rightarrow \partial_N E - \Theta = 0
 \end{aligned} \tag{3}$$

Global:

$$\begin{aligned}
 \delta_{\dot{\phi}} \dot{I}_{inc}^{red} = 0 &\rightarrow \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} dV - \delta \mathbf{P}_F = 0 \\
 \delta_\Theta \dot{I}_{inc}^{red} = 0 &\rightarrow -\dot{N} + \frac{1}{\Theta} D_{int} + \frac{1}{\Theta} \rho_0 Q - \frac{1}{\Theta} \text{DIV } \mathbf{H} = 0.
 \end{aligned}$$

Jednadžba (3)₁ povezuje naprezanja $\tilde{\Xi}$ sa pseudo-naprezzanjima $\bar{\Sigma}$. Uvjeti stacionarnosti obzirom na $p = \frac{\lambda}{1-D}$ (gdje je λ plastični multiplikator i D skalarni parametar koji opisuje stanje oštećenja) pokazuje da je funkcija tečenja uključena u formulaciju. Dobivena naprezanja su dopustiva, $\phi = 0$ za slučaj plastičnosti i $\phi < 0$ za elastični slučaj. Globalna minimizacija obzirom na brzinu konfiguracije daje jednadžbu očuvanja linearne momenta (3)₅. Maksimizacija obzirom na vanjsku temperaturu daje prvi zakon termodinamike.

4 PRIMJER

U ovome primjeru bit će razmotreno ponašanje alfa-titana prilikom aksijalnog vlačnog testa. Eksperimentalna analiza provedena je u [5]. Kako je ustanovljeno u spomenutom eksperimentalnom istraživanju, mehaničko ponašanje alfa-titana ovisi o brzini deformacije, te je stoga za njegovu analizu prikladno upotrijebiti viskoplastični model, poput u [6]. Ipak, u svrhu provjere elastoplastičnog modela opisanog u ovom radu, isti će eksperimentalni rezultati biti iskorišteni jer će se promatrati samo jedna brzina deformacije čime se problem transformira u elastoplastični.

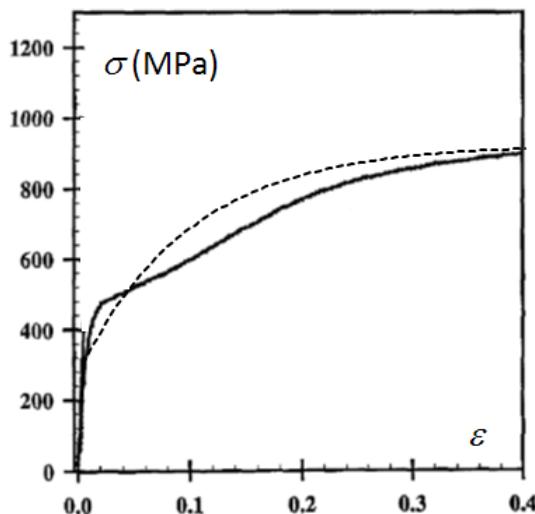
Materijalne značajke prikazane su u Tab. 1.

Tab. 1. Materijalne značajke alfa-titana

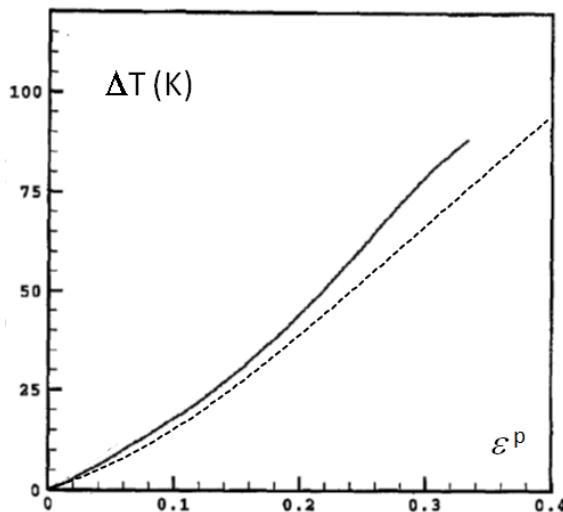
E , GPa	ν	γ_0 , MPa	H_k MPa	B_k
116	0,361	300	4500	10
α , K ⁻¹	ω_0 , K ⁻¹	c , J/kgK	k , W/Km	h_{conv} W/m ² K
$8,9 \cdot 10^{-6}$	0,001	522	11,4	8
Θ_{env} , K	ε_{rad}	σ_{rad} W/m ² K ⁴		
293	1	$5,67 \cdot 10^{-8}$		

Dobiveni rezultati vidljivi su na sl. 1 i 2. Kao što je vidljivo iz sl. 1, numerička krivulja naprezanje-deformacija ne prati jednakost eksperimentalne rezultate u svim svojim dijelovima. Valja uočiti da u prvom dijelu krivulja ima malo izražen konkavni dio. Na ovome se mjestu mora naglasiti da se takvi konkavni dijelovi tipično javljaju kod materijala osjetljivih na tzv. „twinning“ oblik plastične deformacije. Ovakav je vid deformacije vrlo čest kod magnezijevih slitina, pogledati npr. [7] i reference navedene u tom radu. Kod takvih se slitina, nakon tlačne deformacije, a pri ulasku u vlačnu deformaciju javlja upravo takav konkavni oblik krivulje. U tom smislu valja reći da se na opisu takvih materijala još uvijek intenzivno radi te da konačno rješenje još uvijek nije predstavljeno znanstvenoj javnosti.

Dijagram porasta temperature – plastična deformacija pokazuje dobro podudaranje između eksperimentalnih i numeričkih rezultata. Varijacije u nagibu eksperimentalnih rezultata također bi trebalo dublje istražiti i ustanoviti mogu li se iste pripisati „twinning“ efektima. U tu bi svrhu valjalo poznavati prethodni proces plastične deformacije, uveden pri izradi uzorka materijala, što se u radu koji predstavlja eksperimentalno istraživanje ne opisuje.



Sl. 1. Dijagram naprezanje – deformacija. Brzina deformacije $\dot{\epsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$. Puna linija – eksperimentalni rezultati, isprekidana numerički rezultati. Dijagram eksperimentalnih rezultata preuzet iz [5].



Sl. 2. Dijagram porast temperature – plastična deformacija. Brzina deformacije $\dot{\varepsilon} = 1 \text{ s}^{-1}$. Puna linija – eksperimentalni rezultati, isprekidana numerički rezultati. Dijagram eksperimentalnih rezultata preuzet iz [5].

5 ZAKLJUČAK

U radu su predstavljeni osnovne toplinske pojave koje se javljaju prilikom mehaničkih utjecaja na konstrukciju. Postavljene su teorijske osnove za matematički opis ovih pojava, te smjernice za numeričko rješavanje problema. Verifikacija je osigurana putem usporedbi numeričkih i eksperimentalnih rezultata. Može se reći da predstavljeni model kvalitativno dobro opisuje termomehaničku spregu. Daljnja verifikacija modela zahtijeva ciljano provedeno eksperimentalno istraživanje popraćeno istovremenim razvojem numeričkom modela.

Literatura:

- [1] Stainier, L., "Consistent incremental approximation of dissipation pseudo-potentials in the variational formulation of thermo-mechanical constitutive updates", Mechanics research communications, vol. 38, 2011, str. 315-319.
- [2] Oliferuk,W., Maj, M., Litwinko, R., Urbanski, L., "Thermomechanical coupling in the elastic regime and elasto-plastic transition during tension of austenitic steel, titanium and aluminium alloy at strain rates from 10-4 to 10-1 s-1", European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 35, 2012, str.. 111-118
- [3] Taylor, G.I., Quinney, H., "The latent energy remaining in a metal after cold working", Proceedings of the Royal Society, A, vol. CXLIII, 1934, str. 307-326
- [4] Čanadija, M., Mosler, J., „On the thermomechanical coupling in finite strain plasticity theory with non-linear kinematic hardening by means of incremental energy minimization“, International Journal of Solids and Structures, Vol. 58, No. 7-8, 2011, str. 1120-1129.
- [5] Hodowany, J., Ravichandran, G., Rosakis, A. J., Rosakis, P., „Partition of Plastic Work into Heat and Stored Energy in Metals“, Experimental Mechanics, 1995. str. 113-123.

[6] Yang, Q., Stainier, L., Ortiz, M., "A variational formulation of the coupled thermo-mechanical boundary-value problem for general dissipative solids", J. Mech. Phy. Solids, vol. 54, 2006, str.401-424.

[7] Čanadija, M, Guo, X., Lanc, D., Brnić, J., „Mechanical properties and low cycle fatigue of rapidly solidified and extruded alloy Mg-6Zn-1Y-0.6Ce-0.6Zr at different temperatures“, pripremljeno za publikaciju.

Autori:

Marko Čanadija, Sveučilište u Rijeci, Tehnički Fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 496, fax 051 651 490, e-mail: markoc@riteh.hr, web stranica: www.riteh.uniri.hr.

Neven Munjas, Sveučilište u Rijeci, Tehnički Fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 503, fax 051 651 490, e-mail: nmunjas@riteh.hr, web stranica: www.riteh.uniri.hr.

UDARNO OPTEREĆENJE HARFE IZMJENJIVAČA TOPLINE

Damjanović, D., Kozak, D., Sertić, J., Gelo, I., Konjatić, P. & Novoselac, S.

Sažetak: Izgaranjem u parnom kotlu spalionice smeća stvaraju se dimni plinovi koji struje preko izmjenjivača topoline. Struja dimnih plinova sa sobom nosi i čestice pepela koje prijanju na izmjenjivačke površine te na taj način stvaraju sloj naslaga koji smanjuje efikasnost izmjene topoline. Na izmjenjivačima topoline tipa harfa naslage pepela otklanjaju se pomoću udarača koji može biti mehanički ili pneumatski. Udarač posredno preko trna udara u podnicu donje komore harfe izmjenjivača i predaje joj kinetičku energiju. Kinetička energija, koja se udarom predaje harfi, treba biti dosta da se harfa zanjiše. Uslijed njihanja harfe pojavljuju se inercijalne sile na sloj naslaga koje su veće od athezijskih sila između površine cijevi izmjenjivača i sloja zaprljanja. Zbog toga dolazi do odvajanja naslaga pepela s površine cijevnog izmjenjivača. Projektiranje harfe izmjenjivača provodi se prema EN12952 obzirom na utjecaj proračunskog tlaka i mase harfe, medija i zaprljanja. U ovome radu predložiti će se analitički postupak utvrđivanja ekvivalentne staticke sile deformiranja cijevi harfe zbog udara trna udarača o podnicu komore harfe izmjenjivača. Biti će analiziran utjecaj udara udarača na naprezanje i pomak harfe izmjenjivača.

Ključne riječi: udarno opterećenje, izmjenjivač topoline tipa harfa, ekvivalentna sila deformiranja, zamor

1 UVOD

Izmjenjivač topoline tipa harfa za vrijeme eksploracije izložen je utjecaju radnog tlaka, mase harfe, radnog medija i zaprljanja, utjecaju povišene temperature, korozije, trošenja, ali i udarnog opterećenja udarača. Projektiranje harfe izmjenjivača izvodi se prema EN12952 [1] i ne obvezuje razmatranje utjecaja udarnog opterećenja. Udarno opterećenje vrlo je kompleksan mehanički problem koji u općem slučaju može uključivati velike deformacije, materijalnu nelinearnost, elastičnu i plastičnu stabilnost te materijalna svojstva kod visokih brzina deformiranja [2,3]. Fizika udara neophodno uključuje zakon očuvanja energije i zakon očuvanja količine gibanja. Disipaciju energije u kontaktnoj zoni sudara teško je predvidjeti, stoga je zakon očuvanja količine gibanja osnova za proučavanje mehanike udara. Prilikom udara udarača o podnicu komore harfe dolazi do elastičnog deformiranja harfe, ali i lokalne plastične deformacije u zoni udara. Prema St Venantovom principu lokalni efekti deformiranja mogu se izdvojiti iz globalnog odziva harfe uslijed udarnog opterećenja te se zasebno razmatrati. Problem udarnog zamornog utjecaja na podnicu neće biti predmet razmatranja ovoga rada, ali je dio integralnog istraživanja provedenog na izmjenjivačkoj harfi kotla spalionice smeća Vaasa [5]. Obzirom da je zamor materijala

problem površine, znatna poboljšanja zamorne čvrstoće mogu se postići površinskom toplinskom obradom [4]. S ciljem određivanja utjecaja udarnog opterećenja na harfu izmjenjivača topline ovdje će se analizirati samo elastično deformiranje harfe. Zbog učestalosti udara udarača udarno opterećenje harfe može se svrstati pod visoko-cikličko zamorno opterećenje. Najizloženiji dio izmjenjivačke harfe zamoru, uz podnicu, je zavareni spoj cijevi harfe i komore. Ukupna amplituda dinamičkog opterećenja harfe biti će jednaka zbroju efekta udarnog opterećenja i opterećenja masom naslaga pepela za čiji se iznos harfa rasterećuje u trenutku udara udarača. Na smanjenje dinamičke čvrstoće harfe dodatno utječe opterećenje radnim tlakom, masom harfe, rupičasta korozija i prisutno trošenje. Ovdje će se analizirati samo utjecaju udarnog opterećenja. Visoko-ciklički zamor uslijed udarnog opterećenja na konstrukcijskim čelicima istraživao je B. S. Shul'ginov [6], pri čemu je dokazano da je uz istu amplitudu dinamičkog opterećenja iznos trajne dinamičke čvrstoće ispitivanog materijala nešto veći za udarno, nego za mirno promjenjivo (harmonijsko) opterećenje. Utjecaj udarnog opterećenja na zamornu čvrstoću čelika pri sobnoj temperaturi ispitivan je i može se naći u [7-10].

2 ODREĐIVANJE EKVIVALENTNE SILE DEFORMIRANJA CIJEVI HARFE

Harfa izmjenjivača topline predstavlja okvirnu konstrukciju. Klip mase m_p posredno udara preko trna u podnicu donje komore harfe izmjenjivača u pravcu njezine uzdužne osi. Pomoću opruge osigurano je da trn cijelo vrijeme naliježe na podnicu te će se njegov utjecaj ovdje zanemariti. Harfa se sastoji od n cijevi, stoga je dovoljno razmotriti problem elastičnog deformiranja samo jedne cijevi prema sl. 1. Kod udara klipa udarača u harfu izmjenjivača, harfa će dobiti količinu gibanja

$$p = p_k + p_c . \quad (1)$$

Donja komora će dobiti količinu gibanja koja se može izračunati pomoću izraza

$$p_k = m_k \cdot v_0(l) , \quad (2)$$

gdje je m_k masa donje komore, a $v_0(l)$ brzina donje komore odmah nakon udara udarača. Količina gibanja cijevi u harfi može se izračunati prema izrazu

$$p_c = p_1 \cdot n , \quad (3)$$

gdje je p_1 količina gibanja jedne cijevi izmjenjivačke harfe, a n broj cijevi u harfi. Prema definiranim rubnim uvjetima (sl. 1), nakon udara trna udarača, doći će do deformiranja cijevi harfe. Količina gibanja cijevi harfe i pripadajućeg volumena naslaga pepela jednaka je

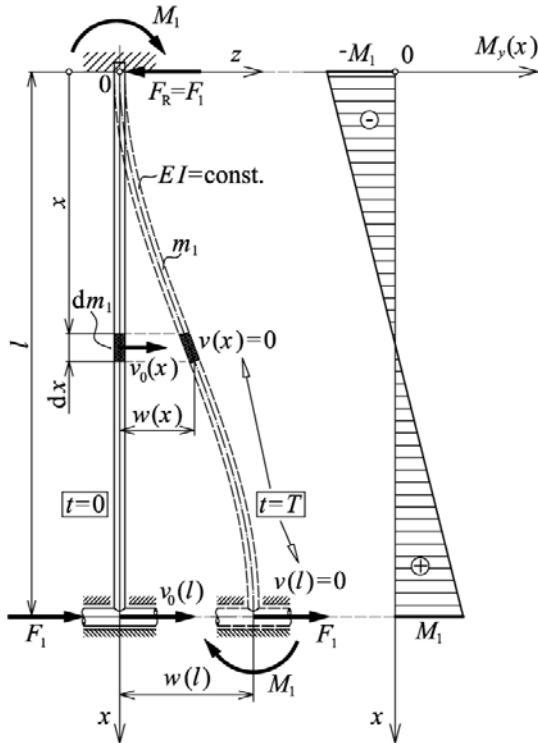
$$p_1 = A \cdot \rho \cdot \int_0^l v_0(x) dx . \quad (4)$$

Ako se uzme da je ekvivalentna sila deformiranja cijevi harfe konstantna, tada je progib cijevi w proporcionalan s brzinom v_0

$$\frac{w(l)}{w(x)} = \frac{v_0(l)}{v_0(x)} . \quad (5)$$

Jednadžba elastične linije cijevi harfe izmjenjivača glasi

$$w(x) = \frac{F_1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot l \cdot x^2 - \frac{1}{6} \cdot x^3 \right). \quad (6)$$



Sl. 1. Mehanički model elastičnog deformiranja cijevi izmjenjivačke harfe

Prema izrazu (6), maksimalni progib cijevi harfe iznosi

$$w(l) = \frac{F_1 \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot I}. \quad (7)$$

Uvrste li se izrazi (6) i (7) u (5) dobiti će se izraz za brzinu cijevi harfe neposredno nakon udara udarača

$$v_0(x) = \frac{6 \cdot v_0(l)}{l^3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right). \quad (8)$$

Količina gibanja cijevi harfe, neposredno nakon udara udarača, može se izračunati pomoću izraza (4) i (8), pri čemu je m_1 masa cijevi i pripadajućeg volumena zaprljanja

$$p_1 = 0,5 \cdot m_1 \cdot v_0(l). \quad (9)$$

Primjenom izraza (1), (2), (3) i (9) slijedi količina gibanja harfe izmjenjivača

$$p = (m_k + 0,5 \cdot m_1 \cdot n) \cdot v_0(l). \quad (10)$$

Kod pneumatskih udarača moguće je regulirati kinetičku energiju klipa, koji dio svoje kinetičke energije u sudaru predaje harfi. Brzina klipa udarača v_p , neposredno prije sudara, $m E_k$. Ako je k faktor restitucije sudara, a c_p brzina klipa udarača nakon sudara, primjenom zakona očuvanja količine gibanja može se doći do izraza za brzinu $v_0(l)$

$$v_0(l) = \left(1 + \frac{1}{k} \right) \cdot \sqrt{2 \cdot E_k \cdot m_p} \cdot \left(m_p + m_k + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot n \right)^{-1}. \quad (11)$$

Ako se izraz (11) uvrsti u (8) dobiti će se izraz za brzinu cijevi harfe odmah nakon udara udarača

$$v_0(x) = e_k \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right), \quad (12)$$

pri čemu je e_k konstanta za određenu izmjenjivačku harfu i pneumatski udarač

$$e_k = 6 \cdot l^{-3} \cdot \left(1 + \frac{1}{k} \right) \cdot \sqrt{2 \cdot E_k \cdot m_p} \cdot \left(m_p + m_k + \frac{1}{2} \cdot m_l \cdot n \right)^{-1}. \quad (13)$$

Tijekom sudara, harfa izmjenjivača dobiti će kinetičku energiju koja će se najvećim djelom pretvoriti u potencijalu energiju elastičnog deformiranja harfe. Kinetička energija n cijevi harfe jednaka je

$$E_{k,c} = \frac{n}{2} \cdot \int_{m_l} v_0^2(x) dm_l = \frac{13}{2520} \cdot m_l \cdot e_k^2 \cdot l^6 \cdot n. \quad (14)$$

Primjenom izraza (11), kinetička energija donje komore harfe može se izraziti kao

$$E_{k,k} = \left(1 + \frac{1}{k} \right)^2 \cdot E_k \cdot m_p \cdot m_k \cdot \left(m_p + m_k + \frac{1}{2} \cdot m_l \cdot n \right)^{-2}. \quad (15)$$

Ukupna kinetička energija, koju harfa izmjenjivača dobije kod udara udarača, je

$$E_{k,h} = E_k \cdot m_p \cdot \left(1 + \frac{1}{k} \right)^2 \cdot \left(\frac{13}{35} \cdot n \cdot m_l + m_k \right) \cdot \left(m_p + m_k + \frac{1}{2} \cdot m_l \cdot n \right)^{-2}. \quad (16)$$

Kinetičke energije harfe najvećim dijelom će se potrošiti na savijanje cijevi harfe pa će se ovdje zanemariti energija deformiranja komora. Ukupna potencijalna energija elastičnog deformiranja harfe, zbog djelovanja ekvivalentne sile deformiranja F , približno je jednaka potencijalnoj energiji deformiranja cijevi harfe

$$U = \frac{F^2 \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I \cdot n}. \quad (17)$$

Ekvivalentnu silu deformiranja harfe može se dobiti iz jednakosti kinetičke energije harfe (16) i potencijalne energije elastičnog deformiranja (17)

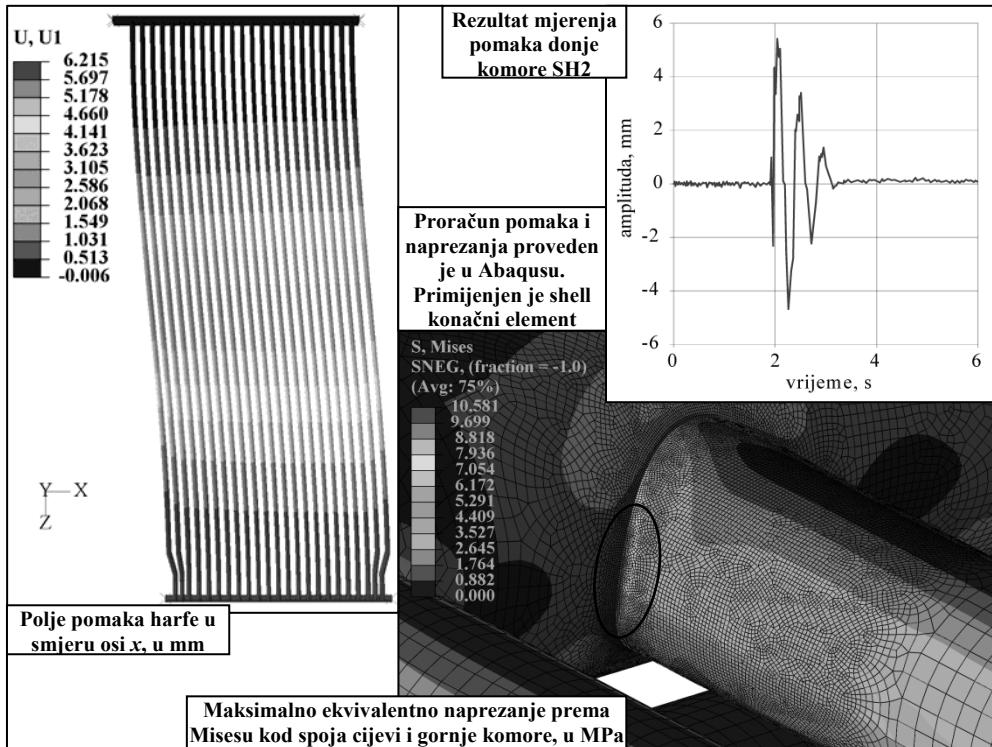
$$F = \frac{k+1}{k \cdot (m_p + m_k + 0,5 \cdot m_l \cdot n)} \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot E_k \cdot m_p \cdot E \cdot I \cdot n}{l^3} \cdot \left(\frac{13}{35} \cdot n \cdot m_l + m_k \right)}. \quad (18)$$

3 NUMERIČKI PRIMJER I REZULTATI MJERENJA

U kotlu spalionice smeća Vaasa harfa pregrijala pare SH2 izvedena je od cijevi materijala P235GH-TC2. Cijevi harfe su $\phi 57 \times 5,6$ mm, dok je donja komora $\phi 101,6 \times 12,5$ mm. Duljina cijevi harfe je $l = 6910$ mm, a duljina donje komore $l_k = 2690$ mm. Klip udarača ima masu $m_p = 12$ kg. Harfa se sastoji od $n = 46$ cijevi.

Kinetička energija klipa udarača je $E_k = 140$ J. Faktor restitucije za čelik-čelik neka je $k = 0,5$. Prosječna radna temperatura pregrijala harfe SH2 je $\vartheta = 340$ °C. Masa komore je $m_k = 74$ kg, a masa jedne cijevi harfe s pripadajućim zaprljanjem $m_l = 75$ kg. Modul elastičnosti za materijal harfe pri radnoj temperaturi [11] je $E = 180,48$ GPa. Ekvivalentna sila deformiranja cijevi harfe SH2 može se odrediti

prema izrazu (18) te ona iznosi $F = 534 \text{ N}$. Na kotlu je provedeno mjerjenje pomaka donje komore izmjenjivačke harfe SH2, primjenom sustava monitoringa, koji je sastavni dio upravljačke opreme kotla. Uvjeti mjerjenja za harfu SH2 bili su kao što je zadano u numeričkom primjeru.



Sl. 2 Rezultati proračuna dobivenih primjenom predloženog postupka i dijagram pomaka

4 ZAKLJUČAK

Primjenom predloženog postupka izračuna ekvivalentne sile deformiranja i numeričkog (FEM) proračuna, dobiven je pomak donje komore harfe SH2 $w(l) = 6,22 \text{ mm}$ i maksimalno naprezanje $\sigma_{\text{ekv}} = 10,6 \text{ MPa}$. Mjerjenjem je ustanovljeno da je pomak nešto manji od 6 mm (sl. 2). Razlike su nastale zbog uvedenih pojednostavljenja u matematičkom modelu, ali i nemogućnosti točnog utvrđivanja mase harfe s pripadajućim zaprljanjem.

Predloženi postupak proračuna omogućuje projektantu konstrukcije harfe izmjenjivača da u svoj proračun čvrstoće uključi utjecaj udarnog opterećenja. Primjenom predloženog postupka može se utvrditi maksimalna dopuštena energija udara udarača, obzirom na zamornu čvrstoću harfe.

Nastavak istraživanja ići će u smjeru utvrđivanja utjecaja udara udarača na čvrstoću i vijek trajanja konstrukcije harfe izmjenjivača, s posebnim osvrtom na različite tipove izmjenjivačkih harfi te zavareni spoj cijevi ogrjevne površine i gornje komore.

Literatura:

- [1] The European Standard EN 12952:2001
- [2] Irvine, H.M., "Structural Dynamics for the Practising Engineer", Allen and Unwin, London, 1986.
- [3] Harris, C.M., Crede, C.E., "Shock and Vibration Handbook", McGraw-Hill, New York, 1976.
- [4] Johnson, A. A., Storey, R. J., "The impact fatigue properties of iron and steel", Journal of sound and Vibration, Vol.308, 2007, str. 458-466.
- [5] Sertić, J., Krpan, A., Damjanović, D., Gelo, I., "Udarno opterećenje harfe izmjenjivača topline na kotlu Vaasa, 26.0183", Tehničko izvješće, ĐĐ TEP d.o.o., Slavonski Brod, 2012.
- [6] Shul'ginov, B. S., "Fatigue strength of steels under multicycle impact loading", Strength of Materials, Vol.26, No.3, 1994.
- [7] Davidenkov, N.N., Belyaeva, E.I., "Examination of impact fatigue", Metalloved. Obrab. Met., No.11, 1956, str. 4–10.
- [8] Silkin, E.A., "Impact-Cyclic Strength of Steels Used in Agricultural Engineering [in Russian]", Mashinostroenie, Moscow, 1964.
- [9] Tolkachnik, S.V., "Impact fatigue under stress concentration conditions" Izv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tekh. Nauk, No.5, 1958, str. 106–110.
- [10] Sidnev, V.I., "Examination of the relationships governing fatigue failure of structural steels under impact loading", Dissertation for the Degree of the Candidate of Technical Sciences, Kiev, 1967.
- [11]ASME B31.1-1995

Autori:

Darko Damjanović, Sveučilište u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane-Brlić Mažuranić 2, HR-35000 Slavonski Brod, tel. 035/446-188, fax 035/446-446, e-mail: Darko.Damjanovic@sfsb.hr, web stranica: <http://www.sfsb.unios.hr/fakultet/ustroj/zsk/ddamjanovic>

Dražan Kozak, Sveučilište u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane-Brlić Mažuranić 2, HR-35000 Slavonski Brod, tel. 035/446-188, fax 035/446-446, e-mail: Drazan.Kozak@sfsb.hr, web stranica: <http://www.sfsb.unios.hr/fakultet/ustroj/zsk/dkozak>

Josip Sertić, Sveučilište u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane-Brlić Mažuranić 2, HR-35000 Slavonski Brod, tel. 035/446-188, fax 035/446-446, e-mail: Josip.Sertic@sfsb.hr, web stranica: <http://www.sfsb.unios.hr/fakultet/ustroj/zsk/jsertic>

Ivan Gelo, Sveučilište u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane-Brlić Mažuranić 2, HR-35000 Slavonski Brod, tel. 035/446-188, fax 035/446-446, e-mail: Ivan.Gelo@sfsb.hr, web stranica: <http://www.sfsb.unios.hr/fakultet/ustroj/zsk/gelo>

Pejo Konjatić, Sveučilište u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane-Brlić Mažuranić 2, HR-35000 Slavonski Brod, tel. 035/446-188, fax 035/446-446, e-mail: Pejo.Konjatic@sfsb.hr, web stranica: <http://www.sfsb.unios.hr/fakultet/ustroj/zsk/pkonjatic>

Stipica Novoselac, student poslijediplomskog doktorskog studija, tel. 091/5056300, e-mail: stipica.novoselac@gmail.com

**GEOMETRIJSKI TOČAN 3D GREDNI KONAČNI
ELEMENT – KONCEPT NEPOMIČNOG POLA**
Maja Gaćeša i Gordana Jelenić

ZAGRIJAVANJE VODE PRIRODNOM KONVEKCIJOM POMOĆU HORIZONTALNO URONJENOG GRIJAČA

Holik, M., Krizmanić, S., Ferdelji, N., Živić, M. & Galović, A.

Sažetak: U radu se prikazuje način zagrijavanja zadane mase vode prirodnom konvekcijom pomoću horizontalno uronjenog cilindričnog grijajućeg cilindra. Razmatraju se dva načina zagrijavanja, održavanjem konstantne površinske temperature grijajućeg cilindra i održavanjem konstantne snage grijajućeg cilindra. Za rješenje postavljenog nestacionarnog problema korištene su dvije metode, analitička metoda s kvazistacionarnim modelom i numerička metoda konačnih volumena u okviru FLUENT računalnog paketa.

Ključne riječi: prirodna konvekcija, horizontalni grijajući cilindar, kvazistacionarno zagrijavanje vode

1 UVOD

Prijenos topline prirodnom konvekcijom s horizontalnog cilindra ima različite primjene, od grijajućeg cilindra do solarnog grijanja i hlađenja elektroničkih paketa. Prirodna konvekcija oko horizontalnog cilindra [1] i cijevi [2] ispitivana je u prošlosti, a ispituje se i danas, s naglaskom na eksperimentalnu potvrdu [3, 4] numerički dobivenih rezultata [5]. U ovom radu se daje usporedba rezultata (vrijednosti temperature i toplinskog toka) dobivenih analitičkim modelom prijenosa topline korištenjem Eulerove vremenske integracije izvedene putem programskog jezika FORTRAN (u nastavku teksta - fortranskog koda) te numerički dobivenih rezultata korištenjem komercijalnog softvera FLUENT. Cilj je rada utvrditi uvjete pod kojima se s dovoljnom točnošću može primijeniti analitička metoda.

2 DEFINICIJA PROBLEMA

Razmatra se problem zagrijavanja vode mase $m_w = 5 \text{ kg}$ pomoću uronjenog horizontalnog grijajućeg cilindra. Riješena su dva slučaja zagrijavanja vode: održavanjem konstantne površinske temperature grijajućeg cilindra i održavanjem konstantne snage grijajućeg cilindra. U prvom slučaju, površina grijajućeg cilindra ima konstantnu temperaturu $\vartheta_{s,0} = 90^\circ\text{C}$, a voda je u početnom trenutku temperature $\vartheta_{w,0} = 20^\circ\text{C}$. Drugi slučaj ima iste početne uvjete, dok je na stjenci grijajućeg cilindra zadana konstantna snaga.

U radu su korištene dva pristupa:

- Analitički pristup, primjenom Churchillove korelacijske funkcije za računanje koeficijenta prijelaza topline. Jednadžbe dobivenog modela kvazistacionarnog prijelaza topline integrirane su Eulerovom metodom korištenjem fortranskog koda.

- Numerički pristup, rješavanjem sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koji opisuje prirodnu konvekciju u vodi. U tu svrhu korišten je komercijalni softver FLUENT.

3 MATEMATIČKI MODEL

Problem je definiran sustavom parcijalnih diferencijalnih jednadžbi: jednadžbom kontinuiteta, jednadžbom količine gibanja i energijskom jednadžbom primijenjenim za fluid. Vanjska granica područja zadana je kao nepropusna stijenka s adijabatskim rubnim uvjetom, a unutarnja granica: nepropusna stijenka s, u dva slučaja, postavljenim sljedećim rubnim uvjetima (prikazanim na sl. 1)

1. slučaj: konstantna temperatura grijala, $\vartheta_{s,0} = 90^\circ\text{C}$

2. slučaj: konstantan toplinski tok na površini grijala, $\Phi_{\text{gr}} = 350 \text{ W}$.

Model podrazumjeva dvodimenzionalni proces s vertikalnom ravnninom simetrije.

U ovom nestacionarnom problemu zagrijavanja vode prirodnom konvekcijom potrebno je riješiti istovremeno četiri jednadžbe: jednadžbu kontinuiteta, dvije komponente jednadžbe količine gibanja i energijsku jednadžbu, dane niže

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \nabla \cdot [\mu (\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T)] - \nabla p + \rho \vec{g} \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho c \vartheta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c \vec{v} \vartheta) = \nabla \cdot (\lambda \nabla \vartheta) \quad (3)$$

gdje je t - vrijeme, \vec{v} - vektor brzine, ρ - gustoća vode, μ - viskoznost vode, c - specifični toplinski kapacitet vode, λ - toplinska provodnost vode, ϑ - temperaturna u Celzijevim stupnjevima, p - tlak, \vec{g} - vektor ubrzanja zemljine sile teže (9.80665 m/s^2), ∇ - diferencijalni operator i $(\nabla \vec{v})^T$ - transponirani vektor gradijenta brzine.

Navedeni sustav jednadžbi sa zadanim rubnim uvjetima riješen je pomoću softvera FLUENT. Kao rezultat proračuna dobivene su: vremenska promjena srednje temperature vode, vremenska promjena temperature grijala te vremenska promjena toplinskog toka na grijalu kao i polje brzine te polje temperature.

3.1 Jednadžba prijelaza topline

U analitičkom pristupu, prijelaz topline s grijala na vodu modeliran je pomoću koeficijenta prijelaza topline. Toplina Q , koju u vremenskom intervalu Δt ulronjeni grijal pred računa se prema jednadžbi

$$Q = \Phi_{\text{gr}} \Delta t = \alpha d \pi L (\vartheta_s - \vartheta_w) \Delta t = m_w c \Delta \vartheta_w \quad (4)$$

Koeficijent konvektivnog prijelaza topline α za model prirodne konvekcije oko horizontalne stijenke cijevi, s konstantnom površinskom temperaturom, određuje se prema sljedećoj jednadžbi, [6]

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = \left[0,60 + \frac{0,387 Ra^{1/6}}{\left(1 + \left(\frac{0,559}{Pr} \right)^{9/16} \right)^{8/27}} \right]^2 \quad \text{za } 10^6 < Ra < 10^9 \quad (5)$$

dok za slučaj horizontalno uronjenog grijачa s nametnutim konstantnim toplinskim tokom, koeficijent konvektivnog prijelaza topline se računa prema jednadžbi

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = 0,36 + \frac{0,518 Ra^{1/4}}{\left(1 + \left(\frac{0,559}{Pr} \right)^{9/16} \right)^{4/9}} \quad \text{za } 10^6 < Ra < 10^9 \quad (6)$$

U gornjim jednadžbama veličina Ra predstavlja Rayleighovu značajku koju se računa prema izrazu

$$Ra = GrPr = \frac{g\beta(\vartheta_s - \vartheta_w)d^3}{\nu^2} \cdot \frac{\mu c}{\lambda} \quad (7)$$

Fizikalna svojstva vode koja se javljaju u gornjim jednadžbama, uzimaju se za srednju vrijednost temperature vode $\vartheta_m = (\vartheta_w + \vartheta_s)/2$.

Fizikalna svojstva vode u funkciji temperature opisana su sljedećim jednadžbama:

$$\rho(\vartheta) = 1000,844264 - 0,07091626 \cdot \vartheta - 0,00368037159 \cdot \vartheta^2 \quad (8)$$

$$\beta(\vartheta) = -5,3359889 \cdot 10^{-5} + 1,52289953710^{-5} \cdot \vartheta - 1,285025336 \cdot 10^{-7} \cdot \vartheta^2 + 5,793796383 \cdot 10^{-10} \cdot \vartheta^3 \quad (9)$$

$$\lambda(\vartheta) = 0,5593847001 + 0,002168741815 \cdot \vartheta - 9,791336261 \cdot 10^{-6} \vartheta^2 \quad (10)$$

$$\mu(\vartheta) = 0,001731202336 - 4,608068794 \cdot 10^{-5} \cdot \vartheta + 5,799206954 \cdot 10^{-7} \cdot \vartheta^2 - 2,713558598 \cdot 10^{-9} \cdot \vartheta^3 \quad (11)$$

$$c(\vartheta) = 4207,07135 - 1,289804126 \cdot \vartheta + 0,01429382011 \cdot \vartheta^2 \quad (12)$$

Zagrijavanje vode pripada skupini nestacionarnih procesa, a korelacijske funkcije su definirane za slučaj stacionarnog prijelaza topline. Njihovo korištenje u ovom problemu podrazumijeva tako sporu promjenu temperaturnog polja da se može prepostaviti potpuno razvijena prirodna konvekcija u svakom trenutku procesa. Proračun je proveden korištenjem jed. (4-12) iz kojih se dobiva povećanje temperature vode u promatranom vremenskom intervalu:

$$\Delta \vartheta_w = \frac{\alpha d \pi L (\vartheta_s - \vartheta_w)}{m_w c} \quad (13)$$

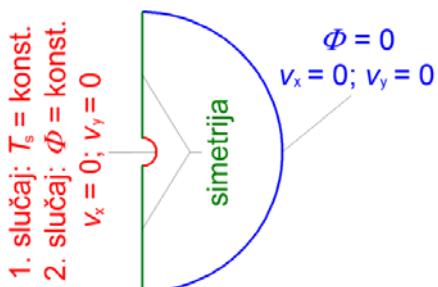
Koeficijent prijelaza topline α određen je u iteracijskom postupku, u kojem je, u svakom vremenskom koraku, postavljen kriterij: $\vartheta_{s,i} - \vartheta_{s,i+1} \leq 0,1 \text{ } ^\circ\text{C}$. Prema algoritmu, u svakom vremenskom intervalu $\Delta t = 1 \text{ s}$, temperatura vode u $k+1$ iteraciji računa se prema jednadžbi

$$\vartheta_w^{k+1} = \vartheta_w^k + \Delta \vartheta_w \quad (14)$$

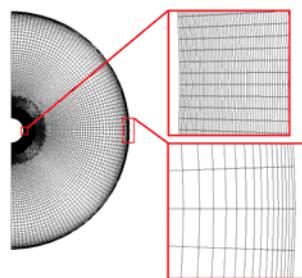
4 REZULTATI PRORAČUNA

4.1 Detalji rješenja u FLUENT-u

Mreža konačnih volumena, prikazana na slici 2, je usitnjena uz površinu grijачa kako bi se obuhvatili veliki gradjeni temperature i brzine. Ukupan broj volumena je 54534. Pri proračunu je korišten SIMPLE algoritam, uz implicitnu vremensku integraciju drugog reda točnosti i uzvodne prostorne diskretizacije drugog reda točnosti. Vremenski korak je iznosio 0.005 s u slučaju sa zadanim konstantnom površinskom temperaturom grijачa, odnosno 0.02 s u slučaju sa zadanim konstantnom snagom grijачa.



Sl. 1. Područje proračuna s rubnim uvjetima

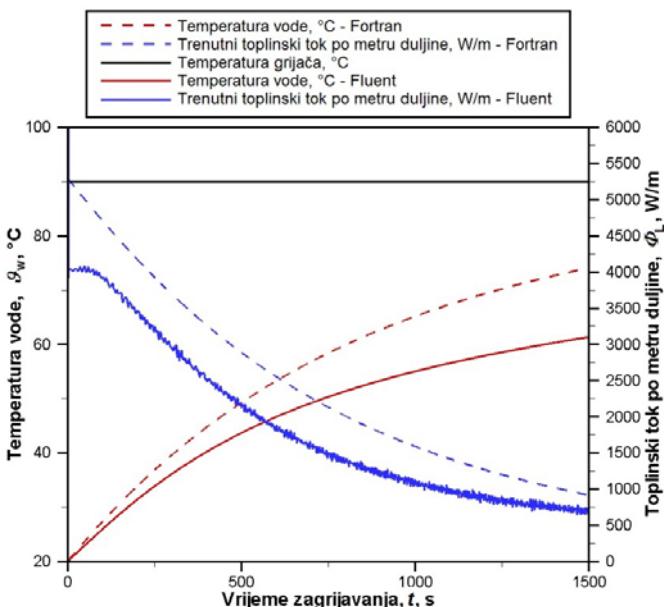


Sl. 2. Mreža konačnih volumena s detaljima

4.2 Usporedbi rezultata

4.2.1 Slučaj sa zadanim konstantnom površinskom temperaturom grijачa

Dijagram na sl. 3. prikazuje vremensku zavisnost temperature vode i toplinskog toka izračunate analitičkom (Fortran) i numeričkom (Fluent) metodom.

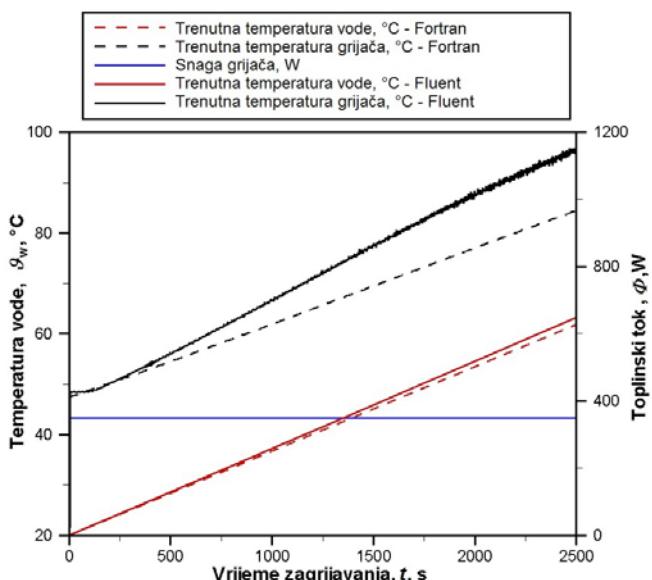


Sl. 3. Vremenska promjena temperature vode i toplinskog toka u slučaju sa zadanim konstantnom površinskom temperaturom grijачa od 90 °C

Na toj su slici vidljiva primjetna odstupanja vrijednosti temperature vode (puna i crkana crvena linija) kao i vrijednosti toplinskog toka (puna i crkana plava linija) dobivene u numeričkom i analitičkom proračunu. Vidljivo je da su trendovi ovih promjena jednaki, te da temperatura vode kontinuirano raste tijekom vremena integracije od 1500 s, dok se vrijednost toplinskog toka kontinuirano smanjuje.

4.2.2 Slučaj sa zadanom konstantnom snagom grijaća

Dijagram na sl. 4. prikazuje vremensku zavisnost temperature vode i toplinskog toka izračunate analitičkom (Fortran) i numeričkom (Fluent) metodom.



Sl. 4. Vremenska promjena temperature vode i trenutne površinske temperature grijaća u slučaju sa zadanom konstantnom snagom grijaća od 350 W

Zadana konačna temperatura vode od 80 °C postignuta je nakon 3502 s. Odstupanja vrijednosti temperature u numeričkom i analitičkom proračunu (puna i crkana crvena linija) su mala, dok odstupanja vrijednosti temperature grijaća (puna i crkana crna linija) rastu tijekom vremena.

5 ZAKLJUČAK

Provedena analiza zagrijavanja vode pomoću horizontalno uronjenog cilindričnog grijaća je pokazala da se ovaj tipično nestacionarni problem može rješavati analitičkom metodom, primjenom kvazistacionarnog modela prijelaza topline. Rezultat analitičkog proračuna su vremenske promjene srednje temperature ukupne mase vode te toplinskog toka, za razliku od numeričkog rješenja koje daje prostornu raspodjelu trenutnih vrijednosti temperature vode, te polje brzine i tlaka. Usporedbom rezultata analitičkog i numeričkog proračuna mogu se uočiti odstupanja. Budući da je u analitičkom proračunu, u zadanom vremenskom intervalu prepostavljen stacionarni prijelaz topline, odstupanja od nestacionarnog proračuna su očekivana. U dalnjem istraživanju

potrebno je izvršiti numeričke simulacije procesa zagrijavanja vode u kojem će početni uvjet za nestacionarni proračun biti polje temperature i brzine dobiveno simulacijom prirodne konvekcije u stacionarnom stanju, kako bi se zanemarila inercija strujanja vode. Stacionarnu prirodnu konvekciju moguće je postići u domeni puno većeg promjera, u kojoj temperatura na vanjskoj granici ostaje nepromijenjena. Promjenom veličine vremenskog intervala u analitičkom proračunu, ispitat će se njegov utjecaj te točnost kvazistacionarnog modela.

Na osnovi daljnjih istraživanja, provođenjem numeričkih i analitičkih proračuna te eksperimenta bit će moguće odrediti, za zadanu geometriju grijачa, koeficijent prijelaza topline u nestacionarnom procesu zagrijavanja vode, odnosno prilagoditi Churchillove korelacijske funkcije nestacionarnim uvjetima zagrijavanja. Korištenjem analitičkog pristupa s kvazistacionarnim modelom zagrijavanja vode u odnosu na numerički pristup bitno se skraćuje vrijeme rada procesora i zauzeće memorije računala.

Literatura

- [1] Farouk, B., Guceri, S.I., „Natural convection from horizontal cylinder- laminar regime“, ASME J Heat Transfer, 103 (1981), str. 522 – 526
- [2] Tokura, I., Saito,H., Kishinami, K., Muramoto, K.,“ An experimental study of free convection heat transfer from a horizontal cylinder in a vertical array set in a free space between parallel walls“, ASME J Heat Transfer, 105, 1983, str. 102 – 107
- [3] Fiscaletti,D., Angeli, D ; Tarozzi, L ; Barozzi, G.S. “Buoyancy-induced transitional flows around an enclosed horizontal cylinder: An experiment”, International Journal of Heat and Mass Transfer, 58 (2013), str. 619 – 631
- [4] Grafsr  nningen, S.; Jensen, A.; Pettersson Reif, B. A.; „PIV investigation of buoyant plume from natural convection heat transfer above a horizontal heated cylinder“, International Journal of Heat and Mass Transfer 54, 2011, str. 4975 – 4987
- [5] Yamamoto, S.; Niiyama, D.; Rog Shin, B., „A numerical method for natural convection and heat conduction around and in a horizontal circular pipe“, International Journal of Heat and Mass Transfer 47, 2004, str. 5781 – 5792
- [6] Cengel, Y.A., Heat Transfer: A Practical Approach, McGraw Hill, 2003.

Autori:

Mario Holik, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za energetiku, Trg Ivane Brli   Ma  urani   2, 35000 Slavonski Brod, 00 tel. +385 98 987 14 85, e-mail: mario.holik@sfsb.hr

Severino Krizmanić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, Ulica Ivana Lučića 5, Zagreb, e-mail: severino.krizmanic@sfb.hr

Nenad Ferdelji, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za termodinamiku, toplinsku i procesnu tehniku, Ulica Ivana Lučića 5, Zagreb, e-mail: nenad.ferdelji@sfb.hr

Marija Živić, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za energetiku, Trg Ivane Brlić Mažuranić 2, e-mail: marija.zivic@sfsb.hr

Antun Galović, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za termodinamiku, toplinsku i procesnu tehniku, Ulica Ivana Lučića 5, Zagreb, e-mail: antun.galovic@sfb.hr

Peti susret Hrvatskog društva za mehaniku
Terme Jezerčica, Donja Stubica, 6.-7. lipnja 2013.

USPOREDBA MIKROMEHANIČKIH KRITERIJA POPUŠTANJA KOMPOZITNIH MATERIJALA

Ivančević, D. & Smojver, I.

Sažetak: U ovom radu uspoređena su tri kriterija popuštanja vlaknima ojačanih kompozitnih materijala koja se primjenjuju u mikromehaničkim modelima. Za analizu kompozitnih materijala na mikromehaničkoj razini korištena je teorija *High Fidelity Generalized Method of Cells* (HFGMC). Rezultat HFGMC modela je izračunavanje tenzora koncentracije deformacija, koji povezuje tenzore deformacija unutar jedinične ćelije heterogenog materijala. Mikromehanički se kriteriji popuštanja primjenjuju na razini podćelija HFGMC modela, čime se u procesu modeliranja oštećenja kompozitnih materijala dolazi do dodatnih informacija o procesu popuštanja. Vizualizacijom krivulja popuštanja dobivenih za kompozitni materijal pokazano je da postoje znatne razlike između uspoređenih kriterija popuštanja.

Ključne riječi: kompozitni materijali, kriteriji popuštanja, mikromehanika, HFGMC

1 UVOD

Kompozitne se konstrukcije u inženjerskoj praksi proračunavaju korištenjem kriterija popuštanja koji su definirani za homogenizirani kompozitni sloj. Mehanizmi popuštanja vlaknima ojačanih kompozitnih materijala ovise o procesima unutar mikrostruktura heterogenog materijala. Kako bi se u analizama kompozitnih konstrukcija uzeli u obzir procesi unutar nehomogenog materijala koriste se analize na više razina, koje omogućavaju uvid u procese na mikromehaničkoj razini.

Za analize na mikro-razini se u ovom radu koristi metoda ćelija HFGMC (High Fidelity Generalized Method of Cells) koja pruža sličnu točnost kao i MKE mikromehanički modeli uz kraća vremena računanja. Pomoću mikromehaničkog modela određuje se polje naprezanja i deformacija unutar jedinične ćelije kompozitnog materijala koja, ponavljanjem u ravnini okomitoj na smjer vlakana, karakterizira heterogenu mikrostrukturu materijala.

Mikromehanički kriteriji određuju popuštanje na razini konstituenata kompozitnog materijala – vlakna i matrice. U ovom radu uspoređeni su neki od važnijih kriterija popuštanja na mikro-razini. Tako su za popuštanje matrice uspoređeni 3D Tsai-Hill kriterij, 3D Hashin kriterij zapisan preko komponenata deformacija te Multi Continuum Theory (MCT) kriterij koji definira i popuštanje vlakna. Za popuštanje vlakna se u literaturi koriste jednostavni kriteriji poput kriterija maksimalnih naprezanja i kriterija maksimalnih deformacija. Navedeni kriteriji popuštanja uspoređeni su pomoću HFGMC mikromehaničkog modela koji određuje krivulje popuštanja kompozitnog materijala u ovisnosti o stanju naprezanja/deformacija na razini homogeniziranog kompozitnog sloja.

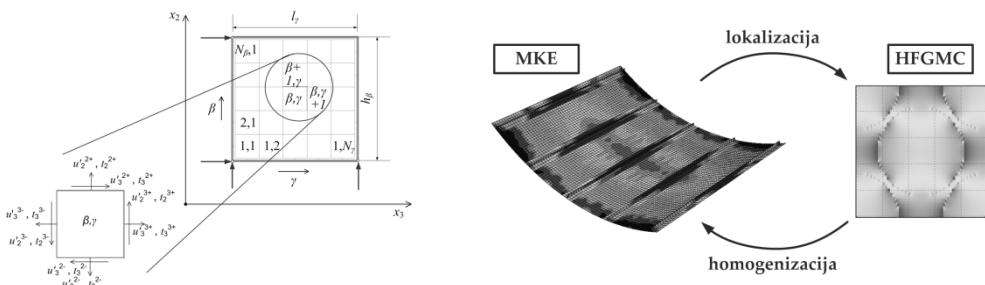
2 MIKROMEHANIČKI MODEL

HFGMC model pripada skupini mikromehaničkih modela nastalih razvojem Aboudi-eve metode ćelija [1]. U ovom istraživanju korištena je modificirana verzija HFGMC-a, koju odlikuje znatno poboljšana računalna učinkovitost [3,4]. Glavna karakteristika mikromehaničkih modela temeljenih na metodi ćelija je diskretizacija jedinične ćelije heterogenog materijala koristeći $N_\beta \times N_\gamma$ pravokutnih podćelija koje, u najjednostavnijem obliku ovog modela, mogu biti „popunjene“ materijalom matrice ili materijalom vlakna. Ukupan broj različitih materijalnih modela (tj. faza), te broj i dimenzije podćelija su proizvoljni. Princip diskretizacije, kao i osnovni parametri modela prikazani su na Slici 1, lijevo. Važna pretpostavka opisanog modela je da se os x_1 globalnog koordinatnog sustava podudara sa pravcem pružanja vlakana, koja je u mehanici kompozitnih materijala označena kao os I . Druge dvije osi mogu biti proizvoljno odabrane, a radi konzistentnosti sa zapisom korištenim u mehanici kompozitnih materijala odabранo je da se os x_2 poklapa s materijalnom osi 2, koja se nalazi u ravnini sloja. Sukladno tome, os x_3 usmjerenja je okomito na ravninu kompozitnog sloja. Koristeći ovakav dvodimenzionalni mikromehanički model mogu se modelirati samo jednousmjereni kompozitni materijali, koji su najzastupljeniji u suvremenim kompozitnim konstrukcijama.

Primjenjena verzija HFGMC [3,4] razlikuje se od originalne [2] po načinu stvaranja i rješavanja sustava jednadžbi kojim se određuje polje pomaka unutar jedinične ćelije. Rješavanje sustava jednadžbi u primjenjenom HFGMC započinje formulacijom lokalnih matrica krutosti podćelija koje povezuju komponente pomaka i sila na granicama podćelija. Matrice krutosti podćelija povezuju komponente pomaka sa komponentama sila između podćelija koje su također osrednjene duž ruba odgovarajućih podćelija. Uvođenjem uvjeta na spojevima pojedinih podćelija te na rubovima jedinične ćelije formulira se globalni sustav jednadžbi. Na spojevima podćelija zadani su uvjeti kontinuiteta osrednjениh sila i pomaka, dok su na rubovima jedinične ćelije zadani rubni uvjeti periodičnosti u smjerovima osi x_2 i x_3 . Sprječavanje pomaka jedinične ćelije kao krutog tijela riješeno je fiksiranjem pomaka rubnih podćelija, što je označeno strelicama na Slici 1, lijevo.

Krajnji rezultat HFGMC modela je određivanje tenzora raspodjele deformacija (Strain Concentration Tensor) $\mathbf{A}^{(\beta,\gamma)}$, koji povezuje polje deformacija svake pojedine podćelije $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(\beta,\gamma)}$ sa homogeniziranim stanjem deformacije $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ koristeći jednadžbu (1).

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(\beta,\gamma)} = \mathbf{A}^{(\beta,\gamma)} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (1)$$



Sl. 1. Lijevo: HFGMC model, desno: princip analize na više razina

HFGMC model se u okviru opisane metodologije koristi kao mikromehanički model unutar okruženja analize na više razina. Problem na makro-razini se pri tome rješava korištenjem MKE programa Abaqus/Explicit, koji je povezan sa HFGMC programom korištenjem potprogram za implementaciju korisničkih konstitutivnih jednadžbi VUMAT. HFGMC je zbog toga programiran u Fortran programskom jeziku kao samostalan potprogram, te se poziva za svaku pojedinu materijalnu točku modela konačnih elemenata. Rješavanjem HFGMC jednadžbi određuju se polja deformacija i naprezanja unutar jedinične ćelije te se na taj način dolazi do informacija koje određuju načine popuštanja vlnkima ojačanih kompozitnih materijala. Princip opisane metodologije prikazan je Slikom 1, desno.

3 MIKROMEHANIČKI KRITERIJI POPUŠTANJA

Krivilje popuštanja kompozitnih materijala dobivene korištenjem mikromehaničkih kriterija moraju uzimati u obzir različite načine popuštanja jer do popuštanja konstituenata bitno različitim mehaničkim svojstava dolazi pri različitom opterećenju homogeniziranog materijala. U ovom radu su analizirana tri modela popuštanja koja se u literaturi koriste na mikromehaničkoj razini. Prvi model koristi 3D Tsai-Hill kriterij za matricu, uz kriterij maksimalne deformacije u smjeru osi 1 za vlnko, prema [8]. Zapis kriterija za matricu je

$$\frac{(\bar{\sigma}_{11}^{(\beta,\gamma)})^2 + (\bar{\sigma}_{22}^{(\beta,\gamma)})^2 + (\bar{\sigma}_{33}^{(\beta,\gamma)})^2}{Y^2} + \frac{-\bar{\sigma}_{11}^{(\beta,\gamma)}\bar{\sigma}_{22}^{(\beta,\gamma)} - \bar{\sigma}_{11}^{(\beta,\gamma)}\bar{\sigma}_{33}^{(\beta,\gamma)} - \bar{\sigma}_{22}^{(\beta,\gamma)}\bar{\sigma}_{33}^{(\beta,\gamma)}}{Y^2} + \frac{(\bar{\sigma}_{12}^{(\beta,\gamma)})^2 + (\bar{\sigma}_{13}^{(\beta,\gamma)})^2 + (\bar{\sigma}_{23}^{(\beta,\gamma)})^2}{T^2} = d_m^2, \quad (2)$$

gdje je sa Y označena čvrstoća matrice, dok je T smična čvrstoća matrice. Vrijednost čvrstoće matrice Y ovisi o karakteru opterećenja modela u smjeru osi 2. Popuštanje matrice, prema izrazu (2), nastaje kada vrijednost parametra d_m postaje veća od 1.

Drugi model popuštanja preuzet je iz MultiContinuum Theory (MCT) modela popuštanja prema [7]. MCT teorija korištena je u [7] za MKE mikromehaničko predviđanje popuštanja kompozitnih materijala, a izrazi za kriterij popuštanja izvedeni su iz kvadratičnog kriterija popuštanja. Za razliku od izvorne primjene ovih kriterija, koja je koristila osrednjene vrijednosti kriterija po konstituentima, u ovom radu se u obzir uzima raspodjela kriterija unutar jedinične ćelije. Izvod kriterija naveden je u [7], a za popuštanje matrice koristi se izraz

$$K_{3m} I_3 + K_{4m} I_4 = 1, \quad (3)$$

gdje su parametri K_{3m} i K_{4m} definirani kao

$$K_{3m} = \frac{1}{S_{22m}^2 + S_{33m}^2}, \quad K_{4m} = \frac{1}{S_{12m}^2}. \quad (4)$$

S_{22m} i S_{33m} su čvrstoće matrice u smjerovima 2 i 3, koje, prema [7], ovise o predznaku naprezanja. S_{12m} je smična čvrstoća matrice. Popuštanje vlnka predviđa se kada je zadovoljen izraz

$$K_{1f} I_1^2 + K_{4f} I_4 = 1, \quad (5)$$

u kojemu je

$$K_{1f} = \frac{1}{S_{11f}^2}, \quad K_{4f} = \frac{1}{S_{12f}^2}. \quad (6)$$

Treći model popuštanja za matricu koristi 3D Hashin-ov kriterij zapisan pomoću komponenata deformacija, prema [5]. Ovim kriterijem definiraju se tri komponente „deformacija oštećenja“ (*damage strains*), $\varepsilon_i^D, i=1,2,3$ koji iniciraju popuštanje pri vrijednostima većim od 1.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^D &= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{11}}{X_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{13}}{R_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{12}}{S_\varepsilon}\right)^2}, \quad \varepsilon_2^D = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{22}}{Y_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{23}}{Q_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{12}}{S_\varepsilon}\right)^2}, \\ \varepsilon_3^D &= \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{33}}{Z_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{23}}{Q_\varepsilon}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{13}}{R_\varepsilon}\right)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

U ovim izrazima su sa X_ε , Y_ε i Z_ε označene dopuštene deformacije matrice u smjerovima osi 1, 2 i 3, dok R_ε , Q_ε i S_ε označavaju najveću dopuštenu kutnu deformaciju. U ovom modelu se za popuštanje vlakna koristi kriterij najvećeg dopuštenog naprezanja u smjeru osi pružanja vlakna.

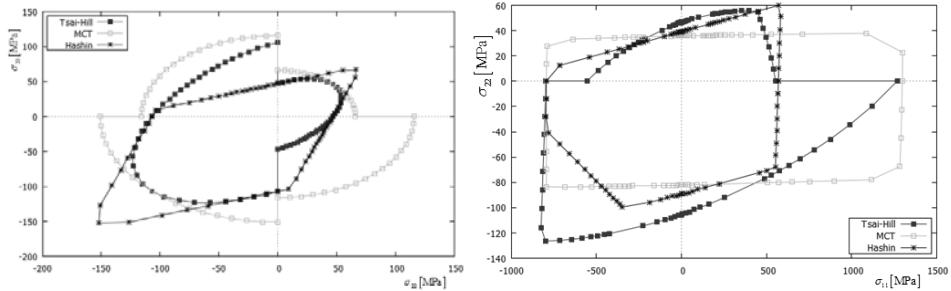
4 REZULTATI

Mikromehanički kriteriji popuštanja uspoređeni su korištenjem samostalnog programa koji simulira ulazne veličine koje ulaze u HFGMC potprogram kada se koristi unutar Abaqus/Explicit analize. Na taj se način simulira opterećenje koje odgovara homogeniziranom stanju deformacije kompozitnog sloja u njegovom lokalnom koordinatnom sustavu. Rezultati prikazani u ovom radu dobiveni su mikromehaničkim modelom diskretiziranim koristeći 40×40 podćelija, uz jediničnu ćeliju koja ima jedno vlakno u sredini ćelije. Svojstva konstituenata su izotropna, a dana su u Tablici 1, prema [5]. Razmatrani kompozitni sustav predstavlja staklenim vlaknima ojačanu epoksidnu smolu sa volumnim udjelom vlakana od 60%. U Tablici 1 su navedene maksimalno dopuštene deformacije, dok se čvrstoće materijala mogu jednostavno izračunati iz elastičnih svojstava.

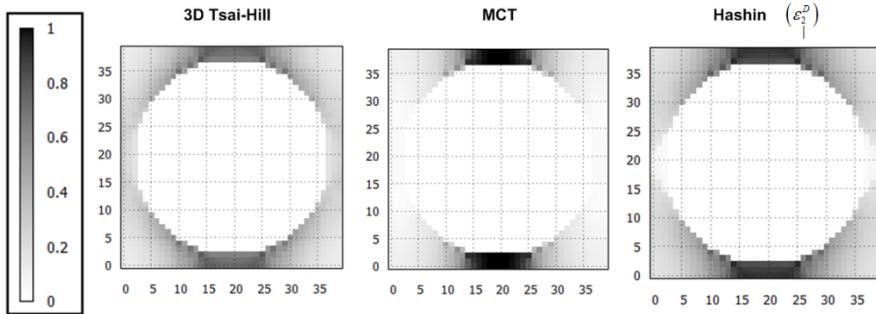
Slikom 2 prikazane su krivulje popuštanja razmatranih kriterija koje određuju homogenizirano stanje naprezanja pri kojemu dolazi do inicijacije oštećenja u prvoj podćeliji jedinične ćelije. Krivulje na lijevoj slici odnose se na popuštanje materijala matrice (bez vlakna) u $\sigma_{22} - \sigma_{33}$ ravnini. Krivulje 3D Tsai-Hill kriterija i MCT kriterija imaju prekide koji nastaju zbog promjena predznaka naprezanja, odnosno

Mehanička svojstva vlakna (Silenka E-glass)				
E [GPa]	ν	X_ε^T	X_ε^C	
74	0.2	2.85%	-1.74%	
Mehanička svojstva epoksidne matrice (MY750/HY917/DY063)				
E [GPa]	ν	$X_\varepsilon^T = Y_\varepsilon^T = Z_\varepsilon^T$	$X_\varepsilon^C = Y_\varepsilon^C = Z_\varepsilon^C$	S_ε
3.7	0.35	0.0125	0.0287	0.0443

Tablica 1. – Svojstva vlakna i matrice



Sl. 2. Krivulje popuštanja matrice (lijevo) i kompozitnog materijala (desno)



Sl. 3. Raspodjela razmatranih kriterija popuštanja unutar jedinične čelije

čvrstoća i dopuštenih deformacija pri tlačnom i vlačnom opterećenju. Najviše odstupa MCT kriterij, vjerojatno zbog činjenice da je jednadžba 3, koja predviđa popuštanje matrice unutar MCT teorije, izvedena uz pretpostavku da se matrica koristi unutar vlaknima ojačanog kompozitnog materijala te zbog toga ovaj kriterij nije primjenjiv na sam materijal matrice. Lomovi krivulja prisutni su i u krivuljama popuštanja na desnoj slici u Slici 2, koje se odnose na kompozitni materijal u ravnini naprezanja $\sigma_{11} - \sigma_{22}$. Krivulja popuštanja za treći model popuštanja koji koristi Hashin-ov kriterij zapisan pomoću komponenata deformacije za matricu i kriterij maksimalnog naprezanja za vlakno dobro se poklapa sa rezultatima navedenim u [5]. Za usporedbu sa eksperimentalnim rezultatima potrebno je u postojeći model dodati i model napredovanja oštećenja kojim se degradiraju mehanička svojstva podćelija.

Razlika između raspodjele kriterija popuštanja matrice unutar jedinične čelije prikazana je Slikom 3. Ovi rezultati dobiveni su za homogenizirano vlačno stanje naprezanja u smjeru osi 2, pri kojem MCT kriterij predviđa popuštanje. U razmatranom slučaju opterećenja najveća vrijednost Hashin-ovog kriterija je 0.93, a 3D Tsai-Hill kriterija tek 0.78. Na temelju raspodjele vrijednosti kriterija unutar jedinične čelije može se zaključiti da relativno velik broj podćelija popušta pri istom homogeniziranom opterećenju.

5 ZAKLJUČAK

Analizom rezultata može se zaključiti da među uspoređenim kriterijima postoji velika odstupanja, što je uobičajeno kada se međusobno uspoređuju različiti kriteriji popuštanja kompozitnih materijala [6]. Iako mikromehanički kriteriji predviđaju

popuštanje na razini podcelije jedinične čelije, relativno velik udio jedinične čelije popušta pri istom stanju homogeniziranog opterećenja. Usposrednom vrijednosti naprezanja pri kojem pojedini kriteriji predviđaju popuštanje dobiva se uvid u problematiku modeliranja popuštanja kompozitnih materijala. Budući da je predviđanje inicijacije oštećenja samo prvi korak u modeliranju cijelog procesa popuštanja, od velike je važnosti odabir pravog kriterija na temelju kojega će se razvijati modeli procesa oštećivanja, odnosno degradacije mehaničkih svojstava.

Prednost primjene modeliranja kompozitnih materijala na mikromehaničkoj razini, u odnosu na homogenizirani pristup koristeći diskretizaciju na razini kompozitnih slojeva, je u tome što pruža uvid u same procese popuštanja unutar jediničnih čelija kompozitnog materijala. Ta mogućnost je od posebne važnosti za modeliranje složenijih kompozitnih materijala poput kompozitnih materijala sa šupljim vlaknima, materijala sa sposobnošću samo-obnavljanja mehaničkih svojstava i sličnih suvremenih tehnologija.

Literatura:

- [1] Aboudi, J., "Closed Form Constitutive Equations for Metal Matrix Composites", International Journal of Engineering Science, Vol.25, 1987, str. 1229-1240.
- [2] Aboudi, J., Pindera, M.J., Arnold, S.M., "Higher-Order Theory for Periodic Multiphase Materials with Inelastic Phases", International Journal of Plasticity, Vol. 19, 2003, str. 805-847.
- [3] Bansal, Y., Pindera, M.J., "A Second Look at the Higher-Order Theory for Periodic Multiphase Materials", Journal of Applied Mechanics, Vol. 72, 2005, str. 177-195.
- [4] Bansal, Y., Pindera, M.J., "Finite-Volume Direct Averaging Micromechanics of Heterogeneous Materials with Elastic-Plastic Phases", International Journal of Plasticity, Vol. 22, 2006, str. 775-825.
- [5] Bednarcyk, B.A., Aboudi, J., Arnold, S.M., "Micromechanics Modeling of Composites Subjected to Multiaxial Progressive Damage in the Constituents", AIAA Journal, Vol.48, No. 7, 2010, str. 1367-1378.
- [6] Hinton, M. J., Kaddour, A.S., Soden, P.D., "A Further Assessment of the Predictive Capabilities of Current Failure Theories for Composite Laminates: Comparison with Experimental Evidence", Composites Science and Technology, Vol. 64., 2004, str. 549-588.
- [7] Mayes, J.S., Hansen, A.C., "Composite laminate failure analysis using multicontinuum theory", Composites Science and Technology, Vol. 64, 2004, str. 379-394.
- [8] Pineda, M.J., Waas, A.M., Bednarcyk, B.A. "Multiscale Model for Progressive Damage and Failure of Laminated Composites Using an Explicit Finite Element Method", Proceedings of the 50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Palm Springs, California, USA, 2009.

Autori:

Darko Ivančević, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za zrakoplovstvo, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 6168260, e-mail: darko.ivancevic@fsb.hr, web stranica: aerodamagelab.fsb.hr
Ivica Smojver, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za zrakoplovstvo, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 6168267, e-mail: ismojver@fsb.hr, web stranica: aerodamagelab.fsb.hr

OPTIMIZACIJA TRASE CJEVOVODA S OBZIROM NA ISPLATIVOST INSTALACIJE I EKSPLOATACIJE

Ivić, S., Sušanji, A. & Družeta, S.

Sažetak: U radu se definira metodologija određivanja najbolje trase cjevovoda po kriteriju minimalnih troškova instalacije i eksploatacije. Cjevovod se virtualno polaze na digitalni model terena, koji dodatno uključuje informacije o cijeni korištenja i vrsti terena (vegetacija, tip tla, itd.) te prisutnim linijskim infrastrukturnim objektima (u danom primjeru prometnice). Za dobivenu trasu izračunavaju se pojednostavljene procjene troškova izgradnje cjevovoda po predloženoj trasi, uključno sa troškovima savladavanja infrastrukturnih zapreka. Povrh toga, na predloženoj trasi provodi se stacionarni hidraulički proračun strujanja u cjevovodu iz kojeg slijede troškovi transporta fluida cjevovodom u zadanom projektiranom periodu eksploatacije cjevovoda. Trasa cjevovoda koja predstavlja najisplativiju investiciju s obzirom na sve procjenjene troškove dobija se optimizacijskim postupkom primjenom Particle Swarm Optimization (PSO) metode, kao jedne od najmodernijih optimizacijskih metoda.

Ključne riječi: trasiranje, cjevovod, optimizacija, Particle Swarm Optimization

1 UVOD

Određivanje optimalne trase cjevovoda u svom punom smislu podrazumijeva uzimanje u obzir kako troškova instalacije (zajedno sa svim troškovima savladavanja prirodnih i infrastrukturnih zapreka na izabranoj trasi), tako i operativnih troškova rada cjevovoda (tj. savladavanja visinske razlike i hidrauličkih gubitaka). Tipična je situacija po kojoj se inicijalne uštede u fazi projektiranja i izvedbe cjevovoda s jednostavnijom trasom kasnije skupo plaćaju kroz dugogodišnje više troškove eksploatacije cjevovoda.

Postupak opisan u ovom radu određuje optimalnu trasu cjevovoda koji povezuje zadanu početnu i krajnju točku na digitalnom modelu terena, uzimajući u obzir troškove instalacije cjevovoda (troškovi cijevi, korištenja zemljišta i izgradnje cjevovoda) i operativne troškove eksploatacije cjevovoda (troškovi rada pumpi). Pri tome se protok fluida u cjevovodu i promjer cijevi cjevovoda zadaju kao ulazni podaci.

2 IZRAČUN TROŠKOVA TRASE CJEVOVODA

Trasa cjevovoda definirana je nizom ravnih segmenata koji povezuju unaprijed zadanu početnu i krajnju točku. Trasa cjevovoda određuje se na digitalnom modelu terena za koji su poznate geodetske visine, cijena korištenja zemljišta i tip tla, kao i geometrija prisutnih infrastrukturnih objekata (prometnice).

Za svaku varijantu trase cjevovoda izračunavaju se troškovi instalacije (izgradnje) cjevovoda C_{inst} i troškovi eksploatacije (rada) cjevovoda C_{eksp} te se u optimizacijskom postupku traži minimum njihovog zbroja.

2.1 Troškovi instalacije

Troškovi instalacije cjevovoda su definirani kao skup troškova samih cijevi, korištenja zemljišta kojem prolazi trasa, tehničkih radova na trasi te savladavanja infrastrukturnih i drugih prepreka (prometnice, vodotoci).

Cijena samih cijevi određuje se iz duljine cjevovoda i osnovne cijene cijevi c_c [€/m]:

$$C_c = c_c \sum_i l_i . \quad (1)$$

Trošak korištenja zemljišta (odnosno trošak odštete ili otkupa zemljišta) određuje se iz karte cijene korištenja zemljišta koja određuje cijenu korištenja zemljišta u bilo kojoj točki terena $c_z = c_z(x,y)$, na temelju čega se računa srednja cijena za svaki segment cjevovoda $c_{z,i}$ [€/m²]. Ukupan trošak zemljišta dakle jest:

$$C_z = B \cdot \sum_i l_i c_{z,i} , \quad (2)$$

gdje je B širina koridora trase cjevovoda, a l_i duljina pojedinog segmenta cjevovoda.

Trošak tehničkih radova na trasi grubo se procjenjuje na temelju karte koeficijenta zahtjevnosti terena $K_t = K_t(x,y)$ (vegetacija, mehaničke osobine tla), gdje se za svaki segment cjevovoda uzima pripadna srednja vrijednost $K_{t,i}$:

$$C_t = c_t \cdot \sum_i l_i K_{t,i} , \quad (3)$$

gdje je $c_t = 32$ €/m osnovna cijena tehničkih radova na instalaciji cjevovoda.

Trošak savladavanja prepreka pojednostavljeno je modeliran na način da se prebrojavaju sjecišta trase cjevovoda sa linjskim objektima (ceste, vodotoci) prisutnima na lokaciji trase i za utvrđenih s sjecišta uzima se trošak sC_p [€]. Za potrebe ovog rada usvojena je cijena $C_p = 10000$ €.

Ukupni troškovi instalacije cjevovoda C_{inst} [€] dakle jesu:

$$C_{inst} = C_c + C_z + C_t + sC_p . \quad (4)$$

2.2 Troškovi eksploracije

Pod troškovima eksploracije cjevovoda ovdje se podrazumijevaju troškovi rada pumpe (ili više njih) potrebnog za transport fluida cjevovodom. Pumpe su smještene u početnoj točki trase.

Lokalni hidraulički gubici računaju se samo na pregibima cjevovoda, tj. na spojevima ravnih segmenata. Koeficijent lokalnog gubitka na spoju računa se po formuli dobivenoj regresijom provedenom na podacima iz [2]:

$$k = 0,0000008\theta^3 + 0,000025\theta^2 + 0,004393\theta , \quad (5)$$

gdje je θ [°] kut spoja između dva segmenta. Lokalni se hidraulički gubici za cijeli cjevovod (izraženi u metrima piezometričke visine) računaju po izrazu:

$$h_{g,l} = \left(\sum_i k_i \right) \frac{8Q^2}{D^4 g \pi^2} , \quad (6)$$

gdje je Q protok u cjevovodu, D promjer cijevi (jednak za sve segmente), a g ubrzanje sile teže.

Faktori trenja za dužinske hidrauličke gubitke računaju se po Swamee-Jain formuli za turbulentno strujanje u cijevima:

$$\lambda = 1,325 \cdot \left(\ln \left(\frac{e}{3,7D} + \frac{5,74}{\text{Re}^{0,9}} \right) \right)^{-2}, \quad (7)$$

gdje je e visina neravnina na stijenki cijevi, a

$$\text{Re} = \frac{4Q}{D\pi\nu} \quad (8)$$

Reynoldsov broj, gdje je pak ν kinematska viskoznost fluida. Analogno lokalnim, dužinski hidraulički gubici računaju se po izrazu:

$$h_{g,d} = \left(\sum_i \lambda_i l_i \right) \frac{8Q^2}{D^5 g \pi^2}, \quad (9)$$

gdje je l_i duljina pojedinog segmenta cjevovoda.

Predviđeno je da cjevovod radi potpuno u pretlaku, što znači da je dobavna visina pumpe:

$$H = \Delta z + h_{g,l} + h_{g,d}, \quad (10)$$

gdje je Δz visinska razlika od početne do najviše točke cjevovoda, a potrebna snaga pumpanja je:

$$P = \frac{\rho g H Q}{\eta}, \quad (11)$$

gdje je ρ gustoća fluida, a η stupanj korisnosti pumpe. Za potrebe ovog rada usvojena je vrijednost $\eta = 0,8$.

Iz navedenog slijedi da se troškovi rada cjevovoda u njegovom vijeku eksploatacije C_{eksp} [€] mogu izračunati po izrazu:

$$C_{eksp} = \frac{c_{kwh}}{1000} \cdot 24 \cdot 365 \cdot G \cdot P, \quad (12)$$

gdje je c_{kwh} cijena za 1 kWh električne energije, a G broj godina eksploatacije cjevovoda. Za potrebe ovog rada usvojeno je $c_{kwh} = 0,1$ €/kWh ([1]) i $G = 30$.

3 OPTIMIZACIJSKI POSTUPAK

Optimizacijski postupak temeljen je na PSO (*Particle Swarm Optimization*) metodi. U posljednjih nekoliko godina PSO se uspješno primjenjuje na raznim optimizacijskim problemima u tehnici, gdje se često pokazuje kao brža i učinkovitija od ostalih metoda.

Izračun troškova trase cjevovoda i PSO metoda implementirani su u jedinstvenoj paraleliziranoj računalnoj aplikaciji za desktop računala.

3.1 PSO metoda

Particle Swarm Optimization ([3], [4]) je inovativna stohastička optimizacijska metoda koja na relativno jednostavan način simulira gibanje jata čestica koje pretražuju prostor u potrazi za optimalnim rješenjem.

PSO inicijalno kreira početno jato (*swarm*), tj. slučajno određuje određeni broj čestica (*particle*). Svaka čestica je definirana u n dimenzija (gdje je n broj optimizacijskih parametara), što znači da se za svaku česticu slučajno određuje n pozicija (tj. n vrijednosti optimizacijskih parametara) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i n slučajnih brzina $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Tijekom optimizacijskog postupka, svaka se pojedina čestica u n -dimenzionalnom prostoru iz trenutne točke \mathbf{x}_i^k pomiče u sljedeću točku \mathbf{x}_i^{k+1} brzinom \mathbf{v}_i^{k-1} koju se računa kao linearnu kombinaciju triju vektora:

- vektor "inercije" (vektor brzine i -te čestice u prethodnoj iteraciji) \mathbf{v}_i^{k-1} ,
- radij-vektor od i -te čestice do najbolje točke njene trajektorije \mathbf{p}_i^k ,
- radij-vektor od i -te čestice do najbolje točke trajektorija svih čestica \mathbf{g}_i^k ,

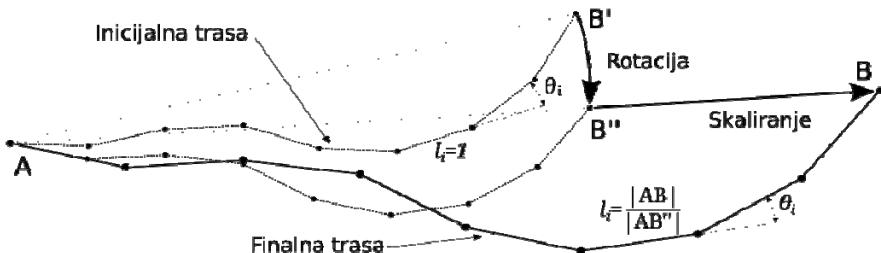
s tim da se vektori \mathbf{p}^k i \mathbf{g}^k u svakoj iteraciji dodatno skaliraju faktorima r_p i r_g koji se slučajno biraju u intervalu $(0,1)$:

$$\mathbf{v}_i^k = w_v \mathbf{v}_i^{k-1} + r_p w_p \mathbf{p}_i^k + r_g w_g \mathbf{g}_i^k, \quad (13)$$

gdje su w_v , w_p i w_g težinski faktori.

3.2 Parametrizacija trase cjevovoda

Inicijalna trasa cjevovoda definirana je nizom ravnih segmenata jedinične duljine koji su međusobno zakrenuti pod proizvoljnim kutevima. Ovi kutevi između segmenata predstavljaju parametre trase cjevovoda odnosno optimizacijske parametre. Nakon što optimizacijska metoda kreira niz parametara (kuteva) inicijalne trase, ona se iz početne točke trase rotira i skalira (produljuje) tako da joj krajnja točka padne u zadanu ciljnu točku trase (Sl. 1). Pri tome se trasa polaže (projicira) na digitalni model terena, što znači da svaka točka trase dobiva pripadnu geodetsku visinu, a segmenti, zbog nejednolikog nagiba terena, u konačnici više ne budu jednake duljine. Na rotiranoj, skaliranoj i polegnutoj trasi provodi se izračun troškova izgradnje i eksploatacije cjevovoda.



Sl. 1. Formiranje trase cjevovoda na temelju izabranih parametara

Ovaj način parametrizacije trase cjevovoda izabran je radi relativno malog broja parametara dovoljnih za definiranje trase, što predstavlja preduvjet za uspješnu i brzu optimizaciju.

3.3 Implementacija optimizacijskog postupka

Parametri optimizacije trase cjevovoda su kutevi između segmenata trase, odnosno svaka čestica PSO metode $\mathbf{x} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ predstavlja jednu varijantu trase cjevovoda odredenu sa n kuteva odnosno $n+1$ segmentom.

Funkcija cilja je zbroj troškova instalacije (4) i eksploatacije cjevovoda (12) za predloženu varijantu trase cjevovoda:

$$f(\mathbf{x}) = C_{inst}(\mathbf{x}) + C_{eksp}(\mathbf{x}). \quad (14)$$

Nakon provedenih testnih proračuna usvojeni su težinski faktori za (13) kako slijedi: $w_v = 0,95$; $w_p = 0,25$; $w_g = 0,30$.

Optimizacijski postupci provedeni su na populaciji od 5000 čestica. Postupak se zaustavlja kad L^2 norma pomaka svih čestica padne ispod 10^{-6} .

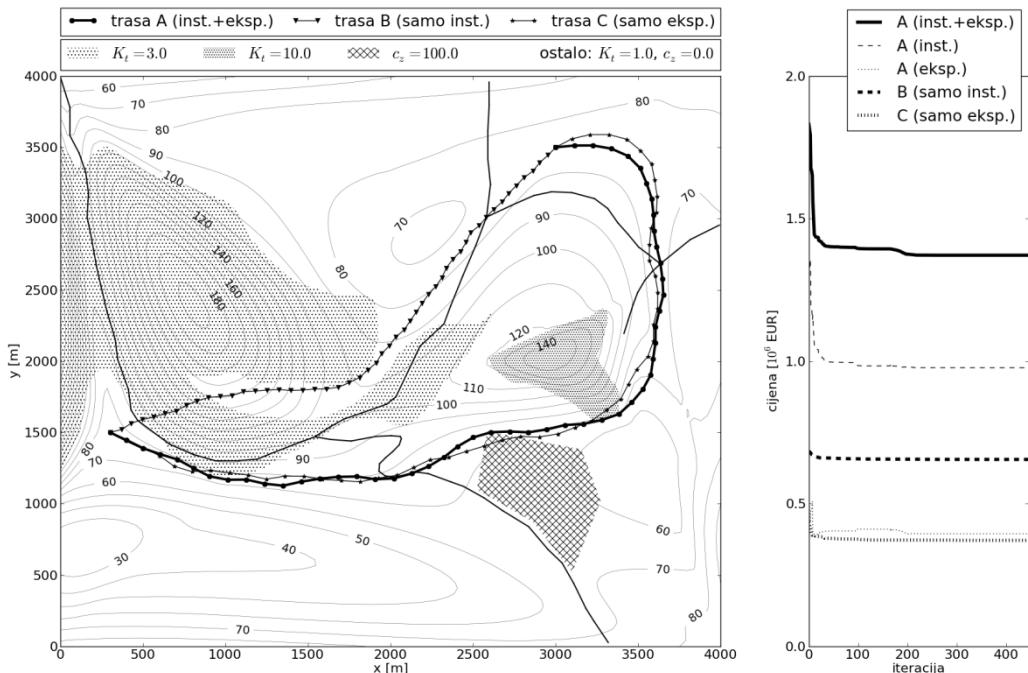
4 PRIMJER

Opisana metodologija testirana je na digitalnom modelu osmišljenom za potrebe ovog rada koji opisuje područje dimenzije 4×4 km unutar kojeg se nalaze dva briješa koja formiraju sedlastu topografiju. Područje zapadnog briješa je uglavnom pokriveno šumom ($K_t = 3$), istočni briješ je stjenovit ($K_t = 10$), a preostalo područje je kategorizirano kao livada ($K_t = 1$). Naknadu za korištenje zemljišta treba platiti samo za područje vinograda (jugo-istok) u iznosu od $c_z = 100 \text{ €/m}^2$. Unutar područja prisutno je više prometnica (Sl. 2).

Trasa cjevovoda diskretizirana je na 50 segmenata. Maksimalni dopušteni kut među segmentima je $\pm 30^\circ$.

Optimizacijskim postupkom određena je najbolja trasa cjevovoda (širina trase $B = 5 \text{ m}$) za transport vode ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $v = 10^{-6}$) i protok od $Q = 0,2 \text{ m}^3/\text{s}$. Izabrane su betonske cijevi promjera $D = 0,6 \text{ m}$, srednje visine neravnina $e = 0,2 \text{ mm}$ te cijene $c_c = 137 \text{ €/m}$ ([5]).

Za potrebe analize, osim optimizacije na temelju izvedene funkcije cilja (14) (trasa A), dodatno su provedene još i optimizacije uzimajući u obzir samo troškove instalacije cjevovoda (4) (trasa B) te uzimajući u obzir samo troškove eksploatacije cjevovoda (12) (trasa C). Dobiveni rezultati prikazani su na Sl. 2.



Sl. 2. Izgled domene i dobivene trase cjevovoda; konvergencija optimizacijskog postupka

Iz dobivenih rezultata vidljivo je da izračunata optimalna trasa (trasa A) uspješno prati teren i izbjegava skupe prepreke te se u tom smislu čini kao razumno rješenje.

Očekivano, trasa B zanemaruje troškove savladavanja visinske razlike duž trase, a trasa C prolazi skupljim i tehnički zahtjevnijim dijelovima terena. Sukladno tome, ukupni troškovi (14) za trase B i C prelaze troškove optimalne trase A: $f(\mathbf{x}_A) = 1,371 \cdot 10^6 \text{ €}$; $f(\mathbf{x}_B) = 5,516 \cdot 10^6 \text{ €}$; $f(\mathbf{x}_C) = 1,473 \cdot 10^6 \text{ €}$.

Imajući na umu veliku dimenziju problema (49 optimizacijskih varijabli), može se primijetiti da je konvergencija optimizacijskog postupka vrlo brza (Sl. 2), što upućuje na zaključak o zaista visokoj učinkovitosti izabrane optimizacijske metode.

5 ZAKLJUČAK

Osim što se opisana metodologija određivanja optimalne trase cjevovoda pokazala uspješnom, iz dobivenih rezultata je vidljivo da uzimanjem u obzir samo troškove instalacije ili samo troškove eksploatacije dolazimo do bitno različitih rješenja, što upućuje na korist od projektiranja trase cjevovoda na temelju svih poznatih troškova.

Iz problema određivanja optimalne trase neizbjježno proizlazi velikih broj optimizacijskih parametara, za što se Particle Swarm Optimization pokazala kao adekvatna i vrlo učinkovita optimizacijska metoda.

Ovdje korištena metodologija mogla bi se unaprijediti u više smjerova: (a) izračun troškova izgradnje cjevovoda mogao bi se proširiti specifikacijom pojedinih građevinsko-instalacijskih troškova, kao i zasebnim tretiranjem troškova savladavanja različitih prirodnih i infrastrukturnih prepreka, (b) hidraulički proračun trebalo bi proširiti dopuštanjem upotrebe sifonskog efekta (koji može znatno smanjiti troškove rada cjevovoda) te provjerom na potlačne zone, (c) mogućnosti za definiranje geometrije trase cjevovoda mogu se proširiti upotrebom koljena (zavoja), kao i varijabilnim brojem segmenata, (d) za definiranje trase moglo bi se koristiti *spline* funkcije, što bi smanjilo broj optimizacijskih parametara.

Opisana metodologija mogla bi se uz manje preinake i proširenja primjeniti na slične tehničke probleme, kao što su određivanje trase prometnica, dalekovoda i slično.

Literatura:

- [1] "Europe's Energy Portal", raspoloživo na: <http://www.energy.eu>, pristupljeno 1. 4. 2013.
- [2] Idelchik, I. E., "Flow resistance: A design guide for engineers", Taylor & Francis Ltd., 1989.
- [3] Kennedy, J., Eberhart, R., "Particle Swarm Optimization", Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks IV, 1995, str. 1942-1948.
- [4] Shi, Y., Eberhart, R.C., "A modified particle swarm optimizer", Proceedings of IEEE International Conference on Evolutionary Computation, 1998, str. 69-73.
- [5] "Underground products 2012 Price List", M Con Pipe & Products Inc, 2012.

Autori:

Stefan Ivić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, Rijeka, tel. 051 651 497, fax 051 651 416, e-mail: stefan.ivic@riteh.hr, web stranica: <http://sim.riteh.hr/stefan>

Arsen Sušanj, Šapjane 37b, Šapjane, tel. 091 796 2113, e-mail: asusanj@riteh.hr
Siniša Družeta, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, Rijeka, tel. 051 651 497, fax 051 651 416, e-mail: sinisa.druzeta@riteh.hr, web stranica: <http://sim.riteh.hr/sinisa>

O BEZMREŽNOM MODELIRANJU HETEROGENIH MATERIJALA

Jalušić, B., Jarak, T. & Sorić, J.

Sažetak: U radu je izložen pregled bezmrežnih metoda za numeričko modeliranje heterogenih materijala pri čemu je posebna pažnja posvećena spajanju područja s različitim materijalnim svojstvima. Opisane su metoda Lagrangeovih multiplikatora, metoda skočnih funkcija, modificirane aproksimacijske sheme i metoda direktnog zadovoljavanja Dirichletovih i Neumannovih rubnih uvjeta, te je dan kritički osvrt na njihovu numeričku učinkovitost. Predstavljen je koncept bezmrežne mješovite kolokacijske metode.

Ključne riječi: bezmrežne metode, modeliranje spoja, heterogeni materijali

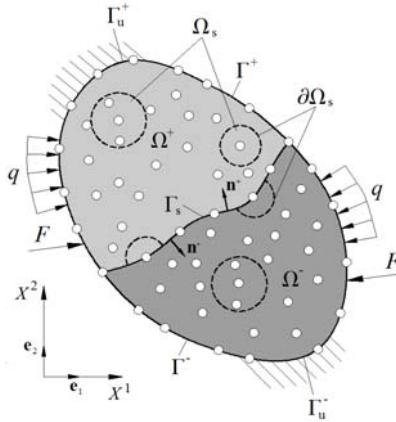
1 UVOD

Jedna od prednosti bezmrežnih numeričkih metoda u odnosu na metodu konačnih elemenata (MKE) je jednostavno definiranje aproksimacijskih funkcija visokog stupnja kontinuiteta na razini modela bez upotrebe globalnih geometrijskih mreža. Iako je to povoljno svojstvo pri rješavanju problema kao što su analiza savijanja tankih ploča i ljusaka ili modeliranje materijala s razmatranjem gradijenta deformacije [13], visok stupanj kontinuiteta bezmrežnih funkcija uzrokuje poteškoće u rješavanju problema s diskontinuitetom derivacija nepoznatih veličina polja. Tako se pri modeliranju heterogenih materijala na granicama dijelova modela s različitim homogenim svojstvima javljaju diskontinuiteti u polju deformacija. Modeliranje takvih materijala pomoću bezmrežnih metoda stoga zahtjeva primjenu posebnih numeričkih postupaka koji osiguravaju globalni kontinuitet aproksimacijske funkcije nepoznate veličine polja (npr. pomaci ili temperatura), ali i nagli skok u njenim derivacijama na samom spoju [3,5]. Nepovoljno svojstvo bezmrežnih metoda je složeno izračunavanje funkcija oblika i njenih derivacija te numerički neučinkovita integracija, što se može ublažiti primjenom mješovitog pristupa [2,9]. Pregled najčešćih postupaka za modeliranje diskontinuiranih derivacija veličina polja u bezmrežnim metodama, zajedno s kritičkim osvrtom na njihovu numeričku učinkovitost pri modeliranju heterogenih materijala, prikazan je u poglavljiju 2. U 3. poglavljju predstavljena je ideja za mješovitu bezmrežnu kolokacijsku metodu za modeliranje heterogenih materijala.

2 OPISIVANJE DISKONTINUITETA PRI MODELIRANJU HETEROGENIH MATERIJALA POMOĆU BEZMREŽNIH METODA

Na slici 1 shematski je prikazano dvodimenzionsko (2D) tijelo načinjeno od heterogenog materijala koje zauzima područje Ω omeđeno globalnom granicom Γ . Krivulja Γ_s

predstavlja granicu između dva područja Ω^+ i Ω^- s različitim homogenim materijalnim svojstvima. Γ_s dijeli Ω tako da vrijedi $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ i $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$.



Sl. 1. Dvodimenzijski heterogeni materijal

Prilikom modeliranja heterogenih materijala pomoću bezmrežnih metoda, potrebno je zbog visokog stupnja kontinuiteta aproksimacijskih funkcija primijeniti posebne procedure za opisivanje diskontinuiteta u polju deformacija, odnosno derivacija aproksimacijske funkcije za pomake duž Γ_s . Istodobno, polje pomaka treba biti kontinuirano po Ω . Trenutno najznačajniji takvi postupci navedeni su u tablici 1, zajedno sa svojim komparativnim prednostima i nedostacima.

2.1 Metoda Lagrangeovih multiplikatora

Metoda Lagrangeovih multiplikatora koristi se uglavnom u bezmrežnim formulacijama temeljenim na slabom obliku jednadžbi ravnoteže [3,6]. Heterogeno tijelo promatra se kao uniju odvojenih homogenih područja i po svakom od njih diskretizacija se provodi zasebno, uključujući i aproksimaciju nepoznatih veličina polja. Za spajanje spomenutih područja koriste se uvjeti kontinuiteta koji za polje pomaka na granici Γ_s glase

$$\int_{\Gamma_s} \lambda(u_i^+ - u_i^-) d\Gamma = 0. \quad (1)$$

U relaciji (1) λ je Lagrangeov multiplikator, a u_i^+ i u_i^- predstavljaju pomake u Ω^+ , odnosno Ω^- . Lagrangeovi multiplikatori fizikalno se mogu interpretirati kao površinske sile potrebne za nametanje kontinuiteta pomaka.

2.2 Metoda skočnih funkcija

Metoda skočnih funkcija (*jump functions*) temelji se na proširenju aproksimacijske funkcije prikladnom "skočnom funkcijom" $\Psi_j(x)$, definiranom lokalno u području oko granice Γ_s . Aproksimacijska funkcija pomaka opisuje se preko cijelog heterogenog tijela kao

$$u^h(x) = u^m(x) + \sum_{j=1}^{n_{\Gamma_s}} q^j \Psi_j(x), \quad (2)$$

gdje se $u^m(x)$ odnosi na neku od standardnih bezmrežnih aproksimacijskih funkcija, a q^j predstavlja amplitudu skočne funkcije. Skočnu funkciju $\Psi_j(x)$ potrebno je konstruirati tako da su aproksimacija (2) i njena prva derivacija kontinuirane svugdje u $\Omega \cup \Gamma_s$, osim na Γ_s , gdje prva derivacija $u^h(x)$ mora biti diskontinuirana.

2.3 Modificiranje baznih funkcija

U ovom pristupu odabiru se bazne funkcije standardnih bezmrežnih aproksimacija tako da se na Γ_s dobije njihov diskontinuitet derivacija. U [12] je za jednodimenzionalni (1D) problem umjesto standardne linearne metode pomicnih najmanjih kvadrata (*moving least squares*, MLS) definirana bilinearna MLS aproksimacijska funkcija koja ima diskontinuiranu derivaciju na granici x_{Γ_s}

$$u^h(x) = a + b(x - x_{\Gamma_s}) = \mathbf{p}_1 \mathbf{a} \text{ za } x \leq x_{\Gamma_s}, \quad u^h(x) = a + c(x - x_{\Gamma_s}) = \mathbf{p}_2 \mathbf{a} \text{ za } x > x_{\Gamma_s}, \quad (3)$$

gdje su $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 & x - x_{\Gamma_s} & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x - x_{\Gamma_s} \end{bmatrix}$ vektori baznih funkcija.

Koeficijenti $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) & c(x) \end{bmatrix}$ određuju se minimiziranjem težinskog funkcionala, slično kao i kod standardne MLS aproksimacije [12].

2.4 Direktno zadovoljavanje Dirichletovih i Neumannovih rubnih uvjeta

Metoda direktnog zadovoljavanja rubnih uvjeta na Γ_s zbog svoje jednostavnosti često se primjenjuje u bezmrežnim metodama. Heterogeno tijelo promatra se kao unija odvojenih homogenih područja, slično kao u metodi Lagrangeovih mnoštvenika. Na granici Γ_s diskretizacija se vrši pomoću dvostrukih čvorova, odnosno pozicije čvorova koji pripadaju područjima Ω^+ i Ω^- se međusobno poklapaju. U svakom od čvorova na Γ_s postavlja se kontinuitet pomaka i recipročnosti vektora naprezanja

$$u_i^+ - u_i^- = 0, \quad t_i^+ + t_i^- = 0. \quad (4)$$

3 MJEŠOVITA BEZMREŽNA KOLOKACIJSKA METODA ZA MODELIRANJE HETEROGENIH MATERIJALA

Sve dostupne bezmrežne metode za modeliranje heterogenih materijala temeljene su na metodi pomaka (primarne metode) u kojima je potrebno izračunavati derivacije bezmrežnih funkcija drugog reda, što povećava računalne troškove i smanjuje točnost i stabilnost. Numeričku učinkovitost moguće je povećati primjenom mješovitog pristupa [2,9] koji se može primjeniti i za modeliranje heterogenih materijala.

Jednadžbe za sustav prema slici 1 su jaki oblici 2D jednadžbi ravnoteže koje moraju biti zadovoljene u svim čvorovima unutar Ω , koje je podijeljeno na Ω^+ i Ω^-

$$\sigma_{ij,X^j}^+ + b_i^+ = 0, \quad \text{unutar } \Omega^+, \quad \sigma_{ij,X^j}^- + b_i^- = 0, \quad \text{unutar } \Omega^-. \quad (5)$$

Jednadžbe (5) moraju zadovoljavati rubne uvjete propisane na vanjskoj granici $\partial\Omega$

$$u_i^+ = \bar{u}_i^+, \quad \text{na } \Gamma_u^+, \quad u_i^- = \bar{u}_i^-, \quad \text{na } \Gamma_u^-, \quad (6)$$

$$t_i^+ = \sigma_{ij}^+ n_j^+ = \bar{t}_i^+, \quad \text{na } \Gamma_t^+, \quad t_i^- = \sigma_{ij}^- n_j^- = \bar{t}_i^-, \quad \text{na } \Gamma_t^-, \quad (7)$$

te rubne uvjete prema (4) na granici Γ_s .

zadovoljavanje Dirichletovih rubnih uvjeta na spoju tijela	zadovoljavanje Neumannovih rubnih uvjeta na spoju tijela	diskretizacija heterogenog tijela	bezmeđna metoda (akronim)	aproximacijska funkcija	jednadžbe ravnoteže	prednosti	nedostaci
Lagrangeovi mnoštvo-funktori	zadovoljeni u slaboj formi [3,6]	homogena producija unutar heterogenog materijala diskretiziraju se ovogjenično [3,6]	MLPG [3] EFG [6]	MLS [3,6]	slabi oblik [3,6]	za isti broj čvorova manja greska u usporedbi s metodom skočnih funkcija [3], velika točnost rezultata za pomake u čvorovima [6]	potrebiti posebni rješavači za globalni sustav diskretiziranih jednadžbi, povećanje broja čvorova nepoznаницa [4], oscilacije derivacija polja pomaka oko spaja [6,12], potrebna integracija po granci Γ_s što uzrokuje povećanje vremena računanja [11], manja točnost u usporedbi s metodom končnih elemenata [12]
skočne funkcije	skočne funkcije [3,10]	heterogeni materijal diskretizira se kao jedno područje [3,10]	MLPG [3] EFG [10]	MLS [3,10]	slabi oblik [3,10]	za modelle s malim brojem čvorova na granci Γ_s manja greska u usporedbi s metodom Lagrangeovih multiplikatora, trend se mijenja povećanjem broja čvorova [3], točni rezultati na spoju i u neposrednoj blizini spoja [10]	s povećanjem broja čvorova norme gresaka ostaju nepromijenjene [3], za metodu potrebitna interpolacija u krivočinom koordinatama što postaje složeno kod 3D problema [11], skočnu funkciju je potrebno definirati unaprijed i njen oblik utječe na točnost dobivenih rezultata [12], potrebni dodatni stupnjevi slobode za određivanje amplitude skočne funkcije [12]
modificiranje baznih funkcija	automatski zadovoljeni [12]	heterogeni materijal diskretizira se kao jedno područje [12]	EFG [12]	modificirana MLS [12]	slabi oblik [12]	vilo točni rezultati, nema definiranja dodatnih parametara funkcija te uvođenja dodatnih stupnjeva slobode, MLS aproksimacija se provodi preko cijelog modela [12]	komplicirana aproksimacija za 2D i 3D probleme [12]
direktna metoda	direktna metoda [1,4,5,7,8,11]	homogena producija unutar heterogenog materijala diskretiziraju se ovogjenično [1,4,5,7,8,11]	MLPG [1,7,8] EFG [4] SD-RBCM [5] SD-LRBCM [5] MLPG2+ MLPG5 [11]	MLS [1,4,7,8,11] RBF [5]	slabi oblik [1,4,7,8,11] jaki oblik (kolokacija) [5]	jednostavna za implementaciju, numerički učinkovita i točna [1,4,5,7,8,11], zadovoljavanje rubnih uvjeta kontinuiteta na granci spoja izvodi se bez numeričke integracije (u jaku formi) [5]	potrebitno istovremeno eksplicitno namenuti i rubne uvjete pomaka i rubne uvjete sila na Γ_s [5]

Tablica 1. Numerički postupci za modeliranje diskontinuiteta derivacija bezmrežnih funkcija

Vrijedi da je $\partial\Omega = \Gamma_u^+ \cup \Gamma_u^- \cup \Gamma_t^+ \cup \Gamma_t^-$, gdje $\Gamma_u = \Gamma_u^+ \cup \Gamma_u^-$ označava dio $\partial\Omega$ s zadanim pomacima \bar{u}_i , dok su na $\Gamma_t = \Gamma_t^+ \cup \Gamma_t^-$ zadane površinske sile \bar{t}_i . 2D kontinuum se aproksimira pomoću dvaju skupova čvorova $I = 1, 2, \dots, N$, i $M = 1, 2, \dots, P$ gdje su N i P ukupni brojevi čvorova u području Ω^+ , odnosno Ω^- . Prema mješovitom kolokacijskom postupku iz [9], nepoznate veličine polja su komponente naprezanja i pomaka. Sve nepoznate veličine aproksimirane su zasebno u područjima Ω^+ i Ω^- , pri čemu se koriste iste aproksimacijske funkcije za sve komponente pomaka i naprezanja. Za Ω^+ vrijedi

$$u_i^{+(h)}(\mathbf{X}) = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{X}) (\hat{u}_i^+)_J, \quad \sigma_{ij}^{+(h)}(\mathbf{X}) = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{X}) (\hat{\sigma}_{ij}^+)_J, \quad (8)$$

gdje ϕ_J predstavlja 2-D čvorne funkcije oblika za čvor J , a $(\hat{u}_i^+)_J$ i $(\hat{\sigma}_{ij}^+)_J$ pripadne čvorne vrijednosti za pomake i naprezanja. Analogno su aproksimirani pomaci i naprezanja po području Ω^- . Diskretizacijom jednadžbi (4)-(7), pomoću aproksimacija (8) dobiva se nerješivi sustav jednadžbi jer je ukupni broj nepoznatih čvornih naprezanja i pomaka veći od broja raspoloživih jednadžbi. Stoga se u svim čvorovima uvode konstitutivne relacije

$$(\hat{\sigma}_{ij}^+)_J = \frac{1}{2} C_{ijkl}^+ (u_{i,j}^{+(h)} + u_{j,i}^{+(h)}), \quad (\hat{\sigma}_{ij}^-)_J = \frac{1}{2} C_{ijkl}^- (u_{i,j}^{-(h)} + u_{j,i}^{-(h)}), \quad (9)$$

iz kojih je moguće izračunati čvorna naprezanja pomoću aproksimiranih pomaka iz (8). C_{ijkl}^+ , C_{ijkl}^- u jednadžbi (9) predstavljaju komponente materijalnih tenzora u Ω^+ i Ω^- . Eliminacijom čvornih naprezanja, dobiva se zatvoreni sustav linearnih algebarskih jednadžbi u kojima se kao nepoznanice javljaju samo čvorni pomaci.

4 ZAKLJUČAK

U radu je dan pregled numeričkih postupaka za modeliranje diskontinuiteta derivacija aproksimacijskih funkcija u bezmrežnim metodama, s primjenom na modeliranje heterogenih materijala. Njihovom usporedbom može se zaključiti da je direktna metoda trenutno najpogodnija zbog svoje jednostavnosti i numeričke učinkovitosti.

Osim toga predstavljen je koncept mješovite bezmrežne kolokacijske metode namijenjene modeliranju heterogenih materijala. Opisana strategija pogodna je za implementaciju direktnе metode za opisivanje diskontinuiteta na granicama područja s različitim homogenim materijalnim svojstvima. Na temelju iskustva autora i rezultata iz dostupne literature, očekuje se da će primjena predloženog mješovitog pristupa biti znatno točnija od sličnih metoda temeljenih na metodi pomaka.

Literatura:

- [1] Ahmadi, I., Aghdam, M.M., "A Truly Generalized Plane Strain Meshless Method for Combined Normal and Shear Loading of Fibrous Composites", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.35, No.3, 2011, str. 395-403.
- [2] Atluri, S.N., Han, Z.D., Rajendran, M.J., "A New Implementation of the Meshless Finite Volume Method, Through the MLPG "Mixed" Approach", CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol.6, No.6, 2004, str. 491-513.

- [3] Batra, R.C., Porfiri, M., Spinello, D., "Treatment of Material Discontinuity in Two Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Formulations of Axisymmetric Transient Heat Conduction", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.61, No.14, 2004, str. 2461-2479.
- [4] Cai, Y.C., Zhu, H.H., "Direct Imposition of Essential Boundary Conditions and Treatment of Material Discontinuities in the EFG Method", Computational Mechanics, Vol.34, No.4, 2004, str. 330-338.
- [5] Chen, J-S., Wang, L., Hu, H-Y., Chi, S-W., "Subdomain radial basis collocation method for heterogeneous media", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.80, 2009, str. 163-190.
- [6] Cordes, L.W., Moran, B., "Treatment of Material Discontinuity in the Element-Free Galerkin Method", Computer Methods in Applied Mechanics Engineering, Vol.139, No.96, 1996, str. 75-89.
- [7] Dang, T.D., Sankar, B.V., "Meshless Local Petrov-Galerkin Formulation for Problems in Composite Micromechanics", AIAA Journal, Vol.45, No.4, 2007, str. 912-921.
- [8] Dang, T.D., Sankar, B.V., "Meshless Local Petrov-Galerkin Micromechanical Analysis of Periodic Composites Including Shear Loadings", CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol.26, No.3, 2008, str. 169-187.
- [9] Jarak, T., Hostler, J., Jalusić, B., Sorić, J., "Numerical analysis of 2-D linear elastic problems by MLPG method", 7th International Congress of Croatian Society of Mechanics, Zadar, Croatia, 2012, str. 153-154.
- [10] Krongauz, Y., Belytschko, T., "EFG Approximation with Discontinuous Derivatives", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.41, 1998, str. 1215-1233.
- [11] Li, Q., Shen, S., Han, Z.D., Atluri, S.N., "Application of Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) to Problems with Singularities and Material Discontinuities in 3-D Elasticity", CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol.4, No.5, 2003, str. 571-585.
- [12] Masuda, S., Noguchi, H., "Analysis of Structure with Material Interface by Meshfree Method", CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol.11, No.3, 2006, str. 131-143.
- [13] Tang, Z., Shen, S., Atluri, S.N. (2003): Analysis of materials with strain-gradient effects: A Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach, with nodal displacements only. CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences, vol. 4, No. 4, 2003, str. 177-196.

Autori:

Boris Jalusić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5 10002 Zagreb, tel: 01 6168 115, fax: 01 6168 187, e-mail: boris.jalusic@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/jalusic/

Tomislav Jarak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5 10002 Zagreb, tel: 01 6168 514, fax: 01 6168 187, e-mail: tomislav.jarak@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/jarak/

Jurica Sorić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5 10002 Zagreb, tel: 01 6168 103, fax: 01 6168 187, e-mail: jurica.soric@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/soric/

MODELIRANJE NESIGURNOSTI U SREDNJE-FREKVENCIJSKOM PODRUČJU

Jokić, M., Ji, L.

Sažetak: Dinamičko ponašanje konstrukcije gdje su u istom frekvencijskom području prisutne deformacije kratkih valnih duljina i velike gustoće formi vibriranja, te dugih valnih duljina i jasno odvojenih formi vibriranja naziva se srednje-frekvencijskim ponašanjem. Analiza takvog ponašanja metodom konačnih elemenata zahtjeva vrlo finu mrežu, a niti tada ne daje pouzdane rezultate radi osjetljivosti vibracija kratkih valnih duljina na nesigurnosti modela. Statističke metode nisu podesne radi vibracija dugih valnih duljina, koje su u načelu determinističke. Iz tih razloga, razvijen je niz hibridnih metoda koje, uz prihvatljivu računalnu složenost, dobro opisuju prosječno dinamičko ponašanje. Ovaj rad predstavlja poopćenje modalne hibridne metode gdje se, uz prosječno dinamičko ponašanje, određuje matematički model nesigurnosti. Rezultat je matematički model podesan za sintezu sustava robustnog upravljanja, čime se doprinosi robustnoj regulaciji vibracijskih i vibro-akustičkih sustava s srednje-frekvencijskim ponašanjem.

Ključne riječi: Modeliranje nesigurnosti, srednje-frekvencijsko područje

1 UVOD

Srednje-frekvencijsko vibracijsko ponašanje konstrukcije definiramo kao dinamičko ponašanje pri kojem su u istome frekvencijskome području prisutne deformacije kratkih valnih duljina i velike gustoće formi vibriranja, te deformacije dugih valnih duljina i jasno odvojenih formi vibriranja. Ovakvo ponašanje susrećemo kod složenih konstrukcija sastavljenih od krutih i fleksibilnih konstrukcijskih elemenata, poput rebrima ojačanih pločastih konstrukcija, karoserija osobnih automobila, trupova čeličnih brodova, itd. Isto tako, srednje-frekvencijsko ponašanje svojstveno je vibro-akustičkim sutavima gdje je prisutan nesrazmjer u valnim duljinama konstrukcije i akustičkog medija – brojni primjeri uključuju akustiku sobe s deformabilnim zidovima, vibracije trupa broda uronjenog u fluid, itd.

Opisana svojstva predstavljaju poteškoće pri numeričkim simulacijama sustava sa srednje-frekvencijskim ponašanjem [1, 8]. Komponente sustava s kratkim valnim duljinama i visokom gustoćom formi vibriranja su u načelu stohastičke. Nažalost, prisutnost (u načelu determinističkih) komponenti s dugim valnim duljinama onemogućava primjenu stohastičkih metoda poput SAE [9] (eng. statistical energy analysis) za numeričko modeliranje cijelog sustava. Naime, za primjenu SAE nužno je da je cijeli sustav "dovoljno stohastičan", što ovdje nije slučaj.

S druge strane, primjena metode konačnih elemenata (MKE) zahtjeva vrlo finu mrežu radi prisutnosti deformacija kratkih valnih duljina, čime se znatno povećava računalna složenost modela. Isto tako, dinamičko ponašanje komponenti s kratkim valnim duljinama je vrlo osjetljivo na greške modeliranja (npr. idealizirani rubni uvjeti

i spojevi pojedinih dijelova konstrukcije) i u načelu je stohastičko, tako da čak i primjenom MKE s vrlo detaljnim modelom dobivamo samo jedno od (velikog broja mogućih) dinamičkih ponašanja konstrukcije.

Radi prevladavanja gore navedenih poteškoća, tijekom zadnjeg desteljeća razvijen je niz "hibridnih" metoda podesnih za analizu sustava sa srednje-frekvencijskim ponašanjem [4—7, 11—13]. Napominjemo da citirani pristupi, najčešće kombinacijom determinističkih i stohastičkih metoda, računaju *prosječan* dinamički odziv sustava. Svega nekolicina pristupa (npr. [7] gdje se uz prosječan dinamički odziv računa i varianca dinamičkog odziva) daju dodatne informacije o nesigurnosti dinamičkog sustava.

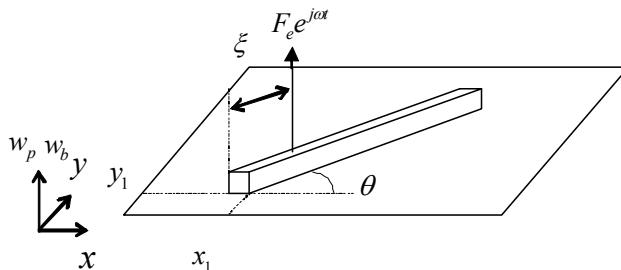
S druge strane, robustna regulacija vibracijskih ili vibro-akustičkih sustava [10] temelji se na "worst-case" utjecaju nesigurnosti na dinamički sustav. Sukladno tome, nesigurnosti dinamičkog sustava nužno moraju biti modelirane na odgovarajući način [2, 3], a navedene hibridne metode nam ne daju dovoljno informacija za takvo modeliranje.

U ovom radu predstavljamo istraživanje na modeliranju dinamičke nesigurnosti odziva sustava sa srednje-vibracijskim ponašanjem, i to na primjeru konstrukcije koje se sastoji od rebrom ojačane kvadratne ploče. Pritom koristimo "mode-based" pristup [6] za izračun prosječnog dinamičkog odziva, uz redukciju reda modela i Monte Carlo pristup za određivanje dinamičke nesigurnosti. Nadalje, pokazujemo kako rezultirajući matematički model formulirati u oblik podesan za robustnu regulaciju vibracija.

2 NUMERIČKI PRIMJER MODELIRANJA NESIGURNOSTI

Konstrukcije koju razmatramo sastoje se od kvadratne ploče oslonjene na rubovima i ojačane gredom, kako je to prikazano na Sl. 1. Ploča i greda izrađeni su od polimera, modula elastičnosti 4,4 GPa, Poissonovog koeficijenta 0,38 i gustoće 1152 kg m^{-3} . Duljina ploče je 2 m, širina 0,9 m, a debljina ploče može varirati između 3 i 7 mm. Greda je pravokutnog poprečnog presjeka visine 4 cm, širine 3 cm i duljine 2 m, i pričvršćeno je za ploču tako da je $x_1 = 2 \text{ cm}$, $y_1 = 30 \text{ cm}$, $\theta = 10^\circ$ (vidi Sl. 1).

Vibracije opisane konstrukcije posljedica su harmonijske uzbudne sile koja djeluje na gredu, okomito na ploču, i to na udaljenosti $\xi = 73 \text{ cm}$ od kraja grede. Kao kriterij vibracijskog ponašanja uzimamo pomak okomit na ploču na mjestu djelovanja sile.



Sl. 1. Ploča ojačana gredom

2.1 Numerički model i dinamička analiza konstrukcije

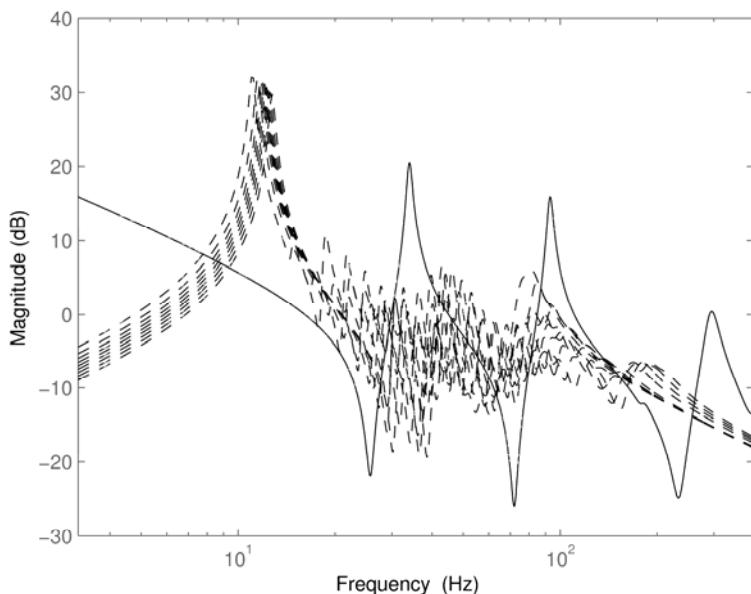
Ploču ojačanu gredom smo opisali diskretiziranim modelom korištenjem programskog paketa za MKE. Model ploče se sastoji od 14732 pločasta konačna elementa, dok smo gredu opisali pomoću 167 grednih elemenata. Modeli ploče i grede smo povezali pomoću svih (translacijskih i rotacijskih) stupnjeva slobode čvorova grede.

Analizom formi vibriranja, i to zasebno za gredu i za ploču, dobivamo da greda ima 27 formi vibriranja (prvih 6 su pomaci krutog tijela) u rasponu od 0 Hz do 1000 Hz, dok ploča ima 271 formu vibriranja u navedenom rasponu. Drugim riječima, konstrukciji sastavljenoj od ploče i grede prema Sl. 1 svojstveno je srednjefrekvencijsko ponašanje u širokom frekvencijskom području.

Proveli smo analizu frekvencijskog odziva (vidi Sl. 2) opisanog sustava s jednim ulazom (hramonijska sila) i jednim izlazom (pomak na mjestu sile), i to zasebno za gredu (puna crta na Sl. 2) i zasebno za ploču ojačanu gredom uz varijacije debljine ploče (isprikidane crte na Sl. 2). Iz analize frekvencijskih odziva zaključujemo sljedeće:

1. frekvencijskim odzivom sastavljene konstrukcije (ploča i greda) i dalje dominiraju vlastite forme grede,
2. rezonancije u frekvencijskom odzivu sastaljavljene konstrukcije su nižih frekvencija od odgovarajućih vlastitih formi grede i osjetljive su na perturbacije u debljini ploče (nesigurne su),
3. u području niskih frekvencija, gdje je frekvencijski odziv najveći, vlastite forme grede nisu međusobno spregnute nakon spajanja s pločom.

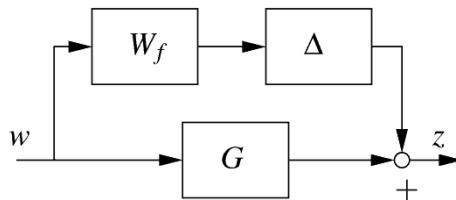
Temeljem navedenih zaključaka smatramo da se, barem u području nižih frekvencija, dinamičko ponašanje sastavljene konstrukcije može opisati matematičkim modelom koji čine nominalni modeli pojedinih formi vibriranja, spregnutih s nesigurnim dinamičkim modelima. U nastavku dajemo primjer takvog matematičkog modela za prvu formu vibriranja.



Sl. 2. Frekvencijski odzivi grede i sastavljene konstrukcije

2.2 Modeliranje nesigurnosti sustava

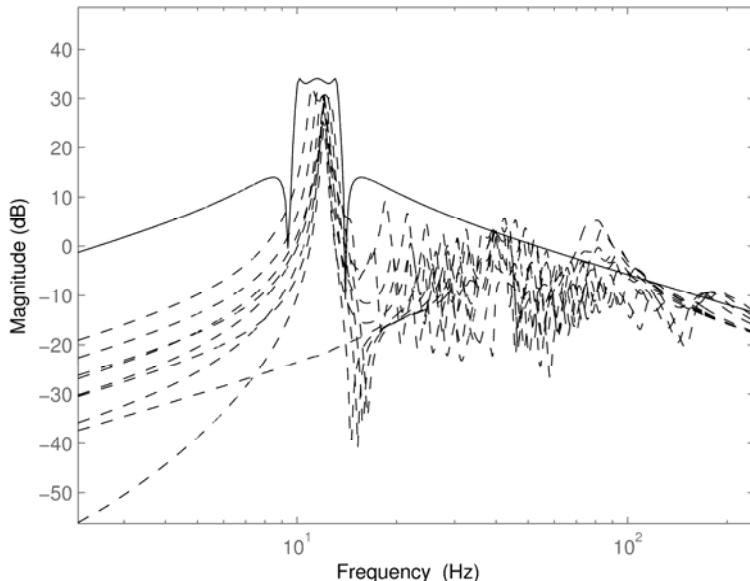
Pojedine forme vibriranja opisujemo nominalnim linearnim dinamičkim sustavom s aditivnom dinamičkom nesigurnosti, kako je to prikazano na Sl. 3. Nominalni sustav označen je s G , dinamička nesigurnost s Δ , a W_f je težinski frekvencijski filter. Dinamička nesigurnost zadovoljava uvjet $\|\Delta\| \leq 1$, a težinski filter je odabran tako da serijski spoj W_f i Δ opisuje najveću moguću grešku odziva stvarnog sustava u odnosu na odziv nominalnog sustava.



Sl. 3. Model aditivne nesigurnosti pojedinih formi vibriranja

Za prvu formu vibriranja, nominalni sustav smo opisali linearnim dinamičkim sustavom s dvije variable stanja, a njegov odziv smo izračunli "mode-based" pristupom [6]. Težinski filter smo konstruirali tako da u frekvencijskom području prve forme vibriranja obuhvatimo sve moguće greške stvarnog odziva sustava spram nominalnog sustava. Pritom smo koristili korištena Monte Carlo metodu uz redukciju reda modela, a rezultirajući W_f je eliptični filter 3. reda.

Usporedbu frekvencijskog odziva ovako konstruiranog sustava (puna crta) s frekvencijskim odzivima stvarnog sustava (ispredikidane crte) smo prikazali na Sl. 4.



Sl. 4. Frekvencijski odzivi originalnog sustava i najveći frekvencijski odziv sustava s nesigurnostima

3 ZAKLJUČAK

Dinamičke sustave sa srednje-frekvencijskim ponašanjem možemo točno opisati matematičkim modelom koji se sastoji od (međusobno neovisnih) nominalnih formi pojedinih formi vibriranja, a pritom je svaka od navedenih formi u sprezi s dinamičkim modelim nesigurnosti. Pritom polazimo od pretpostavke da forme vibriranja koje najviše utječu na vibracijski odziv nisu spregnute. Opisani pristup nam omogućava jednostavan izračun težinskih filtera, rezultira matematičkim modelom vrlo niskoga reda koji vjerno opisuje dinamičko ponašanje konstrukcije, te je podesan za sintezu robustnog sustava upravljanja.

Literatura:

- [1] Desmet, W., "Mid-frequency vibro-acoustic modeling: challenges and potential solutions", Proceedings of ISMA 2002, Leuven, Belgium, 2002, str. 835-862.
- [2] Doyle, J. C., Francis, B. A., Tannenbaum, A. R., "Feedback control theory", Macmillan Publishing, 1990.
- [3] Dullerud, G. E., Paganini, F., "A Course in Robust Control Theory", Springer-Verlag, 2000.
- [4] Grice, R. M., Pinnington, R. J., "A method for the vibration analysis of built-up structures, part II: analysis of the plate-stiffened beam using a combination of finite element analysis and analytical impedance". Journal of Sound and Vibration, Vol.230, 2000, str. 851-875.
- [5] Hong, S. B., Wang, A., Vlahopoulos, N., "A hybrid finite element formulation for a beam-plate system", Journal of Sound and Vibration, Vol.298, 2006, str. 233-256.
- [6] Ji, L., Mace, B. R., Pinnington, R. J., "A mode-based approach for the mid-frequency vibration analysis of coupled long- and short-wavelength structures", Journal of Sound and Vibration, Vol.289, 2006, str. 148-170.
- [7] Langley, R. S., Coton, V., "Prediction of the ensemble mean and variance of the response of uncertain structures using the hybrid FE/SEA method", Proceedings of ISMA 2006, Leuven, Belgium, 2006, str. 2221-2236.
- [8] Langley, R., "Recent Advances and Remaining Challenges in the Statistical Energy Analysis of Dynamic Systems", Proceedings of 7th European Conference on Structural Dynamics, Southampton, UK, 2008.
- [9] Lyon, R. H., DeJong, R. G., "Theory and application of statistical energy analysis", Butterworth-Heinemann, Boston, 1995.
- [10] Preumont, A., Seto, K., "Active control of structures", Wiley, 2008.
- [11] Shorter, P. J., Langley, R. S., "Vibro-acoustic analysis of complex systems", Journal of Sound and Vibration, Vol.288, 2005, str. 669-700.
- [12] Vergote, K., Genechten, B. V., Vandepitte, D., Desmet, W., "On the analysis of vibro-acoustic systems in the mid-frequency range using a hybrid deterministic-statistical approach", Computers and Structures, Vol.89, 2011, str. 868-877.
- [13] Viktorovitch, M., Pratellesi, A., "A hybrid mid-frequency formulation for vibro-acoustic predictions", Noise Control Engineering Journal, Vol.56, 2008, str. 71-84.

Autori:

Marko Jokić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, 10000 Zagreb, Ivana Lučića 5, tel. +385(0)16168424, e-mail: mjokic@fsb.hr

Lin Ji, Shandong University, School of Mechanical Engineering, No. 17923 Jingshi Road, Jinan, Shandong Province, 250061, China, e-mail: jilin@sdu.edu.cn

Peti susret Hrvatskog društva za mehaniku
Terme Jezerčica, Donja Stubica, 6.-7. lipnja 2013.

UTJECAJ OPTEREĆENJA NA BIOMEHANIČKU STABILNOST PRIJELOMA DISTALNOG HUMERUSA

Kodvanj J., Sabalić S., Surjak M. & Pamuković F.

Sažetak: Osteoporotični prijelomi zauzimaju sve značajnije mjesto u sveukupnom morbiditetu stanovništva razvijenih zemalja. Veliki broj takvih prijeloma zahtjeva sekundarne zahvate, a posljedica toga su kronična stanja kao što su bol, funkcionalna i psihosocijalna invalidnost. Ekstraartikularni prijelomi distalnog humerusa zahtjevaju drugačije postupke liječenja od intraartikularnih prijeloma. Tijekom otvorene repozicije i unutrašnje fiksacije, osobito kod višeiverinih ekstraartikularnih prijeloma distalne dijafize i metafize humerusa, zahtjeva se adekvatna biomehanička stabilnost koštanih ulomaka koja omogućuje rano postoperativno razgibavanje lakatnog zgloba, a time i dobar funkcionalni rezultat.

U ovom radu je ispitana biomehanička stabilnost osteosinteze s pločicama na zaključavanje (LCP) i s konvencionalnim rekonstrukcijskim pločicama s kortikalnim vijcima bez zaključavanja. Ispitivanja su provedena pri aksijalnom opterećenju i savijanju na umjetnim osteoporotičnim modelima proksimalnog humerusa s osteotomijom koja simulira nestabilnost na mjestu prijeloma. Rezultati su pokazali da se kod oba modela najveći pomaci na frakturnoj pukotini pojavljuju u području donjeg anteriornog ruba.

Ključne riječi: *distalni humerus, biomehanika, osteoporoza*

1 UVOD

Prijelomi distalnog humerus su rijetki prijelomi, a javljaju se s učestalošću od 2-6% svih prijeloma. Najčešće se javljaju kod mlađih osoba i osoba starije životne dobi, a uzrokovani su padovima, prometnim nezgodama i traumama u industriji.

Distalni humerus je nastavak tijela humerusa, a najvažniji su djelovi zglobna tijela: trohlea (*lat. trochlea*) i glavica (*lat. capitulum*). Zbog prirode anatomije (živci, krvne žile) prijelomima distalnog humerusa se pristupa sa stražnje strane. Cilj operativnog liječenja prijeloma je postizanje dovoljne stabilnosti pomoću implantata, kako bi se osiguralo mirovanje koštanih fragmenata i time stvorili uvjeti za cijeljenje prijeloma. Prijelomi distalnog humerusa se dijele na zglobne (artikularne) i izvanzglobne (ekstraartikularne) prijelome. Stabilnost se u većini slučajeva kod obje vrste prijeloma operativnim postupkom postiže pločicama i vijcima, pri čemu pločice mogu biti međusobno postavljene u perpendikularnoj ili paralelnoj konfiguraciji (sl. 1).

Pločice mogu biti konvencionalne s običnim vijcima (rekonstrukcijske pločice) i pločice na zaključavanje (LCP pločice). LCP pločice karakterizira aksijalna i angularna stabilnost konstrukcije koja je omogućena čvrstim spojem između glave vijka i pločice te se time sprječava izvlačenje vijka i bitno smanjuje mogućnost komplikacija koje nastaju zbog smanjenja stabilnosti i krutosti konstrukcije.



Sl. 1. Konfiguracija pločica: perpendikularna a), paralelna b)

Dosadašnje biomehaničke studije rađene su na artikulacionom segmentu, nijedna studija nije učinjena na ekstraartikulacionom segmentu humerusa. Većina relevantnih studija, osobito posljednjih godina, zastupa mišljenje kako je paralelna konfiguracija značajno stabilnija od perpendikulare [2, 4, 5, 7].

2 MATERIJALI I METODE

Ispitivanje stabilnosti osteosinteze ekstraartikularnog prijeloma distalnog humerusa provedeno je na osteoporotičnim modelima kosti (Synbone AG, Malans, Švicarska). Osteotomija koja simulira nestabilnost na mjestu prijeloma učinjena je 25 mm proksimalno od fose olecrani. Duljina frakturne pukotine iznosila je 10 mm. Koštani fragmenti u paralelnoj konfiguraciji fiksirani su s čeličnim rekonstrukcijskim pločicama 3,5 mm i titanskim LCP pločicama 2,5 mm. Konvencionalne čelične pločice s osam rupa postavljene su pomoću čeličnih kortikalnih vijaka promjera 3,5 mm, a LCP pločice također s osam rupa sa samonarezujućim vijcima na zaključavanje od titana. Radi lakšeg prihvata i pozicioniranja modela za vrijeme ispitivanja proksimalni krajevi modela su zaliveni u čeličnoj cijevi promjera 48 mm i duljine 50 mm polimetil-metakrilatom (PMMA) SCS-Beracryl D-28 (Suter – Kunststoffe AG, Švicarska).

Ispitivanje uzoraka provedeno je kao u posljednjim biomehaničkim studijama [3, 6] pri:

- aksijalnom opterećenju ili anteriornoj defleksiji kod koje je nadlaktica postavljena pod kutom fleksije 5° u odnosu na uzdužnu os dijafize humerusa,
- savijanju ili posteriornoj defleksiji pri čemu je nadlaktica flektirana pod kutom od 75° u odnosu na uzdužnu os dijafize humerusa,
- postraničnom ili varusnom opterećenju kod kojega je opterećenje narinuto postranično na radijalni kondil.

Načini opterećivanja uzoraka prikazani su na sl. 2. Za kvazi-statičko ispitivanje uzoraka korištena je kidalica Beta 50-5 (Messphysik, Austrija), a pomaci koštanim fragmenata tijekom ispitivanja mjereni su optičkim mernim sustavom Aramis (GOM mbH, Njemačka). Prije samog mjerjenja na površinu anterioane strane modela nanesen je stohastički uzorak (raster) izrazitoga kontrasta, koji tijekom opterećivanja prati

promjene oblika mjernog objekta, odnosno pomake na njegovoj površini. Za odabrani mjerni volumen sustav je kalibriran odgovarajućim kalibracijskim objektom [1].

Modeli s rekonstrukcijskim i LCP pločicama su kod sva tri opterećenja ispitana s tri ponavljanja. Sva ispitivanja provedena su do loma uzorka.

a)



b)



c)



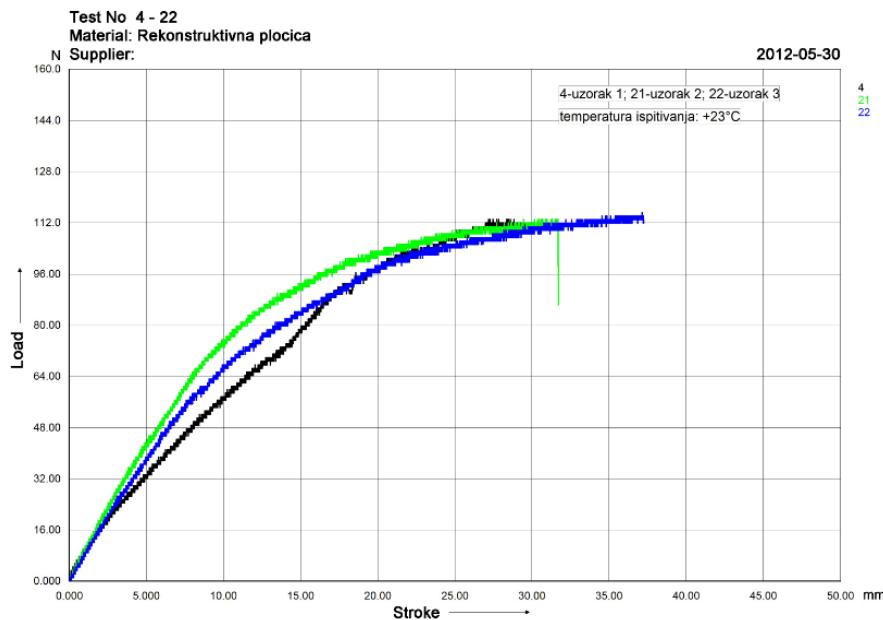
Sl. 2. Opterećenje ispitnih modela: savijanje a), aksijalno opterećenje b), postranično opterećenje c)

REZULTATI I ZAKLJUČAK

Na sl. 3 prikazan je dijagram sila – pomak za model s rekonstrukcijskim pločicama pri savijanju. Krutost u elastičnom području dobivena iz dijagrama sila – pomak za sve ispitne uzorke prikazana je u tab. 1.

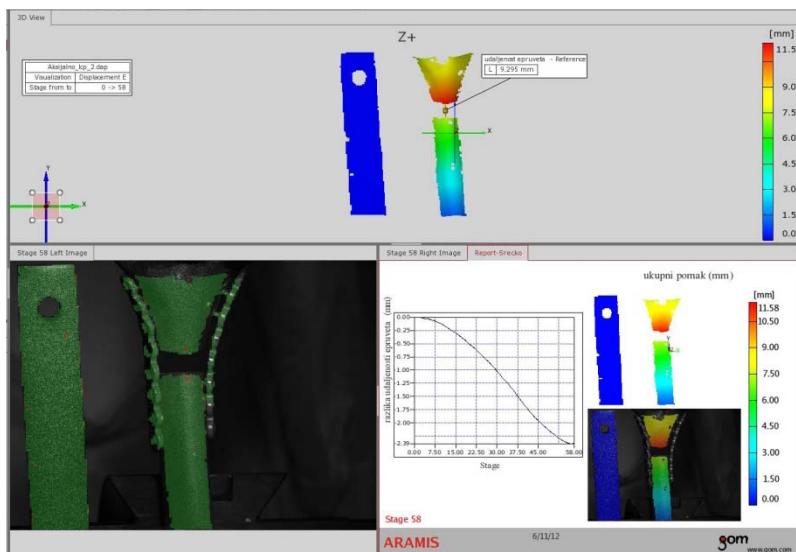
Tab. 1. Krutost modela u elastičnom području

Uzorak	Krutost N/mm					
	Rekonstrukcijska pločica			LCP pločica		
	Savijanje	Aksijalno	Postranično	Savijanje	Aksijalno	Postranično
1	7,25	260,30	6,99	6,53	437,26	6,02
2	8,69	276,24	7,29	6,23	340,98	7,48
3	7,57	239,52	7,84	7,12	375,69	6,17
Sred. vrijed.	7,84	258,69	7,37	6,63	384,64	6,56
St. devijacija	0,76	18,41	0,43	0,45	48,76	0,80



Sl. 3. Dijagram sila – pomak za model s rekonstrukcijskim pločicama pri savijanju

Rezultati za krutost dobiveni iz podataka od kidalice u elastičnom području pokazuju da rekonstrukcijska pločica ima veću krutost pri savijanju i postraničnom opterećenju. Kod savijanja krutost modela s LCP pločicama iznosi 85%, a kod postraničnog opterećenja 89% krutosti modela s rekonstrukcijskim pločicama. Znatno veća razlika u krutosti je nastala pri aksijalnom opterećenju, pri kojem krutost modela s rekonstrukcijskim pločicama iznosi 67% krutosti LCP modela.



Sl. 4. Promjena duljine frakturne pukotine kod LCP modela pri aksijalnom opterećenju

Pri ispitivanju mjerena je i promjena duljine pukotine mjernim sustavom Aramis. Na sl. 4 prikazani su rezultati za LCP pločicu pri aksijalnom opterećenju. Iz rezultata je vidljivo da je rekonstrukcijska pločica bolja kod savijanja i postraničnog opterećenja, dok je promjena duljine pukotine manja kod modela s LCP pločicama. Kod oba modela najveći pomaci na frakturnoj pukotini pojavljuju se u području donjeg anteriornog ruba.

Iz ovih rezultata je vidljivo da prednost pločice na zaključavanje najviše dolazi do izražaja pri aksijalnom opterećenju. Zbog veze glave vijka s pločicom preko navoja sustav pločica-vijci predstavlja kruti sklop i ne dozvoljava pomak pločice neovisno o vijcima što je slučaj kod konvencionalnih pločica bez zaključavanja.

Razlike u svojstvima između modela s rekonstrukcijskim i LCP pločicama postoje, međutim one su u granicama koje zadovoljavaju uvjete dovoljne biomehaničke stabilnosti u vremenu koje je uobičajeno za cijeljenje prijeloma u toj regiji.

Literatura:

- [1] Aramis User Manual-Software, GOM mbH, Germany 2009.
- [2] Arnander, M.W., Reeves, A., MacLeod, I.A., Pinto, T.M., Khaleel, A. "A biomechanical comparison of plate configuration in distal humerus fractures", J Orthop Trauma. 22, 5, 2008, str. 332-6.
- [3] Penzkofer, R., Hungerer, S., Wipf, F., von Oldenburg, G., Augat, P. "Anatomical plate configuration affects mechanical performance in distal humerus fractures", Clin. Biomech. 25, 10, 2010, str. 972-978.
- [4] Schwartz, A., Oka, R., Odell, T., Mahar, A., "Biomechanical comparison of two different periarticular plating systems for stabilization of complex distal humerus fractures", Clin. Biomech. 21, 9, 2006, str. 950-5.
- [5] Self, J., Viegas, S.F., Buford, W.L. Jr, Patterson, R.M., "A comparison of double-plate fixation methods for complex distal humerus fractures", J Shoulder Elbow Surg. 4, 1995, str. 10-6.
- [6] Windolf, M., Maza, E.R., Gueorguiev, B., Braunstein, V., Schwieger, K., "Treatment of distal humeral fractures using conventional implants", Biomechanical evaluation of a new implant configuration. BMC Musculoskeletal Disord. 2010, 11:172.
- [7] Zalavras, C.G., Vercillo, M.T., Jun, B.J., Otarodifard, K., Itamura, J.M., Lee, T.Q., "Biomechanical evaluation of parallel versus orthogonal plate fixation of intra-articular distal humerus fractures", J Shoulder Elbow Surg. 20, 1, 2011, str. 12-20.

Autori:

Janoš Kodvanj, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 6168 425,
e-mail: janos.kodvanj@fsb.hr

Srećko Sabalić, KBC Sestre milosrdnice, Klinika za traumatologiju, Draškovićeva 19, 10000 Zagreb
e-mail: ssabalic@gmail.com

Martin Surjak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 6168 445,
e-mail: martin.surjak@fsb.hr

Frane Pamuković, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 6168 447,
e-mail: frane.pamukovic@fsb.hr

Peti susret Hrvatskog društva za mehaniku
Terme Jezerčica, Donja Stubica, 6.-7. lipnja 2013.

STABILNOST OSTEOSINTEZE PLOČICOM KOD PRIJELOMA PROKSIMALNOG HUMERUSA

Kodvanj, J., Surjak, M. & Ćurko, D.

Sažetak: Starenje stanovništva dovodi do sve većeg broja osteoporotičnih oboljenja kostiju, poglavito u starijih osoba.

Osteosinteza uključuje spajanje i unutarnju fiksaciju koštanih fragmenata nakon frakture pomoću implantanata napravljenih od biokompatibilnih materijala, s ciljem cijeljenja kosti. Od svoje pojave, osteosintetske pločice na zaključavanje pokazale su se boljima u odnosu na konvencionalne osteosintetske pločice, jer osiguravaju veću biomehaničku stabilnost koštanih ulomaka te pridonose očuvanju biološkog integriteta kosti što rezultira bržim i boljim cijeljenjem prijeloma.

U ovom radu ispitana je biomehanička stabilnost osteosinteze s Philos pločicom (Synthes, Švicarska) i novokonstruiranom pločicom na zaključavanje tvrtke Zrinski AG (Njemačka). Eksperimentalna ispitivanja provedena su za ekstraartikularni prijelom proksimalnog humerusa na osteoporotičnim umjetnim kostima s osteotomijom u području kirurškog vrata humerusa, te na osteoporotičnim i neosteoporotičnim kostima bez osteotomije, kod aksijalnog opterećenja i abdukcije. Pomaci i deformacije određeni su pomoću korelacije digitalne slike (DIC- Digital Image Correlation).

Ključne riječi: biomehanika; osteoporoza; proksimalni humerus; pločica na zaključavanje

1 UVOD

Produljenjem životnog vijeka ljudi dolazi do rastuće pojave starenja stanovništva. Sukladno tome, dolazi do značajnog porasta populacije zahvaćene osteoporozom. Osteoporoza, kao bolest koštanog tkiva koja zahvaća prvenstveno stariju populaciju, čini kosti krhkijima tako da i najmanja sila može izazvati prijelom [5]. Većina osteoporotičnih prijeloma zahtijeva sekundarne zahvate što podrazumijeva zahtjevno, dugotrajno i skupo liječenje. Frakture proksimalnog humerusa spadaju u najčešće osteoporotične traume, i njihov broj je u stalnom porastu. Unatoč napretku operacijske tehnike, komplikacije za vrijeme operacije ili nakon nje, te broj loše sraslih prijeloma proksimalnog humerusa je značajan.

Takvi prijelomi se danas operativno liječe s pločicama na zaključavanje, običnim anatomske prilagođenim pločicama i kod pojedinih vrsta prijeloma intramedularnim čavlima [3, 4]. Kod upotrebe pločica na zaključavanje koriste se posebno oblikovani vijci koji imaju glave s navojem te su često samonarezujući, što uklanja potrebu za narezivanjem navoja u samoj kosti.

Cilj ovog istraživanja je određivanje krutosti osteosinteze Philos pločicom, odnosno novokonstruiranom pločicom, pri statičkom opterećenju

2 EKSPERIMENTALNO ISPITIVANJE

Eksperimentalno ispitivanje statičke izdržljivosti osteosinteze pločicama na zaključavanje kod prijeloma proksimalnog humerusa provedeno je s dvije vrste pločica na zaključavanje: Philos pločicama (Synthes, Švicarska), sl. 1 a), koje su služile za usporedbu kao referentne i novokonstruiranim pločicama na zaključavanje tvrtke Zrinski AG, sl. 1 b). Na umjetnu osteoporotičnu kost (Synbone, Švicarska), svaka pločica fiksirana je pomoću sedam vijaka na zaključavanje.



Sl. 1. Pločice na zaključavanje fiksirane na umjetnu kost



Sl. 2. Uzorak s osteotomijom

Stabilnost osteosinteze kod obje skupine uzoraka s osteotomijom ispitana je pri statičkom aksijalnom opterećenju i abdukciji pod 25° u odnosu na uzdužnu os kosti [2].

Ispitana su i po dva modela osteoporotične i neosteoporotične kosti na kojima nije rađena osteotomija u svrhu određivanja krutosti samih kostiju. Za pravilno pozicioniranje modela na kidalici tijekom ispitivanja, modeli su zaliveni u čelične kalupe (sl. 2.) dimenzija $\phi 48 \times 50$ mm, smjesom SCS-Beracryl D-28 (PMMA), (Suter – Kunststoffe AG, Švicarska).

Statička ispitivanja pri aksijalnom opterećenju i abdukciji provedena su na statičkoj kidalici Messphysik Beta 50-5 na koju su ispitni uzorci postavljeni pomoću posebne naprave koja omogućuje precizno pozicioniranje uzoraka, sl. 3.

Ekspereimenti su provedeni u elastičnom području s kontrolom pomaka pri čemu je brzina opterećivanja iznosila 1,2 mm/min za slučaj aksijalnog opterećenja, a 5 mm/min prilikom abdukcije.

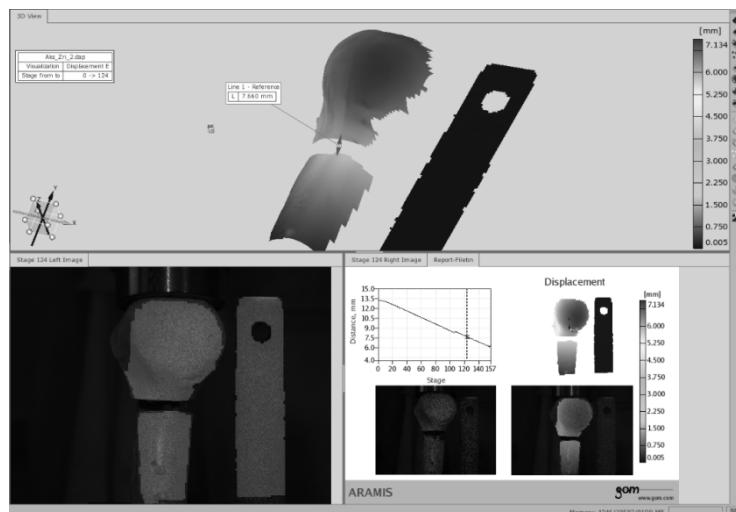


Sl. 3. Opterećivanje ispitnog uzorka i mjerjenje pomaka optičkim sustavom Aramis

Pomaci koštanih ulomaka koji nastaju tijekom ispitivanja mjereni su optičkim mernim sustavom Aramis vidljivim na sl. 3. Optički sustav Aramis temelji se na principu objektnog raster postupka i koristi se za mjerjenje promjene oblika u dvije ili tri dimenzije u realnom vremenu [1]. Prije mjerjenja sustav je kalibriran za odgovarajući merni volumen, a na pripremljene modele nanešen je stohastički uzorak pomoću kojeg sustav prati pomake na površini ispitnog uzorka. Uzorci su snimani svake sekunde tijekom ispitivanja. Slike dobivene mjerjenjem diskretizirane su kvadratnim facetama veličine 15x15 pixela koje predstavljaju mjerne točke.

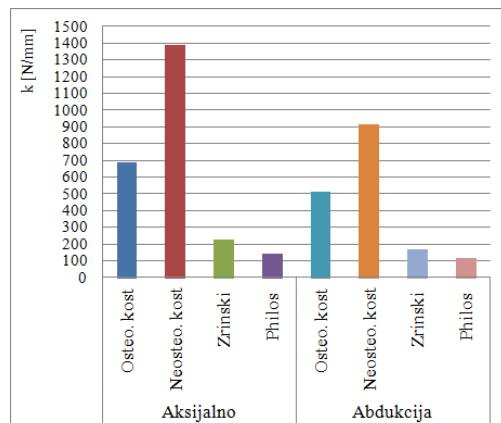
3 REZULTATI I ZAKLJČAK

Na sl. 4 prikazano je merno područje, raspodjela pomaka uzorka s osteotomijom pri aksijalnom opterećenju, kao i promjena duljine frakturne pukotine.



Sl. 4. Pomaci prikazani pomoću grafičkog sučelja programskog paketa Aramis

Uz pomoć podataka o sili i pomaku, dobivenih s kidalice, određena je krutost ispitanih uzoraka u elastičnom području, a usporedba je dana na sl. 5.



Sl. 5. Usporedba krutosti ispitanih uzoraka

Metoda korelacije digitalne slike (DIC) se pokazala jako dobrom metodom za određivanje mehaničkih svojstava medicinskih implantanata.

Prema očekivanju najveću krutost imaju intaktne kosti, dok je kod modela s osteosintezom veća krutost uzoraka sa novokonstruiranom pločicom kako kod aksijalnog opterećenja, tako i kod abdukcije. Kod aksijalnog opterećenja krutost modela s Philos pločicom iznosi 62,5%, a kod abdukcije 71,8% krutosti modela s novokonstruiranom pločicom. Na osnovi dobivenih rezultata može se zaključiti da novokonstruirana pločica osigurava bolju biomehaničku stabilnost koštanih ulomaka od Philos pločice pri statičkom aksijalnom opterećenju i abdukciji.

U dalnjem istraživanju planirana je usporedba stabilnosti prikazanih modela pri cikličkom opterećenju, a rezultati dobiveni statičkim ispitivanjem koristiti će se za definiranje parametara cikličkih opterećenja

Literatura:

- [1] Aramis User Manual – Software, GOM mbH, Germany 2009.
- [2] Brianza, S., Plecko, M., Gueorguiev, B., Windolf, M., Schweiger, K., “Biomechanical evaluation of a new fixation technique for internal fixation of three-part proximal humerus fractures in a novel cadaveric model”, Clinical Biomechanics, 25, 2010, str. 862-892.
- [3] Mathison, C., Chaudhary, R., Beaupre, L., Reynolds, M., Adeeb, S., Bouliane, M., “Biomechanical analysis of proximal humeral fixation using locking plate fixation with an intramedullary fibular allograft”, Clinical Biomechanics, Vol. 25, 2010, str. 642-646.
- [4] Schumer, R.A., Muckley, K.L., Markert, R.J., Prayson, M.J., Heflin, J., Konstantakos, E.K., Goswami, T., “Biomechanical comparison of a proximal humeral locking plate using two methods of head fixation”, Journal of Shoulder and Elbow Surgery, Vol.19, 2010, str. 495-501.
- [5] Seide, K., Triebe, J., Faschingbauer, M., Schulz, A. P., Püschel, K., Mehrtens, G., Jürgens, Ch., “Locked vs. unlocked plate osteosynthesis of the proximal humerus- A biomechanical study”, Clinical Biomechanics, Vol.22, 2007, str. 176-182.

Autori:

Janoš Kodvanj, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 6168 425,
e-mail: janos.kodvanj@fsb.hr

Martin Surjak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 6168 445,
e-mail: martin.surjak@fsb.hr

Daria Ćurko, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, I. Lučića 5, 10000 Zagreb,
e-mail: daria_inc@hotmail.com

ANALIZA PULSIRAJUĆEG STRUJANJA U CIJEVI

Korade, I., Virag, Z. & Korbar, R.

Sažetak: U radu je izvedeno analitičko rješenje za slučaj pulsirajućeg laminarnog, nestlačivog strujanja u okrugloj cijevi pod djelovanjem poznatog gradijenta tlaka (zadanog harmonijskom funkcijom). Bezdimenzijsko rješenje ovisi o bezdimenijskom Womerslyjevom broju, koji označuje omjer inercijske i viskozne sile. Analiziran je utjecaj Womerslyjeva broja na protok i smično naprezanje na stijenci cijevi. Zaključuje se da su pri niskim vrijednostima Womerslyjeva broja (kad je utjecaj viskoznosti veći) sile tlaka uravnotežene uglavnom viskoznim silama, a pri visokim vrijednostima Womerslyjeva broja uravnotežene uglavnom inercijskim silama. Povećanjem Womerslyjeva broja dolazi do smanjenja amplituda smičnog naprezanja i protoka.

Ključne riječi: strujanje u cijevi, pulsirajuće strujanje, Womerslyjev broj

1 UVOD

Strujanje krvi u krvožilnom sustavu je izrazito pulsirajućeg karaktera. Krvne žile su elastične odnosno viskoelastične cijevi, promjenjivog promjera i fizikalnih svojstava stijenke, te zbog toga ne postoji analitičko rješenje toga problema. Za objašnjavanje pulsirajućeg strujanja u velikim arterijama u hemodinamici se najčešće koristi analitičko rješenje koje je još davne 1955. godine izveo Womersly [1] za strujanje fluida pod djelovanjem harmonijskog gradijenta tlaka. To rješenje se zasniva na pojednostavljenom matematičkom modelu u kojem je prepostavljena beskonačno velika brzina širenja tlačnih poremećaja (teorija krutog stupca) što ne odgovara stvarnosti. Bez obzira na tu činjenicu model može objasniti prirodu pulsirajućeg strujanja i pulsacije smičnog naprezanja na stijenci cijevi [2, 3], pri čemu se prepostavka o konačnoj brzini širenja tlačnih poremećaja može naknadno uvesti u analizu.

Prednost pojednostavljenog modela leži u činjenici da on predstavlja linearnu diferencijalnu jednadžbu, što omogućuje princip superpozicije. Na taj način se s pomoću Womerslyjeva rješenja mogu analizirati i stvarno izmjereni vremenski profili brzine i tlaka, na način da se signali prikažu Fourierovim redom, te se analizira svaka frekvencija za sebe.

U literaturi se može pronaći Womerslyjevo rješenje za sinusnu promjenu gradijenta tlaka, a u slučaju primjene Fourierove analize, pojavljuje se i kosinusna komponenta. Cilj ovoga rada je izvesti Womerslyjevo rješenje za slučaj obje komponente pulsirajućeg gradijenta tlaka, te sačiniti računalni program za računanje brzine, protoka i smičnog naprezanja na stijenci u funkciji parametara krvne žile. Ovaj program će činiti osnovu za analizu pulsirajućih veličina u stvarnom krvotoku.

2 MATEMATIČKI MODEL

Nestlačivo strujanje fluida u krutoj cijevi polumjera R , pod djelovanjem harmonijskog gradijenta tlaka zadanoj jednadžbom:

$$\frac{dp}{dx} = S \sin(\omega t) + C \cos(\omega t), \quad (1)$$

uz zanemarenje konvekcijskog člana opisano je jednadžbom količine gibanja, koja glasi:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) - \frac{dp}{dx}. \quad (2)$$

U gornjim jednadžbama su: r , x – radijalna i aksijalna koordinata cilindarskog koordinatnog sustava, t – vremenska koordinata, $p(x, t)$ – polje tlaka, ω – kružna frekvencija, S i C – amplitude gradijenta tlaka, ρ – gustoća fluida, $u(r, t)$ – aksijalna brzina i μ – viskoznost fluida. Ovaj model pretpostavlja beskonačnu brzinu širenja tlačnih poremećaja, pa zato aksijalna brzina nije funkcija x koordinate. S druge strane, tlak nije funkcija r koordinate. Uz zadani gradijent tlaka jednadžba (2) daje jednoznačno rješenje za aksijalnu brzinu uz sljedeće rubne uvjete: za $r = 0$: $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ i za $r = R$: $u = 0$.

Množenjem jednadžbe (2) brzinom u dobije se jednadžba kinetičke energije, koja glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{u^2}{2} \right) = \mu \frac{u}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{dp}{dx} u, \quad (3)$$

gdje svaki član ima dimenziju snage po jedinici volumena, a član na lijevoj strani označuje brzinu promjene kinetičke energije (snagu inercijske sile), dok članovi na desnoj strani označuju, redom, snagu viskozne sile (brzinu pretvorbe mehaničke energije u toplinu) i snagu sile tlaka.

3 ANALITIČKO RJEŠENJE

Jednadžbu (2) ćemo riješiti u frekvencijskoj domeni, pri čemu ćemo gradijent tlaka prikazati pomoću kompleksne amplitudne (fazora): $\hat{P} = S + iC$, gdje je $i = \sqrt{-1}$. U tom slučaju izraz (1) se može prikazati realnim dijelom izraza:

$$\frac{dp}{dx} = \operatorname{Re} \left\{ -i\hat{P} e^{i\omega t} \right\}. \quad (4)$$

Rješenje za aksijalnu brzinu ćemo prepostaviti u obliku [1]:

$$u(r, t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{U}(r) e^{i\omega t} \right\}. \quad (5)$$

Uvrštavanjem izraza (3) i (4) u jednadžbu (2) slijedi diferencijalna jednadžba:

$$\frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{U}}{\partial r} - \frac{i\rho\omega}{\mu} \hat{U} = -\frac{i\hat{P}}{\mu}, \quad (6)$$

čiji homogeni dio označuje Besselovu jednadžbu [4, 5]. Rješenje jednadžbe (6) je oblika:

$$\hat{U} = \frac{\hat{P}}{\rho\omega} + CJ_0\left(r\sqrt{\frac{\rho\omega}{\mu}}e^{\frac{3\pi i}{4}}\right), \quad (7)$$

Gdje je C konstanta integracije, $J_0(z)$ označuje Besselovu funkciju prve vrste, nultog reda, a z je kompleksni broj. Uvođenjem bezdimenzijskog Womerslyjevog broja Wo , bezdimenzijskog radiusa y , brzine u_0 , te parametra Λ prema izrazima:

$$\text{Wo} = R\sqrt{\frac{\rho\omega}{\mu}}, \quad y = \frac{r}{R}, \quad u_0 = |\hat{P}| \frac{R^2}{4\mu} \quad \text{i} \quad \Lambda = \text{Wo} e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad (8)$$

te primjenom rubnih uvjeta dobije se konačno rješenje za aksijalnu brzinu koje glasi:

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_0} = \mathcal{Re} \left\{ \frac{\hat{P}}{|\hat{P}|} \frac{4}{\text{Wo}^2} \left[1 - \frac{J_0(\Lambda y)}{J_0(\Lambda)} \right] e^{i\omega t} \right\} \quad (9)$$

Protok fluida kroz poprečni presjek cijevi $Q = \int_0^R 2\pi u r dr$, definiran je izrazom:

$$\tilde{Q} = \frac{Q}{u_0 R^2 \pi} = \mathcal{Re} \left\{ \frac{\hat{P}}{|\hat{P}|} \frac{8i}{\text{Wo}^4} \left[-\frac{\text{Wo}^2 i}{2} - \frac{\Lambda J_1(\Lambda)}{J_0(\Lambda)} \right] e^{i\omega t} \right\}, \quad (10)$$

a smično naprezanje na stijenci cijevi $\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R}$ definirano je izrazom:

$$\tilde{\tau}_w = \frac{\tau_w}{\mu u_0 R} = \mathcal{Re} \left\{ 4 \frac{\hat{P}}{|\hat{P}|} \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}} J_1(\Lambda)}{\text{Wo} J_0(\Lambda)} e^{i\omega t} \right\} \quad (11)$$

U izrazima (10) i (11) $J_1(z)$ označuje Besselovu funkciju prve vrste, prvog reda, koju se može jednostavno izračunati u programskom paketu Matlab, ili s pomoću algoritama danih u [4]. Za izračun vrijednosti brzine, protoka i smičnih naprezanja u ovom se radu koristi programski paket Matlab. Jednom kad se odredi polje brzine, mogu se numeričkom integracijom jednadžbe (3) po presjeku, odrediti snage pojedinih sila, tako da je snaga P_p sile tlaka i snaga P_i inercijske sile:

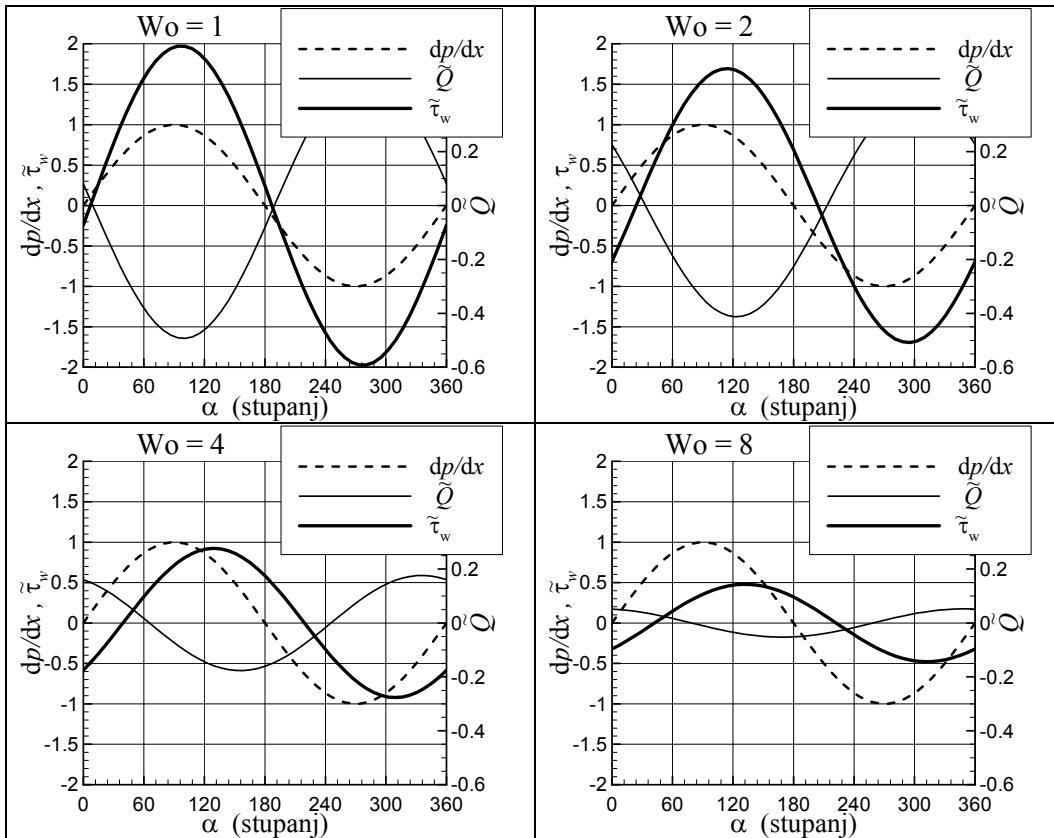
$$\tilde{P}_p = \frac{P_p}{|\hat{P}| u_0 R^2 \pi} = -\frac{1}{|\hat{P}|} \frac{dp}{dx} \tilde{Q} \quad (12) \quad \tilde{P}_i = \frac{P_i}{|\hat{P}| u_0 R^2 \pi} = \frac{\rho u_0}{|\hat{P}|} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 y \tilde{u}^2 dy, \quad (13)$$

a snaga viskoznih sila

$$\tilde{P}_\mu = \frac{P_\mu}{|\hat{P}| u_0 R^2 \pi} = \frac{2\mu u_0}{|\hat{P}| R^2} \int_0^1 y \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) dy. \quad (14)$$

4 ANALIZA RJEŠENJA

Iz rješenja postavljenog problema je jasno da će brzina strujanja fluida zavisiti od gradijenta tlaka i Womerslyjeva broja. Ovdje ćemo u svim primjerima imati isti gradijent tlaka (zadan sa $S=1 \text{ Pa/m}$ i $C=0$), a mijenjat ćemo vrijednosti Womerslyjeva broja pri čemu on poprima vrijednosti: $Wo=1, 2, 4$ i 8 . Rezultati proračuna (bezdimenzijski protok, prema jednadžbi (9) i bezdimenzijsko smično naprezanje prema jednadžbi (10)) su prikazani na slici 1 u funkciji kuta $\alpha = \omega t$ (za jedan period).



Sl. 1. Promjena protoka i smičnog naprezanja unutar jednog perioda, za različite Wo brojeve

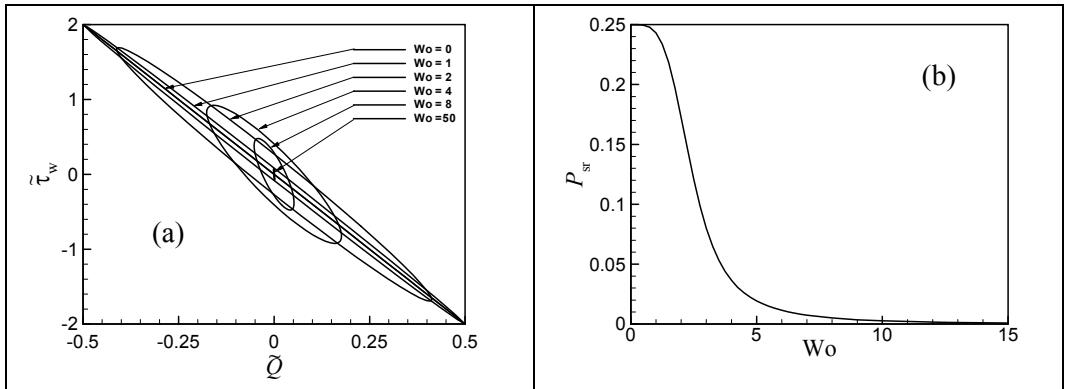
Fizikalno je jasno da Womerslyjev broj označuje odnos inercijske sile (uslijed lokalnog ubrzanja) i viskozne sile, pa će niske vrijednosti Wo broja označavati veliki utjecaj viskoznosti (ili mali utjecaj inercijskih sila), dok će visoke vrijednosti Wo broja označavati mali utjecaj viskoznosti (ili veliki utjecaj inercijskih sila). Prema tome može se očekivati da će kod niskih vrijednosti Wo broja u ravnoteži biti sile tlaka i viskozne sile (jer se inercijske sile mogu zanemariti), dok će kod visokih vrijednosti Wo broja u ravnoteži biti sile tlaka i inercijske sile.

Kao što je vidljivo iz slike 1, pri $Wo=1$, u fazi su gradijent tlaka i smično naprezanje, što označuje ravnotežu sile tlaka i viskoznih sila, dok je kod $Wo=8$ očit fazni pomak protoka u odnosu na gradijent tlaka od približno 90° , što ukazuje da su u fazi sile tlaka i inercijske sile (jer inercijske sile odgovaraju vremenskoj derivaciji protoka, a

vremenska derivacija protoka je za 90° pomaknuta u odnosu na sam protok). Slučaj kada Wo teži k nuli, odgovara stacionarnom režimu strujanja, u kojem je amplituda bezdimenzijske vrijednosti smičnog naprezanja jednaka 2, a amplituda bezdimenzijskog protoka jednaka 0,5. Očito je da s povećanjem Wo broja (uz zadani promjer cijevi i svojstva fluida, to znači s povećanjem frekvencije ω) dolazi do smanjivanja amplituda smičnih naprezanja i amplitude protoka, što je vidljivo i iz slike 2(a). Jasno je da je rad inercijske sile unutar jednog takta jednak nuli, pa je prosječna snaga te sile jednaka nuli. Iz toga slijedi da se prosječna snaga sile tlaka

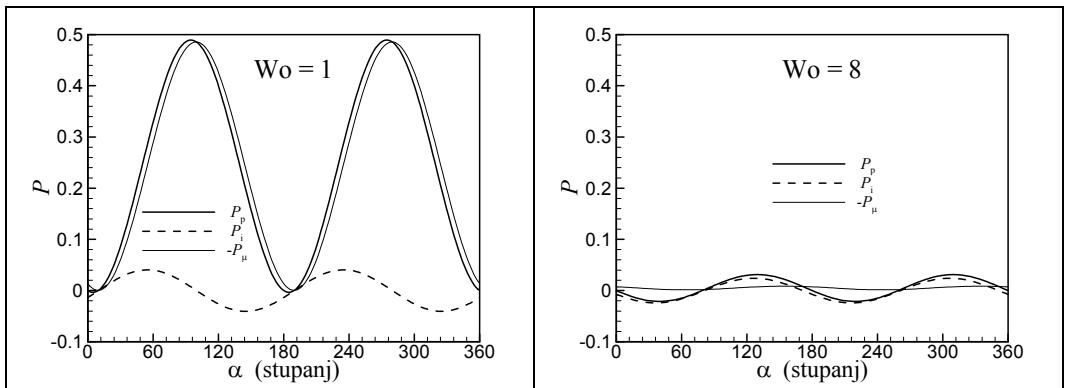
$$P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T P_p dt, \text{ troši isključivo na svladavanje viskozne sile, tj. da se disipira u toplinu.}$$

Slika 2(b) prikazuje promjenu te snage s Wo brojem, a očito je da porastom Wo broja ta snaga teži k nuli (zbog smanjenja amplituda protoka i smičnog naprezanja).



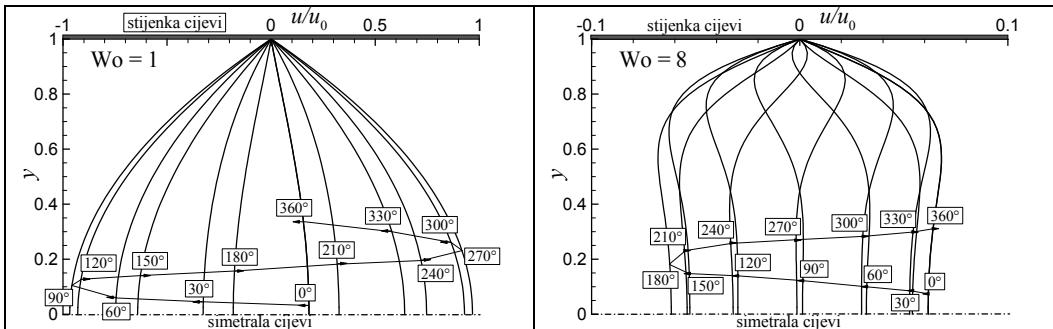
Sl. 2. (a) Zavisnost smičnog naprezanja na stijenci o protoku kroz cijev, (b) Zavisnost prosječno disipirane snage od Wo broja

Slika 3 prikazuje promjene snage sile tlaka, inercijske sile i viskozne sile za $Wo=1$ i $Wo=8$. Očito je kod niskog Wo broja snaga viskozne sile približno jednaka snazi sile tlaka, što znači da se gotovo sva snaga sile tlaka disipira u toplinu, dok kod visokog Wo broja snaga inercijske sile slijedi snagu sile tlaka, a snaga viskozne sile teži k nuli.



Sl. 3. Promjena snaga sile tlaka, inercijske sile i viskozne sile za dva različita Wo broja

Slika 4 prikazuje profile aksijalne brzine za dva Wo broja. Ponovno se uočava da je pri nižem Wo broju amplituda brzine veća.



Sl. 4. Promjena profila brzine unutar jednog perioda, za dva različita Wo broja

5 ZAKLJUČAK

U radu je prikazano analitičko rješenje pulsirajućeg, laminarnog, nestlačivog strujanja u okrugloj cijevi pod djelovanjem zadanog gradijenta tlaka (zadanog sinusnom i kosinusnom komponentom koja se može pojaviti pri razvoju funkcije gradijenta tlaka u Fourierov red). Ilustriran je utjecaj Womerslyjeva broja na brzinu, protok i smično naprezanje na stijenci cijevi. Zaključeno je da su pri niskim vrijednostima Womerslyjeva broja sile tlaka uravnovežene uglavnom viskoznim silama, a pri visokim vrijednostima Womerslyjeva broja inercijskim silama. Povećanjem Womerslyjeva broja dolazi do smanjenja amplituda smičnog naprezanja i protoka. Prikazano rješenje će u dalnjem radu biti dobra osnova za analizu stvarnog strujanja krvi u cirkulacijskom sustavu.

Literatura:

- [1] Womersley, J.R., "Method for the Calculation of Velocity, Rate of Flow and Viscous Drag in Arteries when the Pressure Gradient is Known, J. Phys.. No.127, 1955, str. 553-563.
- [2] Nichols, W.W; O'Rourke, M.F.: McDonald's Blood Flow in Arteries, (5th ed.) Oxford Univ. Press, New York, USA, 2005.
- [3] Westerhof, N; Stergiopoulos, N.; Noble, M.I.M: Snapshots of Hemodynamics, (2nd ed.) Springer, New York, USA, 2010.
- [4] Shanjie, Z., Jianming, J.: "Computation of Special Functions", John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 1996, str. 126-201.
- [5] Web stranica: <http://mathworld.wolfram.com/BesselDifferentialEquation.html>

Autori:

Ivan Korade, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168166, fax 01/6156940, e-mail: ivan.korade@fsb.hr,

Zdravko Virag, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168137, fax 01/6156940, e-mail: zdravko.virag@fsb.hr,

Radoslav Korbar, Veleučilište u Karlovcu, Ivana Meštovića 10, 47000 Karlovac, e-mail: rkorbar@vuka.hr.

USPOREDBA SHEMA INTERPOLACIJE KVAZI-2D MODELIMA HIDRAULIČKOG UDARA

Korbar, R., Korade, I., & Mustapić, N.

Sažetak: Najtočniji model hidrauličkog udara koji se u praksi koristi je kvazi-dvodimenzionalni. Ukoliko se za rješavanje tog modela, u okviru metode karakteristika, koristi isključivo implicitna shema vremenske interpolacije, postupak rješavanja znatno se skraćuje. Ovdje su uspoređeni rezultati dobiveni korištenjem implicitne i mješovitih shema s eksperimentalnim rezultatima. Implicitna shema pokazala se superiornijom.

Abstract: The most accurate practical model of water hammer is the quasi two-dimensional model. The solution procedure for this model becomes substantially shorter, if the implicit time interpolation scheme is used within the method of characteristics. Here, the results obtained using implicit and mixed schemes are compared with experimental results. The implicit scheme proved to be superior.

Ključne riječi: hidraulički udar, interpolacijska shema, nestacionarno strujanje, strujanje u cijevi

1. UVOD

Zbog razvijenih tehnologija i civilizacije problemi nestacionarnog strujanja fluida postaju sve značajniji u širokom području, od cjevovoda za transport i opskrbu fluida do strujanja u krvožilnom sustavu. Sve češće potrebno je obračunati i gubitke energije, tj. uzeti u obzir trenje, a točnost proračuna trenja znatno zavisi od složenosti modela hidrauličkog udara. Potrebna točnost modela odabire se prema potrebama zadatka i parametrima ispitivane pojave. Pri odabiru modela hidrauličkog udara značajnu ulogu ima brzina proračuna. Zato se modele u pravilu nastoje maksimalno pojednostaviti.

Kvazi-dvodimenzionalni (2D) model predstavlja najtočniji model koji se u praksi koristi za simulaciju hidrauličkog udara. Zbog složenosti, najčešće se koristi za verifikaciju jednostavnijih jednodimenzionalnih (1D) modela, a rjeđe za komercijalnu simulaciju. Metoda [3] rješavanja kvazi-2D modela hidrauličkog udara u cijevi brža je i jednostavnija od starijih srodnih metoda [4] i [5], ali zahtijeva korištenje implicitne sheme vremenske interpolacije radikalne brzine.

U ovom radu pokazuje se da ograničavanje na korištenje isključivo implicitne sheme ne kvari točnost rješenja. To se pokazuje usporednjom rješenja dobivenih primjenom implicitne i mješovitih shema interpolacije, za dvije situacije hidrauličkog udara za koje postoji eksperimentalni podaci [1]. Pokazalo se i da bezuyjetna stabilnost implicitne sheme predstavlja značajnu prednost u odnosu na ostale sheme koje dovode do nestabilnosti postupka rješavanja.

2. MATEMATIČKI MODEL

Kad se uvedu sljedeće pretpostavke:

- aksijalna simetrija,
- 1D polje tlaka, tj. $P=P(x,t)$,
- zanemariv utjecaj svih konvektivnih članova,
- Boussinesqova hipoteza za turbulentno strujanje,

jednadžba kontinuiteta i jednadžba količine gibanja za nestacionarno strujanje slabo stlačivog fluida u cilindarskim koordinatama glase

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\rho c^2}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r v_{ef} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad (2)$$

pri čemu je t =vrijeme; x =koordinata duž osi cijevi; r =radijalna udaljenost od osi cijevi; $P(x,t)$ =tlak; $u(x,r,t)$ =aksijalna brzina; $v(x,r,t)$ =radijalna brzina; ρ =gustoća; c =brzina zvuka; v_{ef} =efektivna kinematička viskoznost (laminarna + turbulentna viskoznost). Uz ovaj kvazi-2D model uspješno se u [4] koristi pet-zonski model turbulencije [2], pa je isti model turbulencije primijenjen i u ovom radu.

Rubni uvjeti

Stacionarno strujanje u cijevi predstavlja početni uvjet. U radu se koriste četiri tipa rubnih uvjeta:

- 1) *Spremnik*. U cijevi, neposredno uz spremnik pretpostavlja se konstantni tlak P_0 i radijalna brzina jednaka nuli
- 2) *Zatvoreni ventil*. Aksijalna brzina uz ventil jednaka je nuli.
- 3) *Stijenka cijevi*. Aksijalna i radijalna komponenta brzine jednake su nuli.
- 4) *Os simetrije*. Radijalna brzina i promjena aksijalne brzine u radijalnom smjeru jednake su nuli.

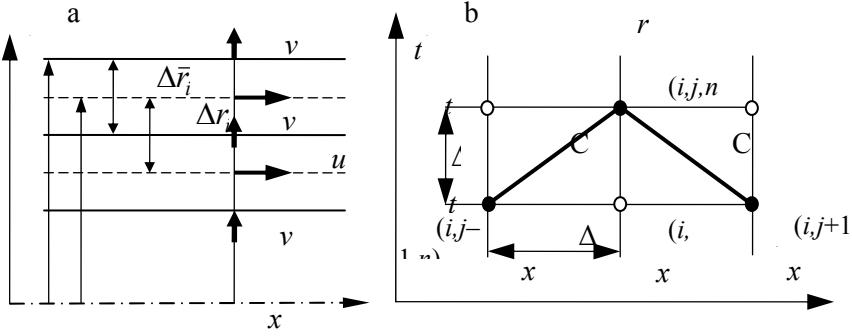
3. NUMERIČKA METODA

Kvazi-2D model (1), (2) integrira se metodom karakteristika. Domena (cijev) podijeljena je na N_r cilindara različite širine (vidi sl. 1a). Čvorovi u kojima se računa aksijalna brzina u smješteni su na sredini cilindara, dok su čvorovi u kojima se računa radijalna brzina v smješteni na rubovima cilindara. U aksijalnom smjeru područje je podijeljeno na N_x jednakih koraka duljine $\Delta x=c\Delta t$ (vidi sl. 1b) tako da je Courantov br. točno jednak jedinici. Na sl. 1b) čvorovi su označeni indeksima i, j i n , pri čemu i =indeks radijalnog koraka, j =indeks aksijalnog koraka, n =indeks vremenskog koraka, dok su pozitivna i negativna karakteristična krivulja označene sa C^+ i C^- .

Model se integrira po presjeku (dobiva se 1D model), pa se primjenom metode karakteristika dobiva sljedeća diskretizirana jednadžba za tlak

$$P_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[P_{j-1}^n + P_{j+1}^n + \rho c (U_{j-1}^n - U_{j+1}^n) \right] + (1-\varepsilon) \frac{c \Delta t}{R} \left[(\tau_w)_j^n - (\tau_w)_{j+1}^n \right], \quad (3)$$

pri čemu je $U(x,t)$ =srednja brzina po presjeku, $\tau_w(x,t)$ =smično naprezanje na stijenci cijevi, ε =parametar za odabir vremenske interpolacijske sheme za trenje ($0 \leq \varepsilon \leq 1$; eksplicitna: $\varepsilon=0$; implicitna: $\varepsilon=1$), Δt =vremenski korak, R =polumjer cijevi.



Sl. 1 a) Princip podjele mreže u radijalnom smjeru;
 b) Princip podjele mreže pri $r=const.$

Ista jednadžba može se dobiti i numeričkom integracijom diskretiziranih jednadžbi iz [4], što znači da se u suštini radi o algebarskoj manipulaciji jednih te istih jednadžbi. Nakon što se na taj način odredi tlak, u svakom presjeku cijevi potrebno je riješiti sljedeći trodijagonalni sustav linearnih jednadžbi za aksijalnu brzinu u

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{n+1} - \frac{\varepsilon \Delta t}{\bar{r}_i \Delta r_{i-1}} & \left[r_i (\nu_{ef})_{i,j}^n \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta \bar{r}_i} - r_{i-1} (\nu_{ef})_{i-1,j}^n \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \bar{r}_{i-1}} \right] = \\
 & = \frac{1}{2} \left[u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n + \frac{P_{j-1}^n - P_{j+1}^n}{\rho c} \right] + \\
 & + (1-\varepsilon) \frac{\Delta t}{2 \bar{r}_i \Delta r_{i-1}} \left[r_i (\nu_{ef})_{i,j-1}^n \frac{u_{i+1,j-1}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta \bar{r}_i} - r_{i-1} (\nu_{ef})_{i-1,j-1}^n \frac{u_{i,j-1}^n - u_{i-1,j-1}^n}{\Delta \bar{r}_{i-1}} \right] +, \quad (4) \\
 & + (1-\varepsilon) \frac{\Delta t}{2 \bar{r}_i \Delta r_{i-1}} \left[r_i (\nu_{ef})_{i,j+1}^n \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i,j+1}^n}{\Delta \bar{r}_i} - r_{i-1} (\nu_{ef})_{i-1,j+1}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n}{\Delta \bar{r}_{i-1}} \right] - \\
 & - \frac{(1-\theta)c \Delta t}{2 \bar{r}_i \Delta r_{i-1}} (r_i v_{i,j-1}^n - r_{i-1} v_{i-1,j-1}^n - r_i v_{i,j+1}^n + r_{i-1} v_{i-1,j+1}^n)
 \end{aligned}$$

gdje je θ =parametar za odabir vremenske interpolacijske sheme za radijalnu brzinu ($0 \leq \theta \leq 1$), dok se sustav jednadžbi za radijalnu brzinu v

$$\begin{aligned}
 \frac{P_j^{n+1}}{\rho c} + \frac{\theta c \Delta t}{\bar{r}_i \Delta r_{i-1}} & \left(r_i v_{i,j}^{n+1} - r_{i-1} v_{i-1,j}^{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{P_{j-1}^n + P_{j+1}^n}{\rho c} + u_{i,j-1}^n - u_{i,j+1}^n \right] + \\
 & + (1-\varepsilon) \frac{\Delta t}{2 \bar{r}_i \Delta r_{i-1}} \left[r_i (\nu_{ef})_{i,j-1}^n \frac{u_{i+1,j-1}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta \bar{r}_i} - r_{i-1} (\nu_{ef})_{i-1,j-1}^n \frac{u_{i,j-1}^n - u_{i-1,j-1}^n}{\Delta \bar{r}_{i-1}} \right] - \\
 & - (1-\varepsilon) \frac{\Delta t}{2 \bar{r}_i \Delta r_{i-1}} \left[r_i (\nu_{ef})_{i,j+1}^n \frac{u_{i+1,j+1}^n - u_{i,j+1}^n}{\Delta \bar{r}_i} - r_{i-1} (\nu_{ef})_{i-1,j+1}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i-1,j+1}^n}{\Delta \bar{r}_{i-1}} \right] - \\
 & - (1-\theta) \frac{c \Delta t}{2 \bar{r}_i \Delta r_{i-1}} (r_i v_{i,j-1}^n - r_{i-1} v_{i-1,j-1}^n + r_i v_{i,j+1}^n - r_{i-1} v_{i-1,j+1}^n)
 \end{aligned}$$

rješava se eksplisitno. U ovom radu opisani postupak proračuna koristi se.

Eksplisitna shema vremenske interpolacije je ona u kojoj se vrijednosti izvorskih članova uzimaju u starom vremenskom trenutku, tj. u točkama $(i,j-1,n)$ i $(i,j+1,n)$. U implicitnoj shemi uzimaju se u novom vremenskom trenutku, tj. u točki $(i,j,n+1)$, dok se u mješovitoj shemi uzimaju vrijednosti na karakterističnim krivuljama C^+ i C^- interpolirane u nekom trenutku između tih krajnjih trenutaka.

Ako se odabere samo implicitna vremenska interpolacija za radijalnu brzinu (tj. $\theta=1$), uklanja se radijalna brzina v iz sustava jednadžbi (3), (4), tako da za određivanje tlaka P i aksijalne brzine u uopće nije potrebno rješavati sustav (5) za radijalnu brzinu v . Odabirom implicitne vremenske interpolacije za trenje (tj. $\varepsilon=1$), jednadžbe (3), (4) dodatno se još znatno pojednostavljaju. Ovakav pojednostavljeni proračun prvi puta je primijenjen u [3], dok se u ovom radu istražuje utjecaj tog pojednostavljenja, tj. točnost implicitne u odnosu na druge sheme.

5) REZULTATI

Proračunski tlakovi dobiveni korištenjem implicitne ($\varepsilon=1$, $\theta=1$), i mješovitih shema ($0 < \varepsilon < 1$, $0 < \theta < 1$) uspoređeni su s rezultatima eksperimenta za dvije strujne situacije opisane u [1], u kojima je početno stacionarno strujanje laminarno (Reynoldsov br. $Re=82$) odn. turbulentno ($Re=6132$). Ispitni uređaj sastojao se od krute cijevi postavljene između spremnika s konstantnim tlakom P_0 na početku cijevi i brzozatvarajućeg ventila na njenom kraju. Osjetnici tlaka bili su postavljeni na kraju i na sredini duljine cijevi. Hidraulički udar ostvario se tako da se u režimu stacionarnog strujanja praktički trenutačno zatvorio ventil. S proračunom su uspoređeni rezultati dobiveni na sredini duljine cijevi.

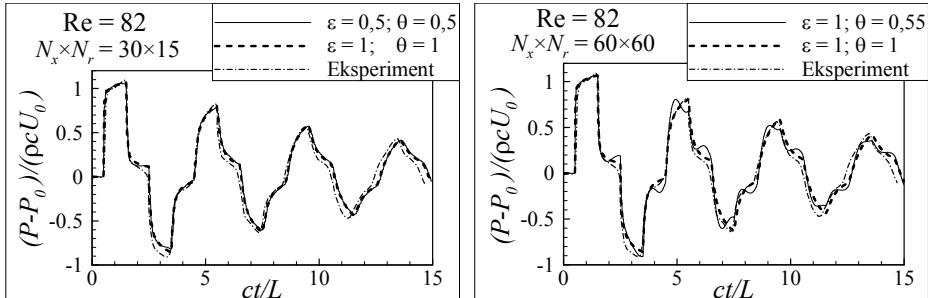
Sve korištene mreže imaju jednolik korak u aksijalnom (x) smjeru dok se u radijalnom smjeru korak povećava u geometrijskom nizu (kvocijent niza $q=1,05$) od stjenke cijevi prema unutrašnjosti. Zbog nestabilnosti proračunskog postupka nije u svim situacijama bilo moguće koristiti mješovite polu-implicitne sheme (tj. kombinacije $\varepsilon=0,5$; $\theta=0,5$ niti $\varepsilon=1$; $\theta=0,5$) od kojih se očekivala povećana točnost budući da su to sheme drugog reda točnosti. Koliko je stabilnost dozvoljavala, vrijednosti parametara ε i θ odabirane su ipak što bliže gornjim vrijednostima.

Na sl. 2 prikazan je tlak dobiven za situaciju laminarnog strujanja proračunat na relativno gruboj mreži ($N_x \times N_r = 30 \times 15$). Minimalna razlika dobivena korištenjem implicitne i polu-implicitne sheme primjećuje se samo u trenucima prolaska poremećaja, i tada implicitna metoda pokazuje veću točnost. Slični rezultati dobiveni su i korištenjem finijih mreža $N_x \times N_r = 30 \times 30$ (mješovita shema $\varepsilon=0,6$; $\theta=0,6$) i $N_x \times N_r = 60 \times 60$ (mješovita shema $\varepsilon=0,7$; $\theta=0,7$), jedino se u rezultatima dobivenim mješovitim shemama zamjećuju male nefizikalne oscilacije. Vrlo slični rezultati dobiveni su i na mreži $N_x \times N_r = 30 \times 30$ (mješovita shema $\varepsilon=1$; $\theta=0,5$).

Na sl. 3 prikazan je tlak dobiven za situaciju laminarnog strujanja proračunat na relativno finoj mreži $N_x \times N_r = 60 \times 60$ (mješovita shema $\varepsilon=1$; $\theta=0,55$). Pogreške dobivene korištenjem mješovite sheme su znatne, oscilatornog su karaktera, pa se može pretpostaviti da je to zbog blizine granice stabilnosti.

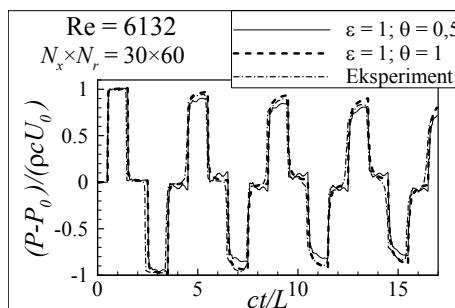
Na sl. 4 prikazan je tlak dobiven za situaciju turbulentnog strujanja proračunat na mreži $N_x \times N_r = 30 \times 60$ (mješovita shema $\varepsilon=1$; $\theta=0,5$). Pogreške pri korištenju mješovite sheme su znatne i ponovo imaju oscilatorni karakter. Rezultati dobiveni korištenjem

implicitne sheme i mješovite sheme ($\varepsilon=0,7$; $\theta=0,7$) na istoj mreži nemaju međusobnih zamjetnih razlika. Grublje mreže nisu korištene zbog zahtjeva za finijom mrežom uz stijenku cijevi kojeg postavlja model turbulencije.



Sl. 2 Tlak na sredini duljine cijevi,
gruba mreža.

Sl. 3 Tlak na sredini duljine cijevi,
finija mreža.



Sl. 4 Tlak na sredini duljine cijevi za slučaj turbulentnog strujanja.

6) ZAKLJUČAK

Za dvije situacije hidrauličkog udara za koje postoje eksperimentalni podaci o tlaku, u radu su uspoređeni rezultati dobiveni korištenjem potpuno implicitne sheme ($\varepsilon=\theta=1$) i mješovitih shema ($\varepsilon\neq 1$ i/ili $\theta\neq 1$). Očekivana veća točnost mješovite sheme (formalno to je diskretizacija višeg reda točnosti) nije uočljiva čak niti na relativno gruboj mreži. Radi održanja stabilnosti postupka, pokazalo se da na finijim mrežama treba povećavati parametre ε i θ (tj. shema mora biti sve bliže implicitnoj shemi). U rješenjima dobivenim pomoću mješovitih shema na finijim mrežama pojavljuju se nefizikalne oscilacije koje znatno narušavaju točnost.

Korištenje potpuno implicitne sheme nije niti u jednom slučaju zamjetno narušilo točnost rezultata. S druge strane, sukladno [4], korištenje implicitne sheme pokazalo se povoljno radi osiguranja stabilnost rješenja. Dobiveni rezultati upućuju na to da je upravo korištenje implicitne sheme preporučljivo, pa nemogućnost odabira drugih shema u skraćenoj metodi proračuna [3] u praksi ne predstavlja gubitak.

Literatura:

- [1] Holmboe, E.L.; Rouleau, W.T.: "The effect of viscous shear on transients in liquid lines", *J. of Basic Eng., Trans. ASME*, 89(1), 1967., str. 174-180.

- [2] Kita, Y.; Adachi, Y.; and Hirose, K: "Periodically oscillating turbulent flow in a pipe", *Bull. JSME*, 23(179), 1980., str. 656-664.
- [3] Korbar, R.: "Prilog modeliranju koeficijenta otpora trenja u nestacionarnom strujanju fluida u cijevima", Doktorski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2012.
- [4] Vardy, A. E.; Hwang, K.L.: "A characteristics model of transient friction in pipes", *J. Hydraul. Res.*, 29(5), 1991., str. 669-684.
- [5] Zhao, M.; Ghidaoui, M. S.: "Efficient quasi-two-dimensional model for water hammer problems", *J. Hydraul. Eng.*, 129(12), 2003., str. 1007-1013.

Autori:

Radoslav Korbar, Veleučilište u Karlovcu, Ivana Meštrovića 10, 47000 Karlovac, tel. 091/7809668, fax 047/843503, e-mail: rkorbar@vuka.hr,

Ivan Korade, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i ekologiju, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: ivan.korade@fsb.hr,

Nenad Mustapić, Veleučilište u Karlovcu, Ivana Meštrovića 10, 47000 Karlovac, e-mail: nenad.mustapic@vuka.hr.

PREGLED MODELA KOŠTANE PREGRADNJE

Leder Horina, J., Jurčević Lulić, T.

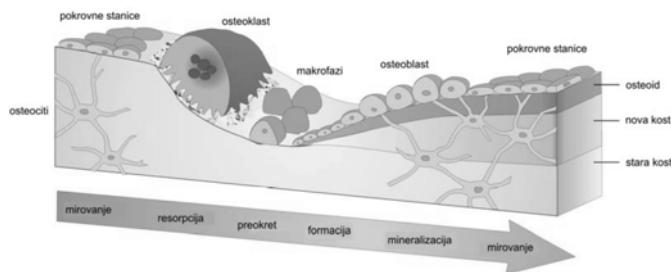
Sažetak: Koštana pregradnja je mehanizam koji regulira odnos između morfologije kosti i unutarnjih sila, te se temelji na činjenici da kost, kao živo tkivo, ima mogućnost obnove vlastitog tkiva uslijed mehaničkih stanja u kojima se nalazi. U radu su opisani konstitutivni modeli ponašanja kosti, a temelje se na postojanju mehaničkog stimulusa koji utječe na formiranje i resorpciju kosti. Prikazan je linearno elastični modeli koji povezuje Youngov modul s gustoćom kosti, te modeli koštane pregradnje koji se temelje na principima mehanike oštećenja definirajući tenzor pregradnje u obliku prividne gustoće i strukturnog tenzora koji je povezan s poroznošću i smjerovima trabekula. Mehanički stimulus definiran je kao tenzor termodinamički povezan s tenzorom pregradnje. Kriteriji resorpcije i formiranja kosti izraženi su preko mehaničkog stimulusa. Također je definirana i promjena brzine tenzora pregradnje. U radu su opisane prednosti i nedostaci prikazanih modela.

Ključne riječi: koštana pregradnja, stimulus, strukturalni tenzor, kriteriji resorpcije i formiranja

1 UVOD

Koštano tkivo je specijalizirano vezivno tkivo izgrađeno od međustanične tvari, koštanog matriksa i tri različite vrste stanica: osteocita koji se nalaze u šupljinama matriksa, osteoblasta koji sintetiziraju organske sastojke matriksa i osteoklasta koji sudjeluju u resorpciji i pregradnji koštanog tkiva [10]. Makroskopski gledano kost dijelimo na kortikalnu kost i trabekularnu kost.

Kost je vrlo zanimljiva zahvaljujući svojim svojstvima. Masa kosti je minimizirana s obzirom na funkciju. Kost ima mogućnost prilagodbe strukture i orijentacije trabekula s obzirom na trenutno opterećenje. Zahvaljujući tom svojstvu Wolff je još u 19. stoljeću postavio tzv. Wolffov zakon [11] koji se temelji na hipotezama: trabekule se pokušavaju orijentirati duž smjera osi glavnih naprezanja, a koštano tkivo ne postoji na mjestima gdje ima posmičnih naprezanja. Kasnije su mnogi znanstvenici razvijali Wolffov zakon i tako su nastali temelji koštane pregradnje [2].

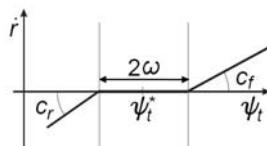


Sl. 1. Shematski prikaz koštane pregradnje [7]

S biološkog stajališta koštana pregradnja je proces koji se odvija u pet faza (slika 1). Te faze su mirovanje, resorpcija, preokret, formacija, mineralizacija i ponovno slijedi

faza mirovanja. Proces se odvija, uz pomoć koštanih stanica, uglavnom na unutarnjoj površini kosti.

Po Frostu [4], koštana pregradnja dijeli se, prema uzroku procesa, na unutarnju i vanjsku pregradnju. Unutarnja pregradnja je fiziološki proces koji je reguliran hormonima te joj je cilj održavati koncentraciju kalcija u kostima. Vanjska pregradnja je adaptivan proces koji ovisi o mehaničkom opterećenju kosti, a cilj joj je očuvati mehanička svojstva kosti i prilagoditi strukturu kosti kao odgovor na mehaničke zahtjeve.



Sl. 2. Brzina pregradnje kao funkcija stimulusa kod Stanforda [1]

2 PREGLED MODELA KOŠTANE PREGRADNJE

Prikazani su fenomenološki modeli, od izotropnih linearne elastičnih modela, do anizotropnih nelinearnih modela, kojima je cilj predviđati mehaničko ponašanje kosti, a uzimaju u obzir mikrostrukturu kosti.

Promatrano s fenomenološkog stajališta te opisano pomoću mehanostatske teorije, pregradnja se pojavljuje u cilju homogenizacije stimulusa ψ_t . Stimulus je skalarni prikaz primjenjenog mehaničkog opterećenja. Pregradnja, za izotropne modele, se može modelirati pomoću odnosa brzine promjene prividne gustoće $\dot{\rho}$, i brzine pregradnje \dot{r} . Prividna gustoća (*apparent density*) je omjer mase čiste kosti (bez srži i masnoća) i vanjskog volumena kosti. Brzina pregradnje je funkcija razlike trenutne vrijednosti odabranog stimulusa ψ_t i njegovog tzv. homeostatskog duplikata ψ_t^* . Većina modela također prepostavlja postojanje „mrtve“ ili lijene zone (*lazy zone* – interval širine 2ω , u sredini intervala se nalazi ψ_t^*) kao što je prikazano na slici 2. Brzina pregradnje treba biti definirana u skladu s kriterijima pregradnje [1]: kost se resorbira tj. smanjuje gustoću na mjestima gdje su podopterećeni uvjeti ($\psi_t < \psi_t^* - \omega$), a kosti se formira pod uvjetima preopterećenja ($\psi_t > \psi_t^* + \omega$).

2.1 Izotropni Stanfordov model

Izotropni Stanfordov model je model koji su Beaupre, Carter i ostali suradnici razvili na sveučilištu u Stanfordu [1] S mehaničkog stajališta, izotropni Stanfordov model prepostavlja da je konstitutivni zakon za kost na razini kontinuma izotropno linearne elastičan, stoga se može zapisati u obliku Hookeovog zakona za male deformacije. Stanfordov model prepostavlja da je kost potpuno kalcificirana (bez praznina – ima gustoću ρ_0), a brzina promjene prividne gustoće $\dot{\rho}$ određuje se prema:

$$\dot{\rho} = k S_v \rho_0 \dot{r}, \quad (10)$$

gdje je k omjer između površine koja se može pregraditi i ukupne unutarnje površine, S_v je specifična površina (unutarnja površina po jedinici volumena).

Resorpcija i formiranje kosti se pojavljuju na unutarnjoj površini, a stimulus je direktno povezan s brzinom pregradnje. Stanfordov kriterij pregradnje za formiranje $g_f^{\text{St.}}$ i za resorpciju $g_r^{\text{St.}}$, koji kvantificira formiran ili eliminiran volumen kosti preko dostupne površine po jedinici vremena glasi:

$$g_f^{\text{St.}} = \psi_t - (\psi_t^* + \omega) \rightarrow \text{formiranje}, \quad g_r^{\text{St.}} = \psi_t - (\psi_t^* - \omega) \rightarrow \text{resorpcija}. \quad (11)$$

Ovaj kriterij mjeri udaljenost između trenutne vrijednosti stimulusa i granica lijene zone. Po dijelovima linearni odnos između brzine pregradnje i kriterija pregradnje je naveden u (3), gdje je $\dot{r}^{\text{St.}}$ brzina pregradnje po Stanfordu, a c_f i c_r konstante pregradnje eksperimentalno dobivene [1]:

$$\dot{r}^{\text{St.}} = \begin{cases} c_f g_f^{\text{St.}} & \text{za } g_f^{\text{St.}} > 0 \\ 0 & \text{za } -\omega \leq (\psi_t - \psi_t^*) \leq \omega \\ c_r g_r^{\text{St.}} & \text{za } g_r^{\text{St.}} < 0 \end{cases}. \quad (12)$$

Stimulus bi trebao biti proporcionalan intenzitetu ekvivalentnog naprezanja na razini tkiva $\bar{\sigma}_t$, te je stoga potrebno naći poveznice između razine tkiva i razine kontinuma. Relacija koja povezuje intenzitet ekvivalentnog naprezanja na razini kontinuma, $\bar{\sigma}$, i tkiva je $\bar{\sigma} = (\rho/\rho_0)^2 \bar{\sigma}_t$. Intenzitet ekvivalentnog naprezanja na razini kontinuma se računa pomoću gustoće energije deformiranja prepostavljajući izotropnu elastičnost i male deformacije $\bar{\sigma} = \sqrt{E \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}}$, gdje je E prividni koštani Youngov modul koji ovisi o gustoći. Uobičajeno prihvaćen model za parametre elastičnosti kosti koji ovisi o gustoći je $E = B(\rho) \rho^{\beta(\rho)}$ i $\nu = \nu(\rho)$, $B(\rho)$ je eksperimentalni parametar [1]. U konačnici dobije se izraz za stimulus:

$$\psi_t = \underbrace{N^{1/m} \rho_0^2 \sqrt{B}}_C \frac{\sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}}}{\rho^{2-\beta/2}}. \quad (13)$$

2.2 Anizotropno proširenje - Jacobs

Jacobs [5] je napravio anizotropno proširenje Stanfordovog modela koje se temelji na činjenici da su prividna gustoća i tenzor elastičnosti unutarnje neovisne varijable. S mehaničkog stajališta, proširenje Stanfordovog modela uključuje konstitutivni zakon za kost na razini kontinuma kao anizotropno linearno elastičnog materijala.

Brzina pregradnje i kriteriji pregradnje su dani pomoću izraza (14) i (15) gdje je $g_f^{\text{An.}}$ kriterij pregradnje za formiranje kod anizotropnog, Jacobsovog modela, a $g_r^{\text{An.}}$ je kriterij pregradnje za resorpciju, te $\dot{r}^{\text{An.}}$ je brzina pregradnje po Jacobsu.

$$\begin{aligned} g_f^{\text{An.}} &= C \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}} - (\psi_t^* + \omega) \rho^{2-\beta/2} \rightarrow \text{formiranje} \\ g_r^{\text{An.}} &= C \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon}} + (\psi_t^* - \omega) \rho^{2-\beta/2} \rightarrow \text{resorpcija} \end{aligned} \quad (14)$$

Brzina promjene prividne gustoće i stimulus se računaju prema Stanfordovim izrazima.

$$\dot{r}^{\text{An.}} = \begin{cases} c_f \frac{g_f^{\text{An.}}}{\rho^{2-\beta/2}} & \text{za } g_f^{\text{An.}} \geq 0 \\ 0 & \text{za } g_f^{\text{An.}} < 0 \text{ i } g_r^{\text{An.}} < 0 \\ -c_r \frac{g_r^{\text{An.}}}{\rho^{2-\beta/2}} & \text{za } g_r^{\text{An.}} \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

2.3 Formulacija mehanike oštećenja na razini kontinuuma – Doblaré

Jacobsov pristup koštanoj pregradnji je usko povezan s principima kontinuumske mehanike oštećenja (CDM) te stoga Doblaré [4] predlaže modifikaciju elastičnih svojstava prema iznosima određenih unutarnjih varijabli, u obliku parametra oštećenja d koji se odnosi na efektivnu gustoću pukotina ili šupljina u svakoj točci i svakom smjeru. Zatim Doblaré proširuje parametar oštećenja na veličinu tenzora, \mathbf{D} , te definira efektivno naprezanja $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ prema izrazu $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - \mathbf{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma} (1 - \mathbf{D})^{-1/2}$ i postavlja konstitutivnu jednadžbu za tenzor oštećenja izjednačavajući ga s energijom ψ prema $\psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) = \psi^0(\tilde{\boldsymbol{\sigma}})$. U slučaju koštane pregradnje, oštećenje se treba shvatiti kao mjera volumnog udjela praznina unutar tkiva kosti. Anizotropnost je kvantificirana pomoću strukturnog tenzora $\hat{\mathbf{H}}$ (*fabric tensor*) koji je u svom radu uveo Cowin [3]. Stoga je mjeru oštećenja virtualna i odražava se na gustoću kosti i orientaciju koja se može razviti kod pregradnje. Važno je za naglasiti da ne postoji stvarno oštećenje u tkivu.

Također, Doblaré je definirao tenzor pregradnje \mathbf{H} koji uključuje smjerove koštane mikrostrukture pomoću strukturnog tenzora, kao i poroznost pomoću smanjene gustoće. Tenzor pregradnje je definiran preko tenzora oštećenja izrazom $\mathbf{D} = \mathbf{I} - \bar{\rho}^{\beta/2} \sqrt{A} \hat{\mathbf{H}} = \mathbf{I} - \mathbf{H}^2$ gdje je $\bar{\rho}$ volumni udio kosti, β eksperimentalni parametar [1], a A je parametar dobiven razlažući opći anizotropni model u izotropni slučaj.

Budući da je model pregradnje anizotropan, treba se uzeti u obzir ponašanje u smjerovima osi. Stoga stimulus treba biti opisan, ne kao skalar, već kao tenzor. Doblaré je odabrao stimulus pregradnje \mathbf{Y} kao varijablu termodinamički srodnu s njihovim tenzorom pregradnje (16) gdje su G i λ Lamelove konstante.

$$\mathbf{Y} = 2(2G\text{sym}[(\mathbf{H}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{H})(\mathbf{H}\boldsymbol{\epsilon})] + \lambda\text{tr}(\mathbf{H}^2\boldsymbol{\epsilon})\text{sym}(\mathbf{H}\boldsymbol{\epsilon})) \quad (16)$$

Doblaré predlaže dva kriterija pregradnje, za kriterij za resorpciju, $g_r^{\text{Dob.}}$ i za formiranje $g_f^{\text{Dob.}}$

$$\begin{aligned} g_f^{\text{Dob.}} &= C\rho_0^{-\beta/8} A^{1/8} \frac{3^{1/4}}{\sqrt{2(1-w)}} (\mathbf{J}:\mathbf{J})^{1/4} - (\psi_t^* + \omega) \rho^{2-5\beta/8} \rightarrow \text{formiranje} \\ g_r^{\text{Dob.}} &= \frac{\sqrt{2(1-w)}}{C\rho_0^{-\beta/8} A^{1/8} 27^{1/4}} (\mathbf{J}^{-1}:\mathbf{J}^{-1})^{1/4} - \frac{1}{(\psi_t^* - \omega) \rho^{2-5\beta/8}} \rightarrow \text{resorpcija} \end{aligned} \quad (17)$$

\mathbf{J} je u (17) funkcija stimulusa koja se kvantificira preko vrijednosti w , kao relativni utjecaj hidrostatskog ($w=0$) i devijatorskog dijela ($w=1$) stimulusa u kriteriju oštećenja, a definiran je izrazom $\mathbf{J} = \frac{1}{3}(1-2w)\text{tr}(\mathbf{Y})\mathbf{I} + w\mathbf{Y}$.

Brzina pregradnje je prema tome

$$\dot{r}^{\text{Dob.}} = \begin{cases} c_f \frac{g_f^{\text{Dob.}}}{\rho^{2-\beta/2}} & \text{za } g_f^{\text{Dob.}} \geq 0 \\ 0 & \text{za } g_f^{\text{Dob.}} < 0 \text{ i } g_r^{\text{Dob.}} < 0 \\ -c_r \frac{g_r^{\text{Dob.}}}{\rho^{2-\beta/2}} & \text{za } g_r^{\text{Dob.}} \geq 0 \end{cases} \quad (18)$$

2.3 Zakon pregradnje u nelinearnoj konstitutivnoj teoriji

Da bi se koštana pregradnja mogla opisati u nelinearnoj konstitutivnoj teoriji, potrebno je spregnuti oštećenje s plastičnošću [8]. Doblaré je u svom modelu koristio

pristup ekvivalentne energije deformiranja, gdje razina naprezanja u oštećenom materijalu s naprezanjem u neoštećenom materijalu vodi k istoj energiji deformiranja, i time se gubi fizikalni smisao. Zadržavajući fizikalni smisao sprezanja oštećenja i plastičnosti, kriterij plastičnosti je izražen pomoću efektivnih naprezanja. Prema Lemaitreu i Desmoratu [6] efektivno naprezanje za anizotropno oštećenje koje može opisati efekte hidrostatskog \mathbf{s} i devijatorskog p dijela naprezanja je definirano izrazom $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \text{dev}(\mathbf{H}\mathbf{s}\mathbf{H}) + \frac{p}{1-\eta d^H} \mathbf{I} = \tilde{\mathbf{s}} + \tilde{p} \mathbf{I}$ gdje je \mathbf{H} efektivni tenzor oštećenja definiran kroz strukturni tenzor $\mathbf{H}^{-2} = \bar{\rho}^\beta A \mathbf{T}$. Da bi se održala linearna veza između efektivnog i nominalnog naprezanja može se pisati $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma}$ gdje je \mathbf{M} tenzor četvrtog reda definiran pomoću tenzora oštećenja $\mathbf{M} = \mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{3} (\mathbf{H}^2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{H}^2) + \frac{1}{9} \text{tr}(\mathbf{H}^2) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{3} \frac{\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}}{1-\eta d^H}$. Time se dobije izraz za hidrostatski i devijatorski dio efektivnog naprezanja:

$$\begin{aligned} \tilde{p} \mathbf{I} &= \frac{p}{1-\eta d^H} \mathbf{I} = p \mathbf{M} : \mathbf{I} \\ \tilde{\mathbf{s}} &= \text{dev}(\mathbf{H}\mathbf{s}\mathbf{H}) = \mathbf{M} : \mathbf{s} \end{aligned} \quad (19)$$

Dekompozicijom tenzora brzine deformacije u teoriji velikih deformacija dobiva se elastični i plastični dio: $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$, a konstitutivni zakon efektivnog naprezanja glasi: $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^0 : \mathbf{E}^e$ gdje je \mathbf{C}^0 Hookeov tenzor za neoštećen materijal definiran $\mathbf{C}^0 = K \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G \mathbf{I}$ gdje su K i G parametri materijala. Da bi se oštećenje i plastičnost spregnuli (uzimajući u obzir von Misesov kriterij za neoštećene materijale, trabekule u ovom slučaju) ekvivalentno naprezanje je definirano kao efektivno naprezanje pomoću relacije $\tilde{\sigma}_{eq}^{vM} = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{\mathbf{s}} : \tilde{\mathbf{s}}}$, a izotropno očvršćenje je izraženo $\mathbf{E}^{pl} = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\tilde{\sigma}_{eq}} \text{dev}(\mathbf{H}\tilde{\mathbf{s}}\mathbf{H})$ gdje je λ plastični multiplikator [9].

Mehanički stimulus, \mathbf{Y} , je identificiran s varijablom koja je termodinamički povezana s efektivnim tenzorom oštećenja u smislu funkcije gustoće slobodne energije. Stimulus je određen pomoću vanjskih varijabli, devijatorskog i hidrostatskog dijela naprezanja, i unutarnje varijable, tenzora pregradnje

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{3K} \frac{\eta p^2}{(1-\eta d^H)^2} \mathbf{H}^{-3} + \frac{1}{2G} \mathbf{s} \mathbf{H} \mathbf{s}. \quad (20)$$

Kriteriji pregradnje za formiranje i resorpciju su prema tome (21), a brzina pregradnje (22) je dobivena pomoću kriterija pregradnje koji je trenutno aktivan.

$$\begin{aligned} g_f &= C \frac{3^{1/4}}{\sqrt{(1-w)}} (\mathbf{J} : \mathbf{J})^{1/4} - (\psi_t^* + \omega) \rho^{2-\beta/2} &\rightarrow \text{formiranje} \\ g_r &= -C \frac{27^{1/4}}{\sqrt{(1-w)}} (\mathbf{J}^{-1} : \mathbf{J}^{-1})^{1/4} + (\psi_t^* - \omega) \rho^{2-\beta/2} &\rightarrow \text{resorpcija} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\dot{r} = \begin{cases} c_f \frac{g_f}{\rho^{2-\beta/2}} & \text{za } g_f \geq 0, g_r < 0 \\ 0 & \text{za } g_r < 0 \text{ i } g_f < 0 \\ -c_r \frac{g_r}{\rho^{2-\beta/2}} & \text{za } g_r \geq 0, g_f < 0 \end{cases} \quad (22)$$

3 ZAKLJUČAK

Navedeni su modeli koštane pregradnje od izotropno linearno elastičnog modela, do anizotropnog nelinearnog modela. Svi modeli su opisani pomoću tri karakteristike, definicije stimulusa, funkcije brzine pregradnje i kriterija pregradnje. Doblaréov model, koji je direktna nadogradnja Stanfordovog i Jacobsovog anizotropnog modela, je fenomenološki model koji u sebi sadrži anizotropnu strukturu kosti opisanu preko strukturnog tenzora i prividne gustoće kao unutarnje varijable pregradnje, te koristi elastičan materijal za opis koštanog matriksa, točnije trabekula, pri malim deformacijama. Nadogradnja na Doblaréov model je sprezanje plastičnosti s anizotropnim oštećenjem kod velikih deformacija koristeći pristup ekvivalentnih deformacija za efektivno stanje u kontinuumskoj mehanici oštećenja. Materijal koštanog matriksa je elastoplastičan materijal s von Misesovim kriterijem tečenja. Odabran je Doblaréov model jer je stimulus dobiven pomoću termodinamičkog koncepta mehanike kontinuma. Nelinearni zakon pregradnje stoga može predvidjeti trajne deformacije koje nastaju u tkivu, a ne samo one koju su nastale uslijed varijacije gustoće, promatrane u teorijama s malim deformacijama.

Literatura:

1. Beaupre, G.S., T.E. Orr, and D.R. Carter, An approach for time-dependent bone modeling and remodeling - theoretical development. *Journal of Orthopaedic Research*, 1990. 85: p. 651-661.
2. Besdo, S., Determination of dynamically adapting anisotropic material properties of bone under cyclic loading. 2011.
3. Cowin, S.C., Wolff's law of trabecular architecture at remodeling equilibrium. *Journal of Biomechanical Engineering*, 1986. 1081: p. 83-88.
4. Doblare, M. and J.M. Garcia, Anisotropic bone remodelling model based on a continuum damage-repair theory. *Journal of Biomechanics*, 2002. 351: p. 1-17.
5. Jacobs, C.R., J.C. Simo, G.S. Beaupre, and D.R. Carter, Adaptive bone remodeling incorporating simultaneous density and anisotropy considerations. *Journal of Biomechanics*, 1997. 306: p. 603-613.
6. Lemaitre, J. and R. Desmort, *Engineering Damage Mechanics*. Springer. 2005, Paris:
7. Lovrenić-Jugović, M., Numeričko i eksperimentalno modeliranje procesa deformiranja kortikalnog koštanog tkiva. Sveučilište u Zagrebu. 2012.
8. Mengoni, M. and J.P. Ponthot, Isotropic continuum damage/repair model for alveolar bone remodeling. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2010. 2347: p. 2036-2045.
9. Mengoni, M., R. Voide, C. de Bien, H. Freichels, C. Jerome, A. Leonard, D. Toye, R. Müller, G.H. van Lenthe, and J.P. Ponthot, A non-linear homogeneous model for bone-like materials under compressive load. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 2012. 282: p. 334-348.
10. Mikšić, B., Ovisnost ultrazvučnih parametara petne kosti u dječjoj dobi o genskim polimorfizmima. University of Zagreb. 2010.
11. Wolff, J., *Das gesetz der transformation der knochen*. Hirschwald. 1892, Berlin:

Autori:

Jasna Leder Horina, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, 10000 Zagreb, Ivana Lučića 5, tel. +385(0)16168424, e-mail: jasna.leder.horina@fsb.hr
 Tanja Jurčević Lulić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, 10000 Zagreb, Ivana Lučića 5, tel. +385(0)16168549, e-mail: tanja.jurcevic@fsb.hr

VIŠERAZINSKO MODELIRANJE HETEROGENIH MATERIJALA

Lesičar, T., Tonković, Z., Sorić, J.

Sažetak: U radu je prikazana metoda modeliranja procesa deformiranja heterogenih materijala na dvije razine primjenom računalne homogenizacije drugog reda uz prepostavku malih deformacija. Detaljnije je istražen prijenos varijabli s makro na mikro razinu i primjena poopćenih uvjeta periodičnosti na reprezentativnom volumenskom elementu (RVE-u). Prilikom izvođenja relacija koje povezuju varijable makro i mikro razine javlja se integralni uvjet mikro fluktuacija, koji je primjenom numeričke integracije implementiran na rubne čvorove RVE-a. Za diskretizaciju makromodela izведен je dvodimenzionalni trokutni element s C^1 kontinuitetom, dok je RVE diskretiziran četverokutnim elementom prvog reda s C^0 kontinuitetom. Učinkovitost i točnost prikazane metode provjerena je na problemu čistog savijanja.

Ključne riječi: heterogeni materijal, višerazinsko modeliranje, gradijentna teorija, računalna homogenizacija drugog reda, konačni element s C^1 kontinuitetom, poopćeni rubni uvjeti periodičnosti, integralni uvjet mikrofluktuacija

1 UVOD

Gotovo svi materijali koji se koriste u inženjerskoj praksi su zbog svoje prirodne grade na mikro razini heterogeni. U novije vrijeme istraživanju utjecaja strukture materijala na njegovo mehaničko ponašanje pridaje se posebna pažnja. Iz tog su razloga razvijene metode višerazinskog modeliranja materijala, koje se temelje postupcima homogenizacije [8]. Pritom se za rješavanje problema rubnih vrijednosti najčešće koristi metoda konačnih elemenata, mada se u novije vrijeme primjenjuju i druge diskretizacijske metode među kojima se posebno ističu bezmrežni postupci. Na temelju zavisnosti varijabli mikro i makro razine, razlikuju se metode homogenizacije prvog i drugog reda. Homogenizacija prvog reda uzima u obzir samo gradijent pomaka na makro razini, odnosno makro deformaciju [6]. Na taj se način zadržavaju osnovne prepostavke lokalnog pristupa mehanike kontinuma. Zbog toga homogenizacija prvog reda na odgovarajući način opisuje samo jednostavnije slučajeve opterećenja, kao što su vlek, tlak i smik. Osim toga, primjenom homogenizacije prvoga reda ne može se opisati utjecaj okoline na ponašanje neke točke („size effect“) u razmatranom kontinuumu. Stoga je razvijena homogenizacija drugog reda, temeljena na nelokalnoj teoriji, koja nadilazi ograničenja homogenizacije prvog reda [2, 3, 4]. Za primjenu homogenizacije drugog reda, na makro razini mora biti zadovoljen C^1 kontinuitet, što zahtijeva primjenu elemenata višeg reda, koji uključuju dodatne stupnjeve slobode, kao što su prve i druge derivacije pomaka. U ovom slučaju se na mikro razini i dalje zadržava C^0 kontinuitet, u cilju pojednostavljenja numeričkog proračuna. Jedan od najvećih problema višerazinskog modeliranja materijala s primjenom homogenizacije drugog reda je prijenos makro deformacije i makro gradijenta deformacije na mikro

razinu. Prilikom izvođenja relacija između makro i mikro varijabli zbog prijelaza s C^1 na C^0 kontinuitet proizlazi integralni uvjet polja mikro fluktuacija [3, 4].

U radu je prikazan algoritam višerazinskog modeliranja materijala uz primjenu računalne homogenizacije drugog reda za slučaj malih deformacija. Posebna pažnja usmjerena je na primjenu poopćenih uvjeta periodičnosti na RVE-u. Za diskretizaciju makro razine primijenjen je dvodimenzijijski trokutni konačni element s C^1 kontinuitetom, čija je formulacija prilagođena potrebama višerazinske analize [5]. Provedena je numerička implementacija integralnog uvjeta na rubove RVE-a. Svi numerički algoritmi ugradeni su u programski paket ABAQUS [1] primjenom korisničkih rutina.

2 C^1 DVODIMENZIJSKI TROKUTNI KONAČNI ELEMENT

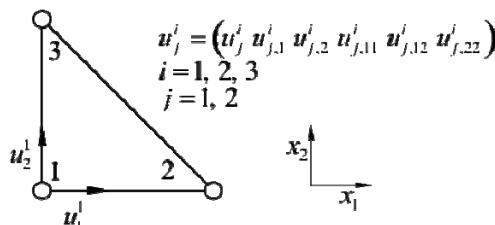
U ovom poglavlju su prikazane osnovne relacije trokutnog konačnog elementa s 3 čvora koji zadovoljava C^1 kontinuitet. Konačni element opisuje ravničko stanje deformacija, a temelji se na gradijentnoj teoriji [7, 9]. Kao što se vidi na slici 1, konačni element ima 36 stupnjeva slobode, odnosno 12 stupnjeva slobode po čvoru. Polje pomaka u elementu je aproksimirano potpunim polinomom petog stupnja. Princip virtualnih pomaka iz kojeg je element izведен, za gradijentnu teoriju glasi

$$\int_A \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA + \int_A \delta \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\mu} dA = \int_s \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} ds + \int_s \delta (\text{grad } \mathbf{u}^T) \mathbf{T} ds. \quad (2)$$

U jednadžbi (2), $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\mu}$ predstavljaju vektore naprezanja i sekundarnog naprezanja. $\boldsymbol{\epsilon}$ je vektor deformacije, dok je $\boldsymbol{\eta}$ vektor sekundarnih deformacija, koji se sastoji od drugih derivacija vektora pomaka \mathbf{u} . \mathbf{T} predstavlja tenzor sekundarnog površinskog opterećenja dobiven iz vektora sekundarnog površinskog opterećenja $\boldsymbol{\tau}$ i normale \mathbf{n} na plohu s na način da je $\mathbf{T} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{n}$. Gradijenti pomaka prikazani su kao

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^T &= (\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ 2\varepsilon_{12}) = (\mathbf{B}_\varepsilon \mathbf{v})^T, \\ \boldsymbol{\eta}^T &= (\eta_{111} \ \eta_{222} \ \eta_{221} \ \eta_{122} \ 2\eta_{121} \ 2\eta_{212}) = (\mathbf{B}_\eta \mathbf{v})^T, \end{aligned} \quad (2)$$

pri čemu matrice \mathbf{B}_ε i \mathbf{B}_η sadrže odgovarajuće prve i druge derivacije matrice interpolacijskih polinoma \mathbf{N} , a \mathbf{v} je vektor stupnjeva slobode elementa.



Sl. 1 Trokutni konačni element s C^1 kontinuitetom

Za analizu nelinearnog problema, jednadžba (2) se rješava inkrementalno-iterativno, pri čemu se inkrementi naprezanja i sekundarnog naprezanja u tom slučaju se računaju pomoću konstitutivnih relacija

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}_{\sigma\epsilon} \Delta \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{C}_{\sigma\eta} \Delta \boldsymbol{\eta}, \\ \Delta \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{C}_{\mu\epsilon} \Delta \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{C}_{\mu\eta} \Delta \boldsymbol{\eta},\end{aligned}\quad (3)$$

gdje su $\mathbf{C}_{\sigma\epsilon}$, $\mathbf{C}_{\sigma\eta}$, $\mathbf{C}_{\mu\epsilon}$ i $\mathbf{C}_{\mu\eta}$ materijalne matrice koje povezuju odgovarajuće komponente naprezanja s deformacijama. Nakon provedbe uobičajenih matematičkih operacija u metodi konačnih elemenata, dobiva se dobro poznata jednadžba konačnog elementa $\mathbf{K}\Delta\mathbf{v} = \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_i$. U ovom slučaju, matrica krutosti \mathbf{K} može se zapisati kao zbroj: $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\sigma\epsilon} + \mathbf{K}_{\sigma\eta} + \mathbf{K}_{\mu\epsilon} + \mathbf{K}_{\mu\eta}$, gdje su pojedine matrice jednake

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{\sigma\epsilon} &= \int_A (\mathbf{B}_\epsilon^T \mathbf{C}_{\sigma\epsilon} \mathbf{B}_\epsilon) dA, \quad \mathbf{K}_{\sigma\eta} = \int_A (\mathbf{B}_\epsilon^T \mathbf{C}_{\sigma\eta} \mathbf{B}_\eta) dA, \\ \mathbf{K}_{\mu\epsilon} &= \int_A (\mathbf{B}_\eta^T \mathbf{C}_{\mu\epsilon} \mathbf{B}_\epsilon) dA, \quad \mathbf{K}_{\mu\eta} = \int_A (\mathbf{B}_\eta^T \mathbf{C}_{\mu\eta} \mathbf{B}_\eta) dA.\end{aligned}\quad (4)$$

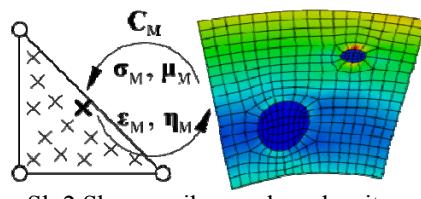
Nadalje, vektori vanjskih i unutarnjih čvornih sila \mathbf{F}_e i \mathbf{F}_i su prikazani relacijama

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_e &= \int_s (\mathbf{N}^T \mathbf{t} + \text{grad } \mathbf{N}^T \mathbf{T}) ds, \\ \mathbf{F}_i &= \int_A (\mathbf{B}_\epsilon^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{B}_\eta^T \boldsymbol{\mu}) dA.\end{aligned}\quad (5)$$

Izvedeni konačni element je implementiran u programske paket ABAQUS primjenom korisničke rutine UEL. Za numeričku integraciju matrice krutosti elementa primijenjen je Gaussov postupak reducirane integracije s 13 točaka integracije.

3 MIKRO-MAKRO ALGORITAM

U tekstu koji slijedi dane su osnovne relacije algoritma višerazinskog modeliranja primjenom homogenizacije drugog reda. Algoritam se sastoji od dva modela, gdje svaki model predstavlja jednu razinu. Makro razinu čini makro model, diskretiziran prethodno opisanim trokutnim elementima. Mikrostrukturnu razinu predstavlja RVE, diskretiziran četverokutnim elementima prvog reda. Pritom je svakoj veličini makro razine dodijeljen indeks "M", dok su veličine mikro razine označene indeksom "m". Na taj način, u svakoj točki integracije na makro razini provodi se analiza RVE-a. U tu svrhu, makro gradijent pomaka $\boldsymbol{\epsilon}_M$ i makro gradijent gradijenta pomaka $\boldsymbol{\eta}_M$ se primjenom poopćenih rubnih uvjeta periodičnosti prevode u pomake rubnih čvorova RVE-a. Nakon rješavanja problema rubnih vrijednosti na mikrorazini, homogenizacijom se dobivaju vektor naprezanja $\boldsymbol{\sigma}_M$, vektor sekundarnih naprezanja $\boldsymbol{\mu}_M$ i materijalna matrica \mathbf{C}_M , kao što je prikazano na slici 2.



Sl. 2 Shema mikro-makro algoritma

U računalnoj homogenizaciji drugog reda polje pomaka rubova RVE-a je definirano kao

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\varepsilon}_M + \frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \boldsymbol{\eta}_M \mathbf{x}) + \mathbf{r}, \quad (6)$$

gdje je \mathbf{x} prostorna koordinata na rubovima RVE-a, a \mathbf{r} predstavlja polje mikro fluktuanca. Iz uvjeta da varijable na makro razini moraju odgovarati volumenskom prosjeku varijabli na mikro razini slijede relacije

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_A (\mathbf{n}^T \mathbf{r}) dA &= \mathbf{0}, \\ \int_A (\mathbf{n}^T \mathbf{r} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{r} \mathbf{n}) dA &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Nadalje, u slučaju rubnih uvjeta periodičnosti druga integralna relacija u (7) se može prikazati pomoću pomaka nezavisnih rubova RVE-a (npr. lijevi i donji rub) na način da je

$$\begin{aligned} \int_{A_L} \mathbf{u}_L dA &= \boldsymbol{\varepsilon}_M^T \int_{A_L} \mathbf{x}_L dA + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_M \int_{A_L} (\mathbf{x}_L^T \mathbf{x}_L) dA, \\ \int_{A_B} \mathbf{u}_B dA &= \boldsymbol{\varepsilon}_M^T \int_{A_B} \mathbf{x}_B dA + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_M \int_{A_B} (\mathbf{x}_B^T \mathbf{x}_B) dA. \end{aligned} \quad (8)$$

Iz Hill-Mandelova uvjeta slijedi veza između vektora naprezanja na mikro i makro razini prikazana pomoću površinskih integrala

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_M &= \frac{1}{V} \int_A (\mathbf{p}^T \mathbf{x}) dA \rightarrow \boldsymbol{\sigma}_M = \frac{1}{V} \mathbf{D} \mathbf{f}_b, \\ \boldsymbol{\mu}_M &= \frac{1}{2V} \int_A (\mathbf{x}^T \mathbf{p} \mathbf{x}) dA \rightarrow \boldsymbol{\mu}_M = \frac{1}{V} \mathbf{H} \mathbf{f}_b, \end{aligned} \quad (9)$$

pri čemu \mathbf{p} označava površinsko opterećenje, \mathbf{f}_b je vektor sila rubnih čvorova RVE-a, dok matrice \mathbf{D} i \mathbf{H} predstavljaju koordinatne matrice rubnih čvorova RVE-a prikazane u [2, 6]. Za dobivanje materijalne matrice \mathbf{C}_M , potrebno je naći vezu između inkremenata naprezanja $\Delta \boldsymbol{\sigma}_M$ i $\Delta \boldsymbol{\mu}_M$ s inkrementima deformacija $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_M$ i $\Delta \boldsymbol{\eta}_M$, kao što je to prikazano u izrazu (3). Potom se primjenom jednostavnog matematičkog postupka dobivaju se slijedeće relacije

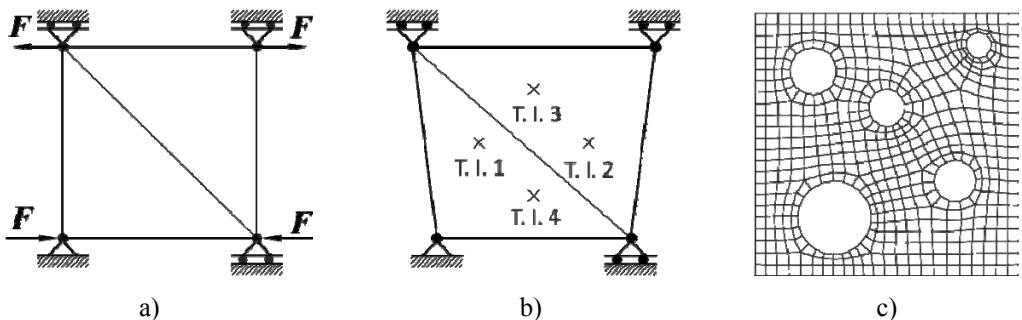
$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\sigma\sigma} &= \frac{1}{V} \mathbf{D} \tilde{\mathbf{K}}_{bb} \mathbf{D}^T, \quad \mathbf{C}_{\sigma\eta} = \frac{1}{V} \mathbf{D} \tilde{\mathbf{K}}_{bb} \mathbf{H}^T, \\ \mathbf{C}_{\mu\sigma} &= \frac{1}{V} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{K}}_{bb} \mathbf{D}^T, \quad \mathbf{C}_{\mu\eta} = \frac{1}{V} \mathbf{H} \tilde{\mathbf{K}}_{bb} \mathbf{H}^T, \end{aligned} \quad (10)$$

koje predstavljaju vezu između materijalnih matrica na makro razini i kondenzirane krutosti RVE-a, $\tilde{\mathbf{K}}_{bb}$.

4 NUMERIČKI PRIMJER

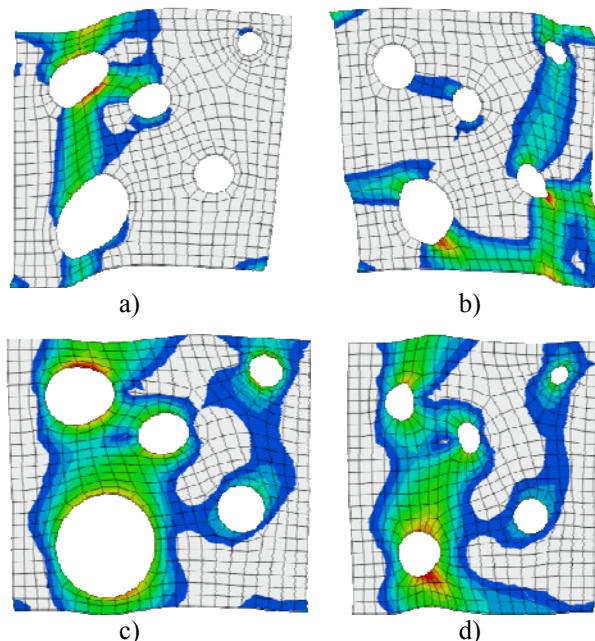
Prikazani algoritam mikro-makro analize verificiran je na problemu čistog savijanja. Pritom je razmatran kvadratni makro model duljine stranice 1 mm diskretiziran s dva trokutna konačna elementa, prikazan zajedno s pripadnim rubnim

uvjetima na slici 3a. Ovdje su odgovarajuće prve i druge derivacije pomaka povezane jednadžbama periodičnosti. Za definiranje ravnog lijevog i desnog brida, susagnute su druge derivacije pomaka u pravcu normale na brid, zajedno s mješovitim drugim derivacijama. Odabrani materijal je odabran akademski primjer poroznog čelika, modula elastičnosti $E = 210 \text{ GPa}$ s Poissonovim faktorom $\nu = 0,3$. Granica tečenja materijala je $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$, nakon koje dolazi do izotropnog očvršćenja materijala, pri čemu tangentni modul iznosi $E_t = 250 \text{ MPa}$. Model RVE-a, duljine stranice 0,2 mm, diskretiziran je s 508 konačnih elemenata i prikazan na slici 3c,. Sastoji se od slučajno raspoređenih poroznosti srednjeg polumjera 0,043 mm površinskog udjela 13%. Deformirani oblik makro modela prikazan je na slici 3b.



Sl. 3 Problem čistog savijanja: a) makro model s rubnim uvjetima, b) deformirani oblik, c) RVE

Na slici 4 je prikazana raspodjela ekvivalentne plastične deformacije na deformiranim RVE-ima, za nekoliko karakterističnih točaka integracije na makrorazini. Položaj točaka integracije (T. I.) je prikazan na slici 3b.



Sl. 4 Raspodjela ekvivalentne plastične deformacije: a) T. I. 1, b) T. I. 2, c) T. I. 3, d) T. I. 4

Iz slike 4 je jasno vidljivo da deformirani oblici RVE-a odgovaraju položajima pojedinih točaka integracije, kao i da dolazi do izotropnog očvršćenja materijala matrice i pojave zona plastičnog tečenja. Kao što se može primjetiti, nakon formiranja plastične zone po cijeloj duljini, odnosno visini RVE-a, dolazi do svojevrsnog gubitka stabilnosti modela, gdje daljnji mehanizam deformiranja ovisi upravo o formiranoj zoni plastične deformacije.

5 ZAKLJUČAK

Prikazan je algoritam dvorazinskog mikro-makro modeliranja ponašanja heterogenih materijala primjenom računalne homogenizacije drugog reda u teoriji malih deformacija. Za diskretizaciju makro razine korišten je trokutni konačni element s C^1 kontinuitetom izведен u radu, dok je RVE diskretiziran četverokutnim konačnim elementom prvog reda s C^0 kontinuitetom. Razrađena je primjena poopćenih rubnih uvjeta periodičnosti i integralnog uvjeta mikro fluktuacije na RVE-u. Izvedeni numerički algoritam je implementiran u programske paket ABAQUS i verificiran na primjeru čistog savijanja.

Literatura

- [1] Abaqus 6.10.1, Dassault Systemes
- [2] Kaczmarczyk L., Pearce C.J., Bićanić N., „Scale transition and enforcement of RVE boundary conditions in second-order computational homogenization“, Int. J. for Numer. Methods in Eng., 2008., **74**:506-522
- [3] Kouznetsova V.G., „Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials“, Ph. D. thesis, 2002., Technische Universiteit Eindhoven
- [4] Kouznetsova V.G., Geers M.G.D., „Brekelmans W.A.M.: Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials: a nested finite element solution strategy“, Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng., 2004., **193**:5525-5550
- [5] Lesičar T., Tonković Z., Sorić J., Čanžar P., „Multiscale Modelling Of Deformation Processes Of Nodular Cast Iron“, 7th Int. Congress of Croatian Society of Mech., 2012., Zadar
- [6] Miehe C., Koch A. (2002), „Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains“, Arch. of Appl. Mech., **72**:300-317
- [7] Mindlin R.D., „Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity“, Int. J. of Solids and Struct., 1965., **1**:417-438
- [8] Nguyen V.P., Stroeven M., Sluys L.J., „Multiscale continuous and discontinuous modelling of heterogeneous materials: A review on recent developments“, 2012., Delft Univ. of Technology
- [9] Toupin R.A., „Elastic materials with couple stresses“, Arch. Rational Mech. Analysis., 1968., **11**:385-413

Autori:

Tomislav Lesičar, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje,
Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168-514, fax.
01/6168-187, e-mail: tomislav.lesicar@fsb.hr, web: <http://www.fsb.hr/lnm/staff/>
Zdenko Tonković, tel. 01/6168-450, e-mail: zdenko.tonkovic@fsb.hr
Jurica Sorić, tel. 01/6168-103, e-mail: jurica.soric@fsb.hr

PROCES DEFORMIRANJA EPOKSIDNOG KOMPOZITA OJAČANOGL STAKLENIM VLAKNIMA

Lovrenić-Jugović, M., Tonković, Z. & Slokar, Lj.

Sažetak: U radu je izведен numerički algoritam za modeliranje nelinearnog i vremenski ovisnog ponašanja epoksidnog kompozita ojačanog kratkim staklenim vlaknima za slučaj puzanja s naknadnim rasterećivanjem. Konstitutivni model koji spreže mehanizam oštećenja s efektima viskoelastičnosti i viskoplastičnosti temelji se na relacijama mehanike oštećenja i termodinamike kontinuma. Za izvođenje konstitutivnog modela i pripadnog numeričkog algoritma provedena su vlastita eksperimentalna istraživanja. Zaključeno je da je mehaničko ponašanje ovog kompozita slično ponašanju goveđe kortikalne kosti. Analizom lomne površine primjenom elektronskog mikroskopa (SEM) objašnjen je mehanizam loma kompozita u vlaku za slučaj monotonog opterećenja, puzanja i cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem. Algoritam je ugrađen u formulaciju konačnih elemenata i testiran usporedbom s eksperimentalnim rezultatima.

Ključne riječi: epoksidni kompozit ojačan kratkim staklenim vlaknima, puzanje, viskoelastičnost, viskoplastičnost, oštećenje, SEM analiza

1 UVOD

Materijal za izradu umjetnog kortikalnog koštanog tkiva koji se koristi za medicinska istraživanja je kompozitni materijal čija je matrica epoksidna smola ojačana kratkim staklenim vlaknima. Spomenuti kompozitni materijal u kojem su staklena vlakna ravnomjerno raspoređena u matrici proizvodi tvrtka SAWBONES.

Eksperimentalni rezultati pokazuju da navedeni kompozitni materijal ima približno slične mehaničke karakteristike kao kortikalno koštano tkivo. Pritom se za slučaj vlačnog testa puzanja oba materijala ponašaju linearno viskoelastično ispod određene granice vrijednosti naprezanja [3, 11]. Iznad granične vrijednosti naprezanja započinje akumuliranje viskoplastične deformacije i oštećenja [3]. Analizom eksperimentalnih podataka za ljudsku kortikalnu kost prikazanih u [10] uočeno je da se pri nižoj graničnoj vrijednosti naprezanja počinju najprije akumulirati viskoplastične deformacije (σ_{th}^{VP}), dok pri višoj graničnoj vrijednosti dolazi i do akumuliranja oštećenja (σ_{th}^D). Isto ponašanje autori su uočili tijekom eksperimentalnog istraživanja goveđe kortikalne kosti. Na temelju toga, autori ovog rada u prvoj fazi svojih istraživanja predložili su numerički algoritam za integriranje konstitutivnog modela koji spreže mehanizam oštećenja s efektima viskoelastičnosti u ljudskom kortikalnom koštanom tkivu [8]. Pritom su eksperimentalno dobiveni parametri konstitutivnog modela preuzeti iz literature [11]. Daljnje istraživanje na povećanju točnosti predloženog numeričkog algoritma motivirali su rezultati iz [10].

Cilj ovog rada je proširiti postojeći numerički algoritam na način da se uz efekt viskoelastičnosti i akumuliranja oštećenja uključi i efekt viskoplastičnosti uz pretpostavku malih deformacija. U tu svrhu, preuzet je konstitutivni model kojeg su autori predložili za kortikalno koštano tkivo za modeliranje viskoelastičnog i viskoplastičnog ponašanja spregnutog s akumuliranjem oštećenja koji je prikazan u radovima [4, 6]. Pritom je model viskoelastičnosti spregnute s oštećenjem preuzet iz [8], dok je viskoplastično tečenje materijala opisano modelom Zapasa i Crissmana koji je prikazan u [2, 9]. Rad predstavlja eksperimentalno i numeričko istraživanje mehaničkog ponašanja spomenutog kompozitnog materijala u uvjetima inkrementalnog i cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem. Na temelju provedenih eksperimenata dobiveni su potrebni parametri materijala. Osim toga, lomna površina vlačno opeterćenih epruveta za slučaj monotonog opterećenja, puzanja i cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem analizirana je pomoću elektronskog mikroskopa (SEM Tescan Vega TS 5136MM).

U okviru numeričkog modeliranja izведен je numerički algoritam za integraciju predloženog konstitutivnog modela. Vremenski ovisne konstitutivne jednadžbe zapisane su u inkrementalnom obliku te je predložen inkrementalno iterativni algoritam za njihovo rješavanje. Algoritam izведен na razini materijalne točke konačnog elementa ugrađen je u programski paket ABAQUS [1] primjenom korisničke rutine UMAT. Rezultati računalne simulacije uspoređeni su s eksperimentalnim rezultatima.

2 KONSTITUTIVNI MODEL

Konstitutivni model predložen u ovom radu za opisivanje viskoelastičnog i viskoplastičnog procesa deformiranja kortikalne kosti spregnutog s akumuliranjem oštećenja temelji se na pretpostavci malih deformacija. Ukupna deformacija puzanja, $\varepsilon(t)$, aditivno se rastavlja na viskoelastični dio koji ujedno sadrži deformaciju povezanu s akumuliranjem oštećenja (ε_{VE}^D) te na viskoplastični dio (ε_{VP}) tako da je

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{VE}^D + \varepsilon_{VP}. \quad (1)$$

Na slici 1 shematski je prikazana ovisnost naprezanja i pripadne deformacije o vremenu za epoksidni kompozit ojačan kratkim staklenim vlaknima tijekom inkrementalnog i cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem. Iz slike je vidljivo da nakon rasterećenja ostaje trajna, nepovratna viskoplastična deformacija, dok omjer $\varepsilon_0/\varepsilon_{0r}$ određuje konstantu akumuliranja oštećenja.

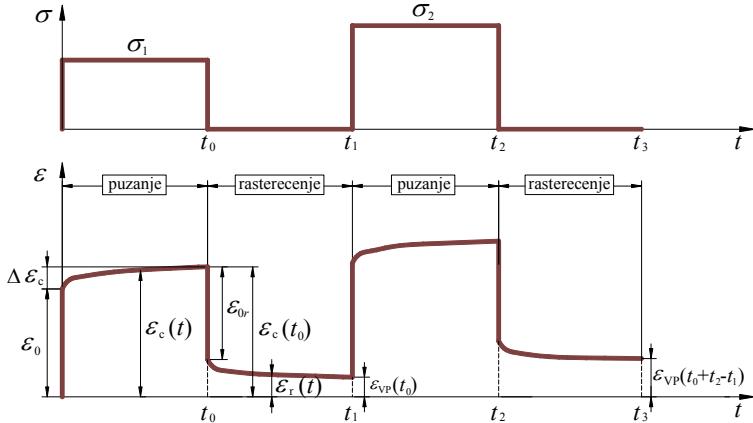
Za opisivanje viskoelastičnih deformacija spregnutih s oštećenjem primijenjen je u literaturi dobro poznati Shaperyev viskoelastičan model. Njegovim raspisivanjem kao što je to prikazano u [7] proizlaze sljedeći izrazi za puzanje ($0 < t < t_0$) i rasterećenje ($t > t_0$)

$$\varepsilon_{VE}^D = \begin{cases} K_T \left[J_0 \sigma \left(1 - \frac{t}{t_c} \right)^{\frac{1}{1+r}} + J_1 \sigma t^\gamma \left(1 + \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1}{1+\gamma} \cdot \frac{t}{t_c} \right) \right], & \text{za } (0 < t < t_0), \\ K_T \left[J_1 \sigma \left(t^\gamma - (t - t_0)^\gamma \right) \left(1 + \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1}{1+\gamma} \cdot \frac{t}{t_c} \right) \right], & \text{za } (t > t_0), \end{cases} \quad (2)$$

gdje su J_0 , J_1 i γ viskoelastični parametri materijala. U izrazu (2), K_T predstavlja omjer podatljivosti prilikom raterećenja i početne podatljivosti (J_d/J_0), dok je t_c konstanta normalizacije:

$$K_T = \begin{cases} 1 & \text{for } \sigma < \sigma_{\text{th}}^D, \\ 1 + a\sigma^b & \text{for } \sigma > \sigma_{\text{th}}^D, \end{cases} \quad \text{i} \quad t_c = \frac{(1-w_0)^{1+r}}{1+r} \left[\frac{C}{(\sigma - \sigma_{\text{th}}^D)} \right]^r, \quad (3)$$

gdje su a , b , C i r parametri oštećenja materijala, a w_0 predstavlja skalarnu varijablu oštećenja.



Sl. 1. Shematski prikaz ovisnosti naprezanja i pripadne deformacije o vremenu za slučaj puzanja i naknadnog rasterećivanja.

Za opisivanje viskoplastičnih deformacija korišten je model prikazan u radovima [2, 9], poznat kao Zapas i Crissmanov viskoplastični model. U radu autora [5] ovaj model viskoplastičnosti za slučaj puzanja ($0 < t < t_0$), odnosno rasterećenja ($t > t_0$) zapisan je obliku

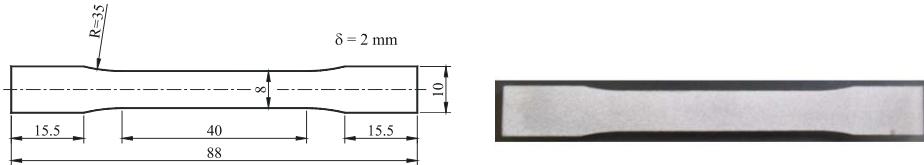
$$\varepsilon_{\text{vp}} = \begin{cases} A \cdot (\sigma - \sigma_{\text{th}}^{\text{VP}})^{m \cdot n} \cdot t^n & \text{za } 0 < t < t_0, \\ A \cdot (\sigma - \sigma_{\text{th}}^{\text{VP}})^{m \cdot n} \cdot t_0^n & \text{za } t > t_0. \end{cases} \quad (4)$$

3 EKSPERIMENT I SEM ANALIZA

Ispitne epruvete dobivene su rezanjem vodenim mlazom iz kompozitne ploče dimenzija $130 \times 180 \times 2$ mm. Oblik i dimenzije epruvete prikazane su na slici 2. Vlačni i inkrementalni testovi cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem provedeni su na sobnoj temperaturi na kidalici Messphysik Beta 50-5 za deset različitih razina naprezanja između 20 i 65 MPa. Jedan testni ciklus uključuje 60 s puzanja u vlaku pri konstantnom naprezanju i 300 s rasterećenja pri čemu je naprezanje jednako nuli. Rezultati prezentirani na slici 4a prikazuju osrednjene vrijednosti iz 6 provedenih testova za svaku primjenjenu razinu naprezanja.

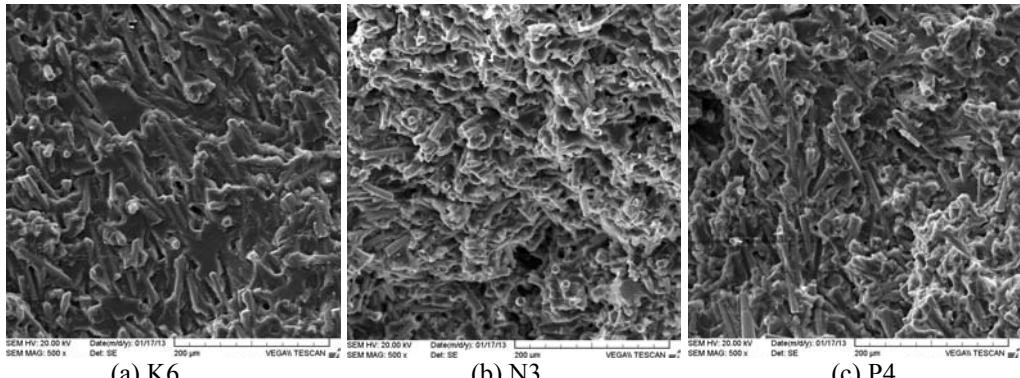
Kako bi se za predloženi konstitutivni model odredilo vrijeme potrebno do loma, neophodno je provesti test puzanja pri konstantnom naprezanju čiji je iznos veći od

graničnog iznosa naprezanja pri kojem se počinje akumulirati oštećenje ($\sigma > \sigma_{th}^D$). Ovi eksperimenti su provedeni za osam različitih vrijednosti naprezanja.



Sl. 2. Oblik i dimenzije ispitnih epruveta. ¶

Analizom lomne površine kompozitnog uzorka na skenirajućem (scanning) elektronском mikroskopу razjašnjen je mehanizam loma u vlaku. Na slici 3 prikazane su mikroskopske snimke navedenih uzorka za a) monotono opterećenje, b) cikličko puzanje s naknadnim rasterećenjem i c) puzanje do loma. Vidljivo je da su kratka staklena vlakna ravnomjerno raspoređena po epoksidnoj matrici na slikama 3a i 3c. Na slici 3b u lijevom donjem kutu uočava se područje s većim udjelom neslomljenih vlakana, dok je na desnoj strani taj udio manji.



Sl. 3. SEM fotografije lomnih površina nastalih uslijed a) monotonog opterećenja, b) cikličkog puzanja s naknadnim rasterećivanjem i c) puzanja do loma.

Nadalje, izvlačenje vlakna iz epoksidne matrice uočeno je na slici 3c, dok je jača površinska veza između vlakana i matrice dobivena za K6 uzorak na slici 3a, uzrokovala krhki lom. Prisutnost neslomljenog vlakna u P4 uzorku kompozita ukazuje na njegovu duktilnost. Budući da su vlakna u tom uzorku izvučena iz matrice to ukazuje na nedostatak prijanjanja (adhezije) između vlakna i matrice [12].

4 PARAMETRI MATERIJALA

Parametri materijala za prikazani konstitutivni model određeni su iz eksperimentalnih rezultata testova puzanja i naknadnog rasterećivanja epoksidnog kompozita ojačanog kratkim staklenim vlaknima. Procedura određivanja viskoelastičnih i viskoplastičnih parametara, kao i parametara oštećenja preuzeta je iz [11] i [2] te je detaljnije prikazana u [4]. U tablici 1 dani parametri materijala određeni iz uprosječenih eksperimentalnih rezultata. Ako prikazane parametre materijala uvrstimo u jednadžbe konstitutivnog modela dobiva se deformacija puzanja u ovisnosti

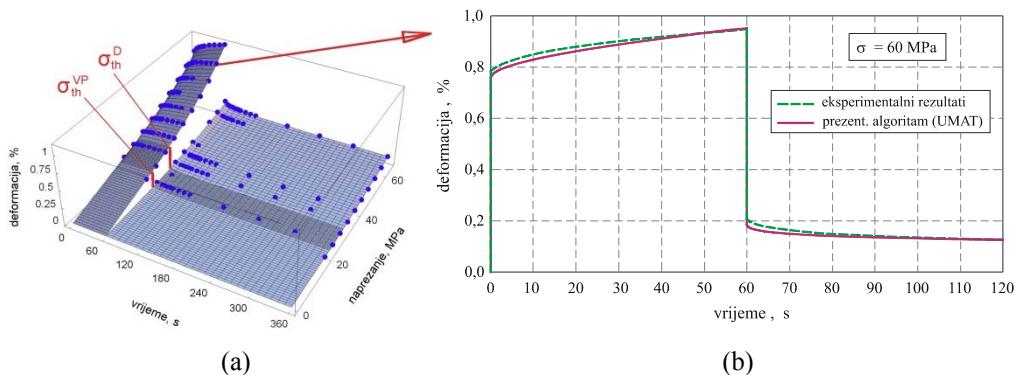
o naprezanju i vremenu, koja je grafički prikazana na slici 4a. Na istoj slici točkama su prikazane eksperimentalne vrijednosti.

Tablica 1. Parametri materijala određeni iz eksperimentalnih rezultata.

Parametri	Iznos	Parametri	Iznos
viskoelastičnosti	$J_0 (\text{MPa}^{-1})$	$J_0 (\text{MPa}^{-1})$	$1,02594 \cdot 10^{-4}$
	$J_1 (\text{MPa}^{-1} \cdot \text{s}^{\gamma})$	$J_1 (\text{MPa}^{-1} \cdot \text{s}^{\gamma})$	$2,35332 \cdot 10^{-6}$
viskoplastičnosti	γ	γ	0,39958
	$\sigma_{\text{th}}^{\text{VP}} (\text{MPa})$	$\sigma_{\text{th}}^{\text{VP}} (\text{MPa})$	22,8
	$A (\text{MPa}^{-mn} \text{s}^{-n})$	$A (\text{MPa}^{-mn} \text{s}^{-n})$	$2,6414 \cdot 10^{-7}$
	m	m	2,14369
oštećenja	n	n	0,69372
	$\sigma_{\text{th}}^{\text{D}} (\text{MPa})$	$\sigma_{\text{th}}^{\text{D}} (\text{MPa})$	321
	$C (\text{MPa s}^{\gamma})$	$C (\text{MPa s}^{\gamma})$	298,34793
	r	r	3,6921
	w_F	w_F	0,99553
	w_0	w_0	0,02195
	a	a	$5,49409 \cdot 10^{-8}$
	b	b	3,7225

5 NUMERIČKA FORMULACIJA I REZULTATI

U okviru numeričkog modeliranja izведен je numerički algoritam za integraciju predloženog konstitutivnog modela koji je implementiran u programski paket ABAQUS, a detaljnije je prikazan u [4]. S ciljem potvrđivanja numeričkog algoritma provedena je simulacija puzanja i rasterećenja, čiji su rezutati uspoređeni s eksperimentalnim podacima. Slika 4b prikazuje usporedbu eksperimentalnih i numeričkih rezultata za deformaciju puzanja pri konstantnom naprezanju od 60 MPa s rasterećenjem jednog ciklusa u ovisnosti o vremenu.



Sl. 4. a) Ovisnost deformacije puzanja o vremenu i naprezanju, b) usporedba eksperimentalnih i numeričkih rezultata za deformaciju puzanja pri $\sigma = 60$ MPa .

6 ZAKLJUČAK

Predložen je novi jednodimenzionalni konstitutivni model za modeliranje viskoelastičnosti i viskoplastičnosti spregnutih s akumuliranjem oštećenja za opisivanje procesa deformiranja epoksidnog kompozita ojačanog kratkim staklenim vlaknima za slučaj puzanja i rasterećenja. Pritom su parametri materijala konstitutivnog modela određeni iz vlastitih eksperimentalnih podataka. Za integraciju konstitutivnog modela izведен je numerički algoritam čija je točnost testirana usporedbom dobivenih rješenja s eksperimentalnim rezultatima. Postignuto je dobro poklapanje numeričkih i eksperimentalnih rezultata.

Literatura:

- [1] ABAQUS/Standard, "User's guide and theoretical manual", Version 6.12, Hibbit, Karlsson & Serensen, Inc., 2012.
- [2] Dasappa, P., Lee-Sullivan, P. i Xiao, X., "Development of viscoplastic strains during creep in continuous fibre GMT composites", Composites:Part B, Vol.41, 2010, str. 48-57.
- [3] Fondrk, M., Bahniuk, E., Davy, D.T. i Michaels, C. "Some viscoplastic characteristics of bovine and human cortical bone", J. Biomechanics, Vol. 21, No 8, 1988, str. 623-630.
- [4] Lovrenić-Jugović, M., "Numeričko i eksperimentalno modeliranje procesa deformiranja kortikalnoga koštanoga tkiva", Doktorat, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2012.
- [5] Lovrenić-Jugović, M., Tonković, Z. i Skozrit, I., "Modelling of Nonlinear Creep and Recovery Behaviour of Cortical Bone", Key Engineering Materials, Vol.488-489, 2012, str. 186-189.
- [6] Lovrenić-Jugović, M. i dr., "Numerical and experimental modelling cortical bone tissue deformation processes", Proceedings of the ICDM 1, Chow, C.L., Ju J.W., Šumarac, D.M. (ur.), Srpska komora inženjera, Beograd, Srbija, str. 209-212.
- [7] Lovrenić-Jugović, M., Tonković, Z. i Skozrit, I., "Numerical Modelling of Damage Accumulation in Cortical Bone Tissue", Tehnički vjesnik, Vol.19, 2012, str. 83-91.
- [8] Lovrenić-Jugović, M., Tonković, Z. i Skozrit, I., "Numerical modelling of viscoelastic/damage behaviour of cortical bone", Key Engineering Materials, Vol.417-418, 2010, str. 273-276.
- [9] Marklund, E., Varna, J., i Wallstram, L., "Nonlinear viscoelasticity and viscoplasticity of flax/polypropylene composites", Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME, Vol.128 No.4, 2006, str. 527-536.
- [10] Melnis, A.E., Knets, I.V. i Moorlat, P.A., "Deformation behavior of human compact bone tissue upon creep under tensile testing", Mechanics of Composite Materials, Vol.15, 1980, str. 574-579.
- [11] Parsamian, G.P. "Damage mechanics of human cortical bone", Ph.D.Thesis, West Virginia University 2001.
- [12] Sever, K. i dr., "Effect of fiber surface treatments on mechanical properties of epoxy composites reinforced with glass fabric", Journal of Material Science, Vol.43, 2008, str. 4666-4672.

Autori:

Martina Lovrenić-Jugović, Sveučilište u Zagrebu, Metalurški fakultet, Zavod za mehaničku metalurgiju, Aleja narodnih heroja 3, 44 103 Sisak, tel. +385 44 53 33 78 (204), fax +385 44 53 33 79, e-mail: mlovrenic@simet.hr.

Zdenko Tonković, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, 10 000 Zagreb, Zavod za tehničku mehaniku, Adresa, tel. +385 1 61 68 450, fax , e-mail: ztonkov@fsb.hr, web stranica: <http://www.fsb.hr/lnm>.

Ljerka Slokar, Sveučilište u Zagrebu, Metalurški fakultet, Zavod za fizičku metalurgiju, Aleja narodnih heroja 3, 44 103 Sisak, tel. +385 44 53 33 78 (107), fax +385 44 53 33 79, e-mail: slokar@simet.hr.

NUMERIČKA ANALIZA KRUTOSTI SPOJA OKVIRNE KONSTRUKCIJE

Merdanović, E. & Turkalj, G.

Sažetak: U ovom je radu predstavljen numerički model djelomično nepopustljivih (polukrutih) spojeva čeličnog okvirnog nosača opterećenih složenim opterećenjem sastavljenim od savijanja i tlačne odnosno vlačne uzdužne sile. U standardnim procedurama određivanja krutosti spojeva utjecaj uzdužne sile na krutost se zanemaruje. No utjecaj vlačne ili tlačne uzdužne sile može biti značajan i utječe na ponašanje spoja i njegovu krutost, te ga je potrebno uzeti u obzir pri analizi okvirnih konstrukcija. Za određivanje krivulja krutosti spojeva korišteni su konačnoelementni 3D modeli. Početna je krutost spoja uspoređena s analitičkim izrazima, a kao podloga za opisivanje dobivenih krivulja krutosti korištena je Richard-Abbotova matematička funkcija koja je proširena za utjecaj uzdužne sile. Dobivene matematičke funkcije rabit će se za opisivanje krutosti spojeva okvirnih konstrukcija u numeričkom modelu temeljenom na grednom konačnom elementu.

Ključne riječi: polukruti spojevi, krutost spojeva, okviri, stabilnost

1 UVOD

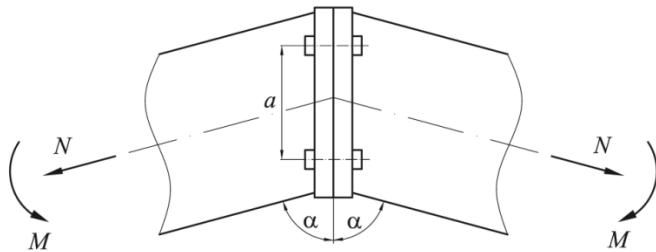
U analizi velikih pomaka ili analizi drugog reda okvirnih konstrukcija, dva se ekstremna slučaja opisivanja spojeva i priključaka koriste: potpuno kruti i zglobni [3, 5]. Takvi modeli značajno pojednostavljaju analizu uz pretpostavku velikih pomaka, ali često ne predstavljaju stvarno ponašanje spoja koje se nalazi između ta dva idealizirana slučaja [2, 4]. Fleksibilnost spojeva je rezultat složenog uzajamnog djelovanja različitih komponenata samog spoja [6]. Stoga, uobičajeni postupci analize moraju biti prošireni uključivanjem stvarnih karakteristika spojeva kako bi se zamijenio idealizirani pristup, što unaprijeđuje točnost analize konstrukcija [1, 7, 8]. Za takvu analizu potreban je nelinearni gredni model s pripadajućim ponašanjem konstrukcije.

Ponašanje polukrutih spojeva izloženih savijanju opisuje se krivuljama moment-rotacija dobivenim eksperimentalno ili numerički bez utjecaja uzdužne sile. Međutim, spojevi su također izloženi utjecaju uzdužnih i poprečnih sila koji utječu na ponašanje spojeva. Utjecaj ovih sila na karakteristike spoja u velikoj mjeri ovisi o vrsti spoja.

U ovom radu prikazan je numerički model za analizu mehaničkog ponašanja koljenastog spoja stup-greda. Diskretizacija spoja i njegovih sastavnih dijelova izvedena je primjenom 3D konačnih elemenata. Materijal spoja modeliran je kao linearno elastičan – idealno plastičan. Pošto prednapregnutost vijaka nema značajniji utjecaj na krutost spoja, ona je zanemarena. Opterećenje spoja sastoje se od monotono promjenjivog momenta savijanja i konstantne uzdužne sile, dok je deformacija spoja izražena preko rotacije spoja. Ponašanje spoja izraženo je krivuljama ovisnosti momenta savijanja i rotacije spoja za različite vrijednosti uzdužnih sila. Dobivene krivulje prikazane su u obliku proširenih Richard-Abbotovih matematičkih funkcija te

će se rabiti za opisivanje krutosti spojeva okvirnih konstrukcija u numeričkom modelu temeljenom na grednom konačnom elementu temeljenog na updated Lagrangian (UL) inkrementalnoj formulaciji.

2 ANALITIČKA RAZMATRANJA



Sl. 1. Spoj opterećen vlačnom uzdužnom silom i momentom savijanja

Za 4 vijka i kut α , prema slici 1, sile u vijcima jesu:

$$F_{vg} = \frac{N}{4} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + \frac{M}{2a}, \quad (1)$$

$$F_{vd} = \frac{N}{4} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - \frac{M}{2a}, \quad (2)$$

gdje F_{vg} predstavlja silu u gornjem vijke, a F_{vd} silu u donjem vijke, M je moment savijanja koji djeluje na spoj, N je vanjsko uzdužno opterećenje spoja, a je vertikalna udaljenost između osi vijaka.

Za spoj opterećen samo momentom savijanja ($N = 0$), s 4 vijke u spoju vrijedi:

$$\Delta l_{vg} = \frac{M}{2a} \cdot \frac{l_v}{AE}, \quad (3)$$

gdje su Δl_{vg} produljenje gornjeg vijka, l_v duljina tijela vijke, AE je aksijalna krutost vijke. Za donji vijak vrijedi $\Delta l_{vd} = 0$. Dodatni deformacijski pomak spoja uzrokovani deformiranjem spoja jest:

$$\varphi_{cd} = \frac{\Delta l_{vg}}{a}. \quad (4)$$

Za spoj opterećen momentom savijanja i vlačnom uzdužnom silom ($+N$) sljedeći izrazi vrijede sve dok je utjecaj na silu u vijke zbog uzdužnog opterećenja veći od utjecaja zbog momenta savijanja:

$$\Delta l_{vg} = \left[\frac{N}{4} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + \frac{M}{2a} \right] \cdot \frac{l_v}{AE}, \quad (5)$$

$$\Delta l_{vd} = \left[\frac{N}{4} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - \frac{M}{2a} \right] \cdot \frac{l_v}{AE}, \quad (6)$$

U ovom slučaju vrijedi:

$$\varphi_{cd} = \frac{\Delta l_{vg} - \Delta l_{vd}}{a}. \quad (7)$$

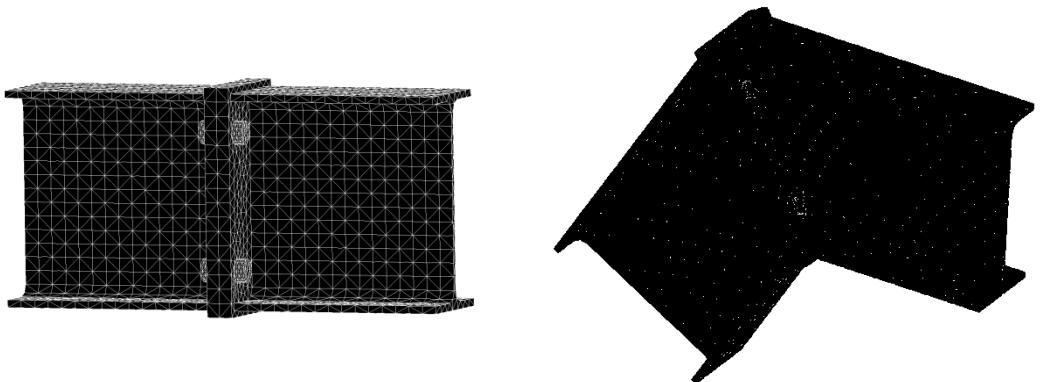
Za silu u vijku kod koje je utjecaj momenta savijanja veći od utjecaja aksijalne sile, vrijedi izraz kao za slučaj $N = 0$.

3 KONAČNOELEMENTNI MODELI

Kao probni model izrađen je čeoni spoj greda-greda (slika 2a) s čeličnim profilima IPE 330, čeonim pločama debljine 20 mm te četiri vijka M24 kvalitete 10.9. Dobivena početna krutost uspoređena je s analitičkim izrazima.

Na slici 3 prikazane su krivulje moment-rotacija spoja greda-greda IPE 330. Uspoređene su početne krutosti spoja dobivene konačnoelementnim modelom i analitičkim izrazima za slučajeve kada na spoj pored momenta savijanja djeluje i konstantna uzdužna sila (vlačna i tlačna) i to 10% od vrijednosti uzdužne sile koja izaziva pojavu plastičnih deformacija u spoju, te slučaj kada je spoj opterećen samo momentom savijanja. Kao što je vidljivo, vrijednosti dobivene analitičkim i numeričkim putem međusobno se vrlo dobro podudaraju.

Izrađen je 3D konačnoelementni model koljenastog spoja stup-greda (slika 2b). 3D elementima modelirani su svi dijelovi spoja: greda, stup, čeone ploče, vijci i matice. Međusobno djelovanje dodirnih površina čeonih ploča grede i stupa, glava vijaka i čeone ploče, matice i čeone ploče, te tijela vijka i prvrta na čeonim pločama modelirano je kontaktnim područjima.

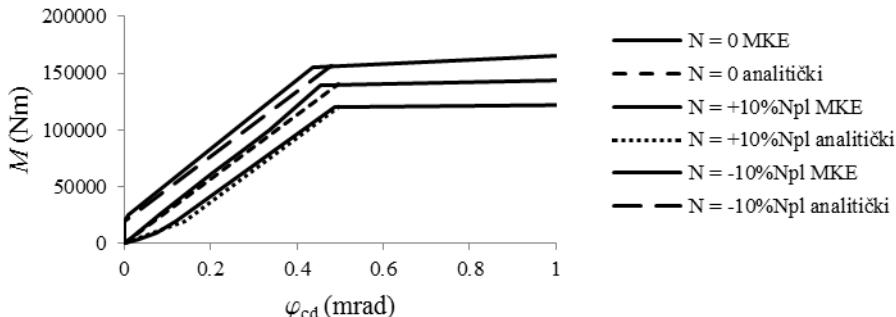


a) greda-greda (IPE 330)

b) stup-greda (IPE 400)

Sl. 2. Konačnoelementni modeli spojeva

Materijal grede, stupa i vijaka modeliran je kao linearno elastičan – idealno plastičan. Za dobivanje odziva konstrukcije u plastičnom području korišteno je izotropno očvršćivanje materijala. Na kraju stupa ograničeni su svi pomaci i sve rotacije dok je na kraj grede dodan jedan kruti element preko kojeg se inkrementalno nanosi moment savijanja uz konstantne vrijednosti aksijalnog opterećenja.

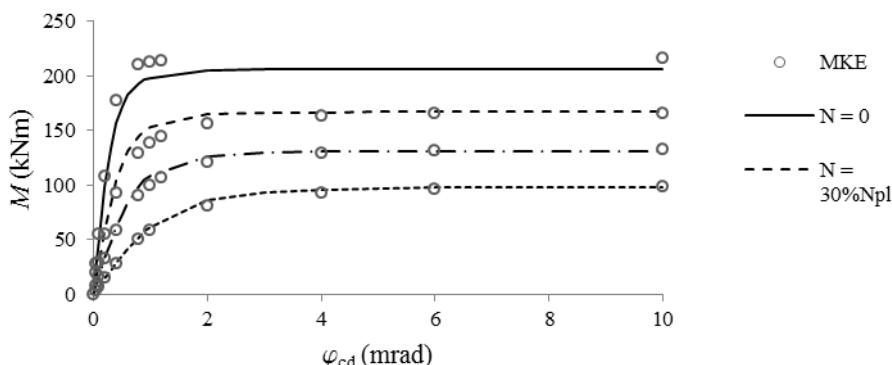


Sl. 3. Usporedba numeričkih i analitičkih rezultata (IPE 330)

Čelični profili su IPE 400, debljine čeonih ploča 26 mm, a vijci su M24 kvalitete 8.8. Spoj je opterećen monotono promjenjivim momentom savijanja te različitim konstantnim vrijednostima vlačne uzdužne sile. Dobiveni podaci, prikazani na slici 4, korišteni su za određivanje matematičke funkcije koja opisuje ponašanje spoja opterećnog momentom savijanja i konstantnom aksijalnom silom. Korištena je Richard-Abbottova funkcija proširena za navedeni slučaj opterećenja spoja

$$M = \frac{\varphi_{cd}}{\left(0,065 \cdot e^{9 \cdot N} + 1,83\right) \cdot \left(1 + \left|\frac{\varphi_{cd}}{135 \cdot 10^{-4} \cdot e^{7,4 \cdot N} + 0,38}\right|^{2,39724}\right)^{\frac{1}{2,39724}}} \quad (8)$$

gdje su M moment savijanja (MNm) i N aksijalna sila (MN) koji djeluju na spoj, a φ_{cd} je deformacijski pomak spoja (mrad). Usporedba podataka dobivenih numeričkim putem i krivulja dobivenih pomoću prethodno opisane matematičke funkcije prikazana je na slici 4.



Sl. 4. Krivulje moment-rotacija (IPE 400)

4 ZAKLJUČAK

U radu je prikazan konačnelementni model koljenastog spoja stup-greda opterećen monotono promjenjivim momentom savijanja i konstantnom uzdužnom silom pomoću kojeg su dobivene krivulje moment-rotacija spoja. Početne krutosti spoja verificirane su analitičkim putem. Podaci dobiveni metodom konačnih elemenata korišteni su za određivanje matematičke funkcije koja opisuje ponašanje spoja izloženog navedenom opterećenju. Dobivena će se funkcija rabiti za opisivanje krutosti spojeva okvirnih konstrukcija u numeričkom modelu temeljenom na grednom konačnom elementu.

Literatura:

- [1] Basaglia, C., Camotim, D., Silvestre, N., "GBT-based buckling analysis of thin-walled steel frames with arbitrary loading and support conditions", International Journal of Structural Stability and Dynamics 10(3), 2010, str. 363-385.
- [2] Chan, S.L., Chui, P.P.T., "Non-Linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-Rigid Connections", Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [3] Chen, W.F., Atsuta, T., "Space Behavior and Design", Theory of Beam-Columns, Vol. 2, J. Ross Publishing, Fort Lauderdale, 2008.
- [4] Ivanyi, M., Baniotopoulos, C. C., "Semi-Rigid Connections in Structural Steelwork", Springer-Verlag, Wien, 2000.
- [5] Simitses, G.J., Hodges, D. H., "Fundamentals of Structural Stability", Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [6] Trahair, N.S., Bradford, M.A., Nethercot, D.A., Gardner, L., "The behaviour and design of steel structures to EC3", Taylor & Francis, London, 2008.
- [7] Urbonas, K., Daniunas, A., "Analysis of steel frames with the semi-rigid beam-to-beam and beam-to-column knee joints under bending and axial forces", Engineering Structures 30, 2008, str. 3114-3118.
- [8] Van Keulen, D.C., Nethercot, D.A., Snijder, H.H., "Frame analysis incorporating semi-rigid joint action: applicability of the half initial secant stiffness approach", Journal of Constructional Steel Research 59, 2003, str. 1083-1100.

Autori:

Edin Merdanović, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 503, fax 051 651 490, e-mail: medin@riteh.hr, web stranica: www.riteh.hr/ustroj/ztm

Goran Turkalj, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 499, fax 051 651 490, e-mail: goran.turkalj@riteh.hr, web stranica: www.riteh.hr/ustroj/ztm

NUMERIČKO MODELIRANJE PARAMETARSKIH OSCILACIJA LANČANICE

Nikolić, M., Raduka, V.

Sažetak: U ovom radu prikazani su postupci formulacije matematičkog modela za numerički proračun parametarskih oscilacija lančanice, uzimajući u obzir geometrijsku nelinearnost. Parametarske oscilacije uzrokovane su harmonijskim gibanjem jednog rubnog čvora. Pri modeliranju lančanice koriste se dva različita konačna elementa: aksijalni zglobno spojeni element baziran na polinomnim interpolacijskim funkcijama, i lančani element izведен pomoću analitičkih rješenja lančanice. Analizira se utjecaj broja i vrste konačnih elemenata te odabira veličine koraka pri numeričkom proračunu na nelinearni parametarski odziv sustava. Pri numeričkom rješavanju sustava nelinearnih diferencijalnih jednadžbi koje opisuju parametarske oscilacije lančanice koristi se metoda prediktor-korektor. Za navedeni proračun i analizu rezultata izrađen je program u softverskom paketu Wolfram Mathematica 8.0.

Ključne riječi: lančanica, konačni elementi, parametarske oscilacije, numerički proračun

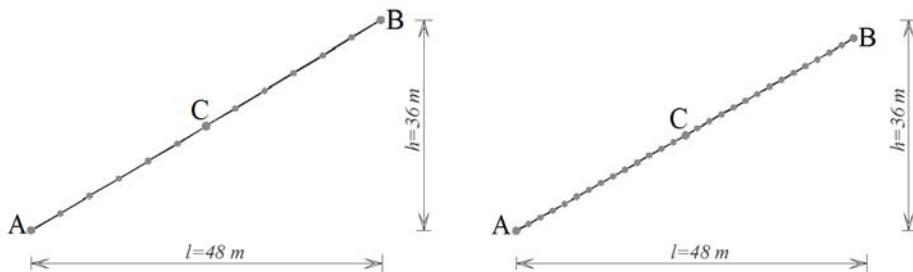
1 UVOD

Vlačni elementi kao što su kablovi, sajle ili užad, odnosno zatege od raznih materijala, sve češće su nosivi elementi u suvremenim konstrukcijama. Kod mostova, krovova stadiona, i različitih prenepetih gipkih konstrukcija od platna, takvi elementi postaju i osnovni dio nosive konstrukcije. Glavna prednost ovih elemenata u vlačnom je prijenosu opterećenja, zbog čega je materijal bolje iskorišten bez mogućnosti pojave problema stabilnosti. Istovremeno, zbog velike fleksibilnosti ovi sustavi posebno su osjetljivi na različita dinamička djelovanja, posebice uzrokovane vjetrom, kišom i snijegom [3]. Dinamičke pobude mogu biti i posljedica prijenosa oscilacija drugih dijelova konstrukcije (kolnika, pilona i slično) na zatege, te se oscilacije zatega mogu parametarski pobuditi [6].

Osnova za proračun ovih elemenata je element lančanice, koji je u posljednje vrijeme predmet detaljnijih analiza i matematičkog modeliranja [1, 2, 4, 7, 8]. Do danas su razvijene različite formulacije kako bi se riješio problem ponašanja zatega u konstrukcijama [1, 4, 7]. Osnovni problemi posljedica su velike fleksibilnosti takvih elemenata, odnosno pojavе velikih pomaka, što zahtijeva uključivanje geometrijske nelinearnosti u dinamički proračun. Razvijena su dva pristupa za definiciju konačnog elementa zatege. Prvi pristup koristi polinome kojima se opisuje polje pomaka za odgovarajuće opterećenje, što je inače uobičajeno pri definiciji konačnih elemenata [1]. Drugi pristup u svojoj formulaciji koristi analitička rješenja lančanice, pri čemu se polazi od djelovanja distribuiranog opterećenja po duljini elementa, kao što je pokazano na slici 2 [1, 7]. Pojava velikih pomaka uzeta je u obzir nelinearnom formulacijom tangentne matrice krutosti.

2 OPIS MODELA

Proračunski model zatege izrađen je u programskom paketu Wolfram Mathematica 8.0. za različiti broj konačnih elemenata, kako je prikazano na slici 1. Geometrijske i mehaničke karakteristike modela dane su u tablici 1.



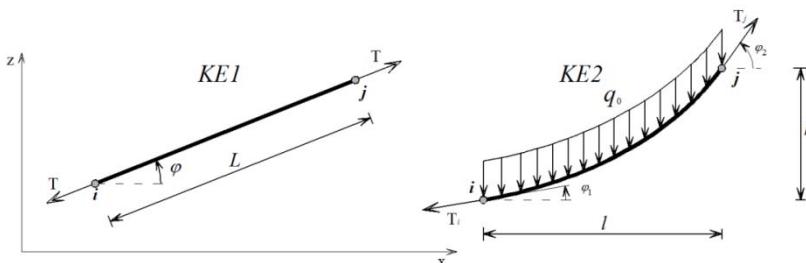
Slika. 1. Diskretizacija modela za $N=12$ i $N=28$ konačnih elemenata

modul elastičnosti	$8,25 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$
površina poprečnog presjeka	$0,01 \text{ m}^2$
težina po jedinici duljine	$1,0 \text{ kN/m'}$
raspon l	48 m
visina h	36 m
nedeformirana duljina L_0	48 m
horizontalna komponenta sile prednapona H_0	1650 kN

Tablica. 1. Geometrijske i mehaničke karakteristike modela

2.1 Konačni elementi

Za proračun su odabrana dva tipa konačnih elemenata: aksijalni konačni element ekvivalentan zglobovno spojenom štalu (KE1), te lančani element koji se bazira na analitičkom rješenju lančanice (KE2).



Slika. 2. Konačni elementi KE1 i KE2

Za modeliranje zatega sa velikom početnom uzdužnom silom, u praksi se zbog jednostavnosti najčešće koristi aksijalni element (u daljem tekstu KE1). Nedostatak takvog modela je diskontinuitet tangenti u čvorovima, ukoliko u čvoru nema koncentrirane sile. Tangentna matrica krutosti za element KE1 je [1, 8]:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}^T & -\mathbf{k}^T \\ -\mathbf{k}^T & \mathbf{k}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}^T = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi + \frac{T}{AE} & \cos \varphi \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi + \frac{T}{AE} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Element elastične lančanice KE2, uzima u obzir vertikalno opterećenje distribuirano po nedeformiranoj duljini lančanice i u matematičkom smislu ovaj element je egzaktan za zategu pod djelovanjem vlastite težine. Razvijeni su različiti matematički modeli ovog elementa [1, 7]. U ovom radu koristi se formulacija [1], prema kojoj je pod matrica krutosti određena izrazom:

$$\mathbf{k}^T = \alpha \begin{bmatrix} \frac{q_0 L_0}{AE} + \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \\ \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 & \frac{q_0 l}{AE} - \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

gdje je:

$$\alpha = \frac{q_0}{4 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \left[\mu \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right] + \frac{q_0^2 L_0 l}{AE H}}. \quad (3)$$

Kutovi φ_1 i φ_2 određeni su jednadžbama:

$$\begin{aligned} \tan \varphi_1 &= \sinh \left[\cosh^{-1} \left(\frac{q_0 L_0}{2H \sinh \mu} \right) - \mu \right], \\ \tan \varphi_2 &= \sinh \left[\cosh^{-1} \left(\frac{q_0 L_0}{2H \sinh \mu} \right) + \mu \right] \end{aligned} \quad (4)$$

u kojima je parametar μ određen izrazom:

$$\mu = \frac{q_0}{2} \left(\frac{l}{H} - \frac{L_0}{AE} \right), \quad (5)$$

Za poznatu geometrijsku konfiguraciju, odnosno za poznate položaje čvorova elemenata, horizontalna komponenta uzdužne vlačne sile H može se odrediti iz funkcije kompatibilnosti [1]:

$$F(H) = \frac{4H^2}{q_0^2} \sinh^2 \mu + \frac{h^2}{\left[1 + \left(\frac{q_0 L_0}{2AE} \right) \coth \mu \right]^2} - L_0^2 \equiv 0, \quad (6)$$

Jednadžba (6) rješava se pri svakoj promjeni matrice \mathbf{k}^T Newton-Raphsonovom metodom.

3 PRORAČUN ODZIVA

Sustav diferencijalnih jednadžbi koje opisuju oscilacije zatege formuliran je primjenom d'Alembertovog principa. Parametarske oscilacije izazvane su gibanjem rubnog čvora B. Početni uvjeti su homogeni i promatraju se oscilacije oko ravnotežnog položaja koji je prethodno određen Newton-Raphsonovim postupkom. Budući je funkcija pomaka čvora B (slika 1.) zadana, potrebno je matricu krutosti sustava proširiti na članove koji povezuju vertikalni pomak čvora B s pomacima unutarnjih čvorova. Sa indeksom n će se označiti članovi matrice masa i krutosti koji se odnose na nepoznate veličine pomaka (pomaci unutarnjih čvorova) a sa $u_{By} = A \sin(\Omega t)$ zadani pomak čvora B. Sustav diferencijalnih jednadžbi oscilacija zatege je:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m_{By} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \ddot{u}_{By} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_n & \mathbf{K}_{n,By} \\ \mathbf{K}_{By,n} & K_{By} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_n \\ u_{By} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_{By} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Prvi redak u jednadžbi (7) predstavlja sustav jednadžbi koji se rješava numeričkim postupkom, pri čemu je ekvivalentno dinamičko opterećenje posljedica pojave elastične sile generirane gibanjem čvora B:

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}_n \mathbf{u}_n = -\mathbf{K}_{n,By} u_{By}. \quad (8)$$

Radi velike geometrijske nelinearnosti sustava gornja jednadžba se koristi u inkrementalnoj formulaciji unutar intervala Δt :

$$\mathbf{M}_n \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}_n \Delta \mathbf{u}_n = -\mathbf{K}_{n,By} \Delta u_{By}, \quad (9)$$

Za rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi (9) koristi se metoda prediktor-korektor opisana u [5] pri čemu se na temelju poznatih vrijednosti na početku koraka i odabранe funkcije ekstrapolacije izračunava vrijednost varijabli na kraju koraka. U prediktoru, pretpostavlja se konstantni vektor ubrzanja unutar koraka, koji odredimo iz jednadžbe dinamičke ravnoteže na početku koraka, odnosno u nekom trenutku t_i :

$$\ddot{\mathbf{u}}_i = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}_{el_i}. \quad (10)$$

Vektor elastičnih sila \mathbf{F}_{el} odredi se iz deformacije elemenata, te se zatim za poznati vektor ubrzanja (10) određuju prirasti vektora brzine i pomaka:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{u}}_p &= \ddot{\mathbf{u}}_i \Delta t \\ \Delta \mathbf{u}_p &= \dot{\mathbf{u}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i \Delta t^2, \end{aligned} \quad (12)$$

U općem slučaju, pretpostavka o konstantnom ubrzanju ne vrijedi niti za vrlo male korake. Korekcija vrijednosti na kraju koraka izvrši se uz pretpostavku linearne promjene ubrzanja na intervalu Δt . Uz pretpostavljene vektore prirasta brzina i pomaka iz jednadžbe dinamičke ravnoteže (9) možemo odrediti prirast ubrzanja:

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{K}_{n,By} \Delta u_{By} - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}^T \Delta \mathbf{u}_p, \quad (13)$$

zatim korigiramo vektore pomaka i brzine na kraju intervala Δt :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{i+1} &= \dot{\mathbf{u}}_i + \Delta \dot{\mathbf{u}}_p + \frac{1}{2} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \Delta t = \dot{\mathbf{u}}_i + \ddot{\mathbf{u}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \Delta t \\ \mathbf{u}_{i+1} &= \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_p + \frac{1}{6} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \Delta t^2 = \mathbf{u}_i + \dot{\mathbf{u}}_i \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_i \Delta t^2 + \frac{1}{6} \Delta \ddot{\mathbf{u}} \Delta t \end{aligned} \quad (14)$$

Za novi položaj određuje se tangentna matrica krutosti sustava i elastične sile u elementima. U svakom vremenskom koraku provjerava se dinamička ravnoteža tako da se odredi modul vektora rezidualnih sila na kraju koraka:

$$|\mathbf{R}_{i+1}| = |\mathbf{F}_{in_{i+1}} + \mathbf{F}_{el_{i+1}} - \mathbf{F}_{q_0}|. \quad (15)$$

4 REZULTATI PRORAČUNA

Pomaci čvora C u ravnotežnom položaju određeni pomoću KE1, s povećanjem broja elemenata konvergiraju analitičkom rješenju [2, 4, 8], dok je za elemente KE2 pomak jednak analitičkom već za najmanji broj elemenata, dok vrijednosti frekvencije u oba slučaja ovise o broju elemenata. Početne vrijednosti prve tri frekvencije dane su u tablici 3. Prve dvije frekvencije odnose se na poprečne, a treća frekvencija na uzdužne oscilacije.

broj elemenata	KE1			KE2		
	u_{Cx}	u_{Cy}	ω_1	u_{Cx}	u_{Cy}	ω_1
2	0,0670217	-0,124272	7,49735	0,0670195	-0,124271	7,49742
4	0,0670210	-0,124271	8,11523	0,0670195	-0,124271	8,11525
6	0,0670198	-0,124271	8,23285	0,0670195	-0,124271	8,23286
12	0,0670196	-0,124271	8,30390	0,0670195	-0,124271	8,30391
28	0,0670196	-0,124271	8,32261	0,0670195	-0,124271	8,32330
analitičko rješenje	0,0670195	-0,124271	8,32712	0,0670195	-0,124271	8,32712

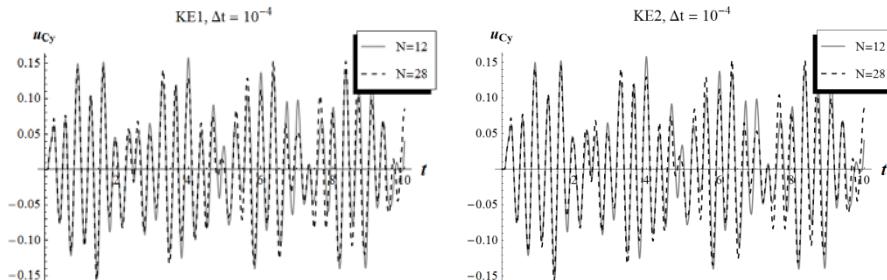
Tablica. 2. Usporedba rezultata numeričkih modela s analitičkim rješenjima

broj elemenata	ω_1	ω_2	ω_3
28	8,3233	16,6177	18,6115

Tablica. 3. Vrijednost prve tri kružne frekvencije modela

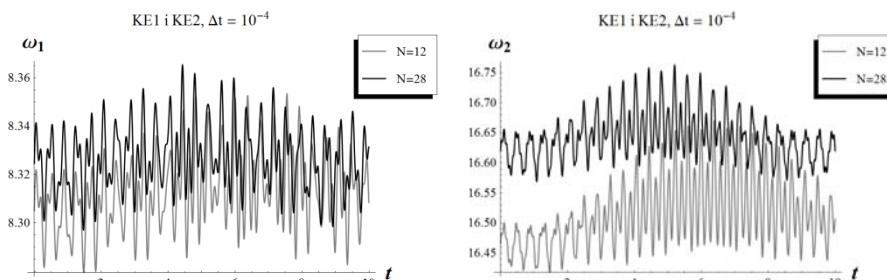
4.1 Rezultati parametarskog odziva

Parametarske oscilacije pobuđene su vertikalnim gibanjem čvora B, za $A=0,1\text{ m}$ i $\Omega=16\text{ rad/s}$. Na slici 3. prikazana je funkcija vertikalnog pomaka čvora C. Radi jednostavnosti prikaza ovdje su prikazane samo funkcije odziva za $N=12$ i $N=28$ konačnih elemenata. Detaljnijom analizom ustanovljeno je da na odziv pri parametarskoj pobudi utječe viši oblici oscilacija te je u proračun potrebno odabratи veći broj konačnih elemenata. Odzivi koji su dobiveni za KE1 i KE2 su praktički identični što potvrđuje da aksijalni element vrlo dobro aproksimira lančanicu ukoliko imamo veliku početnu vlačnu silu.



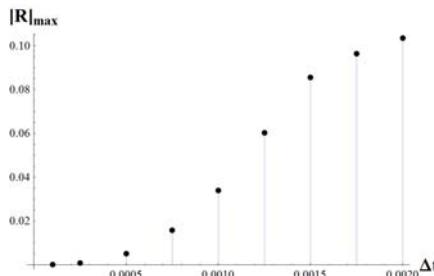
Slika 3. Vremenska funkcija vertikalnog pomaka točke C za parametarske oscilacije

Utjecaj promjene geometrijske krutosti tokom oscilacija koja ovisi o trenutnoj deformaciji elemenata možemo uočiti na slici 4. koja prikazuje vremenske funkcije promjene frekvencije sustava. Možemo uočiti značajan utjecaj na drugu frekvenciju.



Slika 4. Vremenska funkcija promjene frekvencije sustava ¶

Na slici 5. prikazana je maksimalna vrijednost modula vektora rezidualnih sila (15) u ovisnosti o veličini koraka. Pretpostavka o linearnej promjeni ubrzanja na intervalu Δt je zadovoljavajuća za dovoljno male vremenske intervale. Ovom bitno doprinosi i činjenica da se ubrzanje na početku svakog koraka određuje direktno iz deformiranog položaja lančanice.



Slika 5. Maksimalna vrijednost modula vektora rezidualnih sila

5 ZAKLJUČAK

Ova analiza pokazala su elementi KE1 pogodni za daljnja istraživanja dinamičkog ponašanja lančanice. Vrijednosti rezidualnih sila zanemarivo su male za dovoljno mali korak, te nije potrebno provoditi dodatne iteracije unutar svakog koraka. To pokazuje da metodu prediktor-korektor možemo primijeniti i u dalnjim istraživanjima.

Literatura:

- [1] Ahmadi-Kashani, K., "Development of cable elements and their applications in analysis of cable structures", PhD thesis, University of Manchester Institute of Science and Technology, 1983.
- [2] Gopčević, Š., "Nelinearna analiza konstrukcija sa kablovima", doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2007.
- [3] Hrelja, G., Radić, J., Šavor, Z., "Analiza vibracija kosih vješaljki na Mostu Franje Tuđmana u Dubrovniku", Građevinar 61 (2009) 9, str. 815-825
- [4] Irvine, M., "Cable Structures", MIT Press, Dover Publications Inc. 1981.
- [5] Lazarević, D., Dvornik, J., Fresl, K., "Diskretno numeričko modeliranje opterećenja silosa", Građevinar 54 (2002.) 3, str. 135-144
- [6] Sun, B.N., Wang, Z.G., Ko, J.M., Ni, Y.Q., "Parametrically excited oscillation of stay cable and its control in cable-stayed bridges", Journal of Zhejiang University Science 4 (2003.) 1, str. 13-20
- [7] Thai, H.T., Kim, S.E., "Nonlinear static and dynamic analysis of cable structures", Finite Elements in Analysis and Design 47 (2011.), str. 237-246
- [8] Tibert, G., "Numerical Analysis of Cable Roof Structures", PhD thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 1999.

Autori:

Marija Nikolić, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Kačićeva 26, Zagreb, tel. 01/4639 363, e-mail: mnikolic@grad.hr

Verica Raduka, Sveučilište u Zagrebu, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Kačićeva 26, Zagreb, tel. 01/4639 363, e-mail: verar@grad.hr

UTJECAJ SILE PRITEZANJA VIJKA DENTALNIH IMPLANTATA NA VISOKOCIKLIČKI ZAMOR

Novoselac, S., Ergić, T., Kozak, D., Sertić, J. & Pacak, M.

Sažetak: Zamorno ponašanje dentalnih implantata je pod utjecajem geometrije, opterećenja, oseointegracije te površinske obrade i hrapavosti implantata, vijka i nadogradnje.

Na temelju utjecaja opterećenja, nelinearna numerička analiza biomehaničkog tranzijentnog troosnog visokocikličkog zamora implantata pod utjecajem sile pritezanja vijka istražena je za vjerojatnost preživljavanja 99,99 %. Uslijed nemogućnosti da se točno odredi sila pritezanja vijka dentalnog implantata, nužno je uzeti u obzir raspon sile pritezanja zbog rasipanja vrijednosti.

Dinamička opterećenja nastala pod utjecajem žvačnih sila, koja se događaju u milijunskim ciklusima *in vivo* u čeljustima, neusporedivo su kompleksnija od statičkih opterećenja, te ih je nužno opisati s teorijom kritičnih ravnina. Istraživanje zamornog ponašanja vijčanih spojeva zahtijeva određivanje dozvoljenih amplituda naprezanja uslijed dinamičkog opterećenja, koja se značajno razlikuju od statičkih naprezanja.

Tenzori naprezanja dentalnog implantata analizirani su na tranzijentni troosni visokociklički zamor s utjecajnim faktorima gradijenata naprezanja, srednjih naprezanja, površinske hrapavosti, utjecaja statistike, utjecaja raspona rasipanja S – N krivulje, te s preuređivanjem srednjih naprezanja i amplituda naprezanja u slučaju lokalne plastifikacije materijala. Utjecaj srednjih naprezanja uzima se u obzir pomoću Haighovog dijagrama. Radi velikog broja ciklusa, za *in vivo* dinamičke faktore sigurnosti i evaluaciju ciklusa do pojave zamornih pukotina, istražuje se visokociklički zamor.

Ključne riječi: dentalni implantati, zamor, vijčani spoj, dinamička izdržljivost

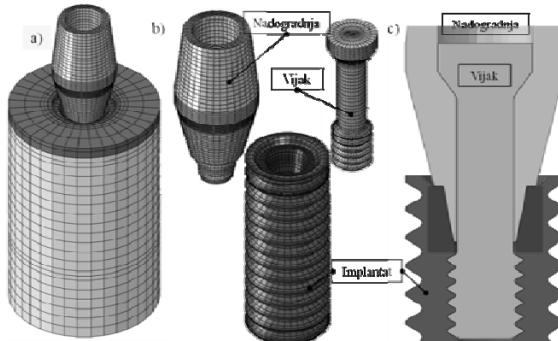
1 UVOD

Uslijed ugradnje dentalnog implantata *in vivo*, prvo opterećenje koje se pojavljuje je sila pritezanja vijka dentalnog implantata. S obzirom na činjenice o rasipanju vrijednosti sila pritezanja, te utjecaju faktora trenja o sili, nemoguće je točno odrediti silu pritezanja. Često se u praksi uslijed nemogućnosti točnog određivanja proračuni sila pritezanja rade s minimalnom, maksimalnom i nominalnom silom. Pravilnik VDI 2230 [1] daje upute za proračun sila pritezanja u ovisnosti o faktoru trenja. Tokom životnog vijeka dentalnog implantata dolazi do promijenjivih žvačnih sila u smislu vrijednosti, smjerova i učestalosti. Dodatna poteškoća određivanja žvačnih sila dolazi i do izražaja u slučaju spolova. Dokazano je da muškarci imaju veće vrijednosti žvačnih sila od žena. Prema istraživanjima dvadeset godina žvakanja prosječnog čovjeka otprilike odgovara 10^6 ciklusa opterećenja žvačnih sila na implantat.

Kompleksnost vijčanih spojeva postoji čak i kod jednoosnog opterećenja, gdje je distribucija naprezanja u korijenu navoja višeosna. Kompleksnost zamornog ponašanja korijena navoja dolazi i od tzv. "efekta utjecaja veličine zareza", koji rezultira pojmom da za iste vrijednosti faktora koncentracije naprezanja (K_t), zarezi s različitim dimenzijama rezultiraju različitim vrijednostima dinamičke izdržljivosti (tj. zarez s većim ukupnim dimenzijama rezultira nižom dinamičkom izdržljivošću od zareza s manjim dimenzijama, ali istim K_t). Polje naprezanja oko vrška zareza znatno utječe na zamorno ponašanje uz dodatno žarisno ili maksimalno naprezanje u zarezu [2]. Nekoliko teorija predloženo je za uzimanje u obzir gradijenata naprezanja u zarezu [3]. Teorije su bazirane na kritičnom volumenu materijala koji je podvrgnut kritičnom intenzitetu polja naprezanja na kojem dolazi do pojave zamora. Nelinearna numerička analiza provedena je u programskom paketu Abaqus 6.10 [4]. Tenzori naprezanja analizirani su na zamorni spektar opterećenja u programskom paketu FemFat 4.8 [5] s utjecajnim faktorima.

2 NELINEARNI MODEL DENTALNOG IMPLANTATA

Dentalni implantat diskretiziran je pomoću modela baziranog na metodi konačnih elemenata s tipičnim industrijskim dimenzijama promjera 4 mm i visinom 10 mm. Model se sastoji od kortikalne i spongiozne kosti, implantata, vijka i nadogradnje, kao što sl. 1. prikazuje. Korišteni su heksaedarski elementi (C3D8). Model ukupno sadrži 121504 čvorova te 109044 elemenata. Sve kontaktne površine modelirane su s nelinearnim *sliding contactom* za postizanje realnog ponašanja. Faktor trenja za kontaktne površine implantata iznosi 0,5 prema Abkowitzu [6]. Zbog visokog faktora zareznog djelovanja i ekstremnih gradijenata naprezanja u području spoja navoja implantata s vijkom korištena je vrlo fina mreža s duljinom elementa manjom od μm .



Sl. 1. Sklop dentalnog implantata s kosti i eksplodirani pogled na pojedine dijelove uz poprečni presjek detalja spojeva

2.1 Sile uslijed ugradnje dentalnog implantata u kost i cikličke žvačne sile

U istraživanju [7] za pojedine komercijalne implantate proučavan je utjecaj primjene zakretnog momenta i faktora trenja na silu pritezanja. Iz rezultata za standardne zakretne momente pritezanja vijka implantata, sila pritezanja doseže približno 800 N, što je u ovome radu uzeto kao maksimalna vrijednost. Prema istraživanju [8] koncentrirane sile 17,1 N, 114,6 N i 23,4 N u lingualnom, aksijalnom i mesio-distalnom smjeru su primjenjene.

2.2 Materijali

Dentalni implantat modeliran je s homogenim, izotropnim i linearno elastičnim materijalom. Mehanička svojstva titan legure za nadogradnju su $E = 114 \text{ GPa}$ i $\nu = 0,38$ te za implantat i vijak $E = 113,8 \text{ GPa}$ i $\nu = 0,34$ [9]. Mehanička svojstva kortikalne kosti su $E = 14 \text{ GPa}$ i $\nu = 0,3$ te spongiozne kosti $E = 1,5 \text{ GPa}$ i $\nu = 0,3$. $\alpha+\beta$ legura titana, Ti-6Al-4V, pri testiranjima cikličkih svojstava materijala na 20 kHz [10], ima dinamičku izdržljivost iznad 600 MPa do 10^7 ciklusa. Za proračun zamora pri različitim vrijednostima R , koristi se Haighov dijagram.

2.3 Visokociklički zamor

Utjecajni faktori: 1) površinska hrapavost, $R_Z = 2 \mu\text{m}$. 2) Rasipanje cikličkih svojstava materijala (omjer dinamičke izdržljivosti pri vjerojatnosti preživljavanja 10 i 90 %) pretpostavljeno je 1,45. 3) Utjecaj statistike. Normalna Gaussova distribucija je pretpostavljena za proračun utjecajnih statističkih varijabli. 4) Gradjeni naprezanja. Utjecaj okolnih slabije opterećenih područja na čvorovima sa strmim gradijentima naprezanja su uzeti u obzir. Gradjeni naprezanja karakteriziraju koncentraciju naprezanja. 5) Utjecaj srednjih naprezanja se uzima u obzir pomoću Haighovog dijagrama. Zamorna čvrstoća smanjuje se za vlačna srednja naprezanja, dok se za tlačna srednja naprezanja povećava. Zbog toga je Haighov dijagram nesimetričan. 6) Preuređivanjem srednjih naprezanja i amplituda naprezanja. U slučaju lokalne plastifikacije materijala uslijed linearno-elastičnog ponašanja implantata.

Pristup rješavanja visokocikličkog zamora je s teorijom kritičnih ravnina. Na kritičnim čvorovima dentalnog implantata, pretpostavljeno je da je ravnina kritična na zamorno oštećenje, ako akumulirano oštećenje prijeđe kritičnu vrijednost. FemFat koristi Haighov dijagram za određivanje kuta najkritičnije ravnine i faktor oštećenja za svaki čvor. Rezultati faktora sigurnosti (SF) s obzirom na dinamičku izdržljivost su za konstantna srednja naprezanja, tj. povezani su samo s amplitudom naprezanja.

$$SF = \sigma_{\text{Adop}} / \sigma_A, \quad (1)$$

gdje je σ_{Adop} dozvoljena amplituda naprezanja te σ_A amplituda naprezanja tokom spektra zamornog opterećenja.

Određivanje dozvoljene amplitude naprezanja u vijčanim spojevima je kompleksno zbog visokih faktora zareznog djelovanja u području korijena navoja, zaobljenju ispod glave vijka, zaobljenjima po tijelu vijka (radi povećavanja podatljivosti) i na početku navoja. Prema VDI 2230 za dozvoljene σ_A u području navoja za cikluse opterećenja $N_D \geq 2 \cdot 10^6$, koji su bili valjani prije toplinske obrade:

$$\sigma_{\text{ASV}} = 0,85 \cdot (150 / d + 45), \quad (2)$$

Navoji valjani nakon toplinske obrade:

$$\sigma_{\text{ASG}} = (2 - F_{\text{SM}} / F_{0,2\text{min}}) \cdot \sigma_{\text{ASV}}, \quad (3)$$

gdje je: d promjer vijka, F_{SM} sila pritezanja vijka i $F_{0,2\text{min}}$ sila pritezanja koja uzrokuje tečenje materijala, i izračunava se prema slijedećem izrazu:

$$F_{0,2\text{min}} = A_S \cdot R_{p0,2}, \quad (4)$$

gdje je A_S stvarni presjek vijka, tj. presjek preko kojeg se prenosi naprezanje.

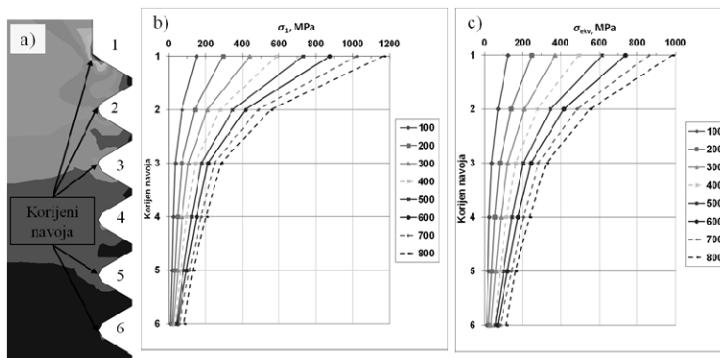
Ako se tokom životnog vijeka dogodi samo nekoliko tisuća izmjeničnih ciklusa ($N_Z > 10^4$) s većom amplitudom naprezanja, dozvoljene amplitude se povećavaju. Dozvoljene amplitude za druga područja vijaka (npr. tijelo vijka, zaobljenja ispod glave i sl.) moraju se proračunavati prema drugim izrazima.

3 REZULTATI

Istražen je utjecaj sile pritezanja na dinamičke SF , σ_A i σ_m u području vijčanog spoja implantata i vijka. Detaljniji opis rezultata prikazan je pod slijedećim podnaslovima.

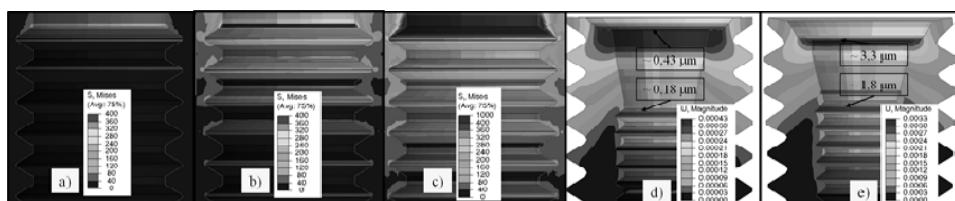
3.1 Nelinearna statička analiza dentalnog implantata za korak pritezanja vijka

Prvi korak analize bio je pritezanje vijka dentalnog implantata. Sl. 2. prikazuje rezultate: glavnih naprezanja (σ_1) pod b) i ekvivalentnih von Misesovih naprezanja (σ_{ekv}) pod c) po korijenima navoja, koji su vidljivi pod a). Iz rezultata se može uočiti da što je veća sila pritezanja da su σ_1 i σ_{ekv} veća. Radi usporedbe, kada je $F_{Mmin} = 100$ N, na prvom korijenu navoja $\sigma_1 = 148$ MPa i $\sigma_{ekv} = 124$ MPa. U slučaju $F_{Mmax} = 800$ N, na prvom korijenu navoja $\sigma_1 = 1167$ MPa i $\sigma_{ekv} = 984$ MPa.



Sl. 2. Raspodjela glavnih i ekvivalentnih von Misesovih naprezanja po korijenima navoja vijka za sile pritezanja od 100 do 800 N

Sl. 3. prikazuje raspodjelu ekvivalentnih von Misesovih naprezanja u području navoja dentalnog implantata. Pod a) prikazan je slučaj za silu od 100 N. Rezultati pokazuju da se polje naprezanja pojavljuje samo u prvom i drugom korijenu navoja.

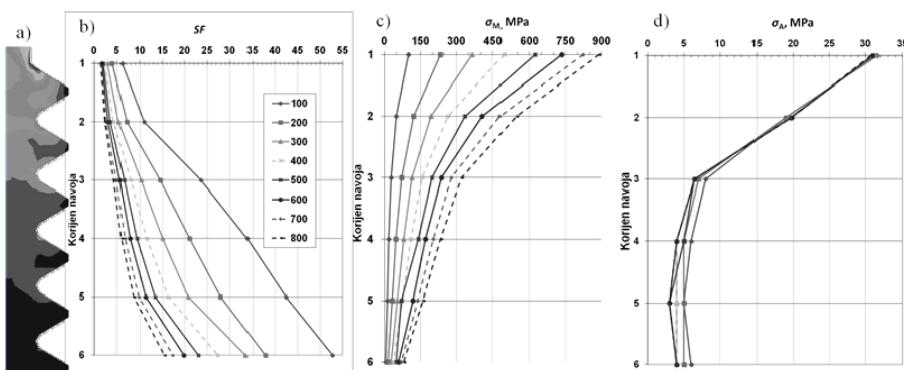


Sl. 3. Raspodjela ekvivalentnih von Misesovih naprezanja po navojima implantata za sile pritezanja 100, 400 i 800 N te raspodjela pomaka implantata za sile pritezanja od 100 i 800 N

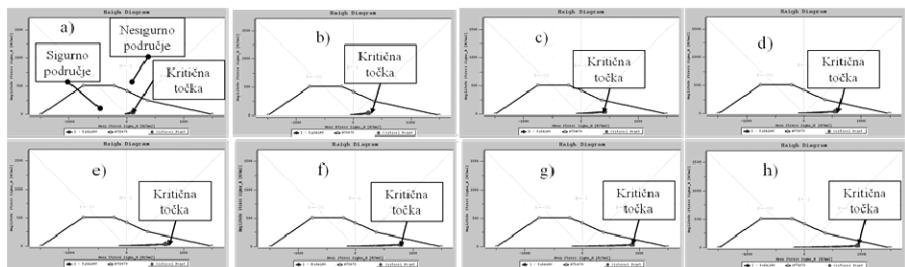
Pod b) prikazano je polje naprezanja za 400 N, gdje se polje naprezanja širi na svih 6 korijena. Pod c) polje naprezanja za silu od 800 N, gdje se uočavaju (čak i prema većoj skali područja raspona rezultata) veće vrijednosti naprezanja. Pod d) i e) prikazani su pomaci čvorova implantata za sile 100 i 800 N. Za silu od 800 N maksimalna vrijednost pomaka je $3,3 \mu\text{m}$ na implantatu i nalazi se na kontaktnoj površini s nadogradnjom gdje uslijed sile pritezanja na vijke dolazi do stlačivanja nadogradnje. U području prvog korijena navoja, maksimalni pomak za silu od 800 N iznosi $1,8 \mu\text{m}$.

3.2 Analiza tranzijentnog troosnog visokocikličkog zamora

Rezultati zamornog ponašanja uslijed djelovanja cikličkih pulzirajućih žvačnih sila su: dinamički SF , σ_A i σ_m . Dodatno mogu biti proračunati i broevi ciklusa do pojave pukotina. Rezultati na sl. 4. pokazuju da ciklička pulzirajuća opterećenja s različitim silama pritezanja dovode do značajno različitih dinamičkih SF , σ_A i σ_m . Za slučaj $F_{M\min} = 100$ N na prvom korijenu navoja, $SF = 6,12$ dok su $\sigma_A = 31,5$ MPa i $\sigma_m = 100$ MPa. U slučaju $F_{M\max} = 800$ N na prvom korijenu navoja, $SF = 1,45$ dok su $\sigma_A = 30,7$ MPa i $\sigma_m = 889$ MPa. Na korijenima navoja od 2 do 6, σ_m i σ_A su manja, što dovodi do većih SF za sve sile pritezanja. Sl. 5 prikazuje redoslijedom Haighove dijagrame za kritični čvor na vijku dentalnog implantata za sile pritezanja od 100 do 800 N.



Sl. 4. Dinamički faktori sigurnosti, srednja naprezanja i amplitude naprezanja



Sl. 5. Haighovi dijagrami za kritične čvorove vijka po redoslijedu sile pritezanja od 100 do 800 N

5 ZAKLJUČAK

Dinamička izdržljivost temeljena na korištenju amplituda naprezanja, σ_A , rezultira smanjenjem dinamičkih faktora sigurnosti za povećanje sile pritezanja. Povećanje σ_m uz istu vrijednost σ_A , povećava maksimalna ekvivalentna naprezanja, što dovodi do lakšeg otvaranja i rasta zamornih pukotina. S porastom sile pritezanja značajno rastu σ_m , dok se σ_A smanjuju. Dominantan efekt amplituda naprezanja s obzirom na njihovo smanjenje dovodi do poboljšanja zamornog ponašanja. Visoki faktor zareznog djelovanja prisutan je na prvom nosivom korijenu navoja. Lokalna naprezanja u tom području, u ovisnosti o geometriji, mogu biti čak i do 10 puta viša od nominalnih naprezanja. Osim toga, u presjeku korijena navoja dolazi do troosne nehomogene distribucije glavnih aksijalnih, tangencijalnih i radikalnih naprezanja. Čvrstoća vijčanog

spoja značajno je niža uslijed cikličkih naprezanja u usporedbi sa statičkim naprezanjima. Za istraživanje visokocikličkog zamora u usporedbi sa statičkom čvrstoćom, nužno je znanje i o cikličkom ponašanju materijala, utjecajnim faktorima (površinska hrapavost, srednja naprezanja, amplituda i gradijenti naprezanja, statistički utjecaji) i znatno finija i kvalitetnija izrada mreže konačnih elemenata, posebice u području ekstremnih gradijenata naprezanja. Primjena detaljnih i kompleksnih numeričkih analiza može povećati sigurnost i trajnost biomehaničkih implantata.

Literatura:

- [1] VDI-Gesellschaft Entwicklung Konstruktion Vertrieb, VDI 2230, 2003.
- [2] Naik, R. A., Lanning, D. B., Nicholas, T., Kallmeyer, A. R., "A Critical Plane Gradient Approach for the Prediction of Notched HCF Life", International Journal of Fatigue, Vol.27, 2005, str. 481-492
- [3] Sheppard, S. D., "Field Effects in Fatigue Crack Initiation: Long Life Fatigue Strength", Journal of Mechanical Design, Vol.113, No.2., 1991, str. 188–194.
- [4] Abaqus 6.10, Simulia, Providence, RI, USA
- [5] FemFat 4.8, ECS, Steyr, Austria
- [6] Abkowitz, S. Burke, J. J. Hiltz, R. H., "Titanium in industry", Van Nostrand, New York, 1960.
- [7] Lang, L. A., Kang, B., Wang, R. F., Lang, R., "Finite Element Analysis to Determine Implant Preload", The Journal of Prosthetic Dentistry, 2003
- [8] Djebbar, N. Serier, B., Bouiadjra, B. B. Benbarek, S. Draï, A., "Analysis of the effect of load direction on the stress distribution in the dental implant" Materials and Design, Vol.31, 2009, str. 2097-2101
- [9] Heidari, B. Bisadi, H. Heidari, B. Kadkhodazadeh, M., "Influence of Different Tapered Implants on Stress and Strain Distribution in Bone and Implant: A Finite Element Analysis", Journal of Periodontology & Implant Dentistry, Vol.1, 2009, str. 11-19
- [10] Atrens, A. Hoffelner, W. Duerig, T. W. Allison, J. E., "Subsurface Crack Initiation in High Cycle Fatigue in Ti6Al4V and in a Typical Martensitic Stainless Steel", Scripta Materialia, Vol.17, 1983, str. 601-606

Autori:

Stipica Novoselac, student poslijediplomskog doktorskog studija, tel. 091/5056300, e-mail: stipica.novoselac@gmail.com

Todor Ergić, Sveučilište u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane-Brlić Mažuranić 2, HR-35000 Slavonski Brod, tel. 035/446-188, fax 035/446-446, e-mail: Todor.Ergic@sfsb.hr, web stranica: <http://www.sfsb.unios.hr/fakultet/ustroj/zsk/tergic>

Dražan Kozak, Sveučilište u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane-Brlić Mažuranić 2, HR-35000 Slavonski Brod, tel. 035/446-188, fax 035/446-446, e-mail: Drazan.Kozak@sfsb.hr, web stranica: <http://www.sfsb.unios.hr/fakultet/ustroj/zsk/dkozak>

Josip Sertić, Sveučilište u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane-Brlić Mažuranić 2, HR-35000 Slavonski Brod, tel. 035/446-188, fax 035/446-446, e-mail: Josip.Sertic@sfsb.hr, web stranica: <http://www.sfsb.unios.hr/fakultet/ustroj/zsk/jsertic>

Matija Pacak, , student poslijediplomskog doktorskog studija, tel. 091/5448888, e-mail: matija.pacak@gmail.com

TOPOLOŠKO OPTIMIRANJE PARAMETRIZIRANOM LEVEL SET FUNKCIJOM I EVOLUCIJSKOM METODOM

Pehnec, I., Vučina, D

Sažetak: Topološko optimiranje je inverzni proces sinteze, te je kao takav vrlo složen i zahtijevan numerički zadatak. Proces topološkog optimiranja u mehanici čvrstih tijela uz promjenu polja pomaka podrazumijeva i promjenu raspodijele materijala (geometrije). Level set metoda topološkog optimiranja zasnovana je na implicitnoj funkciji čije izo linije opisuju promatranu geometriju. Jednadžba promjene izo linije level set funkcije u vremenu naziva se Hamilton-Jacobieva diferencijalna jednadžba. Brzina promjene izo linije slijedi iz derivacije funkcije cilja i određuje najbrži smjer promijene geometrije ka optimalnom rješenju. Tradicionalna level set metoda topološkog optimiranja izvodi se gradijentnim postupkom i metoda je sklona zapinjanju u lokalnim ekstremima, što ima za posljedicu veliku ovisnost o početnom rješenju.

Parametrizacijom level set funkcije smanjuje se broj parametara potrebnih za opis geometrije, te se otvara prostor primjeni genetskih algoritama. Parametri koji opisuju level set funkciju (njene z koordinate) predstavljaju varijable optimiranja. Genetski algoritam manje je osjetljiv na lokalne ekstreme. Kao primjer topološki se optimira 2D konzolni nosač. Usljed promjene geometrije dolazi do potrebe preprežavanja konačnih elemenata što se izbjegava zamjenskim materijalom kao „jeftinijim“ numeričkim postupkom. Postupak optimiranja level set funkcijom genetskim algoritmom je primjenjiv, ali dugotrajan proces. Postupak može poslužiti kao generator početnog rješenja za gradijentne postupke.

Ključne riječi: Topološko optimiranje, level set, parametrizacija

1 UVOD

Zadatak topološkog optimiranja je distribuirati određenu količinu materijala tako da se optimira odziv (statička nosivost). Optimiranje oblika u smislu inverznog procesa sinteze je vrlo kompleksan i kreativan proces, koji uključuje mnoge aspekte kao što su iskustvo, ideje, pravila, metode, analiza, interakcije i druge konceptualne elemente. Problematika optimiranja topologije level set metodom koja je obrađena u literaturi može se razvrstati u nekoliko područja (parametrizacija geometrije domene, interpolacijske metode, rješavanje ravnoteže, formulacija pri optimiranju oblika i topologije, optimizacijski algoritam).

Topološko optimiranje najbliže je apstraktnoj konceptualnoj fazi. Mnogi radovi ([2], [3], [5]) opisuju različite pristupe, modele i procedure topološkog optimiranja.

U fazi optimiranja oblika, učinkovita parametrizacija oblika postaje ključna za učinkovito optimiranje geometrije.

2 MATEMATIČKA FORMULACIJA EVOLUCIJSKOG POSTUPKA OPTIMIRANJA LS METODOM

Problem topološkog optimiranja obično se postavlja kao minimum podatljivosti (odnosno maksimum krutosti) uz ograničenja dopustivih virtualnih pomaka i dopustive raspodjela materijala krutosti E :

$$\min_{\substack{u \in U \\ E \in E_{ad}}} l(\mathbf{v}), \quad \text{za sve } \mathbf{v} \in U, \quad E \in E_{ad}$$

$$a_B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \Rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{E}(X) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \cdot d\Omega = \int_{\Gamma_s} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_s \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_v \cdot d\Omega, \quad (1)$$

što predstavlja slabu varijacijsku jednadžbu sa U pripadnih virtualnih (kinematskih dopustivih) pomaka.

E_{ad} – skup mogućih (dopustivih) svojstava materijala, E – matrica krutosti, \mathbf{u} – ravnotežno polje pomaka, \mathbf{v} – virtualno polje pomaka (kinematički dopustivo), $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ – virtualni rad unutarnjih sila
 $l(\mathbf{v})$ – virtualni rad vanjskog opterećenja. Linearni oblik vanjskog opterećenja jednak je zbroju vanjskog opterećenja f_v po jedinici volumena Ω i vanjskog opterećenja f_s po jedinici konture Γ_s , indeks B predstavlja bilinearnu formu.

X – varijable oblika (označava distribuciju materijala) i topologije,

$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}$ - polje deformacija,

L – diferencijalni operator,

x, y, z – označavaju koordinate točaka u prostoru.

Iz navedenog slijedi formulacija:

$$\max_{E \in E_{ad}} \left(\min_{u \in U, D} \{ a_B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{v}) \} \right) \quad (2)$$

Funkcija minimuma je podatljivost, gdje se traži optimalna distribucija materijala koja će zadovoljiti ravnotežu. Ovakva formulacija naziva se ugniježđena („Nested“) formulacija.

Funkciju cilja možemo definirati i kao minimum volumena uz ograničenje nosivosti konstrukcije (naprezanja):

$$\begin{aligned} & \min_E V \\ & \mathbf{K}(E)\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \sigma < \sigma_{dop} \quad E \in E_{ad} \end{aligned} \quad (3)$$

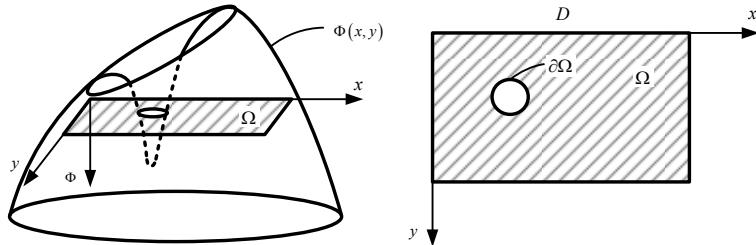
Ravnoteža (polja naprezanja, deformacija i pomaka) računaju se u gotovom programskom paketu metodom konačnih elemenata.

Temeljne metode koje optimiraju oblik i topologiju su Bubble metoda, ESO (Evolutionary structural optimization), SIPM (Solid Isotropic Material with Penalization) i level set metoda.

2.1 Tradicionalna level set metoda topološkog optimiranja

Level set je implicitna funkcija koja opisuje geometriju. Level set funkcija nalazi se u $n+1$ dimenziji u odnosu na geometriju koju opisuje, a njena izo-linija definira geometriju. Ovim svojstvom omogućeno je da level set funkcija opisuje i topološke

promjene geometrije pri optimiranju (može opisati promjenu kao što je stvaranje novih rupa u domeni), a pri tome nije potrebna nova parametrizacija geometrije. Ovo svojstvo je veoma bitno jer se u suprotnom mijenja broj varijabli optimiranja i njihova struktura sa promjenom topologije.



Sl. 1. Opća implicitna funkcija Φ koja prodire u domenu D

Definira se težinska funkcija H koja govori o tome da li je promatrana točka unutar ili izvan područja:

$$H(\phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \phi(\mathbf{x}) \leq 0, \\ 0 & \text{ako je } \phi(\mathbf{x}) > 0, \end{cases} \quad (4)$$

U trenutku t funkcija točaka izo linije je $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$.

Ako se svim točkama level set funkcije zada brzina $v = dx/dt$, dobit će se promjena level set funkcije u vremenu (Hamilton-Jacobi-eva parcijalna diferencijalna jednadžba):

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \Phi(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0 \quad (6)$$

Hamilton-Jacobi-eva (H-J) parcijalna diferencijalna jednadžba može se riješavati „Upwinding“ postupkom (konačnim razlikama u prostornoj domeni i vremenskom shemom koračanja), ili parametriziranim level set plohom. Upwinding postupak u domeni koja se optimira ne može stvoriti nove rupe, što predstavlja veliki nedostatak.

2.2.2.3 Postupak topološkog optimiranja parametriziranim level set plohom i genetskim algoritmom

H-J jednadžba se parametrizira nekim od parametarskih jednadžbi (B-spline, radijalnim baznim funkcijama...) čime se vrši separacija prostora i vremena te se dobiva sustav raspregnutih običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\phi^T(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{a}_0(t)}{dt} + v_n \left| (\nabla \phi(\mathbf{x}))^T \mathbf{a}_0(t) \right| = 0 \quad (7)$$

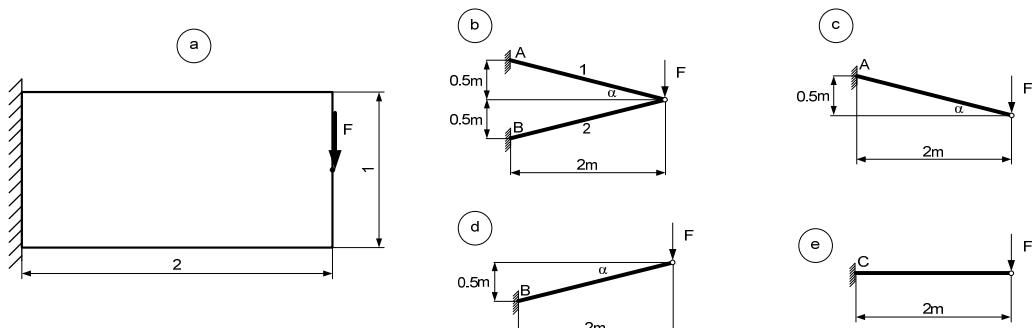
Brzina v_n dobiva se razmatranjem minimuma potencijalne energije ϕ (nametanje „vanjskog“ polja brzina). Izvedena je jednadžba brzine kretanja izo linije level set funkcije (9) permutacijom granica domeni iz funkcije cilja minimum podatljivosti i ograničenja volumena odnosno Lagrangeove funkcije (8):

$$\min_{\Phi(\mathbf{x})} : L(\mathbf{u}, \Phi, \lambda) = \frac{1}{2} \int_D (\varepsilon(\mathbf{u}))^T \mathbf{E} \varepsilon(\mathbf{v}) H(\Phi) d\Omega + \lambda [H(\Phi) d\Omega - \zeta V_0] \quad (8)$$

$$v_n = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} - \lambda \quad (9)$$

Glavni nedostatak level set metode je ovisnost o početnom rješenju, kao posljedica gradijentnog postupka optimiranja na kojoj se temelji metoda. Stoga se predlaže topološko optimiranje parametriziranim level set plohom, pri čemu su variable optimiranja čvorovi parametrizirane plohe. Pomicanjem čvorova mijenja se level set funkcija, a time i oblik promatrane domene (izo linija level set funkcije). Parametrizacijom se značajno može smanjiti broj varijabli potrebnih za opis modela, što otvara mogućnost primjene metode optimiranja genetskim algoritmom (GA). GA je globalna metoda traženja minimuma funkcije i nije sklona zapinjanju u lokalnim ekstremima. Za funkciju cilja uzima se minimum volumena materijala, uz ograničenje nosivosti.

Kao test primjer topološkog optimiranja level set metodom u brojnoj literaturi [1], [4], [6], [7], koristi se konzolna greda opterećena silom na kraju:



Sl. 2. Definiranje geometrije, opterećenja i rubnih uvjeta konzolne ploče za topološko optimiranje (a) i neka od diskretnih rješenja (b, c, d, e)

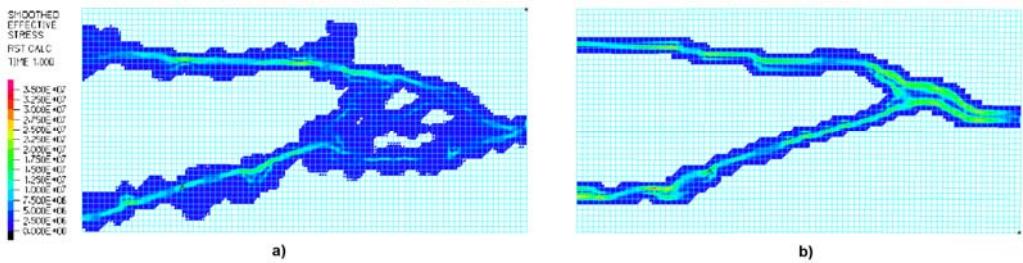
Numerička analiza konstrukcije vrši se metodom konačnih elemenata u gotovom programskom paketu ADINA. Promjena geometrije je značajna pri topološkom optimiranju, te je potrebno obrisati staru mrežu konačnih elemenata i kreirati novu mrežu za topološki promijenjenu geometriju. Kreiranje nove mreže konačnih elemenata je zahtjevan numerički proces. Geometriju pri optimiranju možemo mijenjati metodom zamjenskog materijala, što je jednostavniji postupak od kreiranja nove mreže konačnih elemenata. Konačnim elementima na mjestu gdje je optimizator uklonio materijal zadajemo znatno lošija mehanička svojstva i ti elementi postaju ne-nosivi dio konstrukcije.

Neka od očekivanih diskretnih rješenja, prikazani su na slici 2 b, c, d, e, koja optimizator može pronaći kao lokalne ekstreme.

3 REZULTATI ISTRAŽIVANJA

Pri topološkom optimiranju grede uklještene i opterećene prema slici 2 korištena je parametrizacija level set funkcije B-spline plohom. Variable optimiranja su z koordinate kontrolnih točaka B-spline plohe, koje određuju i preciznost reprezentacije optimiranog modela. Promjenom kontrolnih točaka B-spline plohe mijenja se i geometrija modela. Težišta konačnih elemenata zadanog modela ispituju se u odnosu

na vrijednost aproksimirane level set funkcije. Ukoliko koordinati težišta promatranog konačnog elementa pripada negativna vrijednost aproksimirane level set funkcije, konačni element poprima svojstva materijala nosivog dijela konstrukcije (Young-ov modul elastičnosti aluminija $E_{Al}=70$ [GPa]). Ako koordinati težišta promatranog konačnog elementa pripada pozitivna vrijednost level set funkcije, konačnom elementu smanjuje se Young-ov modul elastičnosti ($E_m=700$ [Pa]) uslijed čega takav konačni element nije u mogućnosti prenositi opterećenje. Unos promijenjenih podataka u tijeku optimiranja vrši se „data burying“ postupkom. Proces optimiranja izvodi se metodom genetskog algoritma koji je globalna metoda traženja i na koju ne utječe početno rješenje. Funkcija cilja je minimum volumena uz ograničenje naprezanja u konstrukciji dobivena numeričkom metodom (konačnim elementima) u programskom paketu ADINA. Početno rješenje može biti proizvoljno, a u ovom primjeru odabrana je puna ploča sa 3200 konačnih elemenata.



Sl. 3. Topološki optimirana 2D konzola sa a) 2304 i b) 576 varijabli optimiranja

Iz rezultata (slika 3 a) topološkog optimiranja možemo uočiti da postupak teži u očekivana rješenja kako je pojašnjeno u prethodnom poglavlju (slika 2 b). Broj varijabli optimiranja je velik (2304) i proces optimiranja ovakve konstrukcije traje i do 55 dana (uz populaciju 6912 jedinki i 200 generacija), te rješenje još uvijek nije konvergiralo. Postignuto je smanjenje volumena za 74,6% od početnog volumena pune ploče. Proces se može ubrzati paralelizacijom na više računala ili smanjenjem broja varijabli. U koliko odaberemo 576 varijabli optimiranja (slika 3 b), vrijeme trajanja proračuna se znatno smanjuje (16 dana). Populacija jedinki genetskog algoritma je tri puta veća od broja varijabli (1728), koje se mijenjaju kroz 200 generacija. Dobiveno je smanjenje volumena za 91,2% od početnog volumena. Bolji rezultat optimiranja postignut je sa manje varijabli (576) zbog manjeg polja pretraživanja. Povećanjem populacije i podešavanjem parametara GA moguće je postići i bolja rješenja.

5 ZAKLJUČAK

Topološko optimiranje je procesa sinteze oblika i topologije konstrukcija, te je kao takav vrlo složen i zahtijevan numerički zadatak. Jedan od postupaka topološkog optimiranja konstrukcija je level set metoda temeljna na implicitnoj funkciji čije izo linije opisuju promatranu geometriju. U radu je predložena metoda topološkog optimiranja konstrukcije (2D konzolnog nosača) parametriziranim level set plohom.

Promjenom parametara level set plohe mijenja se i geometrija opisana njenom izo linijom. Postupak izbjegava Hamilton-Jacobi-evu transportnu jednadžbu, te omogućuje primjenu ne-gradijentnih i evolucijskih postupaka optimiranja. Parametrizacijom level set plohe (B-plohom) znatno se smanjuje broj varijabli optimiranja, uz dobru reprezentaciju modela, što smanjuje vrijeme procesa optimiranja. Variable optimiranja u predloženoj metodi su z koordinate čvorova B-plohe, koje opisuju level set plohu. Genetski algoritam je globalna metoda traženja optimuma, što predloženom postupku topološkog optimiranja daje veliku prednost u odnosu na klasične metode temeljene na gradijentnim postupcima topološkog optimiranja.

Rezultati topološkog optimiranja parametriziranim level set funkcijom i genetskim algoritmom pokazuju primjenjivost predložene metode. Glavna primjena predložene metode topološkog optimiranja je dobivanje dobrih početnih rješenja za tradicionalnu level set metodu koja ima veliku ovisnost o odabranom početnom rješenju, ali je brži postupak.

Literatura:

- [1] Allaire G.; Jouve F.; Toader A-M., „Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method“, Jurnal of Computational Physics 194, February 2004, pp: 363-393.
- [2] Bendsoe M.P.; Sigmund O., „Topology Optimization Theory, Methods and Applications“, Springer, Berlin, Germany, 2004.
- [3] Eschenauer H.A.; Olhoff N., „Topology optimization of continuum structures: a review“, Applied Mechanics Reviews 54(4), July 2001, pp: 331–390.
- [4] Luo Z.; Tong L.; Kang Z., „A level set method for structural shape and topology optimization using radial basic functions“, Journal of Computers and Structures 87, April 2009, pp: 425-434.
- [5] Rozvany G.I.N., „Topology optimization in structural mechanics“, Springer,CISM, Udine Italy 1997.
- [6] Wang S.; Wang M.Y., „Radial Basis Functions and Level Set Method for Structural Topology Optimization“, International Journal for Numerical Methods in Engineering 65, March 2006, pp 2060-2090.
- [7] Wang S.Y.; Lim K.M.; Khoo B.C.; Wang M.Y., „An extended level set method for shape and topology optimization“, Journal of Computational Physics 221, January 2007, pp: 395-421.

Autori:

Igor Pehnec, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Split, Zavod strojarstvo i brodogradnju, Rudera Boškovića 32, tel. +3854305963, e-mail: ipehnec@fesb.hr,

Damir Vučina, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Split, Zavod strojarstvo i brodogradnju, Rudera Boškovića 32, tel. +3854305969, e-mail: vucina@fesb.hr

NUMERIČKA ANALIZA STABILNOSTI TANKOSTJENIH KOMPOZITNIH GREDA

Pešić, I., Lanc, D. & Šimon, I.

Sažetak: U ovome radu prezentiran je numerički numerički model za analizu izvijanja tankostjenih laminatno-kompozitnih greda. Numerički algoritam baziran je na jednodimenzionalnom prostornom grednom konačnom elementu uz uključene efekte velikih prostornih pomaka i prostornih rotacija. Deformacije su prepostavljene malima. Za nelinearnu je analizu implementirana korotacijska formulacija koja je linearna na nivou elementa, a geometrijska nelinearnost se uvodi transformacijom iz lokalnog u globalni koordinatni sistem. Lokalni koordinatni sistem prati gredni konačni element i dopušta pojednostavljene konstitutivne jednadžbe lokalno, na nivou konačnog elementa. Primijenjena je klasična teorija laminata. Model je verificiran na testnim primjerima.

Ključne riječi: stabilnost, kompoziti, gredne konstrukcije, metoda konačnih elemenata

1 UVOD

Široka je mogućnost primjene kompozitnih grednih elemenata u različitim područjima tehnike, kao što su npr: strojogradnja, brodogradnja, graditeljstvo te avionska industrija. Ovo proizlazi iz razloga što su kompozitni gredni konstrukcijski elementi različitih tipova, a koji se javljaju i kao samostalne nosive konstrukcijske i kao dijelovi neke složenije konstrukcije (ukrepe pločastih i ljkastih konstrukcija), zajednički za sva gore spomenuta područja [2].

U ovom radu dan je numerički algoritam koji pruža mogućnost analize stabilnosti kompozitnih grednih nosača različitih oblika poprečnog presjeka, različitih geometrija i tipova oslonaca, različitih načina spajanja grednih elemenata konstrukcije, kao i različitih oblika vanjskog opterećenja, a u smislu određivanja nivoa vanjskog opterećenja koje biva uzrokom pojave nestabilnosti deformacijske forme.

2 KONAČNOELEMENTNA FORMULACIJA

2.1 Pomaci

Cartesijev koordinatni sustav (z, x, y) odabran je tako da se os z podudara s uzdužnom osi nosača koja prolazi kroz težišta O svih poprečnih presjeka. Koordinatne osi x i y glavne su osi inercije poprečnog presjeka.

Komponente pomaka poprečnog presjeka kao krutog tijela su:

$$w_0 = w_0(z), \quad u_0 = u_0(z), \quad v_0 = v_0(z), \quad \varphi_z = \varphi_z(z), \quad \varphi_x = -\frac{dv_0}{dz}, \quad \varphi_y = \frac{du_0}{dz}, \quad \theta = \frac{d\varphi_z}{dz} \quad (1)$$

gdje je w_0 , u_0 i v_0 translacijski pomaci u smjeru osi z , x i y , dok su φ_z , φ_x , i φ_y rotacijski pomaci oko z , x i y osi. Pomak θ predstavlja tzv. parameter vitoperenja poprečnog presjeka.

Polje pomaka točaka poprečnog presjeka definirano je izrazom:

$$w = w_o - y \frac{dv_0}{dz} - x \frac{du_0}{dz} - \omega \frac{d\varphi_z}{dz}, \quad u = u_0 - y \varphi_z, \quad v = v_0 + x \varphi_z. \quad (2)$$

2.2 Deformacija

Tenzor deformacije ima samo dvije komponente:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_{zs} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Eulerova formulacija je u načelu linearna na nivou lokalnog koordinatnog sustava konačnog elementa. Geometrijska nelinearnost je uključena preko transformacija komponenata pomaka iz lokalnog u globalni koordinatni sustav pa je nelinearni dio tenzora deformacije moguće zanemariti. U obzir je uzeta jedino komponenta:

$$\eta_z = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (4)$$

radi uključivanja Wagnerovog efekta koji uzrokuje torzijsko izvijanje nosača. Komponente tenzora deformacije se mogu izraziti kao:

$$\epsilon_z = \frac{dw_o}{dz} - y \frac{d\varphi_x}{dz} - x \frac{d\varphi_y}{dz} - \omega \frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \left(\frac{d\varphi_z}{dz} \right)^2, \quad (5)$$

$$\epsilon_{zs} = 2n \frac{d\varphi_z}{dz}. \quad (6)$$

Virtualni tenzor deformacije se može izraziti kao:

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{x}_\epsilon \delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (7)$$

gdje je:

$$\delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^T = \begin{Bmatrix} \frac{d\delta w_o}{dz} & \frac{d\delta \varphi_x}{dz} & \frac{d\delta \varphi_y}{dz} & \frac{d^2 \delta \varphi_z}{dz^2} & \frac{d\delta \varphi_z}{dz} \cdot \frac{d\varphi_z}{dz} & \frac{d\delta \varphi_z}{dz} \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & -y & -x & -\omega & (x^2 + y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n \end{bmatrix}. \quad (9)$$

2.3 Unutarnje sile

Tenzor naprezanja ima dvije komponente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zs} \end{Bmatrix}. \quad (10)$$

Rezultanta unutarnjih sila može se rastaviti na šest komponenti:

$$F_z = \int_A \sigma_z dA, \quad M_x = \int_A \sigma_z y dA, \quad M_y = - \int_A \sigma_z x dA, \quad (11)$$

$$M_z = \int_A \tau_{zs} n dA, \quad M_\omega = \int_A \sigma_z \omega dA, \quad T_\sigma = \int_A \sigma_z (x^2 + y^2) dA. \quad (12)$$

Vektor unutarnjih sila:

$$(\mathbf{f}_\sigma)^T = \begin{Bmatrix} F_z & M_x & M_y & M_\omega & T_\sigma & M_z \end{Bmatrix} \quad (13)$$

može se napisati u obliku:

$$\mathbf{f}_\sigma = \int_A \mathbf{x}_\sigma \boldsymbol{\sigma} dA, \quad (14)$$

gdje je:

$$(\mathbf{x}_\sigma)^T = \begin{Bmatrix} 1 & y & -x & \omega & (x^2 + y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

2.4 Čvorni vektori

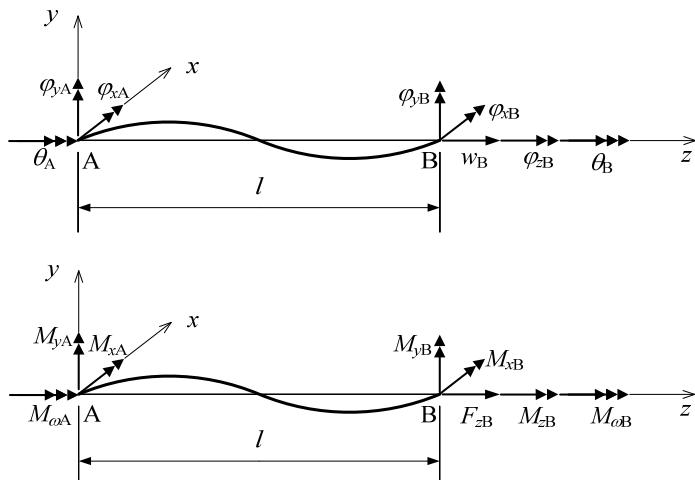
Na sl. 1. prikazan je gredni konačni element definiran u lokalnom Eulerovom koordinatnom sustavu. Os z prolazi kroz težišta čvornih presjeka. Element u lokalnom sustavu ima osam mogućih stupnjeva slobode gibanja pa se lokalni vektor pomaka čvorova elementa može napisati kao:

$$(\mathbf{u}^e)^T = \{w_B, \varphi_{xA}, \varphi_{xB}, \varphi_{yA}, \varphi_{yB}, \varphi_{zB}, \theta_A, \theta_B\}, \quad (16)$$

a lokalni vektor čvornih sila kao:

$$(\mathbf{f}^e)^T = \{F_{zB}, M_{xA}, M_{xB}, M_{yA}, M_{yB}, M_{zB}, M_{\omega A}, M_{\omega B}\}. \quad (17)$$

Indeks e na oba vektora označava e -ti konačni element, a indeksi A i B označavaju čvorove elementa.



Sl. 1. Gredni konačni element u Eulerovom koordinatnom sustavu

2.5 Ravnotežne jednadžbe

Primjenom principa virtualnih radova moguće je dobiti ravnotežnu jednadžbu, a u svrhu rješavanja nelinearnog problema, upotrijebiti će se inkrementalni oblik jednadžbe. Konačni gredni element se deformira iz prethodne ravnotežne konfiguracije definirane sa $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{f}^e , φ_{zB} , θ_{zA} , i θ_{zB} u novu ravnotežnu konfiguraciju definiranu sa $\boldsymbol{\sigma} + \Delta\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{f}^e + \Delta\mathbf{f}^e$, $\varphi_{zB} + \Delta\varphi_{zB}$, $\theta_{zA} + \Delta\theta_{zA}$, i $\theta_{zB} + \Delta\theta_{zB}$ pa se dobiva sljedeća inkrementalna jednadžba:

$$\int_0^l \int_A \tilde{\mathbf{B}}_L^T \mathbf{x}_\sigma \Delta \boldsymbol{\sigma} dA dz + \int_0^l \int_A \sigma_z \mathbf{x}_G dA dz \Delta \mathbf{u}^e = \Delta \mathbf{f}^e, \quad (18)$$

gdje su $\tilde{\mathbf{B}}_L$ i \mathbf{x}_G dane u [2].

Inkrementalni tenzor naprezanja $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ se može izraziti preko inkrementalnog tenzora deformacije $\Delta \boldsymbol{\epsilon}$ kao:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}_T \Delta \boldsymbol{\epsilon}, \quad (19)$$

gdje \mathbf{Q}_T označava transformirani reducirani tenzor elastičnosti:

$$\mathbf{Q}_T = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{16}^* \\ \bar{Q}_{16}^* & \bar{Q}_{66}^* \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Kombiniranjem izraza (7), (18) i (19) dobiva se:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{Q}_T \mathbf{x}_e \tilde{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{u}^e, \quad (21)$$

gdje $\Delta \mathbf{u}^e$ označava vektor inkrementalnih čvornih pomaka. Prema tome, naprezanje u konačnom elementu nove konfiguracije iznosi:

$${}^2 \boldsymbol{\sigma} = {}^1 \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}, \quad (22)$$

gdje lijevi gornji indeks 2 označava novu konfiguraciju, a indeks 1 zadnju poznatu konfiguraciju. Uvrštavanjem izraza (18) u izraz (21) i preraspodjelom integrala vezanih uz Wagnerov efekt, inkrementalna ravnotežna jednadžba se može napisati u obliku:

$$\mathbf{k}_T^e \Delta \mathbf{u}^e = \Delta \mathbf{f}^e, \quad (23)$$

gdje \mathbf{k}_T^e označava lokalnu tangentnu matricu krutosti e -toga elementa:

$$\mathbf{k}_T^e = \int_0^l \int_A \tilde{\mathbf{B}}_L^T \mathbf{x}_\sigma \mathbf{Q}_T \mathbf{x}_e \tilde{\mathbf{B}} dA dz + \int_0^l \int_A \sigma_z \mathbf{x}_G dA dz. \quad (24)$$

Integracija izraza (24) uzduž konačnog elementa provodi se kroz tri Gaussove integracijske točke dok se za integraciju po površini poprečni presjek dijeli u konačni broj integracijskih površina. Da bi se izračunala matrica \mathbf{x}_e , vrijednost vitoperenja ω mora biti poznata. Vitoperenje se izračunava na isti način kao i za izotropne tankostjene poprečne presjeke. Poprečni presjek je diskretiziran konačnim brojem integracijskih površina.

Da bi se utvrdili čvorni pomaci konstrukcije pod opterećenjem, neophodno je transformirati jednadžbu (23) iz lokalnog u globalni koordinatni sustav. Nelinearna transformacijska procedura [1] koja uzima u obzir efekte velikih rotacija je usvojena u ovom radu;

$$\bar{\mathbf{k}}_T^e = (\mathbf{t}_1^e) \mathbf{k}_T^e \mathbf{t}_1^e + \mathbf{t}_2^e \mathbf{f}^e, \quad \Delta \mathbf{u}^e = \mathbf{t}_1^e \Delta \bar{\mathbf{u}}^e, \quad \Delta \mathbf{f}^e = \mathbf{t}_1^e \Delta \bar{\mathbf{f}}^e. \quad (25)$$

gdje transformacijska matrica \mathbf{t}_1^e dimenzija 14×8 sadrži derivacije lokalnih pomaka po globalnim pomacima, a transformacijska matrica \mathbf{t}_2^e dimenzija $14 \times 14 \times 8$ sadrži odgovarajuće druge derivacije i odražava efekte promjene u geometriji konstrukcije zbog globalnih sila.

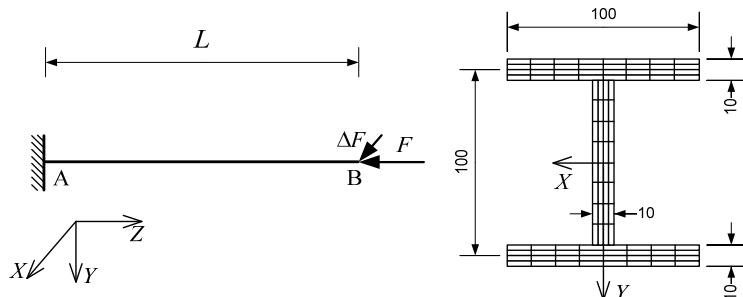
Inkrementalne ravnotežne jednadžbe cijele konstrukcije dobivaju se standardnom procedurom sastavljanja [4]:

$$\mathbf{K}_T^e \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{P}, \quad \mathbf{K}_T = \sum_e \mathbf{k}_T^e, \quad \Delta \mathbf{P} = {}^2 \mathbf{P} - {}^1 \mathbf{P}, \quad (26)$$

gdje je \mathbf{K}_T tangencijalna matrica krutosti konstrukcije, $\Delta \mathbf{U}$ i $\Delta \mathbf{P}$ su odgovarajući inkrementalni vektori pomaka i sila, a ${}^2 \mathbf{P}$ i ${}^1 \mathbf{P}$ označavaju vektore vanjskih opterećenja na konfiguraciju C_2 , odnosno C_1 .

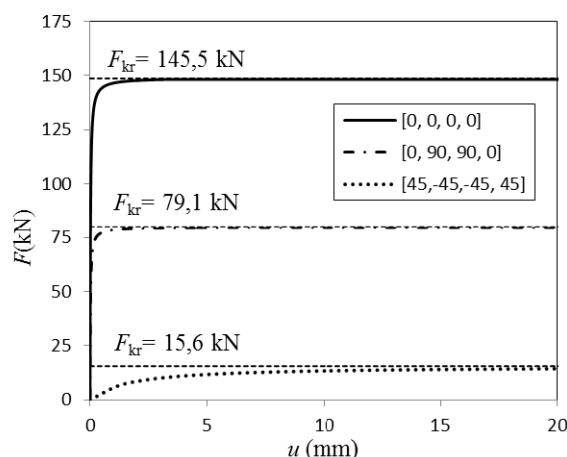
3 PRIMJER

Konzola duljine $L = 2$ m na sl. 2. opterećena je tlačnom aksijalnom silom F u presjeku B. Dodatna sila $\Delta F = 0,001F$ dodana je na kraj konzole u smjeru osi X radi iniciranja fleksijskog izvijanja. Poprečni presjek je I-profil sastavljen od četveroslojnog laminata s redoslijedom slaganja $[0]_4, [0/90]_s$ i $[45/-45]_s$. Analizirani materijal je ugljik-epoxy (AS4/3501) sa sljedećim značajkama: $E_1 = 144$ GPa, $E_2 = 9.65$ GPa, $G_{12} = 4.14$ GPa, $\nu_{12} = 0.26$



Sl. 2. Fleksijsko izvijanje konzole I-profila

Konzola je diskretizirana s četiri konačna elementa i 160 integracijskih površina. Na sl. 3. prikazan je nelinearni odziv konzole različitih redoslijeda slaganja slojeva laminata uz usporedbu s kritičnim silama izvijanja dobivenim lineariziranim analizom pomoću shell elemenata [3].



Sl. 3. Dijagram ($F - u_B$) za različite redoslijede slaganja slojeva

4 ZAKLJUČAK

U radu je prikazan konačnoelementni gredni model za analizu izvijanja kompozitnih grednih konstrukcija u smislu nelinearnog rješavanja problema stabilnosti čime se omogućava praćenje deformiranja konstrukcije u pred i post fazi izvijanja. Izrađen je originalan računalni program koji može poslužiti kao dobra osnova pri analizi i konstruiranju spomenutog tipa konstrukcija. Daljnji rad na problemu bit će usmjeren na proširenje kompjuterskog programa na način da se uključi i utjecaj posmičnih deformacija kod savijanja silama.

Literatura:

- [1] Izzuddin, B. A., Elnashai, A. S., "Eulerian formulation for large displacement analysis of space frames", Journal of Engineering Mechanics, No.119, 1993, str. 549-569
- [2] Pešić, I., "Konačnoelementni model za analizu izvijanja kompozitnih grednih konstrukcija", Doktorski rad, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2013.
- [3] Šimon, I., "Numerička analiza izvijanja laminatno kompozitnih grednih nosača", Diplomski rad, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2012.
- [4] Yang, Y. B., McGuire, W., "Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis", Journal of Structural Engineering, Vol. 2, No.112., 1986, 853-877

Autori:

Igor Pešić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051 651503, fax 051 651490, e-mail: ipesic@riteh.hr, web stranica: www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/Katedra.htm

Domagoj Lanc, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051 651495, fax 051 651490, e-mail: dlanc@riteh.hr, web stranica: www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/Katedra.htm

Iva Šimon, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Vukovarska 58, e-mail: isimon@riteh.hr

UTJECAJ VLASTITE TEŽINE KUĆIŠTA STATORA HIDROGENERATORA NA VELIČINU UNUTARNJIH SILA I POMAKA

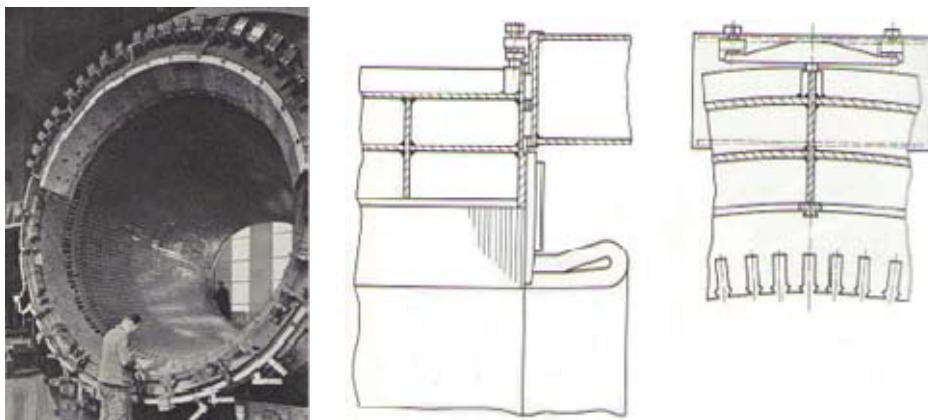
Pustaić, M., Wolf, H. & Pustaić, D.

Sažetak: U radu se razmatraju problemi čvrstoće i krutosti kućišta statora hidrogeneratora horizontalne izvedbe. Ta je analiza posebno važna i zanimljiva kod generatora čiji rotor, a onda i stator, imaju velike promjere (3 m i više). Važno je da kućište statora hidrogeneratora ima dovoljno veliku krutost kako pomaci pojedinih karakterističnih točaka statora ne bi bili preveliki i time promijenili geometriju statora, odnosno utjecali na promjenu zračnog raspora između rotora i statora. Na konstrukciju kućišta statora hidrogeneratora u eksploataciji djeluje nekoliko različitih opterećenja. U prvom redu, kod horizontalne izvedbe rotora i statora, to je utjecaj vlastite težine samoga kućišta na koje je pričvršćen statorski paket i statorski namot. To opterećenje modelira se kao jednoliko raspodijeljeno kontinuirano opterećenje q . Ovaj rad bit će posvećen upravo analizi utjecaja toga opterećenja na veličinu unutarnjih sila i pomaka u kućištu statora. Druga vrsta opterećenja su sile magnetskog privlačenja koje djeluju u radikalnom smjeru. Treća vrsta opterećenja kućišta statora su sile koje djeluju tangencijalno na kućište, a posljedica su okretnog elektromagnetskog momenta. U analizi su korištene analitičke, energijske metode. Varirani su geometrijski parametri statora kao što su: polumjer statora R , duljina nosača statora a i kut α koji definira mjesto pričvršćenja nosača statora na kućište. Kut α u gradnji generatora kreće se u granicama od 90° do 150° , dok parametar a/R poprima vrijednosti od 0 do 0,5. Izvedene su geometrijske funkcije ovisne o tim parametrima te su izračunate njihove vrijednosti i dijagramski su prikazane. U zaključku rada bit će dan kritički osvrt na dobivene rezultate.

Ključne riječi: Kućište statora hidrogeneratora, analiza unutarnjih sila i pomaka, opterećenje kućišta statora vlastitom težinom

1 UVOD

Konstrukcija kućišta statora velikih hidrogeneratora je složena i zahtjevna s puno specifičnih konstrukcijskih detalja. Poznavanje tih detalja zahtjeva veliko znanje i iskustvo konstruktora hidrogeneratora. U radu je težište na horizontalnoj izvedbi hidrogeneratora promjera većih od 3 metra, jer je kod njih utjecaj vlastite težine statora na pomake i naprezanja značajan. Na slici 1a prikazano je kućište statora hidrogeneratora velikog promjera s uloženim statorskim namotom, [8]. Kućište statora izvodi se s uzdužnim letvama (rebrima, štapovima) i kružnim (cirkularnim) rebrima kako je to prikazano na slici 1b. Takvom konstrukcijom postiže se velika krutost kućišta, što se i zahtjeva u eksploataciji. Takvo konstrukcijsko rješenje predstavlja ortotropnu izvedbu. U radu se detaljno razmatra utjecaj vlastite težine kućišta statora zajedno sa statorskim paketom i statorskim namotom na veličinu unutarnjih sila i pomaka kućišta.

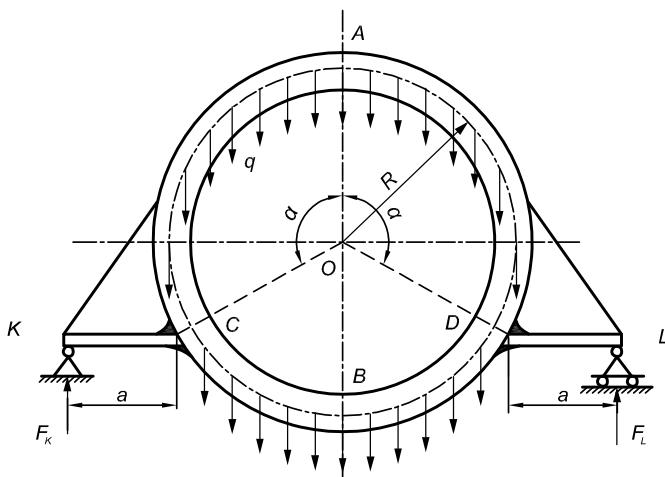


Sl. 1. a) Kućište statora hidrogeneratora, b) ortotropna izvedba kućišta statora s uloženim statorskim paketom i statorskim namotom

2 KUĆIŠTE STATORA HIDROGENERATORA OPTEREĆENO VLASTITOM TEŽINOM

2.1 Modeliranje vlastite težine kućišta statora kao jednoliko raspodijeljenog kontinuiranog opterećenja

Problem opterećenja vlastitom težinom susreće se kod proračuna čvrstoće i krutosti kućišta statora električnih rotacijskih strojeva poput hidrogeneratora i turbogeneratora, ali i kod velikih elektromotora. U ovome radu razmatra se kućište statora horizontalnog hidrogeneratora opterećeno vlastitom težinom. Stator hidrogeneratora shematizira se kao tanki kružni prsten težine F_G s polumjerom centralne osi R , oslonjen na dva radikalna ležaja. Prsten je kruto vezan s dvije fleksijski podatljive konzole u točkama C i D preko kojih se ležajevima oslanja na temelje.



Sl. 2. Tanki kružni prsten opterećen vlastitom težinom kao model kućišta statora horizontalnog hidrogeneratora

Duljina svake od konzola je a , a zavarom su vezane za prsten pod kutem α prema vertikali, slika 2. Budući da je konstrukcija opterećena samo u vertikalnom smjeru, oslonci preuzimaju na sebe vertikalne komponente opterećenja, dok su horizontalne komponente reakcija veza i momenti savijanja u osloncima jednaki nuli. Težina F_G jednoliko je raspodijeljena po cijelom opsegu prstena. Vertikalno kontinuirano opterećenje iznosi $q = F_G / 2\pi R$, [N/m].

2.2 Simetrična konstrukcija kućišta statora simetrično opterećena

Konstrukcija kućišta statora horizontalnog hidrogeneratora simetrična je s obzirom na vertikalnu os $A-B$ i simetrično je oslonjena i učvršćena te je također i simetrično opterećena. Ako je konstrukcija simetrična i simetrično opterećena, dovoljno je promatrati samo polovicu konstrukcije, prema slici 3a, čime se olakšava proračun, budući da se primjenom uvjeta simetrije smanjuje statička neodređenost konstrukcije. Kod simetričnih konstrukcija simetrično opterećenih, antimetrične veličine u presjecima simetrije jednake su nuli. Budući da potječu od simetrične komponente naprezanja σ , u presjecima simetrije A i B postoje uzdužne sile N_A i N_B te momenti savijanja M_A i M_B . Poprečne sile Q_A i Q_B jednake su nuli, jer potječu od antimetrične komponente naprezanja τ . Postavljanjem uvjeta statičke ravnoteže ($\sum F_x = 0 \Rightarrow N_B = N_A$ i $\sum M_A = 0$) za lijevu polovicu kućišta statora dobivamo jednadžbu ravnoteže u obliku

$$M_A + \int_0^\pi qR \cdot R \sin \varphi \cdot d\varphi - F_K \cdot [a + R \cdot \sin(\pi - \alpha)] + M_B + N_B \cdot 2R = 0. \quad (1)$$

Nakon integriranja i sredivanja, jednadžba poprima oblik

$$M_A + M_B + N_B \cdot 2R + 2qR^2 - qR\pi \cdot (a + R \cdot \sin \alpha) = 0. \quad (2)$$

Imamo dvije jednadžbe statičke ravnoteže s četiri nepoznanice: N_A , N_B , M_A i M_B . Problem je dva puta statički neodređen *iznutra*. Zato je potrebno postaviti još dvije dopunske jednadžbe primjenom *teorema o minimumu energije deformiranja*. Ako se za prekobrojne sile odaberu moment savijanja M_A i uzdužna sila N_A u presjeku A , onda se primjenom teorema o minimumu energije deformiranja može pisati da je $\partial U / \partial M_A = 0$ i $\partial U / \partial N_A = 0$. Iz tih se uvjeta dobiju još dvije dopunske jednadžbe koje zajedno s jednadžbama statičke ravnoteže čine sustav od četiri jednadžbe s četiri nepoznanice. Rješenjem sustava jednadžbi određuju se nepoznate unutarnje sile u presjecima A i B kućišta statora. Energija deformiranja od savijanja označena je s U .

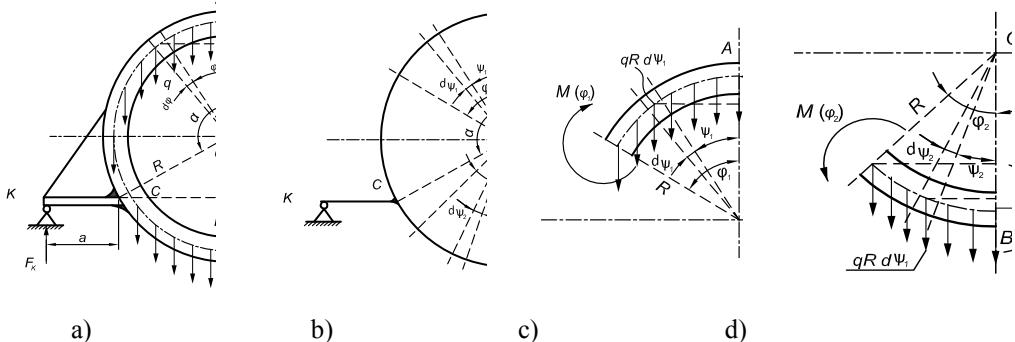
2.3 Definicija momenata savijanja i energija deformiranja od savijanja

Momenti savijanja u pojedinim presjecima po konturi kućišta statora od točke A do točke B definirani su slikom 3c i d. Kako je kućište statora kruto vezano za nosač u točki C , postoje dva područja integracije: prvo od točke A do točke C i drugo od točke B do točke C . Moment savijanja $M(\varphi_i)$ na presjeku pod kutom φ_i , prema slici 3c, određuje se iz sume momenata za promatrani dio prstena s obzirom na težište presjeka. Tako se dobije

$$M(\varphi_1) = M_A + N_A \cdot (R - R \cos \varphi_1) - \int_0^{\varphi_1} qR \cdot (R \sin \varphi_1 - R \sin \psi_1) \cdot d\psi_1, \quad (3)$$

te nakon integriranja i sređivanja slijedi analitički izraz za moment savijanja $M(\varphi_1)$

$$M(\varphi_1) = M_A + N_A R \cdot (1 - \cos \varphi_1) - qR^2 \cdot (\varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 - 1). \quad (4)$$



Sl.3. a) Konstrukcija kućišta statora horizontalnog hidrogeneratora simetrična je i simetrično oslonjena te je istovremeno i simetrično opterećena, b) geometrija kućišta statora i definicija varijabli potrebnih za određivanje momenata savijanja, c) i d) element kružnog prstena s pripadajućim opterećenjem i unutarnjim silama

Moment savijanja $M(\varphi_2)$ na presjeku definiranom kutom φ_2 , prema slici 3d, određuje se iz sume momenata oko težišta presjeka te iznosi

$$M(\varphi_2) = -M_B - N_B \cdot (R - R \cos \varphi_2) + \int_0^{\varphi_2} qR \cdot (R \sin \varphi_2 - R \sin \psi_2) \cdot d\psi_2. \quad (5)$$

Integriranjem izraza (5) dobije se analitički izraz za računanje momenta $M(\varphi_2)$.

Ako se iz jednadžbi ravnoteže izraze unutarnje sile N_B i M_B preko unutarnjih sila N_A i M_A izraz za moment savijanja $M(\varphi_2)$ će glasiti

$$\begin{aligned} M(\varphi_2) &= M_A + N_A \cdot 2R + 2qR^2 - qR\pi \cdot (a + R \cdot \sin \alpha) \\ &\quad - N_A R \cdot (1 - \cos \varphi_2) + qR^2 \cdot (\varphi_2 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 - 1). \end{aligned} \quad (6)$$

Uvrštavajući analitičke izraze za momente savijanja $M(\varphi_1)$ i $M(\varphi_2)$ (4) i (6) zajedno s pripadajućim parcijalnim derivacijama u teorem o minimumu energije deformiranja dobiju se dvije dopunske jednadžbe za određivanje nepoznatih unutarnjih sila u presjeku A

$$M_A + N_A R + qR^2 \cdot \left[1 - \frac{2}{\pi} \cdot \alpha - \frac{a}{R} \cdot (\pi - \alpha) - (\pi - \alpha) \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \right] = 0 \quad (7)$$

$$M_A + \frac{3}{2} N_A R + qR^2 \cdot \left\{ \frac{3}{2} - \left(\frac{a}{R} + \sin \alpha \right) \cdot [(\pi - \alpha) + \sin \alpha] + \cos \alpha - \frac{1}{4} \cos 2\alpha \right\} = 0 \quad . \quad (8)$$

Jednadžbe (7) i (8) čine sustav od dvije algebarske jednadžbe s dvije nepoznanice M_A i N_A . Rješavanjem tog sustava jednadžbi mogu se odrediti nepoznate veličine M_A i N_A .

$$N_A = qR \cdot \left(\sin^2 \alpha + 2 \cdot \frac{a}{R} \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \right), \quad (9)$$

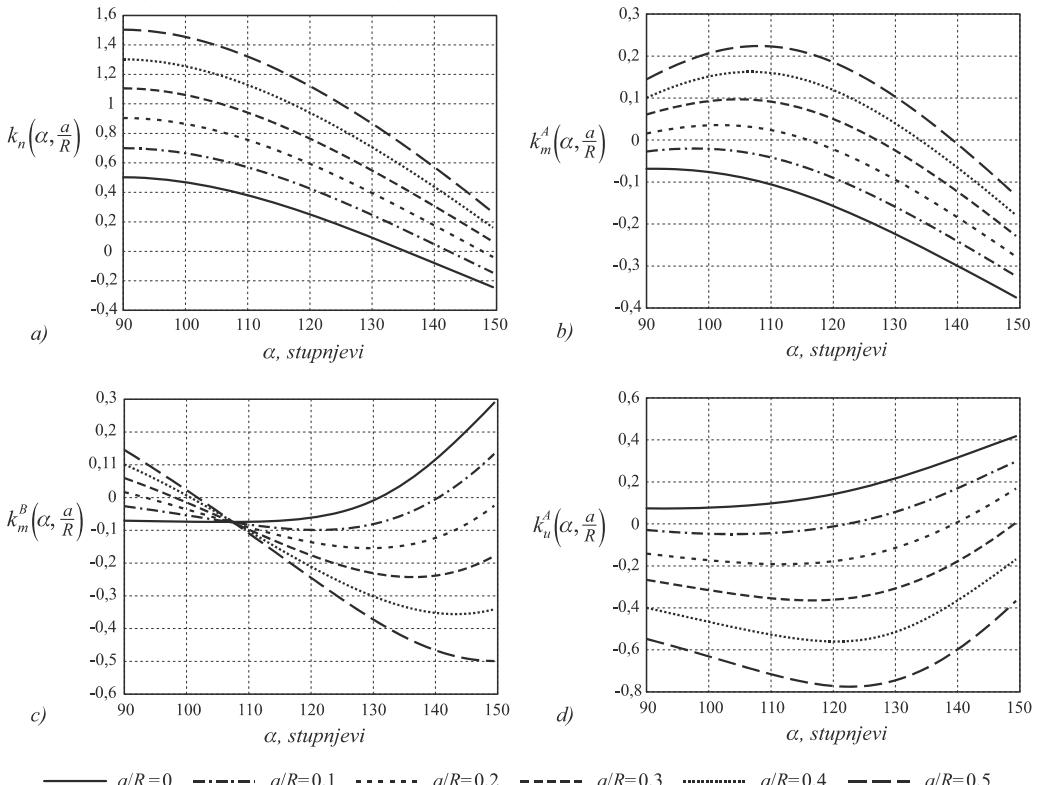
$$M_A = -qR^2 \cdot \left[\left(\sin^2 \alpha + 2 \frac{a}{R} \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \right) - (\pi - \alpha) \cdot \left(\frac{a}{R} + \sin \alpha \right) + 1 + \cos \alpha \right]. \quad (10)$$

Moment savijanja u presjeku B , M_B , izračuna se iz jednadžbe ravnoteže te iznosi

$$M_B = -qR^2 \cdot \left[\left(\sin^2 \alpha + 2 \frac{a}{R} \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \right) - \alpha \cdot \left(\frac{a}{R} + \sin \alpha \right) + 1 - \cos \alpha \right]. \quad (11)$$

2.4 Pomoćne funkcije za određivanje unutarnjih sile i pomaka u presjecima A i B

Analitički izrazi (9) do (11) dosta su složeni. Unutarnje sile ovise o opterećenju prstena q i geometrijskim parametrima kućišta statora: kutu α i omjeru a/R . Izračunavanje unutarnjih sile može se pojednostaviti uvođenjem pomoćnih funkcija $k_n(\alpha, a/R)$, $k_m^A(\alpha, a/R)$ i $k_m^B(\alpha, a/R)$.



Sl. 4. Pomoćne funkcije za određivanje uzdužnih sile, momenata savijanja te pomaka u presjecima A i B

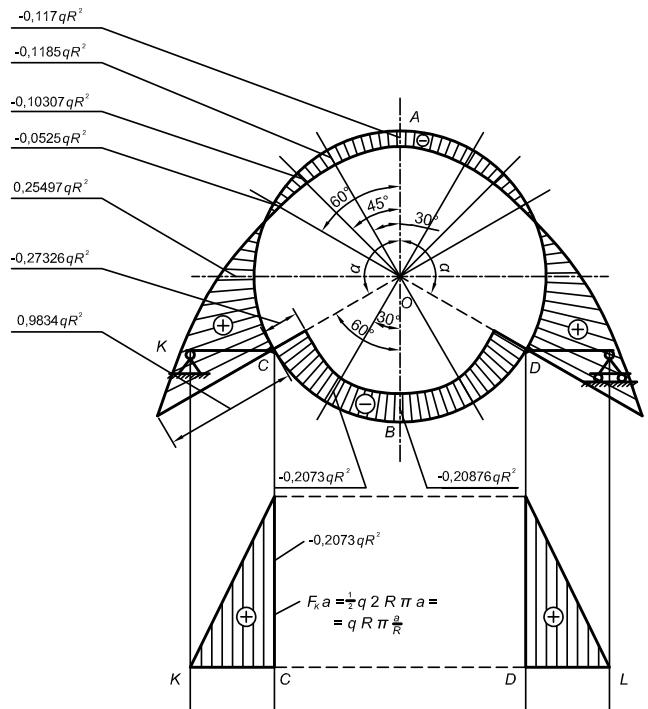
Uvođenjem pomoćnih funkcija složeni izrazi za unutarnje sile (9) do (11) mogu se jednostavno zapisati na način da je

$$N_A = k_n(\alpha, a/R) \cdot qR, \quad M_A = -k_m^A(\alpha, a/R) \cdot qR^2 \quad \text{i} \quad M_B = -k_m^B(\alpha, a/R) \cdot qR^2. \quad (12)$$

Uspoređujući izraz (12) s izrazima (9), (10) i (11) dobiju se vrijednosti pomoćnih funkcija za računanje unutarnjih sila. Te funkcije su ovisne o geometrijskim parametrima kućišta statora α i a/R . Kut α se u konstrukciji horizontalnih hidrogeneratora kreće u granicama od 90° do 150° , dok omjer parametara a/R poprima vrijednosti 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 i 0,5. Vrijednosti pomoćnih funkcija izračunate su za navedene vrijednosti parametara te su prikazane dijagramski na slici 4a, b i c.

2.5 Dijagram momenata savijanja u kućištu statora od vlastite težine

Pomoću izraza (4), (6), (9) i (10) mogu se izračunati vrijednosti momenata savijanja po konturi kućišta statora hidrogeneratora koje je simetrično opterećeno i učvršćeno, prema slici 2. Kako se vidi sa slike 5, dijagram je simetričan s obzirom na os simetrije A-B. Ekstremne vrijednosti momenata savijanja pojavljuju se u presjecima C i D u kojima su nosači kućišta statora vezani za sam stator. Veličina momenata savijanja ovisi o opterećenju kućišta statora q te o geometrijskim parametrima statora a/R i α . Dijagram je nacrtan za vrijednosti geometrijskih parametara $a/R = 0,4$ i $\alpha = 120^\circ$. Dobiveni rezultati izvrsno se podudaraju s rezultatima dostupnim u literaturi [8].



Sl. 5. Dijagram momenata savijanja kućišta statora hidrogeneratora opterećenog vlastitom težinom

3 ANALIZA POMAKA KUĆIŠTA STATORA HIDROGENERATORA

Posebno je zanimljivo analizirati pomake nekih karakterističnih točaka, kao što su točke A , B i C čiji je položaj definiran slikom 5. Budući da je moment savijanja u presjeku A negativan, ona se pomiče vertikalno prema dolje pa se na tom mjestu smanjuje zračni raspor između rotora i statora. Kako je moment savijanja i u točki B negativan, i ona se pomiče vertikalno prema dolje, ali se na tom mjestu povećava zračni raspor između rotora i statora, suprotno nego u presjeku A . Promjena promjera tankog prstena može se izraziti kao razlika pomaka točaka A i B . Da bi se odredio vertikalni pomak točke A na prstenu potrebno je u točki A dodati fiktivnu silu veličine $2F_A$ u smjeru prema dolje. Kako je konstrukcija i dalje simetrična i simetrično opterećena s obzirom na vertikalnu os $A-B$, opet je dovoljno promatrati samo jednu polovicu prstena, primjerice lijevu. Ako se promatra samo polovica konstrukcije, tada na nju u presjeku A djeluje fiktivna sile veličine F_A . Dodavanjem fiktivne sile promijenila se reakcija u osloncu K te sada iznosi $F_K = (1/2) \cdot F_G + F_A$. Vertikalni pomak točke A na kućištu statora u_{pA} određuje se pomoću *drugoga Castigljanova teorema* $u_{pA} = \partial U / \partial F_A$, gdje U označava energiju deformiranja akumuliranu u lijevoj polovici prstena. Ako se uzme u obzir samo energija deformiranja od savijanja, može se općenito pisati

$$u_{pA} = \frac{\partial U}{\partial F_A} = \int_s \frac{M(\varphi)}{EI_y} \cdot \frac{\partial M(\varphi)}{\partial F_A} \cdot R \cdot d\varphi. \quad (13)$$

Sada je potrebno izračunati nove vrijednosti momenata savijanja u pojedinim presjecima jer je opterećenju dodana sila F_A . Momenti savijanja sada se računaju prema novim izrazima koji glase

$$M(\varphi_1) = M_A + N_A R \cdot (1 - \cos \varphi_1) - qR^2 \cdot (\varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 - 1) - F_A \cdot R \cdot \sin \varphi_1, \quad (14)$$

$$M(\varphi_2) = M(\varphi_1) - F_K \cdot [a + R \cdot \sin(\pi - \alpha) - R \cdot \sin \varphi_2], \quad (15)$$

odnosno

$$\begin{aligned} M(\varphi_2) &= M_A + N_A R \cdot (1 - \cos \varphi_1) - qR^2 \cdot (\varphi_1 \cdot \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 - 1) \\ &\quad - F_A \cdot R \cdot \sin \varphi_1 - F_K \cdot (a + R \cdot \sin \alpha - R \cdot \sin \varphi_1) \end{aligned} \quad (16)$$

gdje se φ_1 kreće od α u točki C do π u točki B . Pri određivanju iznosa momenta savijanja $M(\varphi_2)$ korišteni su sljedeći trigonometrijski identiteti

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \pi, \quad \varphi_2 = \pi - \varphi_1, \quad \sin \varphi_2 = \sin(\pi - \varphi_1). \quad (17)$$

Ako se vrijednosti momenata savijanja, izraženi jednadžbama (14) i (16), zajedno s pripadajućim parcijalnim derivacijama uvrste u jednadžbu (13) dobiva se sljedeći analitički izraz za vertikalni pomak točke A u ovisnosti o geometrijskim parametrima kućišta statora a/R i α

$$\begin{aligned}
u_{pA} = & \frac{qR^4}{EI_y} \cdot \left\{ \left[-(\pi - \alpha) \cdot \left(\frac{a}{R} + \sin \alpha \right) + 1 + \cos \alpha \right] \cdot \left[1 - \cos \alpha + \alpha \cdot \left(\frac{a}{R} + \sin \alpha \right) \right] + \right. \\
& + \left(\sin^2 \alpha + 2 \cdot \frac{a}{R} \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} \right) \cdot \sin \alpha \cdot \left(\frac{a}{R} + \frac{3}{2} \cdot \sin \alpha \right) + \frac{1}{4} \alpha \cdot [\alpha - 3 \cdot \sin 2\alpha - \\
& \left. - 4 \sin \alpha - 4 \cdot \frac{a}{R} \cdot (1 + \cos \alpha)] \right\} + \left(\cos \alpha - 1 + 2 \cdot \frac{a}{R} \cdot \sin \alpha + \frac{11}{4} \cdot \sin^2 \alpha \right) \}
\end{aligned} \tag{18}$$

Izraz je izuzetno složen i vrlo nepraktičan za izračunavanje konkretnih brojčanih vrijednosti variranjem geometrijskih parametara a/R i α . Moguće ga je jednostavnije zapisati uvođenjem nove geometrijske funkcije te time olakšati računanje vertikalnog pomaka. Tako se izraz (18) dade zapisati na sljedeći način

$$u_{pA} = k_u^A(\alpha, a/R) \cdot qR^4/EI_y. \tag{19}$$

Uspoređujući izraze (18) i (19) lako se uoči kako je definirana pomoćna funkcija $k_u^A(\alpha, a/R)$. Vrijednosti pomoćne funkcije izračunate su za gore navedene vrijednosti geometrijskih parametara te su prikazane u obliku dijagrama na slici 4d.

4 ZAKLJUČAK

U radu su razmatrani problemi čvrstoće i krutosti kućišta statora horizontalnog hidrogeneratora. Analiziran je utjecaj vlastite težine kućišta statora na unutarnje sile i pomake. Analize su provedene analitičkim, energijskim metodama. Analizom dijagrama momenata savijanja, prema slici 5, može se zaključiti da su opasni presjeci na kućištu na spoju nosača i kućišta statora (presjeci C i D) te da bi na tim mjestima najprije moglo doći do loma kućišta. U analizi su varirani geometrijski parametri statora: kut α i veličina a/R . Izračunate su vrijednosti pomoćnih funkcija koje su prikazane dijagramske tako da su složeni analitički izrazi prilagođeni za brzu, efikasnu i jednostavnu primjenu. Pomoću njih se brzo, točno i pouzdano može odrediti moment savijanja, uzdužna sila i pomak (progib) bilo kojeg proizvoljnog presjeka na kućištu statora.

Znatan dio rada posvećen je određivanju pomaka pojedinih karakterističnih točaka kućišta statora. Analiza pomaka od posebne je važnosti za eksploraciju električnih rotacijskih strojeva. Progib kućišta statora na nekom mjestu utječe na promjenu veličine zračnog raspora između rotora i statora. To opet dovodi do promjene sila magnetskog privlačenja između statora i rotora. Veća sila magnetskog privlačenja može izazvati veće savijanje rotora u ležajevima i utjecati na veličinu fleksijskih vibracija rotora. Kod rotora većih promjera kao što su rotori hidrogeneratora veća sila magnetskog privlačenja, osim što izaziva veće savijanje osovine, može utjecati i na stabilnost gibanja rotora.

Literatura:

- [1] Bronštejn, I.N., Semendjajev, K.A., „Matematički priručnik“, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.

- [2] Detinko, F.M., Zagorodnaja, G.A., Fastovskij, V.M., „Pročnost i kolebanija električeskih mašin“, Energija, Leningrad, 1969.
- [3] Feodosjev, V.I., „Soprotivlenie materialov“, Nauka, Glavnaja redakcija fiziko – matematičeskoj literaturi, Moskva, 1974.
- [4] Kožešnik, J., „The Mechanics of Electrical Rotating Machines“, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1965.
- [5] Ponomarev, S.D., Biderman, V.L., Liharev, K.K., Makušin, V.M., Malinin, N.N., Feodosjev, V.I., „Rasčeti na pročnost v mašinostroenii“, tom I., 1956; II., 1958; III., Mašgiz, Moskva, 1959.
- [6] Pustaić, D., Tonković, Z., Wolf, H., „Mehanika deformabilnih tijela“, I. dio: „Mehanika konstrukcija“, II. dio: „Čvrstoča elemenata konstrukcija“. Udžbenik je recenziran. Na sjednici Senata Sveučilišta u Zagrebu u ožujku 2012. godine dobio je status sveučilišnog udžbenika. U tisku. Zagreb, 2013.
- [7] Pustaić, M., „Analiza naprezanja i pomaka u statoru horizontalnog hidrogeneratora“, Završni rad preddiplomskog studija (mentor: prof. dr. sc. Hinko Wolf), Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2011.
- [8] Wiedemann, E., Kellenberger, W., „Konstruktion elektrischer Maschinen“, Springer - Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.

Autori:

Maja Pustaić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, 10000 Zagreb, Ivana Lučića 5, tel. (098) 93 87 255, e-mail: maja.pustaic@gmail.com

Hinko Wolf, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, 10000 Zagreb, Ivana Lučića 5, tel. (1) 61 68 168, e-mail: hinko.wolf@fsb.hr

Dragan Pustaić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, 10000 Zagreb, Ivana Lučića 5, tel. (1) 61 68 178, e-mail: dragan.pustaic@fsb.hr

TRANSMISIJA ZVUKA KROZ PERIODIČKI OSLONJEN PANEL

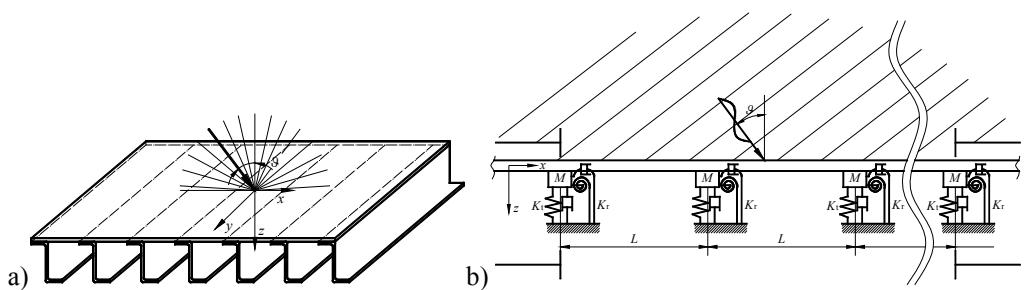
Skoblar, A., Žigulić, R., Braut S. & Štimac, G.

Sažetak: Transmisija zvuka kroz periodički oslonjen panel pri djelovanju difuznog akustičkog polja izračunata je pomoću metode virtualnog rada uz definiranje gibanja panela s redom prostornih harmonijskih valova i radijacije zvuka s Rayleigh-ovim integralom. Navedena metoda prostornih harmonijskih valova uključuje beskonačnost modela pa se primjenila i metoda prostornog isječka s ciljem analize modela konačnih dimenzija. Istovjetni problem izračunat je i pomoću metode konačnih elemenata koristeći računalne programe Femap i Actran te je izvršena usporedba rezultata. Za primjer je odabran jednosmjerno periodički oslonjen panel konačnih dimenzija kome je visina jednog perioda panela minimalno 3 puta veća od njegove širine, tj. udaljenosti između oslonaca, jer se isti može modelirati kao periodički oslonjena greda ukoliko na njega djeluje akustičko polje čiji su vektori intenziteta u poprečnoj ravnini na panel.

Ključne riječi: transmisija zvuka, pravokutan panel, periodički oslonci

1 UVOD

Izračun transmisije zvuka kroz panel uključuje izračun novonastalog gibanja panela i akustičkih polja s obje strane panela. Na slici 1 prikazan je princip primjenjenih metoda po kojem se konačni jednosmjerno periodički oslonjen panel modelira kao beskonačna greda [3,5] kad je visina jednog perioda panela po y -osi minimalno 3 puta veća od njegove širine po x -osi, tj. udaljenosti između oslonaca, sl. 1a, i ukoliko na panel djeluje akustičko polje čiji su vektori intenziteta akustičkog polja u ravnini okomitoj na panel i linije oslonaca [1], sl. 1a i 1b, jer je u tom slučaju gibanje panela u presjecima paralelnim xy ravnini slično gibanju beskonačne periodički oslonjene grede. Primjena beskonačnog modela na panel uzrokuje primjenu istog i na okolno akustičko polje uz uvjet jednakosti površine na koju djeluje akustičko polje s površinom zadanih panela [4,6].



Sl. 1. Transformacija konačnog panela u beskonačnu gredu

2 OPIS METODA IZRAČUNA

Gibanje beskonačne grede definira se pomoću metode prostornih harmonijskih valova (eng. space-harmonic) [5] po kojoj se ukupno gibanje sastoji od reda prostornih harmonijskih fleksijskih valova koji putuju gredom u + i - smjeru osi x što slijedi iz postojanja refleksija od oslonaca. U takvom modelu gibanje u susjednim periodima je povezano pa se model svodi na procjenu gibanja jednog perioda grede i veze između gibanja susjednih perioda.

Zvučni transmisijski gubici za panel konačnih dimenzija izračunati su pomoću metode prostornog isječka (eng. spatial windowing) [4,6] s kojom se procjenjuje koeficijent transmisije zvučne snage iz isječenog dijela prisilnog akustičkog polja i beskonačne grede, sl. 1b, dimenzija jednakih konačnom panelu. Veličina zvučnih transmisijskih gubitaka za difuzno akustičko polje izračunata je kao srednja vrijednost za upadne kutove θ ravninskog akustičkog polja od 0° do 90° .

2.1 Metoda virtualnog rada uz definiranje pomaka panela i potencijala brzine akustičkih valova s metodom prostornih harmonijskih valova

Ukupni virtualni rad na jednom periodu grede po principu virtualnog rada jednak je nuli

$$\delta W_p + \delta W_t + \delta W_r + \delta W_M = 0 ! ! ! ! ! \quad (1)$$

gdje su virtualni radovi redom δW_p - unutarnjih sila i momenata grede, δW_t - sile u poprečnoj opruzi, δW_r - momenta u fleksijskoj opruzi i δW_M inercijalne sile mase oslonca. Virtualni rad δW_p , kojeg vrše unutarnje sile i momenti u jednom periodu grede [3,5], definira se izrazom:

$$\delta W_p = \int_{x=0}^L \left(D \frac{d^4 w}{dx^4} - m_p \omega^2 w - j\omega \rho_0 (\Phi_1 - \Phi_2) \right) \delta w^* \quad (2)$$

u kojem prvi član, $D \frac{d^4 w}{dx^4}$, predstavlja virtualni rad poprečnih sila i momenata savijanja u presjeku grede na koordinati x , gdje je D fleksijska krutost grede a w poprečni pomak. Izraz je dobiven po Euler-Bernoulli-evoj teoriji po kojoj se pretpostavlja da poprečni presjeci grede ostaju ravni za vrijeme fleksijskih vibracija i da je polumjer zakrivljenosti savijene grede velik u odnosu na progib grede.

Zbog periodične prirode sustava očekuje se da će odziv sustava isto biti periodičan pa su poprečni pomaci grede definirani redom prostornih harmonijskih valova:

$$w(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-j[(\mu+2n\pi)/L]x} e^{j\omega t} \quad (3)$$

gdje je A_n amplituda n -tog prostornog harmonijskog vala, L udaljenost između oslonaca, ω kružna frekvencija prisilnog akustičkog vala i μ karakteristična propagacijska konstanta koja se definira izrazom

$$\frac{\mu}{L} = k_x(\omega) - j\psi(\omega) \quad (4)$$

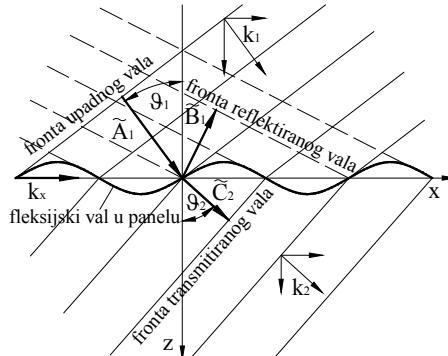
gdje je ψ koeficijent faznog prigušenja a k_x x -komponenta broja upadnog vala tj. broj fleksijskog vala u gredi (eng. trace val) s kojim prisilno akustičko polje "gura" panel. Pretpostavljena periodičnost odziva unešena je u rješenje tj. jednadžbu (3) sa sumom

po članu n pa je strukturni val definiran kao suma prostornih harmonijskih valova označenih s indeksom $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$, za naprijed i nazad usmjerene valove, koji predstavljaju refleksije od oslonaca.

Drugi član u izrazu (2), $m_p \omega^2 w$, definira inercijalnu silu diferencijalnog elementa grede pri njegovom poprečnom gibanju, gdje je m_p masa panela po jedinici duljine a treći član u izrazu (2), $j\omega\rho_0(\Phi_1 - \Phi_2)$, definira interakciju (eng. coupling) između panela i okolnog akustičkog polja [3], gdje je ρ_0 je gustoća zraka a Φ potencijal brzine čestice zraka. Potencijal brzine čestice zraka na strani grede u $-z$ smjeru $\Phi_1(x, y, t)$, sl. 2, definira se s izrazom

$$\Phi_1(x, z, t) = e^{-j((\mu/L)x + k_{z0}z - \omega t)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-j((\mu + 2n\pi)/L)x - k_{zn}z - \omega t)} \quad (5)$$

gdje je k_{z0} normalna komponenta broja upadnog vala a k_{zn} normalna komponenta broja n -tog reflektiranog vala, dok je B_n amplituda potencijala brzine n -tog reflektiranog vala. Prvi dio izraza (5) predstavlja potencijal brzine upadnog vala a drugi dio izraza potencijal brzine reflektiranog vala.



Sl. 2. Prikaz interakcije panela s okolnim fluidom za ravninske akustičke valove [1]

Potencijal brzine na strani grede u $+z$ smjeru, $\Phi_2(x, z, t)$ definira se izrazom

$$\Phi_2(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-j((\mu + 2n\pi)/L)x - k_{zn}z - \omega t)} \quad (6)$$

gdje je C_n amplituda potencijala brzine n -tog transmitiranog vala. Potencijali brzina upadnog i transmitiranog vala povezuju se s amplitudama vala u panelu uzimajući u obzir rubne uvjete normalnih brzina pa na koordinati $z=0$ vrijedi

$$-\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = j\omega w \quad (7)$$

Amplitude prostornih harmonijskih valova u gredi A_n izračunavaju se po principu virtualnog rada ukupnog sustava (1) dok amplitude potencijala brzine B_n i C_n slijede iz rubnih uvjeta (7)

2.2 Izračun zvučnog transmisijskog gubitka po metoda prostornog isječka

Zvučni transmisijski gubitak TL za zadani upadni kut izračunava se po izrazu

$$TL = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{\tau} \right) \quad (8)$$

gdje je τ koeficijent zvučnih transmisijskih gubitaka koji se za opisani beskonačni model izračunava iz izraza

$$\tau_b(\vartheta) = \frac{|I_t|}{|I_u|} \quad (9)$$

gdje je ϑ upadni kut ravninskog akustičkog vala, I_t transmitirani zvučni intenzitet normalan na gredu [6]

$$I_t = \frac{\omega \rho_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \operatorname{Re}[k_{zn}] \quad (10)$$

a I_u upadni zvučni intenzitet normalan na panel

$$I_u = \frac{\omega \rho_0 k_{z0}}{2}. \quad (11)$$

Koeficijent transmisije zvučne snage za konačni panel τ_k izračunava se po metodi prostornog isječka [6] iz koeficijenta transmisije zvučne snage za beskonačni panel τ_b po izrazu

$$\tau_k = \tau_b (\sigma_{ef} \cos \vartheta)^2. \quad (12)$$

gdje je σ_{ef} efikasnost radijacije koja se izračunava iz izraza

$$\sigma_{ef} = \frac{\Pi}{\rho_0 c a_D b_D \langle v^2 \rangle} \quad (13)$$

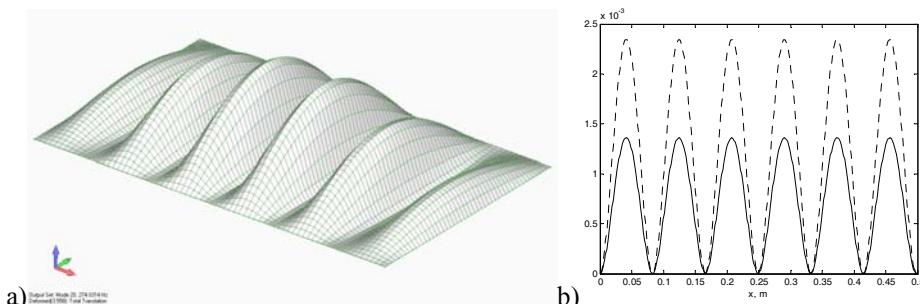
gdje je Π akustička snaga radijacije konačnog panela izračunata pomoću Rayleigh-ovog integrala [7], c je brzina zvuka u okolnom mediju, a_D i b_D su dimenzije panela a $\langle v^2 \rangle$ je usrednjena vibracijska brzina izračunata iz izraza

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{a_D b_D} \int_A |v|^2 dA \quad (14)$$

gdje su $|v|$ amplitudne vibracijske brzine u pojedinim točkama panela. Vibracijske brzine konačnog panela izračunate su, uz zanemarivanje pomaka po vanjskom rubu panela, sl. 3, po izrazu

$$v(x, y) = \frac{dw(x)}{dt} \sin\left(\frac{\pi x}{a_D}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b_D}\right). \quad (22)$$

gdje je $dw(x)/dt$ vibracijska brzina beskonačne grede na koordinati x .



Sl. 3. Prikaz modela konačnih elemenata panela i odgovarajućeg beskonačnog modela grede

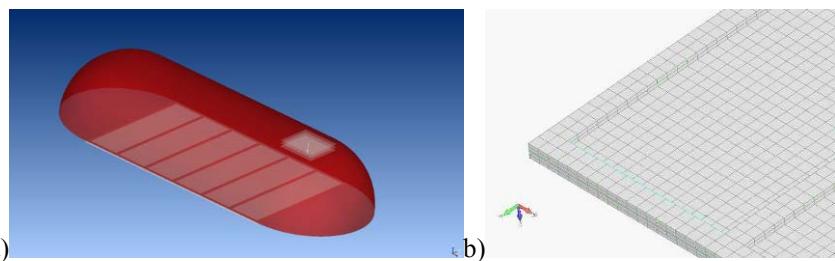
Zvučni transmisijski gubitak TL za difuzno zvučno polje izračunava se iz srednjeg koeficijenta transmisije zvučne snage $\bar{\tau}$ za difuzno polje iz koeficijenata transmisije zvučne snage za ravninska akustička polja s upadnim kutem od 0 do 90° [2] po izrazu

$$\bar{\tau} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau_k(\vartheta) \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta. \quad (16)$$

S opisanim metodama izračunat je zvučni transmisijski gubitak za primjer opisan u odlomku 3 dok je za usporedbu rezultata isti primjer riješen i s metodom konačnih elemenata.

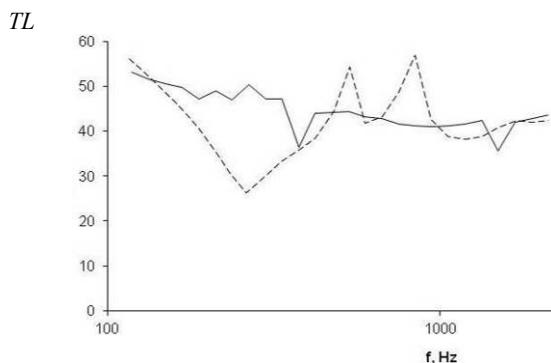
3 PRIMJER

Za primjer odabran je panel koji se sastoji iz pravokutne ploče dimenzija 489mm x 303mm x 0.5mm od mjedi ($E_{mjed} = 1,11 \cdot 10^{11}$ Pa, $\rho_{mjed} = 9090$ kg/m³ i $\nu_{mjed} = 0,37$) i elastičnih oslonaca od homogene gumirane zvuko-izolirajuće brtve pravokutnog poprečnog presjeka dimenzija 9mm x 3.2mm ($E_{osl} = 1,7 \cdot 10^5$ Pa, $\rho_{osl} = 46$ kg/m³ i $\nu_{osl} = 0,49$). Udaljenost između oslonaca je $L=83$ mm pa panel ima 6 perioda s 5 oslonaca na površini panela i oslonce na vanjskim rubovima panela, sl. 4.



Sl. 4. Prikaz a) modela konačnih elemenata panela i okolnog akustičkog polja i b) diskretizacije konačnih elemenata u području oko oslonaca

Odabir finoće mreže konačnih elemenata izvršen je na temelju najviše frekvencije izračuna (2000 Hz) te minimalno 6 elemenata po jednoj valnoj duljini fleksijskog vala u panelu. Uslijedila je provjera konvergencije rezultata s rastom broja konačnih elemenata te su na slici 5 prikazani rezultati.



Sl.9. Rezultati zvučnih transmisijskih gubitaka TL : a) metoda virtualnog rada i metoda prostornog isječka - - - - -, b) metoda konačnih elemenata, Actran 2D difuzno polje _____.

4 ZAKLJUČAK

Metoda prostornih harmonijskih valova povoljna je izračun zvučnih transmisijskih gubitaka periodički oslonjenih panela zbog niskih zahtjeva za kompjutersku analizu ali ona ima ograničenja u primjeni jer stvarne konstrukcije nisu nikad idealno periodične zbog čega se pojavljuju oscilacije rezultata što se pokušava umanjiti korištenjem usrednjениh veličina. Ograničenje u primjeni je i maksimalna valna duljina odziva panela koja, za postizanje odgovarajuće točnosti, mora biti manja od udaljenosti oslonaca što je za odabrani primjer ostvareno na frekvencijama iznad 1000Hz za koje se rezultati podudaraju s rezultatima metode konačnih elemenata.

Literatura:

- [1] Fahy, F., "Sound intensity, Elsevier Science Publishers LTD, England, 1989.
- [2] Ingard, U., "Notes on Acoustics", Infinity Science Press LLC, Hingham, Massachusetts, 2008.
- [3] Lee, J.-H., Kim, J., "Analysis of sound transmission through periodically stiffened panels by space-harmonic expansion method", Journal of Sound and Vibration, Vol.251, No.2., 2002., str. 349-366.
- [4] Legault, J., Mejdi, A., Atalla, N., "Vibro-acoustic response of orthogonally stiffened panels: The effects of finite dimensions", Journal of Sound and Vibration, Vol.330, 2011., str. 5928-5948.
- [5] Mead, D.J., Pujara, K.K., "Space-harmonic analysis of periodically supported beams: response to convected random loading", Journal of Sound and Vibration, Vol.14, No. 4., 1971., str. 525-541.
- [6] Villot, M., Guigou, C., Gagliardini, L., "Predicting the acoustical radiation of finite size multi-layered structures by applying spatial windowing of infinite structures", Journal of Sound and Vibration, Vol.245, No.3., 2001., str. 433-455.
- [7] Wallace, C.E., "Radiation Resistance of a Rectangular Panel", Journal of the Acoustical Society of America, Vol.51, No.3, Part 2, str. 946-952, 1970.

Autori:

Ante Skoblar, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Adresa: Vukovarska 58, 51000 Rijeka,

tel. 051/651-498, fax. 051/651-490 , e-mail: Ante.Skoblar@riteh.hr, web stranica:

http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/ante.htm

Roberto Žigulić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku,

Adresa: Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051/651-492, fax. 051/651-490 , e-mail: Roberto.Zigulic@riteh.hr, web stranica:

http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/roberto_eng.htm

Sanjin Braut, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku,

Adresa: Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051/651-502, fax. 051/651-490 , e-mail:

Sanjin.Braut@riteh.hr, web stranica:

http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/sanj.htm

Goranka Štimac, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku,

Adresa: Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051/651-498, fax. 051/651-490 , e-mail:

gstimac@riteh.hr, web stranica:

http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/goranka_eng.htm

NUMERIČKO I EKSPERIMENTALNO MODELIRANJE PROCESA DEFORMIRANJA POLIETILENA PE100

Skozrit, I., Tonković, Z., Bakić, A., Kodvanj, J.

Sažetak: Na temelju rezultata provedenih eksperimenata predložen je konstitutivni model za opisivanje mehanizma puzanja polietilena PE100. Izведен je numerički algoritam koji je implementiran u programski paket ABAQUS primjenom korisničke rutine CREEP. Točnost i učinkovitost izvedenog algoritma provjerena je usporedbom s dobivenim eksperimentalnim rezultatima, na primjeru osnosimetrične epruvete s potpunim obodnim zarezom pomoću koje je definiran konstitutivni model. Iz rezultata numeričkih analiza određivanja C^* -integrala za debele polietilenske cijevi s vanjskim polueliptičkim zarezom i primjenom dijagrama procjene loma iz literature određeno je vrijeme do loma cijevi s zarezom te su rezultati uspoređeni s dostupnim rješenjima iz literature.

Ključne riječi: polietilen PE100, eksperiment, metoda konačnih elemenata, C^* -integral

1 UVOD

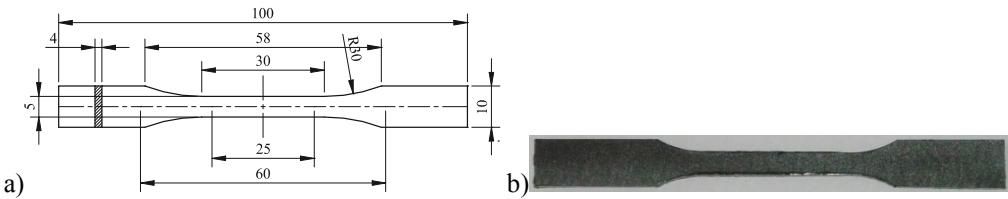
Procjena nosivosti konstrukcije s oštećenjem zaokuplja pozornost velikog broja istraživača jer postojanje oštećenja narušava njenu cjelovitost. Povećana primjena polimera, posebno polietilena PE100 kao konstrukcijskog materijala za cijevi za distribuciju vode i plina zahtijeva razvoj novih metoda za procjenu nosivosti komponenata izrađenih iz ovih materijala [3]. Jednako kao i kod metala, za točniju procjenu parametara mehanike loma i opterećenja plastičnog kolapsa polimernih komponenata, potrebno je što točnije eksperimentalno istražiti te numerički modelirati realno ponašanje materijala.

U radu je dan prikaz numeričkog modeliranja i eksperimentalnog istraživanja koje je provedeno na polietilenu PE100. Numerički rezultati uspoređeni su s pripadnim eksperimentalnim na temelju čega je procijenjena točnost predloženih numeričkih algoritama. Na kraju rada dane su smjernice dalnjih istraživanja.

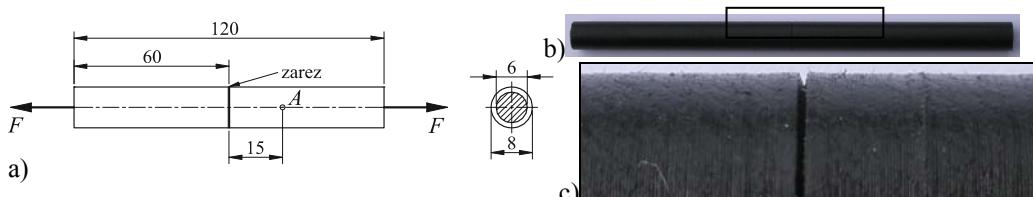
2 EKSPERIMENTALNO ISTRAŽIVANJE POLIETILENA PE100

Statički vlačni pokus. Za numeričko modeliranje elastoplastičnog ponašanja polietilena PE100 provedeni su statički vlačni pokusi na tri različite temperature s tri različite brzine deformiranja. Pokusi su provedeni na standardnoj epruveti tipa 1BA (slika 1a) prema normama za vlačno ispitivanje polimera [1], a epruveta pripremljena za ispitivanje prikazana je na slici 1b.

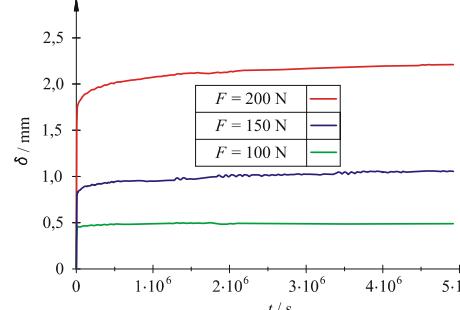
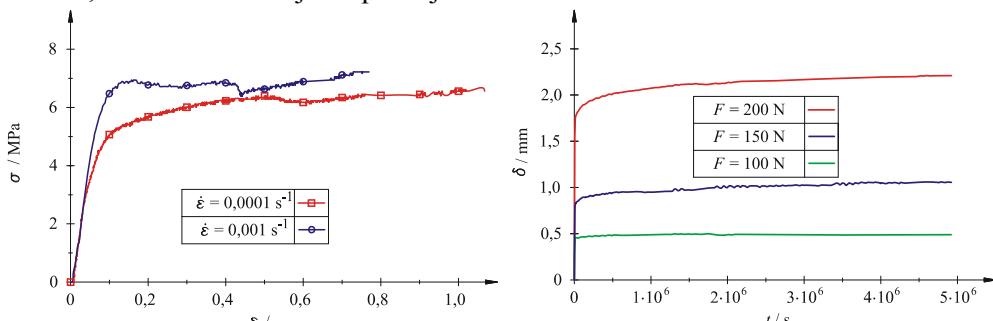
Na temelju provedenih eksperimenata dobiveno je nelinearno elastoplastično ponašanje PE100 u obliku krivulje konvencionalno naprezanje-deformacija, a dobiveni dijagrami pri 80°C prikazani su na slici 3.



Eksperiment puzanja. Za opisivanje ponašanja materijala u uvjetima konstantnog opterećenja provedeni su vremenski vrlo zahtjevni eksperimenti puzanja pri povišenim temperaturama. Pokusi su provedeni na vlačno opterećenoj osnosimetričnoj epruveti s potpunim obodnim zarezom, duljine 120 mm i promjera 8 mm, čija je geometrija prikazana na slici 2a). Na slici 2b) je prikazana cijela epruveta korištena u eksperimentu puzanja, a detalj zareza na epruveti je prikazan na slici 2c). Na sredini epruvete je napravljen zarez dubine 1 mm i polumjera vrha zareza od 92 µm.



Na temelju provedenih eksperimenata dobiven je dijagram ovisnosti ukupnog pomaka točke A (slika 2a) uslijed puzanja PE100 o vremenu puzanja. Na slici 4. prikazane su krivulje ukupni pomak-vrijeme puzanja dobivene za opterećenje epruvete od 100, 150 i 200 N i vrijeme puzanja od $t = 5 \cdot 10^6$ s.



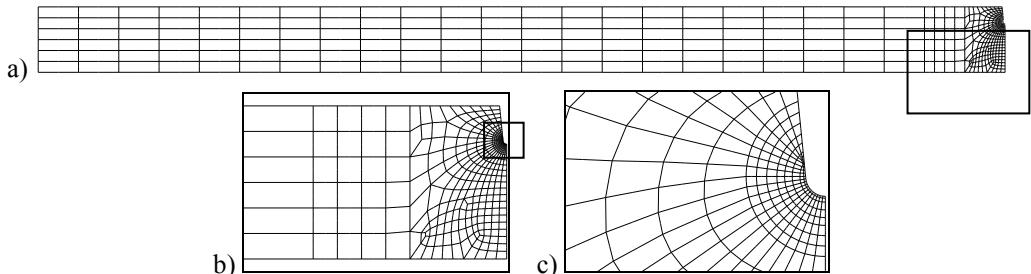
Na osnovi prikazanih eksperimentalnih rezultata, predložen je primarno-sekundarni zakon puzanja u obliku

$$\dot{\epsilon}_c = B_1 \cdot p \cdot t^{(p-1)} \cdot \sigma^{n_1} + B_2 \cdot \sigma^{n_2}, \quad (1)$$

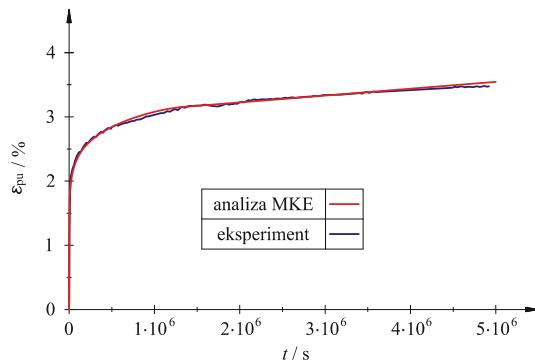
gdje su $\dot{\varepsilon}_c$ je brzina deformacije puzanja, σ je ekvivalentno von Misesovo naprezanje, a parametri materijala dobiveni aproksimacijom eksperimentalno dobivene krivulje su: $B_1 = 7,64 \cdot 10^{-6}$, $B_2 = 4,25 \cdot 10^{-12}$, $p = 0,1$, $n_1 = 5$ i $n_2 = 4$.

3 NUMERIČKO MODELIRANJE MEHANIZMA PUZANJA

Za izračunavanje C -integrala u ABAQUSu [3], za eksponencijalni zakon puzanja kojim je općenito moguće opisati proces puzanja većine metala, postoji ugrađena rutina. No za prikazani primarno-sekundarni zakon puzanja opisan jednadžbom (1), izračunavanje C -integrala zahtijeva primjenu korisničke rutine CREEP. Predloženi primarno-sekundarni zakon puzanja je zapisan u inkrementalnom obliku te je na razini materijalne točke integracije konačnih elemenata implementiran u formulaciju konačnih elemenata. Za verifikaciju prikazanog algoritma provedena je simulacija puzanja na epruveti s zarezom. Tipična mreža konačnih elemenata korištena u analizi prikazana je na slici 5a), dok je usitnjena mreža u zaobljenom vrhu zareza dana na slikama 5b) i c).



Sl. 5. Diskretizirani proračunski model za osnosimetričnu epruvetu s potpunim obodnim zarezom: a) cijela mreža, b) usitnjena mreža u vrhu zareza i c) detalj mreže oko vrha zareza



Sl. 6. Usporedba dijagrama međusobne ovisnosti deformacije puzanja točke A i vremena uslijed puzanja materijala pri 80°C i za $F = 200 \text{ N}$ dobivenog provedbom eksperimenta i numerički primjenom korisničke rutine CREEP u programskom paketu ABAQUS

Primjenom simetrije, modelirana je samo polovica epruvete. Za diskretizaciju epruvete korišten je osam-čvorni osnosimetrični konačni element s reduciranim integracijom (CAX8R). Pritom je epruveta najprije opterećena vlačnom silom do definiranog iznosa,

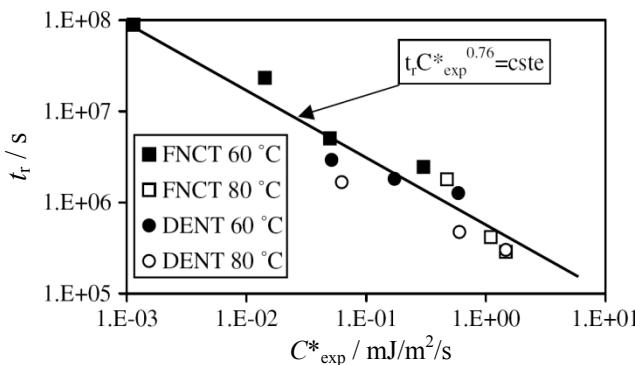
a nakon toga je opterećenje držano konstantnim te je mjerena deformacija uslijed puzanja materijala epruvete. Dijagram međusobne ovisnosti pomaka točke A uslijed puzanja materijala i vremena u usporedbi s eksperimentalnim rezultatima dan je na slici 6. Kao što je vidljivo sa slike dobiveno je vrlo dobro poklapanje numeričkih i eksperimentalnih rezultata.

4 ODREĐIVANJE VREMENA DO LOMA CIJEVI S ZAREZOM

Osnovna namjera numeričke analize cijevi od polietilena PE100 s vanjskim osnim zarezima za distribuciju vode ili plina je usporediti vrijeme do loma dobiveno eksperimentalno u [6] (tablica 1.). Pritom je za određivanje vremena do loma cijevi s vanjskim osnim zarezom korišten eksperimentalno dobiven dijagram procjene loma za polietilen srednje gustoće, slika 7., iz [3]. Dimenzije cijevi s pripadnim zarezima na kojima su provedeni eksperimenti [6] prikazane su u tablici 1. Dimenzije cijevi su definirane unutarnjim, R_i , i vanjskim, R_o , polumjerom, te debljinom stijenke cijevi, t . Dimenzije vanjskog osnog zareza su opisane s duljinom, $2c$, i dubinom zareza, a . Kao što je vidljivo sa slike 8., cijev je opterećena unutarnjim tlakom, p , a osnom silom, F , simulirano je opterećenje zatvorene cijevi. Za diskretizaciju proračunskog modela cijevi i zareza korišten je izoparametrijski konačni element s dvadeset čvorova i reduciranim integracijom (C3D20R). Zbog simetrije analizirana je samo jedna četvrtina cijevi. Diskretiziran proračunski model cijevi prikazan je na slici 9.

Tablica 1. Vrijeme do loma dobiveno eksperimentalno [6], $t_{r,eks}$ / h

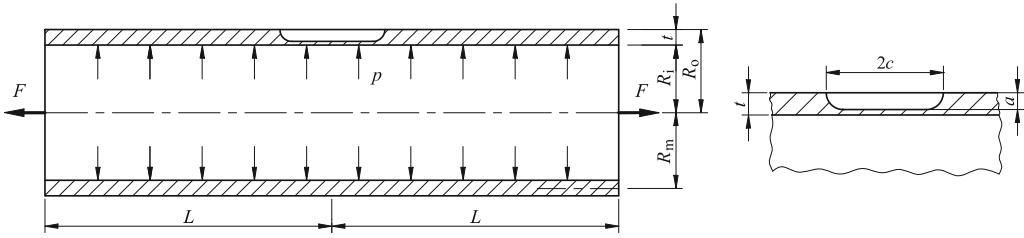
$2c$ / mm	16	50	50	100	150	150	184
a / mm	3	2	4	3	2	4	3
p / MPa	0,7	1,0	0,4	0,7	1,0	0,4	0,7
$t_{r,eks}$ / h	15386	274	8694	314	167	1169	165



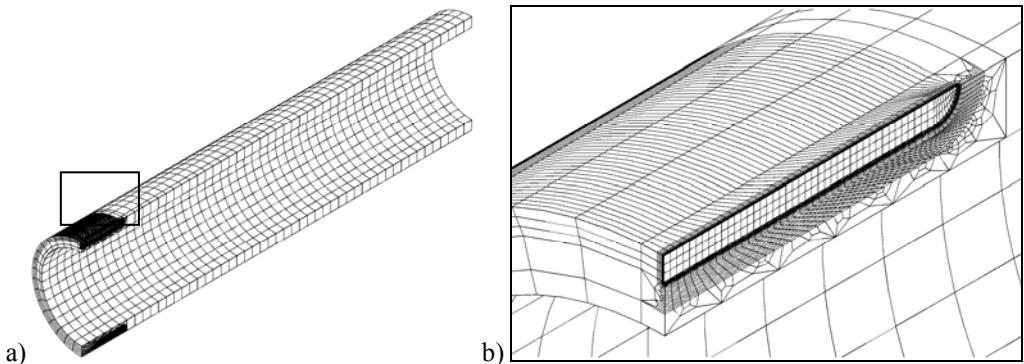
Sl. 7. Dijagram procjene loma za polietilen srednje gustoće [3]

Provedenim numeričkim analizama za svih sedam dimenzija cijevi i zareza dobivene su vrijednosti C^* -integrala koje su prikazane u tablici 2. Mada se ovdje radi o drugoj vrsti polietilena (PE100) za procjenu vijeka trajanja cijevi s zarezom primjenjen je eksperimentalno dobiven dijagram procjene loma za polietilen srednje gustoće (slika 7.) iz [3]. Na temelju numerički određenog C^* -integrala, iz dijagrama procjene loma očitano je vrijeme do loma cijevi, t_r . Dobivena vremena do loma za svih

sedam analiza prikazana su također u tablici 2. Radi jednostavnije usporedbe s eksperimentalnim rezultatima, vrijeme do loma prikazano je u satima. Razlika u vremenu do loma dobivenog eksperimentalno i numerički prikazana je u tablici 2.



Sl. 8. Dimenzijski i opterećenijski detalji cijevi s vanjskim osnim zarezom



Sl. 9. Diskretizirani proračunski model cijevi s vanjskim osnim zarezom: a) cijela cijev i b) mreža oko vrha zareza

Tablica 2. C^* -integral dobiven numerički, $C^*/\text{MPa mm s}^{-1}$

$2c / \text{mm}$	16	50	50	100	150	150	184
a / mm	3	2	4	3	2	4	3
p / MPa	0,7	1,0	0,4	0,7	1,0	0,4	0,7
$C^* / \text{MPa mm s}^{-1}$	4,87E-9	7,29E-7	1,12E-8	6,04E-7	1,31E-6	1,22E-7	9,86E-7
t_r / h	7950	201	4632	230	139	742	154
RAZLIKA / %	48	27	47	27	17	37	7

Iz tablice 2. vidljive su velike razlike između eksperimentalnih i numeričkih rezultata za vrijeme do loma cijevi. Postoji više razloga za dobivene razlike. Prvi razlog je što je za procjenu vremena do loma cijevi primijenjen dijagram za polietilen srednje gustoće (slika 7.), budući da za PE100 od kojeg su izrađene cijevi, u dostupnoj literaturi nema pripadnog dijagrama. Iako su to po značajkama slični materijali, primjenjeni dijagram procjene loma je u literaturi dobiven prije desetak godina, a svakodnevnim razvojem materijala, posebno polimera, došlo je do poboljšanja značajki PE100. Drugi razlog je što je u numeričkoj analizi primijenjen konstitutivni model dobiven na temelju relativno malo provedenih eksperimentalnih puzanja. Naime, u ovom radu provedeni su eksperimenti puzanja na samo pet epruveta s tri različite sile. Treći

razlog može biti relativno veliko rasipanje podataka kod eksperimentalnog određivanja vremena do loma, kako je to opisano u [6]. Svi navedeni razlozi ukazuju na potrebu provedbe dodatnih eksperimenata na epruvetama s zarezom od PE100 što je vremenski vrlo zahtjevan problem. Provođenje eksperimenata za određivanje parametara materijala konstitutivnog modela je potrebno provesti s još više različitih opterećenja epruveta što će omogućiti točnije opisivanje ponašanja materijala. Provedbom eksperimenta puzanja do loma epruveta dobit će se podaci o vremenu do loma za svaku epruvetu ovisno o opterećenju. Nakon toga, primjenom izraza iz literature bit će moguće izračunati eksperimentalne vrijednosti C^* -integrala. Na kraju, poznavajući vrijeme do loma i C^* -integral za svaku epruvetu bit će moguće konstruirati dijagram procjene loma za PE100. Ovo će omogućiti da se numeričko modeliranje još više približi realnom ponašanju cijevi s zarezom. Opisani postupci plan su dalnjeg istraživanja.

5 ZAKLJUČAK

U radu je dan prikaz istraživanja koja se vrše u cilju razvoja numeričkog algoritma za izračunavanje parametara mehanike loma i modeliranja mehanizama puzanja u polietilenu PE100 primjenom realnog materijalnog modela. Prikazan je konstitutivni model koji spreže mehanizme elastoplastičnosti i puzanja. Izведен je algoritam na razini točke integracije konačnog elementa za integriranje vremenski ovisnih konstitutivnih relacija koji je implementiran u programske pakete ABAQUS primjenom korisničke rutine CREEP. Usporedbom s eksperimentalnim rezultatima provjerena je točnost izведенog algoritma [4, 5]. Daljnja istraživanja usmjerena su na provedbu dodatnih eksperimenata te izvođenje nove metode za procjenu C -integrala za cijev s osnim zarezom opterećenu unutarnjim tlakom.

Literatura:

- [1] ABAQUS/Standard, Version 6.9, Dassault Systemes, 2010.
- [2] EN ISO 527-2:1993 Plastics -- Determination of tensile properties -- Part 2: Test conditions for moulding and extrusion plastics.
- [3] Hamouda, H.B.H., Laiarinandrasana, L., Piques, R., "Fracture mechanics global approach concepts applied to creep slow crack growth in a medium density polyethylene (MDPE)", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 74, 2007, str. 2187-2204.
- [4] Skozrit, I., Doktorski rad "Numeričko modeliranje pukotina u metalnim i polimernim materijalima", Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2011.
- [5] Skozrit, I., Tonković, Z., "On Numerical Analysis of Creep Fracture Behaviour of Medium Density Polyethylene", Key Engineer. Materials, Vol. 417-418, 2010, str. 233-236.
- [6] Z. Tonković, Doktorski rad: Procjena preostalog vremena uporabe oštećenih polietienskih plinovodnih cijevi, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Strojarski Fakultet u Slavonskom Brodu, Slavonski Brod, 2008.

Autori:

Ivica Skozrit; Zdenko Tonković; Ante Bakic; Janoš Kodvanj, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 6168 115; 450; 445; 425, fax. 01 616 8187, e-mail: ivica.skozrit@fsb.hr; ztonkov@fsb.hr; ante.bakic@fsb.hr; janos.kodvanj@fsb.hr, web stranica: www.fsb.hr/lnm/staff/

SEIZMIČKA ANALIZA KONSTRUKCIJE PROTIRONA U SPLITU

Smoljanović, H., Nikolić, Ž., Živaljić, N.

Sažetak: U ovom radu prikazana je primjena kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM) u simulaciji dinamičkog odgovora starih kamenih suho zidanih konstrukcija.

Kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata prikladna je za dinamičku analizu konstrukcija modeliranih s velikim brojem diskretnih elemenata. Svaki diskretni element modeliran je mrežom konačnih elemenata što omogućuje njegovu deformabilnost, dok se materijalna nelinearnost, pojava pukotina i fragmentacija odvija u kontaktnim elementima koji su implementirani između konačnih elemenata. Ovom metodom moguće je obuhvatiti pojave vezane za ponašanje suho zidanih konstrukcija uslijed dinamičkog djelovanja od linearne elastične faze pa do potpunog sloma.

Primjena metode prikazana je na primjeru inkrementalne dinamičke analize konstrukcije Protirona u Splitu na izvornoj konstrukciji bez metalnih klamfi i trnova. Konstrukcija je izložena horizontalnom ubrzanju podloge realnog potresa. Akcelerogram je najprije skaliran na vršno ubrzanje od 0.22g koje je karakteristično za Split, a potom je vršno ubrzanje postupno povećavano sve do potpunog sloma konstrukcije.

Ključne riječi: FEM/DEM, suho zidane kamene konstrukcije, seizmička analiza, dinamički odgovor

1 UVOD

U modeliranju zidanih konstrukcija tradicionalno se najčešće koristi metoda konačnih elemenata u sklopu koje se konstrukcija promatra kao homogeni ortotropni kontinuum [1,2] gdje je srednja veza između naprezanja i deformacija dobivena eksperimentalno ili tehnikama homogeniziranja. Nedostatak modeliranja zidanih konstrukcija pomoću kontinuuma je nemogućnost opisivanja pojave velikih diskontinuiteta u polju pomaka što je osobito izraženo u suho zidanim kamenim konstrukcijama. Jedan od načina rješavanja ovog nedostatka je uvođenje kontaktnih elemenata unutar mreže konačnih elemenata [3,4]. Ograničenost numeričkih modela baziranih na metodi konačnih elemenata i dalje je prisutna u analizi suho zidanih kamenih konstrukcija u kojima uslijed seizmičke pobude može biti izražen efekt mehaničke interakcije među kamenim blokovima.

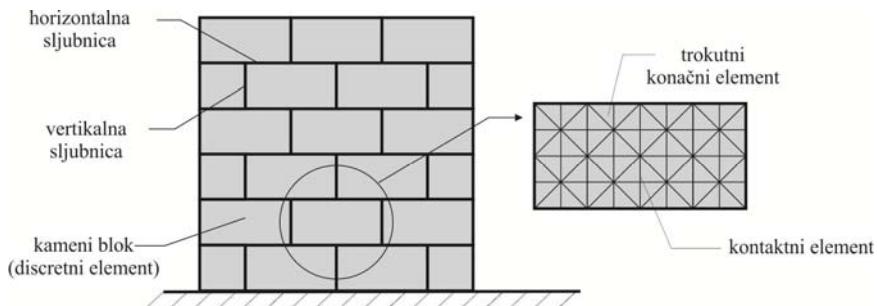
Za analizu problema u kojima je prisutna mehanička interakcija između više tijela koja mogu imati velike rotacije i pomake razvijeni su modeli bazirani na metodi diskretnih elemenata. Glavno obilježje metode diskretnih elemenata koje je omogućilo njezinu primjenu u analizi zidanih konstrukcija je prezentacija konstrukcije kao skupa diskretnih elemenata koji se mogu naći u međusobnoj interakciji i koji mogu, a i ne

moraju međusobno biti povezani kontaktnim elementima. Ovaj pristup omogućuje simuliranje kolapsa konstrukcije uslijed rotacije, klizanja te udarnog opterećenja. Nedostatak modela baziranih na metodi diskretnih elemenata je nemogućnost opisivanja stanja naprezanja i deformacije unutar diskretnih elemenata što je vrlo važno pri analizi pojave i razvoja pukotina.

U novije vrijeme postojalo je dosta pokušaja da se iskoriste prednosti metode konačnih i diskretnih elemenata [5,6]. Jedan od takvih pokušaja je i kombinirana metoda konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM) [7]. Ova metoda zasniva se na dinamičkoj analizi niza deformabilnih diskretnih elemenata koji se tijekom analize mogu naći u mehaničkoj interakciji pri čemu od jednog elementa može nastati više njih.

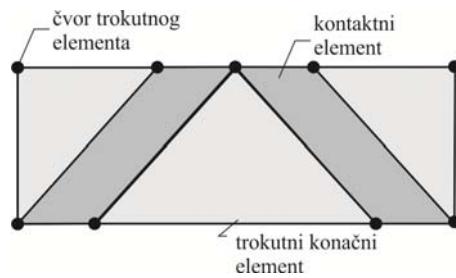
2 NUMERIČKI MODEL

Suho zidana kamena konstrukcija se u okviru kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata promatra kao skup diskretnih elemenata odnosno kamenih blokova. Svaki kameni blok diskretiziran je s vlastitom mrežom trokutnih konačnih elemenata između kojih su implementirani kontaktni elementi koji predstavljaju mjesta potencijalnih pukotina (Slika 1).



Sl. 1. Diskretizacija konstrukcije

Ponašanje materijala u konačnim elementima je linearno-elastično dok je materijalna nelinearnost koja se javlja nakon nastanka pukotina opisana kontaktnim elementima [8]. Pojava pukotine odnosno odvajanje rubova susjednih konačnih elemenata omogućeno je na način da su susjedni rubovi trokutnih konačnih elemenata opisani s različitim čvorovima kao što je prikazano na Slici 2.



Sl. 2. Konačni i kontaktni element

Kontaktne sile koje se javljaju između susjednih blokova uključujući i sile trenja zasnovane su na načelu potencijalnih kontaktnih sila [9].

3 NUMERIČKI PRIMJER

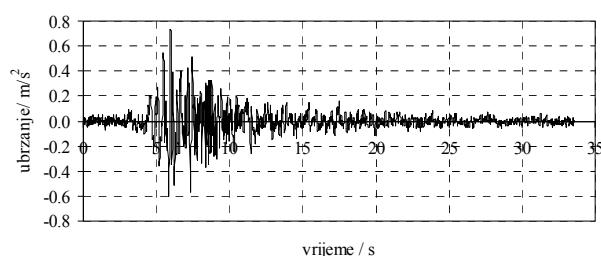
U sljedećem primjeru pokazana je primjena kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata u simulaciji dinamičkog odgovora konstrukcije Protirona u Splitu (Slika 3.) na seizmičko djelovanje.

Protiron je prostor koji je spajao, odnosno odvajao sjeverni dio Dioklecijanove palače koji je služio za sluge, vojsku itd. od južnog dijela gdje se nalazio carev stan. Protiron se nalazi s južne strane Peristila (trga ispred splitske katedrale Sv. Dujma) i s njega se car obraćao stanovnicima drugog dijela palače. Na ulazu u Protiron nalaze se četiri masivna stupa od crvenog granita na kojima stoje dorski kapiteli. Kapiteli nose široki zabat s lučnim nadvojem u sredini. Kapiteli su sa stupovima i naglavnom gredom povezani čeličnim trnovima. Kroz povijest, najvjerojatnije djelovanjem različitih potresa, došlo je do pomicanja kamenih blokova koji čine široki zabat, a također je došlo i do razmicanja središnjih stupova. Da bi se sprječilo daljnje pomicanje, za vrijeme Austro-Ugarske, kameni blokovi su povezani bakrenim klamfama.



Sl. 3. Ulaz u Protiron na Peristilu u Splitu

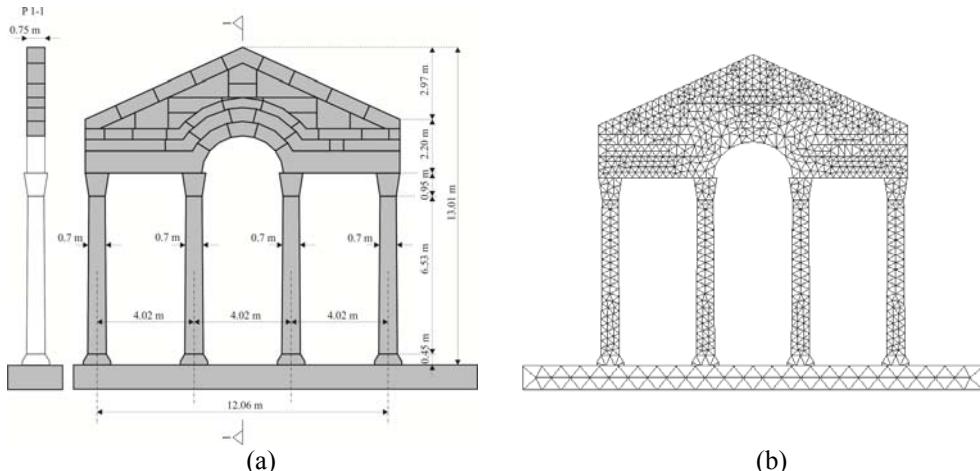
U ovom primjeru izvršena je inkrementalna dinamička [10] analiza Protirona na izvornoj konstrukciji bez metalnih klamfi i bez metalnih trnova. Konstrukcija je izložena horizontalnom ubrzavanju podlage (Slika 4.) koje je snimljeno 15.4.1979 u Dubrovniku kraj Pomorske škole na tlu kategorije A za vrijeme potresa čiji je epicentar bio u Crnoj Gori.



Sl. 4. Vremenski zapis ubrzanja za vrijeme potresa u Petrovcu 1979.

Akceleogram je prvo skaliran na vršno ubrzanje od 0.22 g koje je karakteristično za Split. Nakon toga je vršno ubrzanje postupno povećavano do potpunog sloma konstrukcije.

Na Slici 5-a i 5-b prikazana je geometrija konstrukcije te mreža konačnih elemenata. U numeričkoj analizi pretpostavljeno je da će do potpunog sloma konstrukcije doći uslijed gubitka stabilnosti tako da mogućnost pucanja kamenih blokova nije uzeta u obzir.



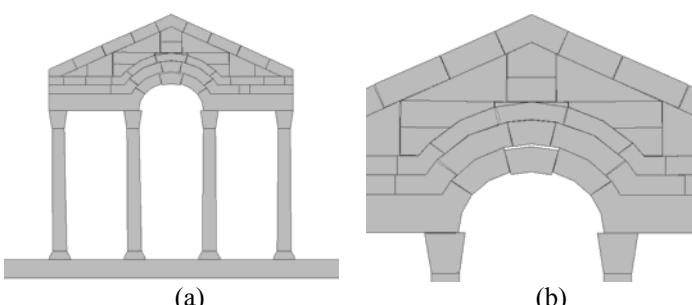
Sl. 5. Konstrukcija Protirona: (a) geometrija; (b) mreža konačnih elemenata

Mehaničke karakteristike kamaena korištene u analizi prikazane su u Tablici 1.

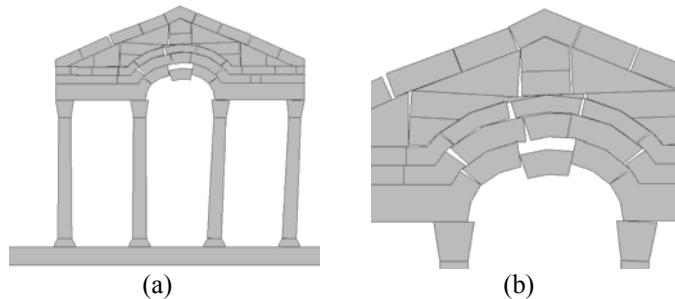
Modul elastičnosti	Statički koeficijent trenja	Dinamički koeficijent trenja	Koeficijent prigušenja
E (MPa)	μ_{st}	μ_{din}	$\bar{\mu}$
48400	0.6	0.6	$4.5 \cdot 10^6$

Tablica 1. Karakteristike materijala kao ulazni parametri

Dinamička analiza konstrukcije pokazuje da se za vršno ubrzanje od $a_g=0.22$ g, javljaju značajni pomaci kamenih blokova (Slika 7-a), pogotovo u kamenom luku (Slika 7-b).

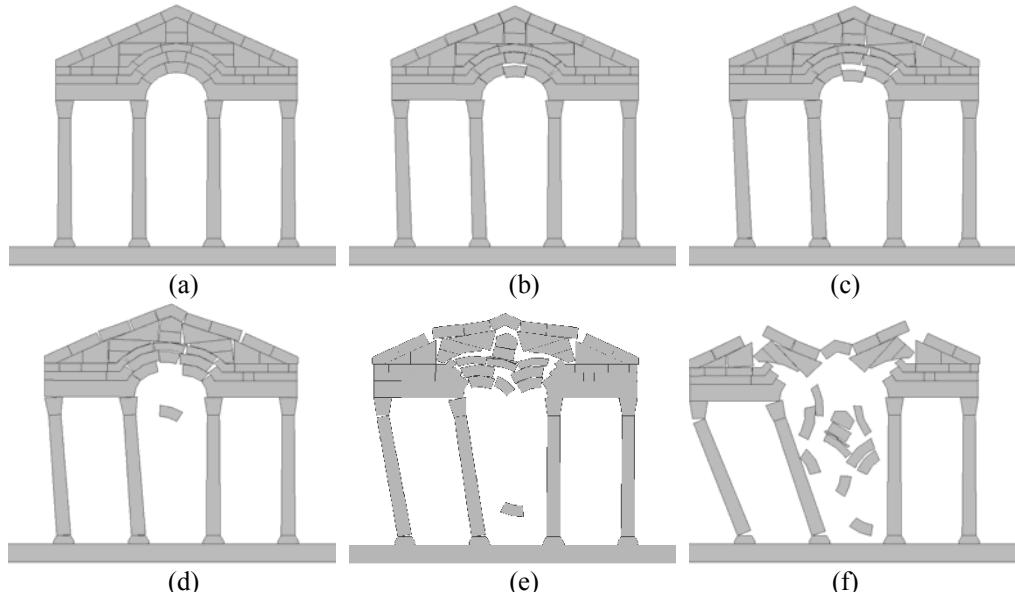


Sl. 7. Konstrukcija Protirona nakon potresa vršnog ubrzanja $a_g=0.22$ g: (a) cijela konstrukcija; (b) uvećan središnji dio



Sl. 8. Konstrukcija Protirona nakon potresa vršnog ubrzanja $ag=0.50\text{ g}$: (a) cijela konstrukcija; (b) uvećan središnji dio

Za vršno ubrzanje od 0.50 g dolazi do još većih pomaka, a očigledno je i razmicanje središnjih stupova konstrukcije te odizanje naglavne grede od rubova kapitela. Na Slici 8-a prikazana je konstrukcija nakon završetka, dok je na Slici 8-b prikazan njen središnji dio.



Sl. 9. Mehanizam potpunog sloma konstrukcije Protiron pri vršnom ubrzanju $ag=0.6\text{ g}$ u vremenu: (a) $t=0.0\text{ s}$; (b) $t=11.91\text{ s}$; (c) $t=13.27\text{ s}$; (d) $t=16.33\text{ s}$; (e) $t=17.86\text{ s}$; (f) $t=18.54\text{ s}$

Na Slici 9 prikazan je mehanizam potpunog sloma konstrukcije u toku vremena pri vršnom ubrzaju od 0.6 g . S crteža se može uočiti razdvajanje središnjih stupova dok naposljetu ne dođe do urušavanja središnjeg dijela konstrukcije.

Provedena analiza pokazuje da se u konstrukciji Protirona bez metalnih klamfi već pri vršnom ubrzaju od 0.22 g javljaju značajni pomaci centralnih blokova. Povećanjem ubrzanja povećavaju se i pomaci konstrukcije, a za vršno ubrzanje 0.60 g nastaje slom konstrukcije.

5 ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazana je seizmička analiza suho zidane kamene konstrukcije Protirona u Splitu pomoću kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata. Iz prikazane analize može se vidjeti prednost ovog numeričkog modela koji ima mogućnost opisivanja velikih pomaka i velikih rotacija kamenih blokova koji se mogu naći u međusobnoj mehaničkoj interakciji. Na ovaj način je moguće realistično predvidjeti mehanizam sloma suho zidane kamene konstrukcije izložene seizmičkom opterećenju.

Literatura :

- [1] Lourenço, P.B., Rots, J.G., and Blaauwendraad, J., “Continuum model for masonry: parameter estimation and validation”, Journal of Structural Engineering, Vol. 1(6), 1998, str. 642-652.
- [2] Berto, L., Saetta, A., Scotta, R. and Vitaliani, R., “An orthotropic damage model for masonry structures”, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 55, 2002, str. 127-157.
- [3] Lourenço, P.B. and Rots, J.G., “A multi-surface interface model for the analysis of masonry structures”, Journal of the Engineering Mechanics, Vol. 123, 1997, str. 660-668.
- [4] Radnić, J., Harapin, A., Matešan, D., Troglić, B., Smilović, M., Grgić, N. and Baloević, G., “Numerički model za statički i dinamički proračun zidanih konstrukcija”, Građevinar, Vol 63 (6), 2011, str. 529-546.
- [5] Petrinic, N., “Aspects of discrete element modelling involving facet-to-facet contact detection and interaction”, Ph.D. Dissertation, University of Wales, U.K., 1996.
- [6] Mamaghani, I.H.P., Aydan, O. and Kajikawa, Y., “Analysis of masonry structures under static and dynamic loading by discrete finite element method”, Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering, Vol.16, 1999, str. 75-86.
- [7] Munjiza, A. “The combined finite-discrete element method”, John Wiley & Sons, 2004.
- [8] Munjiza, A., Andrews, K.R.F. and White, J.K., “Combined single and smeared crack model in combined finite-discrete element method”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 44, 1999, str. 41-57.
- [9] Munjiza, A., Andrews, K.R.F. and White, J.K., “Penalty function method for combined finite-discrete element system comprising large number of separate bodies”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 49, 2000, str. 1377-1396.
- [10] Vamvatsikos, D. and Cornell, C.A., “Incremental dynamic analysis”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 31, 2002, str. 491-514.

Autori:

Hrvoje Smoljanović, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-378, e-mail: hrvoje.smoljanovic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

Željana Nikolić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-332, e-mail: zeljana.nikolic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

Nikolina Živaljić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-323, e-mail: nikolina.zivaljic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

**ANALIZA GEOMETRIJSKI NELINEARNIH
VIŠESLOJNIH GREDA**
Škec, L., Jelenić, G.

NUMERIČKE SIMULACIJE HIDRAULIČKIH TRANZIJENATA U HE VINODOL

J. Škifić, G. Racić

Sažetak: Provedene su numeričke simulacije hidrauličkih tranzijenata u sustavu HE Vinodol pomoću nestacionarnog 1D modela strujanja pod tlakom u cijevi. Točnost modela postignuta je korištenjem nekonzervativne formulacije modela nestacionarnog strujanja tekućine u cijevi pod tlakom koji uključuje modificirani model nestacionarnog trenja i fluks limitiranu numeričku metodu drugog reda točnosti. Postignuti numerički rezultati su pokazali dobro slaganje sa izmjerenim podacima promatranog sustava

Ključne riječi: hidraulički tranzijenti, numeričke simulacije, hidroelektrane

1 UVOD

Tijekom numeričkih simulacija hidrauličkih tranzijenata energetski gubici uslijed djelovanja trenja se aproksimiraju izrazima izvedenim za stacionarne ili kvazi stacionarne uvjete strujanja, čime numeričko modeliranje disipacije i periode hidrauličkog udara nije moguće predvidjeti na zadovoljavajući način. Iako je razvijen veći broj modela nestacionarnog trenja [1-4],, u ovom radu je korišten nestacionarni model trenja zasnovan na proširenoj Brunone-ovoј formulaciji [9] zapisan u nekonzervativnoj formulaciji [7]. Rješavanje dobivenog numeričkog modela provedeno je fluks limitiranom numeričkom metodom drugog reda [7]. Dobiveni model je validiran usporedbom numeričkih rezultata sa izmjerenim podacima promatranog sustava.

2 OPIS HIDROELEKTRANE VINODOL

Hidroelektrana Vinodol je visokotlačno derivacijsko postrojenje smješteno u blizini mjesta Tribalj. Osnovna koncepcija tehničkog rješenja HE Vinodol temelji se na zahvaćanju voda rijeke Lokvarke u akumulacijskom jezeru Lokvarka i zahvaćanju voda rijeke Ličanke u akumulacijskom jezeru Bajer, spojnog tunela između ta dva jezera i derivacijskog dovoda od jezera Bajer do strojarnice HE Vinodol smještene u Triblju. Akumulacijsko jezero Lokvarka ima korisnu zapreminu od 35300000 m³, što omogućava višegodišnje izravnavanje protoka rijeke Lokvarke. Akumulacijsko jezero Bajer najniže je akumulacijsko jezero u hidroenergetskom sustavu Vinodol korisnog volumena 1500000 m³. Ono nema dovoljnu zapreminu za godišnje izravnavanje protoka Ličanke.

Na lijevom boku jezera, oko 80 m uzvodno od pregrade nalazi se ulazni uređaj kao početak tlačnog dovoda za strojarnicu Tribalj. Prvi dio dovoda je tunel, dužine 199 m, promjera 2.8 m.

Tunel se račva u dva armirano betonska cjevovoda Lič I dužine 4915 m i promjera 2.8 m i Lič 2 dužine 4880 m i promjera 3.2 m. Cjevovod se nastavlja betonskim, tlačnim tunelom Kobiljak-Razromir dužine 4162 m promjera 2.75 m. Dužina cjevovoda od vodne do zasunske komore iznosi 148.4 m i promjera 2.40 m. Od zasunske komore, pa do podzemne stojarnice u Triblju, izgrađen je kosi čelični tlačni vod stupnjevanog promjera 1.8/1.495/0.65 m pod kutem od 32° , ukupne dužine 1189 m, s razdjelnim cjevovodom za šest turbina unutar strojarnice.

3 MATEMATIČKI MODEL

3.1 Jednodimenzionalno strujanje tekućine u cijevi

Strujanje tekućine u cijevi pod tlakom je modelirano modelom

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + J_s + J_u = 0 \quad (2)$$

gdje indeksi t i x označavaju vrijeme i duljinu (duž osi cijevi), H označava piezometričku visinu, Q protok, c brzinu zvuka, g ubrzanje sile teže, A površinu poprečnog presjeka, dok J_s i J_u predstavljaju gubitke po jediničnoj dužini cijevi zbog stacionarnog i nestacionarnog trenja. Gubici uslijed djelovanja stacionarnog trenja su:

$$J_s = \frac{f_s Q |Q|}{2DA} \quad (3)$$

gdje f_s predstavlja Darcy-ev faktor trenja, a D promjer cijevi. Nestacionarni član trenja prema definiciji preuzetoj iz [2]:

$$J_u = \frac{k}{2} (Q_t + c \Phi_A |Q_x|) \quad (4)$$

gdje Φ_A označava predznak Q i k predstavlja Brunone-ov koeficijent trenja definiran sa

$$k = \frac{\sqrt{C^*}}{2} \quad (5)$$

i

$$C^* = \begin{cases} 0.0476 & \text{Re} < 2300 \\ 7.41 \cdot \left(\text{Re}^{\log 143 \cdot \text{Re}^{-0.05}} \right)^{-1} & \text{Re} \geq 2300 \end{cases} \quad (6)$$

gdje je $\text{Re} = uD/v$ Reynoldsov broj, u brzina strujanja i v dinamička viskoznost fluida. Nestacionarni model trenja je moguće napisati u obliku

$$J_u = \frac{1}{2} \left(k_p \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + k_A \cdot c \Phi_A \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| \right) \quad (7)$$

gdje su prema [9] dva nestacionarna koeficijenta k_P i k_A definirana sa $k_P = k$ i $k_A = 1.5k_P$.

Kako sustav jednadžbi (1)-(2) sa izrazima (3)-(4) ili (7) nije napisan u klasičnom konzervativnom obliku te ga je potrebno napisati u nekonzervativnom obliku [7].

3.1 Rubni uvjeti

Rubni uvjet jezera Bajer modeliran je kao spremnik sa lokalnim otporom [10] na ulazu u sprovodni aparat. Odnosno, piezometrička visina na ulazu u tunel iznosi

$$H = H_{st} - (1 - \zeta) \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (8)$$

gdje je Q protoku na ulazu u cijev, A poprečni presjek cijevi, ζ lokalni hidraulički gubitak na ulazu u cijev koji uključuje sve lokalne hidrauličke gubitke između cijevi i jezera, dok H_{st} označava razinu vode jezera.

Model vodne komore se definira diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dH_{st}}{dt} = \frac{Q}{A_{st}} \quad (9)$$

Gdje H_{st} označava nivo vode u vodnoj komori, $A_{st} = A_{st}(H_{st})$ (Sl. 1) je poprečni presjek u vodnoj komori na H_{st} ([5]).

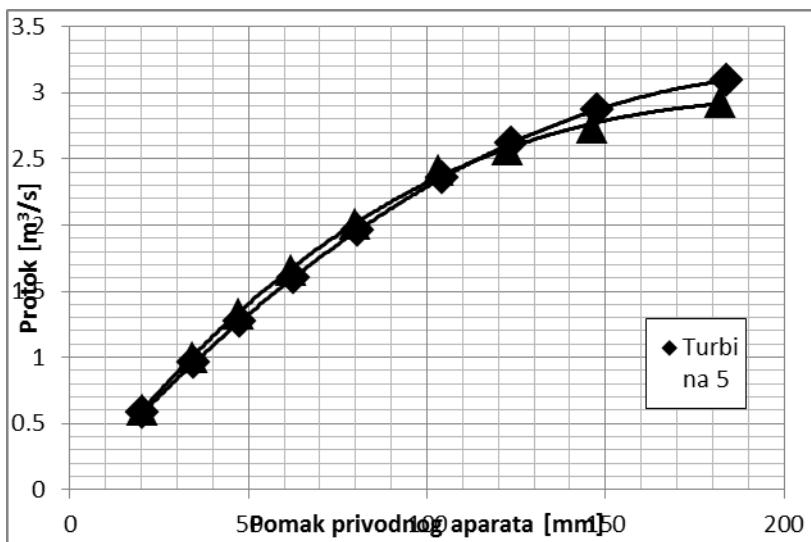
Protok u ili iz vodne komore je moguće izračunati sa

$$Q_{st} = \text{sgn}(H_{bst} - H_{st}) \cdot C_D \sqrt{2g|H_{bst} - H_{st}|} \quad (10)$$

gdje je C_D koeficijent protoka vodne komore, a H_{bst} piezometrička visina u cijevi ispod vodne komore [10]. Predznak Q_{st} indicira smjer strujanja vode, odnosno:

- $Q_{st} > 0$ voda struji u vodnu komoru,
- $Q_{st} < 0$ voda struji iz vodne komore.

Turbine na krajevima cijevi modelirane su kao jedinstveni rubni uvjet protoka [10] te je ukupni protok dobiven interpolacijom mјerenih protoka [5] za široki spektar pomaka privodnog aparata turbine 5 i turbine 6 agregata A3 (Slika 2.).



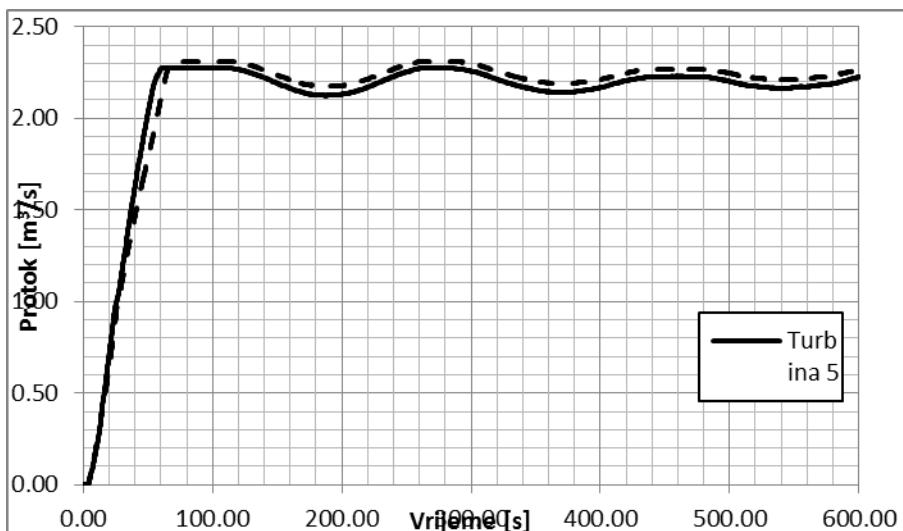
Sl. 2. Mјereni protok za razne pomake privodnog aparata

4 Numeričke simulacije

Gubici trenja kod simulacija 1D tranzijentnog strujanja u cijevi procjenjuju se korištenjem člana trenja dobivenim stacionarnim ili kvazi stacionarnim uvjetima strujanja, čime numeričko modeliranje disipacije i periode hidrauličkog udara nije moguće predvidjeti na zadovoljavajući način [1-4]. Kako je točno predviđanje utjecaja takvog efekta od posebne važnosti u industriji, uvedena je formulacija nestacionarnog trenja [2], koja nestacionarnu komponentu trenja povezuje sa trenutnom lokalnim i konvektivnim ubrzanjem. Kako nestacionarni koeficijent trenja [9] varira u vremenu, model se mora zapisati u nekonzervativnoj formulaciji u cilju korektne evaluacije polja karakteristika u numeričkoj aproksimaciji [6], što vodi boljoj numeričkoj aproksimaciji mjerene vrijednosti. Numerički model je testiran primjenom na laboratorijskim uvjetima [7], kao i na simulacijama strujanja u hidroelektranama Rijeka[6] i Jajce II[8].

4.1 Validacija modela

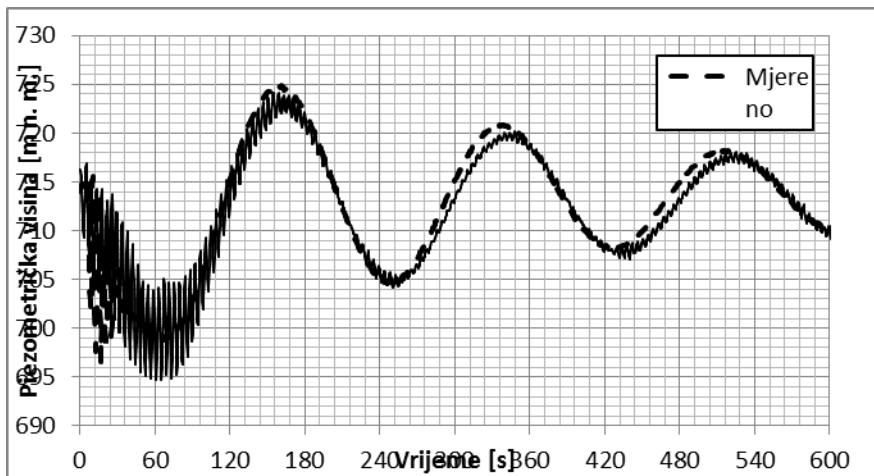
Opisani numerički model validiran je s izmjerenim podacima (Sl. 4) za scenarij sporog upuštanja agregata A3 koji se sastoji od dvije turbine [5]. Vremenska ovisnost protoka za vrijeme ispitivanja prijelaznih pojava je prikazana na Sl. 3. Razina vode u jezeru Bajer je tijekom cijelog vremena odvijanja simulacije konstanta i iznosi 714,58 m n. m. Početna razina vode u vodnoj komori, kao i piezometrička visina u sprovodnom aparatu jednaka je razini jezera.



Sl. 3. Vremenska ovisnost protoka za vrijeme ispitivanja prijelaznih pojava za scenarij sporog upuštanja agregata A3

Dobiveni rezultati numeričke simulacije pokazuju dobro slaganje sa izmjerenim rezultatima (Sl. 4). Perioda oscilacija vodnih masa se relativno dobro poklapa sa mjerrenom, iako je geometrija vodne komore nedovoljno dobro opisana. Naime, mjerenoj geometrijske karakteristike vodne komore nije provedeno, već je

rekonstruirana iz projektne dokumentacije. Nadalje, amplituda i frekvencija oscilacija hidrauličkog udara je precijenjena, što je rezultat ograničenja matematičkog modela[7].



Sl. 4. Usporedba mjerene i proračunate vrijednosti piezometričke visine na kraju tlačne cijevi

5 ZAKLJUČAK

Standarni nestacionarni model strujanja tekućine u cijevi proširen je modelom nestacionarnog trenja i primijenjen na simulacije strujanja hidrauličkih tranzijenata u HE Vinodol. Rezultati numeričkih simulacija prikazuju dobro slaganje s izmjerenim podacima unatoč uvedenim aproksimacijama koje uključuju geometrijski opis vodne komore i vremensku ovisnost protoka za vrijeme ispitivanja prijelaznih pojava, čime uspostavljeni matematički, odnosno numerički model potvrđuje opravdanost primjene na simulacije strujanja hidrauličkih tranzijenata u hidroelektranama.

Literatura:

- [1] Bergant, A., Simpson, A., Vitkovsky, J. A. R.: “*Developments in unsteady pipe flow friction modelling*”, J. Hydraul. Res., 39 (2001), 3, 249–258.
- [2] Brunone, B., Ferrante, M., Cacciamani, M: “*Decay of pressure and energy dissipation in laminar transient flow*”, J. Fluids Eng., 126 (2004), 928-934.
- [3] Bouazza, Z., Brunelle, P. E.: “*A new friction model for transient pipe flows development of the frequency dependence approach of Brunone*”, Proc., 9th Int. Conf. on Pressure Surges, BHR, Chester, U.K., 2004, 391-404.
- [4] Daily, W. L., Hankey, W. L., Olive, R. W., Jordan, J. M.: “*Resistance coefficients for accelerated and decelerated flows through smooth tubes and orifices*”, Trans. Jpn. Soc. Civ. Eng., 78 (1956), 1071-1077.
- [5] Ružić, S., Tasić, J., Bućan, B., Primožić, M., “*Ispitivanje energetskih značajki i prijelaznih pojava agragata HE Vinodol*”, Brodarski institut Zagreb 2005., Zagreb
- [6] Škifić, J., Črnjarić-Žic, N., Crnković, B.: “*Numerical Simulation of Hydraulic transients in Rijeka HPP*”, Strojarstvo, Vol. 50, No.1, 2008, str. 23-30
- [7] Škifić, J., Mačešić, S., Črnjarić-Žic, N.: “*Nonconservative Formulation of Unsteady Pipe Flow*”, Journal of Hydraulic Engineering - ASCE, 136 (2010), 8, 483-492.
- [8] Škifić, J., Radošević, A., Brajković, Đ., Družeta, S., Čavrak, M.: “*Numerical Simulations of Hydraulic transients in hydropower plant Jajce II*”, Engineering Review, Vol. 3, No.1, 2013, str. 51-57

- [9] Vítkovský, J., Bergant, A., Simpson, A., Lambert, M., Martin, F.: “*Systematic Evaluation of One Dimensional Unsteady Friction Models in Simple Pipelines*”, Journal of Hydraulic Engineering - ASCE, 132 (2006), 7, 696-708.
- [10] Wylie, W. B., Streeter, V. L., “*Fluid Transients in Systems*”, McGraw-Hill international, 1993.

Autori:

Jerko Škifić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet Rijeka, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58 51000 Rijeka, tel. 051 651 497, e-mail: Jerko.skifc@riteh.hr, web stranica: sim.riteh.hr/jerko

Goran Racić, Amerikanska 12, 51300, tel. 051 811 491, e-mail: Goran.Racic@mardesign.hr

PRIMJENA REGULARIZACIJE NA KORELACIJU DIGITALNE SLIKE

Tomičević, Z., Pamuković, F., Surjak, M. & Kodvanj, J.

Sažetak: Korelacija digitalne slike (DIC – Digital Image Correlation) je metoda koja koristi digitalnu sliku za mjerjenje cijelog polja pomaka. Svoju primjenu sve više nalazi na polju identifikacije i validacije konstitutivnih zakona. Prednost takve metode neusporediva je sa mjerjenjem mehaničkim ekstenzometrima i mjernim trakama koje mjere pomak samo u jednoj točki. Metoda kao takva ima i nedostatak. Prilikom zapisivanja slika javljaju se brze fluktuacije polja pomaka koje su unesene konstantnim šumom kamere te mjernim postavom. Zbog tih problema koristi se regularizacija. U ovom radu prezentirana je primjena nove DIC metode koja koristi regularizaciju (R-DIC) kao sredstvo smanjenja rezolucijske nesigurnosti. Metoda regularizacije služi kao filter za propuštanje samo mehaničkih polja prilikom čega se šum koji se javlja prilikom zapisivanja slika zanemaruje. Prednost regularizacijskog algoritma posebno je vidljiva kada se za analizu koristi siromašna tekstura (niska razina sive skale). Metoda je validirana na umjetno deformiranim slikama, a direktnu primjenu je našla kod biaxialnih testova nodularnog lijeva. Nodularni lijev promatran je na dvije različite skale uvećanja (macro i meso). Za makro razinu korištena je umjetno napravljena tekstura dok je za meso korištena prirodna tekstura nodularnog lijeva.

Ključne riječi: DIC, regularizacija, rezolucija, T3 elementi

1 UVOD

DIC se zasniva na tome da se tijekom provedbe eksperimenta registriraju slike koje imaju sivu razinu skale boja. Zbog brzih fluktuacija uslijed registracije slika koje su također zabilježene potencijalna barijera je jako mala promjena rezolucije pomaka (tj. najmanja promjena mjerenoj pomaci koja uzrokuje vidljivu razliku mjerene veličine) koja predstavlja veliki problem prilikom mjerjenje malih pomaka. Iz tog razloga potrebno je naći kompromis između standardne mjerne nesigurnosti i rezolucije pomaka [1].

Kako bi se prevladao ovaj limitirajući problem razvijene su različite. Klasična metoda rješavanja ovog problema je diskretizacija polja pomaka na razinu koja je mnogo veća od piksela. Ova metoda je poznatija kao "local DIC approach" [2] gdje je ZOI (zona interesa) definirana kao prirodno prepostavljena regularizacija. Osim podijele slike na ZOI nikakve druge prepostavke nisu uvedene, što u konačnici odgovara tome da je cijelo polje pomaka dobiveno interpolacijom centra ZOI. U praksi minimalna veličina ZOI-a je 10×10 piksela ili više [3].

Kako bi se smanjila rezolucija pomaka, neke dodatne informacije mogu biti prepostavljene. Jedna od njih je da je polje pomaka kontinuirano, a isto se može dekomponzirati po odgovarajućoj bazi koja najbolje zadovoljava uvjete kontinuiteta. Problem koji je postojao u lokalnom DIC-u da su sve ZOI tretirane neovisno jedna o

drugoj riješen je ovom metodom koja je poznata kao "global DIC approach" [4]. Ovom metodom vrijeme računanja se povećava ali rezultati su pouzdaniji. Minimalna veličina elementa ove metode je 4x4 piksela [5].

Rezoluciju pomaka moguće je još dodatno smanjiti dodatnim uvijetima kao što su minimiziranje konzervacije sive skale [6]. Problem ove metode je da filter koji je primijenjen može zanemariti fluktuacije koje su nastale uslijed mehaničkih promjena polja pomaka. Drugi način smanjenja rezulocije pomaka biti će predstavljen u ovom radu. Ova metoda zasniva se na mehaničkoj regularizaciji polja pomaka, kojom se filtriraju sve fluktuacije koje nisu mehanički podatljive. Prednost ovakve regularizacije posebno je vidljiva prilikom usporedbe rezulocije pomaka s predstavljenim metodama. U ovom radu tekoči će biti pokazano kako nova metoda može savladati vrlo tešku i nekonvencionalnu teksturu koju klasične DIC metode ne mogu obraditi.

2 REGULARIZIRANA KORELACIJA DIGITALNE SLIKE

2.1 Regularizacijska strategija

Prilikom zabilježavanja dvije slike u referentnoj konfiguraciji, f , te deformiranoj g zbog konzervacije sive skale piksela vrijedi

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})), \quad (1)$$

gdje je \mathbf{u} nepoznato polje pomaka, a \mathbf{x} lokacija piksela. Traženo polje pomaka minimizira sumu razlike kvadrata Φ_c^2 preko cijelog područja interesa (ROI)

$$\Phi_c^2 = \int_{ROI} \left(|g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})| \right)^2 d\mathbf{x}. \quad (2)$$

Ako ne postoje neki dodatni uvjeti nemoguće je odrediti pomak svakog piksela nezavisno pošto postoje dvije nepoznanice za danu raliku sive skale. Zbog toga je odabrana slaba formulacija polja pomaka izražena preko odeđene baze

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_n u_n \psi_n, \quad (3)$$

gdje je ψ_n odabrana funkcija oblika a u_n pripadajući stupnjevi slobode polja pomaka.

Mjereni problem se nadalje sastoji od minimiziranja Φ_c^2 s obzirom na u_n . Newtonov iteracijski algoritam se koristi za rješavanje problema minimiziranja rješavajući iterativno linearni sustav

$$[\mathbf{M}] \{\delta \mathbf{u}\} = \{\mathbf{b}\}. \quad (4)$$

Kako bi se zadovoljila mehanička podatljivost u smislu konačnih elemenata, uvodi se prvo ravnotežna razlika ("equilibrium gap"). Ako je primijenjena linerna elastičnost jednadžbe ravnoteže su

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\}, \quad (5)$$

gdje je $[\mathbf{K}]$ matrica krutosti, a $\{\mathbf{f}\}$ vektor čvornih sila. U slučaju da polje pomaka ne zadovoljava jednadžbe ravnoteže uvodi se ravnotežna razlika. Uslijed nedostatka čvornih sila, unutrašnji čvorovi su slobodni od svih vanjskih sila, stoga se metoda ravnotežne razlike sastoji od minimiziranja

$$\Phi_m^2 = \{\mathbf{u}\}^t [\mathbf{K}]^t [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}\}, \quad (7)$$

gdje je \cdot^t operator transponiranja, a Φ_m^2 odgovara sumi kvadratne norme svih ravnotežnih razlika ali *samo* unutrašnjih čvorova. Ova DIC metoda zahtijeva dodatnu regularizaciju za rubne čvorove. Za rubne čvorove uvedena je penalizacija za fluktuacije pomaka kratkih valnih duljina. Treća funkcija koju treba uzeti u obzir mora nestati za sve pomake krutog tijela

$$\Phi_b^2 = \{\mathbf{u}\}^t [\mathbf{L}]^t [\mathbf{L}] \{\mathbf{u}\}, \quad (8)$$

gdje je $[\mathbf{L}]$ operator koji ima utjecaj na rubu ROI-a [7].

2.2 Correlation procedura

Minimiziranje correlation reziduala (Φ_c^2), ravnotežne razlike (Φ_m^2) i rubnih fluktuacija (Φ_b^2) zahtijeva uvodenje totalnog funkcionala Φ_t^2

$$(1 + w_m + w_b) \Phi_t^2 = \tilde{\Phi}_c^2 + w_m \tilde{\Phi}_m^2 + w_b \tilde{\Phi}_b^2, \quad (9)$$

gdje su w_m i w_b težine pridodane $\tilde{\Phi}_m^2$ i $\tilde{\Phi}_b^2$, a $\tilde{\Phi}$ označava normalizirane reziduale. Težine w_m i w_b su odabrane kao

$$w_m = (2\pi|\mathbf{k}|l_m)^4, \quad w_b = (2\pi|\mathbf{k}|l_b)^4, \quad (10)$$

gdje su l_m i l_b regularizacijske dužine za Φ_m^2 i Φ_b^2 . U slučaju da se zada viša vrijednost regularizacijske dužine l_m stavlja se veća težina na funkcional $\tilde{\Phi}_m^2$, te stoga ravnotežni reziduali moraju dosegnuti veću razinu. Isto vrijedi i za zadavanje regularizacijske dužine l_b za rubne reziduale. U RT3-Correli algoritmu koriste se trokutasti elementi (T3) sa linearom interpolacijom pomaka.

3 PRIMJERI I REZULTATI REGULARIZACIJSKE DIC METODE

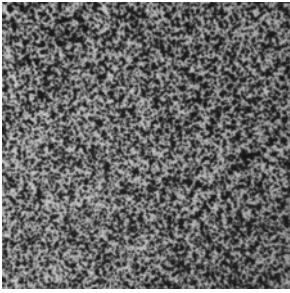
U ovom dijelu rada prikazana su dva primjera u kojima je korišten R-DIC. Prvi slučaj će biti umjetno deformiran, dok će u drugom biti razmatran stvarni test u kojem će se analizirati prirodna tekstura nodularnog lijeva prilikom izvođenja biaxialnog testa. U oba slučaja rezultati će biti uspoređeni sa "local" i "global" DIC algoritmom.

3.1 Umjetno deformiran test

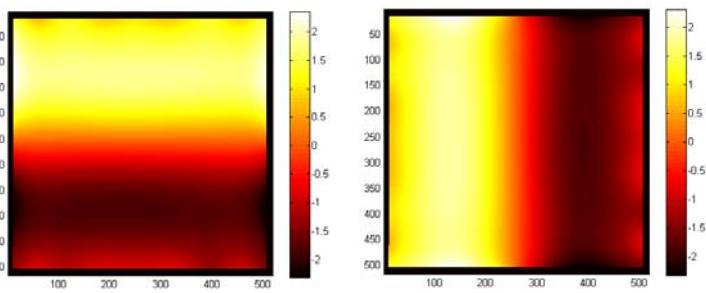
Na primjeru umjetno deformiranog testa analizirana je slika s umjetnom teksturom koja je napravljena tako da se prvo nanesi bijela boja, a nakon toga crnom bojom stohatički se nanesu crne točkice. Ovo je uobičajena metoda za stvaranje rastera pogodnog za primjenu DIC metode. Na ovom primjeru veličina slike je 531x531 piksel sa 8-bitnom digitalizacijom. Iz referentne slike (Sl. 1) linearom interpolacijom sive skale generirana je deformirana slika bez šumova koji su neizbjegni prilikom registriranja slike u stvarnom testu. Generirano polje pomaka deformirane slike je sinusna funkcija (Sl. 2 (a) i (b))

$$u_x(x, y) = 2 \sin(2\pi x / n_x), \quad u_y(x, y) = 2 \sin(2\pi y / n_y), \quad (11)$$

gdje su n_x x n_y broj piksela ROI-a. Deformiranje slike sinusnom funkcijom zanimljiv je slučaj zato što odgovara osnovnoj analizi optičkih sustava [2].

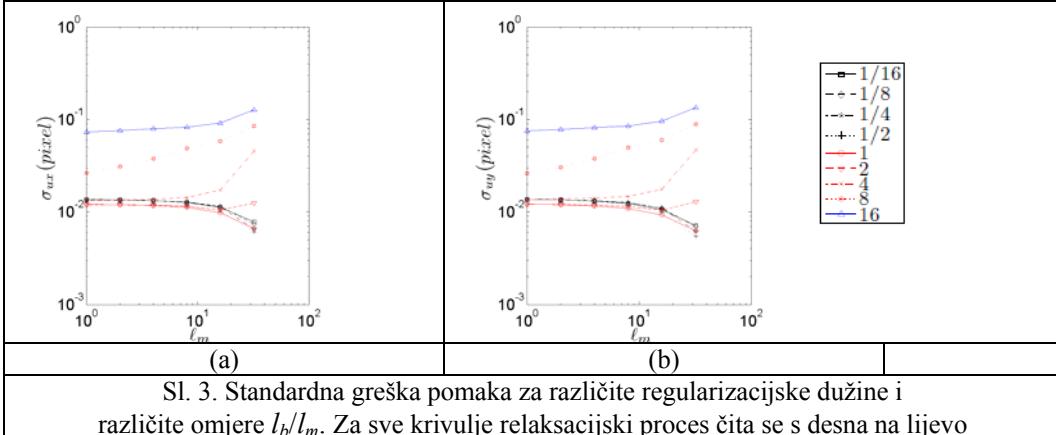


Sl. 1. Referentna slika



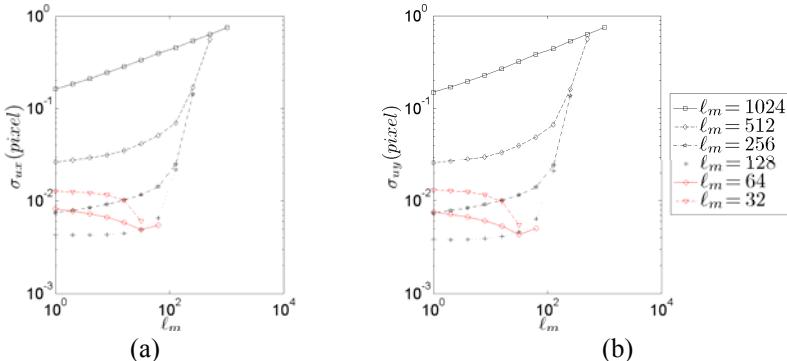
Sl. 2 Generirana polja pomaka u x i y smjeru

Na ovom primjeru testirani su omjeri l_b/l_m . Svrha određivanja omjera l_b/l_m je u tome da omjer u dalnjim analizama na stvarnim testovima bude konstantan. Za početnu vrijednost odabрано je $l_m=32$ piksela pri čemu se on inkrementalno smanjivao (relaksirao) za 2 puta sve do vrijednosti $l_m=1$ pix. Iz dijagrama Sl. 3 (a) i (b) vidljivo je da je za omjere od 1 do 1/16 standardna greška između mјerenog i generiranog polja pomaka približno jednaka te je zbog toga odabran omjer od 1/2 koji daje najmanju grešku.



Sl. 3. Standardna greška pomaka za različite regularizacijske dužine i različite omjere l_b/l_m . Za sve krivulje relaksacijski proces čita se s desna na lijevo

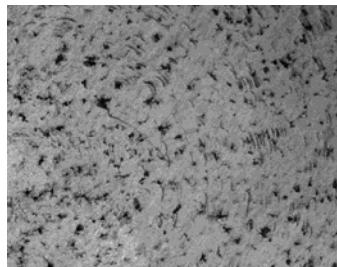
Sl. 4 pokazuje razliku standardne devijacije između mјerenog i generiranog polja pomaka za različite slučajeve inicijalne regulacijske dužine unutrašnjih čvorova. Kao i u prethodnom slučaju l_m se smanjuje za 2 puta u svakom inkrementu. Standardna greška pomaka virtualno je jednaka za dvije komponente pomaka (osim za velike regularizacijske dužine) iako je korištena nestrukturirana mreža. Zbog toga što T3 mreža nije regularna nisu uočene nikakve greške. Primjenjujući različite početne regularizacijske dužine vidljivi su različiti trendovi. Prvo, za jako velike inicijalne $l_m > n_x, n_y$ standardna greška je jako visoka. Ovaj efekt uzrokovani je interpolacijskim greškama zato što onemogućuju bilježenje male fluktuacije pomaka. Kada se relaksira l_m vidljiva je manja ali ipak značajna greška. Za inicijalno male regularizacijske dužine standardna greška ostaje mala ali relaksacija uzrokuje malo povećanje greške. Kod odabrane inicijalne regularizacijske dužine $l_m=128$ piksela uočena je najmanja greška. Važno je napomenuti da je za inicijalne $l_m < 128$ piksela greška manja od 10^{-2} .



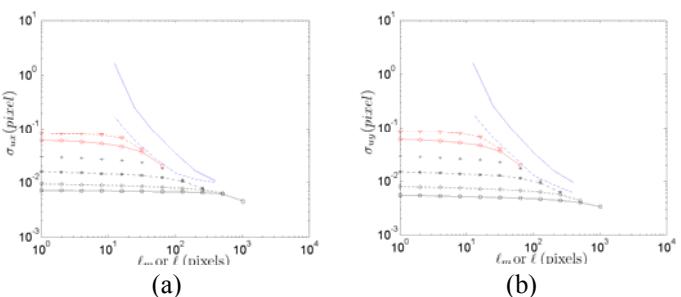
Sl. 4. Promjena standardne greške pomaka za različite regularizacijske dužine i različite inicijalne l_m naznačene u legendi

3.2 Analiza prirodne teksture

Par slika (Sl. 5) analiziran u ovom primjeru odgovara slikama zabilježenim uzastopno kada je uzorak već pričvršćen na ispitni uređaj sa silom $F=0$ N. Križna epruveta izrađena iz nodularnog lijeva opterećena je equi-biaksialno duž dva okomita pravca. Centar ispitnog uzorka promatran je na meso razini (definicija slike: 1024x1280 piksela sa 12-bitnom digitalizacijom) gdje se koristila prirodna tekstura materijala. Na slici 5 vidljivo je da je tekstura siromašna s obzirom na prethodno analizirani slučaj (Sl. 1). Ova analiza je napravljena kako bi se evaluirala rezolucija R-DIC metode.



Sl. 5 Referntna slika prirodne teksture nodularnog lijeva



Sl. 6. Promjena standardne greške pomaka za različite regularizacijske dužine i različite inicijalne l_m naznačene u legendi na slici 4

Na slici 6 prikazana je standardna rezolucija pomaka za dvije komponente pomaka. Iz dijagrama je vidljivo da što je veća regularizacijska dužina manja je rezolucija pomaka. Važno je napomenuti da je za dobivanje rezultata na slici 6 bilo potrebno izvršiti 51 analizu. Rezultati rezolucije pomaka dobiveni regularizacijom uspoređeni su s lokalnim i globalnim DIC pristupom. Vidljivo je da je trend kod ova dva pristupa dugačiji nego kod regulariziranog. Kod analize ovako siromašne teksture vidljiva je značajna razlika između lokalnog i globalnog pristupa. Značajna dodatna razlika koju je napravila regularizacijska tehnika uvedena u ovom radu, uspjela je iskučivo zato što su filtrirane sve nemehaničke fluktuacije zabilježene na slikama.

4 ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazano je kako uvođenje mehanički temeljene regularizacije u DIC algoritam zasnovan na formulaciji konačnih elemenata značajno smanjuje razinu nesigurnosti umjetno neuniformno generiranog polja pomaka. Primjena iste metodologije na realnom eksperimentu pokazuje da se i slike sa siromašnom teksturom mogu uspješno analizirati DIC tehnikom. U prikazanom istraživanju diskretizacija temeljena na nestrukturnoj mreži od trokutastih elemenata (tj. T3-DIC) korištena je prilikom DIC analize. Primjena trokutastih elemenata manje je zahtijevna od DIC metode na razini piksela ("Pixel-scale" DIC; P-DIC). Usprkos tome vjeruje se da su rezultati dobiveni ovom metodom generički i da bi se u sljedećim istraživanjima mogli primjeniti na P-DIC.

Literatura:

- [1] Bergonnier, S., Hild, F., Roux, S., "Digital image correlation used for mechanical tests on crimped glass wool samples", *J. Strain Analysis*, 40, 2, 2005, str. 185-197.
- [2] Bornert, M., Brémand, F., Doumalin, P., Dupré, J-C., Fazzini, M., Grédiac, M., Hild, F., Mistou, S., Molimard, J., Orteu, J-J., Robert, L., Surrel, Y., Vacher, P., Wattrisse, B., "Assessment of Digital Image Correlation measurement errors: Methodology and results", *Exp. Mech.*, 49, 3, 2009, str. 353-370.
- [3] Sutton, MA., Wolters, WJ., Peters, WH., Ranson, WF., McNeill, SR., "Determination of Displacements Using an Improved Digital Correlation Method", *Im. Vis. Comp.*, 1, 3, 1983, str. 133-139.
- [4] Sun, Y., Pang, J., Wong, C., Su, F., "Finite-element formulation for a digital image correlation method", *Appl. Optics*, 44, 34, 2005, str. 7357-7363.
- [5] Rupil, J., Vincent, L., Hild, F., Roux, S., "Probabilistic modeling of mesocrack initiations in 304L stainless steel", *Int. J. Multiscale Comput. Eng.*, 9, 4, 2011, 445-458.
- [6] Réthoré, J., Roux, S., Hild, F., "An extended and integrated digital image correlation technique applied to the analysis fractured samples", *Eur. J. Comput. Mech.*, 18, 2009, str. 285-306.
- [7] Leclerc, H., Périé, J-N., Roux, S., Hild, F., "Voxel-scale digital volume correlation", *Exp. Mech.*, 51, 4, 2011, str. 479-490.

Autori:

Zvonimir Tomičević, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel. 01/ 6168 533, fax 01/ 6168 250, e-mail: zvonimir.tomicevic@fsb.hr

Frane Pamuković, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel. 01/ 6168 447, fax 01/ 6168 250, e-mail: frane.pamukovic@fsb.hr

Martin Surjak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel. 01/ 6168 445, fax 01/ 6168 250, e-mail: martin.surjak@fsb.hr

Janoš Kodvanj, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel. 01/ 6168 425, fax 01/ 6168 250, e-mail: janoš.kodvanj@fsb.hr

NUMERIČKI MODEL PONAŠANJA INTRALUMINALNOG TROMBA KOD ANEURIZME ABDOMINALNE AORTE PRI DVOOSNOM OPTEREĆENJU

Vindiš, V., Virag, L. & Karšaj, I.

Sažetak: Aneurizma abdominalne aorte (AAA) je abnormalno lokalno proširenje infrarenalne aorte od minimalno 50% u odnosu na neki bliski presjek. Bolest se otkriva slučajno, a moguće komplikacije uključuju rupturu, kada naprezanje u stijenci aorte nadviši njezinu čvrstoću. Oko 80% AAA sadrži intraluminalni tromb (ILT) koji mehanički i biokemijski utječe na stijenku. Intraluminalni tromb može imati do tri sloja, luminalni uz tok krvi, prepoznatljive crvene boje s najvećom vlačnom krutošću, intramedijalni i abluminalni, gotovo zanemarive vlačne, ali veće tlačne krutosti.

Već prije 20 godina se javila ideja da tromb smanjuje naprezanja u aorti, što nas navodi do zaključka da su mehanička svojstva tromba bitna za rast aneurizme. Promjena u raspodjeli naprezanja unutar stijenke utječe na proizvodnju njezinih strukturalno bitnih dijelova (kolagena i mišićnih stanica), pa time ILT utječe na rast aneurizme. Prema tome, lako je zaključiti, da su mehanička svojstva tromba od izuzetne važnosti kod simuliranja utjecaja tromba na aneurizmatičnu stijenku aorte. Cilj ovog istraživanja je razviti numerički model ponašanja tromba, cjelovitog i svakog sloja zasebno, podvrgnutog dvoosnom opterećenju na dvosnoj kidalici i to za osno i cirkularno izrađene uzorke i usporediti ih s eksperimentalnim podacima iz literature.

Ključne riječi: Aneurizma abdominalne aorte, intraluminalni tromb, mehanička svojstava

1 UVOD

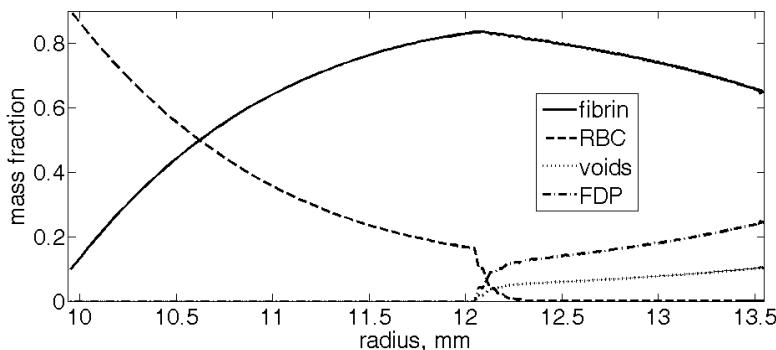
Aneurizma abdominalne aorte (AAA) je lokalno proširenje aorte. Većina AAA je asimptomatska i javlja se primarno kod muškaraca starijih od 60 godina. Do danas ne postoji pouzdan kriterij predviđanja rizika od rupture AAA. Oko 80% AAA sadrži intraluminalni tromb (ILT) koji smanjuje naprezanja unutar stijenke aorte, ali ju i oslabljuje. ILT nastaje uslijed poremećene hemodinamike, odnosno stvaranja vrtloga, koji stvaraju područja s visokim posmičnim naprezanjima u lumenu pogodnim za aktivaciju trombocita, te područja s niskim posmičnim naprezanjima na stijenci aorte gdje je omogućeno skupljanje aktiviranih trombocita na oštećenim endotelnim stanicama ([2]). Početna faza nastanka ILT-a može se opisati aktiviranjem trombocita, pretvaranjem fibrinogena u fibrin pomoću trombina i stvaranjem fibrinske mreže u kojoj crvene i bijele krvne stanice ostaju zarobljene, [3]. Ovakva struktura je tipična za dio intraluminalnog tromba uz tok krvi, odnosno njegov luminalni sloj. S obzirom da je u kontaktu s krvi, luminalni sloj je prepoznatljive crvene boje i proteolitički najaktivniji. Obično je širok oko 2 mm, jer je ograničen dubinom do koje krv može prodrijeti kroz fibrinsku mrežu. Širenjem aneurizme raste i ILT, pa nastaju dijelovi

tromba koji su dovoljno daleko od krvi, odnosno nastaje intramedijalni sloj koji može biti debeo i nekoliko centimetara. U ovom žućkastom sloju odumiru stanice koje su bile zarobljene u luminalnom sloju i fibrinska mreža se razgrađuje, pa nastaju kanalići čija se površina povećava od lumena prema stijenci, [1]. U velikim aneurizmama može nastati abluminalni sloj kod kojeg je fibrinska mreža znatno više razgrađena i neorganizirana u odnosu na luminalni i intramedijalni sloj. Taj smedji dio tromba se zove abluminalni sloj. Očito svaki od tri sloja tromba karakteriziraju drugačija biokemijska i mehanička svojstva ([4; 7]). Primjerice, luminalni sloj ima najveću vlačnu krutost, dok abluminalni ima najveću tlačnu krutost.

2 DEFINICIJA PROBLEMA

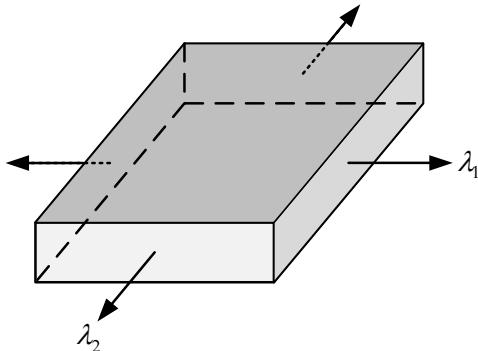
U [6] je napravljen matematički model koji opisuje rast AAA. Za razliku od ostalih modela rasta i restrukturiranja (G&R, engl. *growth and remodeling*), u tom modelu je uzet u obzir mehanički i biokemijski utjecaj ILT-a na stijenku aorte. U njemu je opisan nastanak i rast tromba (prvo luminalnog, a zatim i ostala dva sloja), promjena njegove strukture i mehaničkih svojstava. Intraluminalni tromb smanjuje maksimalna naprezanja unutar stijenke, a time utječe na brzinu stvaranja mase kolagena i mišićnih stanica (strukturalno bitnih dijelova stijenke aorte). Time ILT ima veliki utjecaj na rast AAA, pa je potrebno je ispitati mehanička svojstva tromba i odrediti parametre materijala. Želimo razviti numerički model ponašanja ILT-a podvrgnutog dvoosnom opterećenju na dvosnoj kidalici. Dosadašnja eksperimentalna ispitivanja ([3; 5]) su pokazala izotropno nelinearno elastično ponašanje intraluminalnog tromba. Vlačni pokusi prikazani u [3] su otkrili da iako intramedijalni i abluminalni sloj jesu izotropni, to ne mora vrijediti za luminalni sloj. Anizotropija postaje izraženija sa starenjem luminalnog sloja.

Pri modeliranju se koristi teorija smjesa i pri tome se opisuje ponašanje samo mehanički bitnih dijelova tromba. Za vlačna naprezanja to su fibrin unutar luminalnog sloja, te fibrin i produkti razgradnje fibrina u intramedijalnom i abluminalnom sloju. Eritrociti (RBC) i praznine koje nastaju odumiranjem stanica i razgradnjom fibrina daju tlačnu čvrstoću. Maseni udjeli strukturalnog bitnih dijelova tromba mijenjaju se radikalno i tijekom vremena. Na slici 1. je prikazana radikalna raspodjela masenih udjela, za primjer tromba starog 10 godina.



Sl. 1. Primjer radikalne raspodjele masenih udjela strukturalno bitnih dijelova tromba [6]

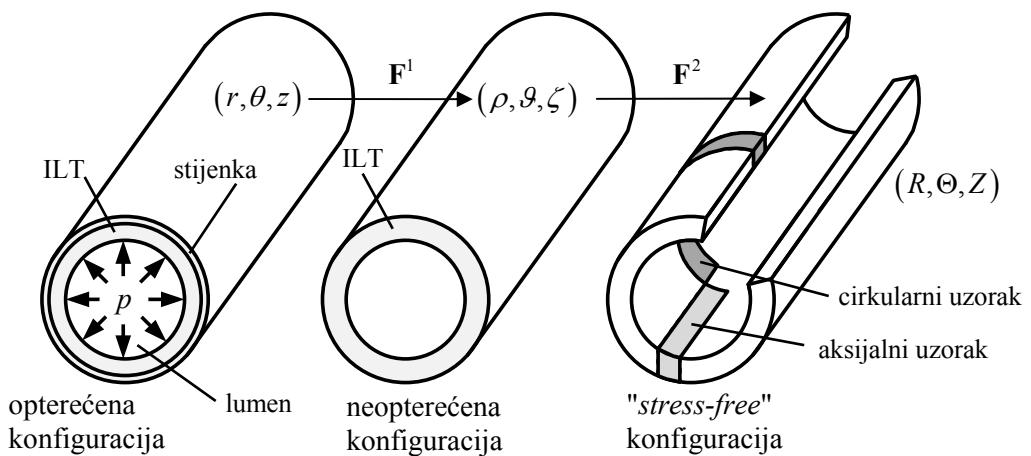
Cilj ovog istraživanja je razviti numerički model ponašanja tromba podvrgnutog dvoosnom opterećenju na dvosnoj kidalici i to za osno i cirkularno izrađene uzorke cijelovitog tromba i svakog sloja zasebno, te ih usporediti s eksperimentalnim podacima iz literature. Želimo razviti algoritam koji će u svakom trenutku tijekom rasta tromba, odnosno aneurizme, ovisno o novim masenim udjelima konstruirati uzorak i provesti dvoosni test s različitim omjerima izduženja.



Sl. 2. Prikaz primjera uzorka na kojem se provodi dvoosni test s različitim izduženjima λ_1 i λ_2

3 METODOLOGIJA

Uzorci koji se ispituju su izrezani iz pojedinih slojeva tromba, odnosno nalaze se u neopterećenom stanju i bez rezidualnih naprezanja. Rezidualna naprezanja su naprezanja koja ostaju u tkivu nakon rasterećenja. Ideja o rezidualnim naprezanjima se javila još 80-ih godina prošlog stoljeća.



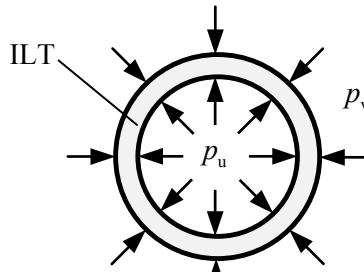
Sl. 3. Prikaz opterećene, neopterećene i "stress-free" konfiguracije za tromb

Sl. 3. prikazuje opterećenu konfiguraciju tromba i stijenke, te neopterećenu i "stress-free" konfiguraciju tromba. Gradijent deformiranja F^1 povezuje opterećenu i

konfiguraciju (r, θ, z) i neopterećenu konfiguraciju (ρ, ϑ, ζ) i definira se na sljedeći način:

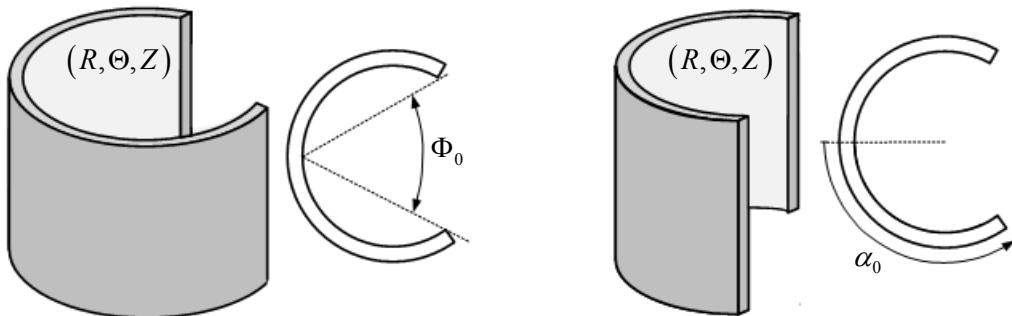
$$\mathbf{F}^1 = \text{diag} \left[\frac{\partial \rho}{\partial r}, \frac{\rho}{r}, \frac{1}{\lambda} \right] \quad (1)$$

U jednadžbi (1) r, ρ su radijusi u opterećenoj (prikazanoj na sl. 4.) i neopterećenoj konfiguraciji, a λ aksijalno izduženje, povezano početnim izduženjem strukturalno bitnih dijelova tromba.



Sl. 4. Opterećena konfiguracija tromba

Uočeno je da se radijalno razrezana neopterećena krvna žila deformira, bez obzira što na nju ne djeluje vanjsko opterećenje. Deformaciju karakterizira kut otvaranja, koji je definiran kao mjera za rezidualna naprezanja. Kasnija istraživanja su pokazala da dodatno longitudinalno rezanje uzrokuje dodatno deformiranje, što znači da jedan rez ne uklanja sva rezidualna naprezanja.



Sl. 5. Definicija cirkularnog (lijevo) i aksijalnog (desno) kuta otvaranja

Gradijent deformiranja \mathbf{F}^c koji povezuje neopterećenu konfiguraciju (ρ, ϑ, ζ) i konfiguracije (R, Θ, Z) bez radikalnih rezidualnih naprezanja se definira na sljedeći način:

$$\mathbf{F}^2 = \mathbf{F}^c = \text{diag} \left[\frac{\partial R}{\partial \rho}, \frac{(\pi - \Phi_0)R}{\pi \rho}, \frac{1}{\Lambda} \right]. \quad (2)$$

U jednadžbi (2) R je radius u „stress-free“ konfiguraciji, odnosno u konfiguraciji nakon rezanja, ρ je radius u konfiguraciji bez opterećenja, Φ_0 je kut otvaranja

definiran na slici 5., a Λ aksijalno izduženje, također povezano s rezidualnim naprezanjima.

S druge strane, gradijent deformiranja \mathbf{F} koji povezuje neopterećenu konfiguraciju (ρ, θ, ζ) i konfiguraciju (R, Θ, Z) bez aksijalnih rezidualnih naprezanja se može zapisati kao:

$$\mathbf{F}^2 = \mathbf{F}^a = \text{diag} \left[\frac{\partial Z}{\partial \rho} \quad \frac{1}{\Lambda_\Theta} \quad \frac{2\alpha_0 Z}{L_u} \right], \quad (3)$$

gdje je L_u duljina neopterećenog uzorka, a α_0 aksijalni kut otvaranja, prema [8].

Anizotropno Cauchyjevo naprezanje računamo pomoću izraza:

$$\mathbf{t} = \frac{2}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (4)$$

U gornjoj jednadžbi je \mathbf{C} desni Cauchy-Greenov tenzor, \mathbf{F} gradijent deformiranja, a W funkcija energije deformiranja. Funkciju energije deformiranja za tromb računamo preko pravila smjesa:

$$W = \sum_k \phi^k W^k, \quad (5)$$

gdje je W^k funkcija energije deformiranja pojedinog dijela tromba (fibrin, produkti razgradnje fibrina, eritrociti ili praznine), a ϕ^k maseni udio konstituenta. Energiju fibrina kao jedine vlaknaste strukture koja se ponaša nelinearno modeliramo prema radu ([3]), u kojem je izведен materijalni model za anizotropan tromb u obliku:

$$W^f = \mu(I_1 - 3) + \frac{k_1}{k_2} \left[\exp(k_2(1 - \rho)(I_1 - 3)^2 + \rho(I_4 - 1)^2) - 1 \right] \quad (6)$$

gdje su μ , k_1 i k_2 parametri slični naprezanju (mjere se u kPa), dok je $I_1 = \text{tr}(\mathbf{C})$, \mathbf{m} je vektor orijentacije ojačanja vlakana, a ρ je mjera anizotropije ($\rho \in [0, 1]$). U slučaju da anizotropija još nije razvijena ($\rho = 0$), izraz (6) se pojednostavljuje u oblik:

$$W^f = \mu(I_1 - 3) + \frac{k_1}{k_2} \left[\exp(k_2(I_1 - 3)^2) - 1 \right] \quad (7)$$

Produkti razgradnje fibrina gube vlaknastu strukturu, pa su modelirani pomoću Neo-Hookeovog oblika funkcije:

$$W^{FDP} = \mu^{FDP} \text{tr}(\mathbf{C}^{FDP} - \mathbf{1}), \quad (8)$$

\mathbf{C}^{FDP} je desni Cauchy-Greenov tenzor, μ^{FDP} parametar materijala.

4 DISKUSIJA

Mehanički utjecaj tromba na stijenu aorte je sporan: neki istraživači tvrde da tromb smanjuje maksimalna naprezanja u stijenci, drugi sumnjaju u to. S jedne strane smanjenje naprezanja unutar stijenke smanjuje rizik od rupture, ali s druge smanjenje naprezanja utječe na proizvodnju i uklanjanje dijelova stijenke i oslabljuje ju.

Cilj je razviti numerički model ponašanja tromba i njegovih slojeva zasebno podvrgnutih dvoosnom opterećenju i usporedbom s eksperimentalnim podacima iz

literature odrediti parametre materijala strukturalno bitnih dijelova tromba. To bi bila znatna pomoć kod opisivanje mehaničkog utjecaja tromba na rast aneurizme i određivanja koliki dio naprezanja tromba može preuzeti. Stvarni tromb je obično ekscentričan, pa debljina uzoraka tromba ovisi o mjestu s kojeg se uzimaju uzorci. S obzirom da je model iz [6] ograničen osnosimetričnom cilindričnom geometrijom, uzorci tromba neće biti realni i biti će konstantne debljine. Unatoč tome očekujemo da će ovaj model biti veoma koristan, jer će dati vezu između stvarnih eksperimenata i prvog modela ILT-a razvijenog u [6].

Literatura:

- [1] Adolph, R., Vorp, D.A., Steed, D.L., Webster, M.W., Kameneva, M. V, Watkins, S.C., "Cellular content and permeability of intraluminal thrombus in abdominal aortic aneurysm", Journal of Vascular Surgery, Vol.25, 1997, str. 916–26.
- [2] Arzani, A., Shadden, S.C., "Characterization of the transport topology in patient-specific abdominal aortic aneurysm models", Physics of Fluids, Vol.24, 2012, str. 81901-1-16.
- [3] Tong, J., Cohnert, T., Regitnig, P., Holzapfel, G.A., "Effects of age on the elastic properties of the intraluminal thrombus and the thrombus-covered wall in abdominal aortic aneurysms: biaxial extension behaviour and material modelling", European Journal of Vascular and Endovascular Surgery, Vol.42, 2011, str. 207–19.
- [4] Van Dam, E.A., Dams, S.D., Peters, G.W.M., Rutten, M.C.M., Schurink, G.W.H., Buth, J., Van de Vosse, F.N., "Determination of linear viscoelastic behavior of abdominal aortic aneurysm thrombus", Biorheology Vol.43, 2006, str. 695–707.
- [5] Vande Geest, J.P., Sacks, M.S., Vorp, D.A., "The effects of aneurysm on the biaxial mechanical behavior of human abdominal aorta", Journal of Biomechanics, Vol.39, 2006, str. 1324–34.
- [6] Virag, L., Karšaj, I., Humphrey J.D., "Interaction of Intraluminal Thrombus and Aortic Wall - 3-D Numerical Model" Proceedings of 8th European Solid Mechanics Conference 2012, Graz AT, 2012, CD-ROM edition
- [7] Wang, D.H.J., Makaroun, M., Webster, M.W., Vorp, D.A., "Mechanical Properties and Microstructure of Intraluminal Thrombus From Abdominal Aortic Aneurysm", Journal of Biomechanical Engineering, Vol.123, 2001, str. 536.
- [8] Wang, R., Gleason, R.L., "A mechanical analysis of conduit arteries accounting for longitudinal residual strains", Annals of biomedical engineering, Vol.38, 2010, str. 1377–87.

Autori:

Vedran Vindiš, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel.: 616 8490, fax: 616 8187, e-mail: vedran.vindis@fsb.hr

Lana Virag, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel.: 616 8490, fax: 616 8187, e-mail: lana.virag@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/virag/

Igor Karšaj, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel.: 616 8125, fax: 616 8187, e-mail: igor.karsaj@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/karsaj/

MEĐUDJELOVANJE INTRALUMINALNOG TROMBA I ANEURIZMATIČNE STIJENKE AORTE

Virag, L., Wilson, J. S., Karšaj, I. & Humphrey, J. D.

Sažetak: Aneurizma abdominalne aorte (AAA) je nepovratno, lokalizirano proširenje infrarenalne aorte koje u većini (oko 80%) slučajeva sadrži intraluminalni tromb (ILT). Ovdje predstavljen je prvi model rasta i restrukturiranja aneurizme abdominalne aorte koji uzima u obzir sveobuhvatni utjecaj intraluminalnog tromba na stijenu aorte: kako s mehaničkog gledišta (utjecaj tromba na raspodjelu naprezanja unutar stijenke aorte, a time i na proizvodnju i uklanjanje strukturalno bitnih dijelova stijenke aorte), tako i sa biokemijskog (utjecaj proteolitički aktivnog intraluminalnog tromba na povećanje razgradnje komponenti stijenke krvne žile), u nadi da će to pomoći boljem razumijevanju patofiziologije aneurizmi. Model će biti ograničen na osnosimetričnu cilindričnu geometriju.

Ključne riječi: Aneurizma abdominalne aorte, intraluminalni tromb, rast i restrukturiranje

1 UVOD

Aneurizma abdominalne aorte (AAA) je kronični degenerativni poremećaj, trajno i nepovratno lokalizirano proširenje aorte i čest uzrok smrti kod starijih osoba. Iako sam proces nastanka AAA nije poznat, poznati su rizični faktori poput muškog spola, starosne dobi, pušenja, hipertenzije, plućnih bolesti i bolesti krvožilnog sustava. AAA se definira ili kao infrarenalna aorta s promjerom većim od 30 mm, ili kao 50%-tно proširenje u odnosu na neki bliski presjek. Liječenje AAA se svodi na operativni zahvat, a trenutno jedini kriteriji za slanje pacijenta na operaciju je maksimalni promjer aneurizme veći od 5-5,5 cm i iskustvo liječnika. Istraživanja su pokazala da, iako je rizik od rupture zasigurno povezan s maksimalnim promjerom, korištenje samo tog pokazatelja za odlučivanje o odlasku na operaciju ne samo da može dovesti do nepotrebnih operativnih zahvata u slučaju stabilnih velikih aneurizmi, nego može isključiti neke potrebne (aneurizme promjera manjeg od 5 cm kod kojih je došlo do rupture). Studije su pokazale da u 10-24% slučajeva aneurizme manje od 5 cm dožive rupturu, ali i da 25-54% aneurizmi većih od 7,1 cm ne rupturira, [1]

2 METODOLOGIJA

Stijenka aorte se sastoji od tri sloja: intime, medije i adventicije. Svaki od slojeva ima različiti udio strukturalno bitnih dijelova koji daju krutost stijenci: kolagena, elastina i glatkih mišićnih stanica. Rodriguez et al. ([9]) su potaknuli istraživanja na području matematičkog modeliranja rasta, odnosno promjena u masi, i restrukturiranja, tj. promjene mikrostrukture, mekih tkiva. Modeliranje rasta i restrukturiranja (*growth*

and remodeling, G&R) arterija je dobro istraženo. Mi koristimo pristup prema [3], odnosno matematički model iz [5] i [6]. Model se temelji na tri osnovne pretpostavke: prvo, elastin, kolagena vlakna i mišićne stanice se unutar smjese zajedno deformiraju (*constrained mixture theory*); drugo, mišićne stanice i kolagena vlakna se kontinuirano obnavljaju, za razliku od elastina koji se nakon rođenja više ne proizvodi; i treće, svaki strukturalno bitni dio proizведен u trenutku τ je položen u izvanstatičnu matricu s početnim istezanjem $\mathbf{G}^k(\tau)$, odnosno homeostatskom vrijednosti naprezanja/deformacije. Masa svakog konstituenta se mijenja u vremenu, ovisno i brzini stvaranja/uklanjanja mase stukrualno bitnog dijela \dot{m}^k i funkciji uklanjanja (*survival function*), prema [3]. Primjerice, masa dijela k u trenutnom trenutku s opisujemo izrazom:

$$M^k(s) = M^k(0)Q^k(s) + \int_0^s \dot{m}^k(\tau)q^k(s-\tau)d\tau, \quad (1)$$

gdje je M^k ukupna masa dijela k (mišićne stanice, 4 familije kolagenih vlakana), q^k je funkcija uklanjanja, te $Q^k(s) = q^k(s-0)$.

Anizotropno, Cauchyjevo naprezanje aorte se zadaje kao:

$$\mathbf{t} = \frac{2}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T + t^{\text{active}} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta, \quad (2)$$

gdje je \mathbf{F} gradijent deformiranja koji povezuje trenutnu konfiguraciju i konfiguraciju neopterećene smjese, \mathbf{C} je desni Cauchy-Greenov tenzor, t^{active} je kontraktilnost mišićnih stanica u cirkularnom smjeru, a W funkcija energije deformiranja izračunata preko pravila smjesa kao $W = \sum_k W^k$. U taj izraz su maseni udjeli pojedinog strukturalnog dijela k uračunati u W^k , kao u [4]:

$$W^k(s) = \frac{M^k(0)}{\int_k M^k(s)} \hat{W}^k \left(\mathbf{C}_{n(0)}^k(s) \right) Q^k(s) + \int_0^s \frac{\dot{m}^k(\tau)}{\int_k M^k(s)} \hat{W}^k \left(\mathbf{C}_{n(\tau)}^k(s) \right) q^k(s-\tau)d\tau. \quad (3)$$

U jednadžbi (3) \hat{W}^k označava funkciju specifične energije deformiranja za svaki strukturalno bitni dio.

U 80% AAA dolazi od oštećenja endotelnih stanica, zbog čega krv dolazi u dodir s kolagenom i stvara se intraluminalni tromb (ILT), [10; 12], s proteolitički aktivnim luminalnim slojem. Za razliku od modeliranja arterija, modeli razvijeni za opisivanje nastanka i razvijanja tromba se odnose samo na privremene krvne ugruške koji nestaju unutar nekoliko sati ili dana i ne bave se njegovim utjecajem na krvnu žilu, nego isključivo zgrušnjavanjem krvi (tj. stvaranjem fibrina, fibrinogenezom), te njegovom razgradnjom pomoću plazmina (fibrinolizom). Iz tog razloga smo razvili novi matematički model temeljen na eksperimentalnim rezultatima koji se mogu pronaći u literaturi. Model opisuje nastanak i rast intraluminalnog tromba, kao i razvoj njegovih mehaničkih svojstava i pod osnovnom pretpostavkom da unutarnji promjer, odnosno površina kroz koju teče krv, ostaje nepromijenjen pod konstantnim vanjskim opterećenjem. Tromb na stijenku ima mehanički i biokemijski utjecaj. Inzoli et al. ([4]) prvi su predložili mogućnost da ILT može služiti kao mehanička zaštita stijenke AAA

od prevelikih naprezanja. Da bi izračunali mehanički utjecaj tromba na stijenku, moramo izračunati koliki dio naprezanja tromb može preuzeti. Naprezanje u trombu je modelirano na sličan način kao i u stijenci. Funkcija energije deformiranja za fibrin se temelji na modelu iz [11]:

$$\hat{W}^f = \mu(I_1 - 3) + \frac{k_1}{k_2} \left[\exp(k_2(I_1 - 3)^2) - 1 \right]. \quad (4)$$

gdje su μ , k_1 i k_2 parametri slični naprezanju (mjere se u kPa), dok je $I_1 = \text{tr}(\mathbf{C})$. U intramedijalnom i abluminarnom sloju, vlačnoj čvrstoći osim fibrina doprinose i produkti degradacije fibrina (FDPs). S obzirom da se gubi vlaknasta struktura, koristimo Neo-Hookeov oblik funkcije energije deformacije:

$$\hat{W}^{\text{FDP}} = \mu^{\text{FDP}} \text{tr}(\mathbf{C}_{n(r)}^{\text{FDP}} - \mathbf{1}) \quad (5)$$

Za definiranje mehaničkih svojstava tromba su bitni i eritrociti u luminalnom sloju, odnosno praznine u intramedijalnom i abluminarnom, koji imaju samo tlačna mehanička svojstva.

S druge strane, osim što ILT smanjuje maksimalna naprezanja unutar stijenke, on ju i oslabljuje. Naime, u luminalnom sloju se nalaze upalne stanice iz krvi (npr. T-limfociti), dok ostala dva sloja sadrže mnogo manje stanica i molekula. Upalne stanice u luminalnom sloju izlučuju proteolitičke enzime, matriks metaloproteaze, u latentnom obliku (proMMP). Nakon aktivacije plazminom ti enzimi razgrađuju kolagen i elastin, što stijenku čini slabijom i podložnom razvoju aneurizme. Osim u luminalnom sloju, upalne stanice se nalaze i u mediji i adventiciji. Naime, aorta je najveća krvna žila u ljudskom tijelu, te se dijelovi zdrave aorte koji najviše udaljeni od lumena opskrbljuju kisikom pomoću mreže kapilara koje se zovu *vasa vasorum*. U slučaju aneurizme se površina *vase vasorum* višestruko poveća, što uz povećani dotok kisika za posljedicu ima i povećani broj upalih stanica koje proizvode proMMP ([8]). To znači da difuzija proteaza i kisika nije jednosmjerna, već ima dva izvora (dio tromba najbliži lumenu i dio stijenke najudaljeniji od njega), a njihova važnost se mijenja tijekom vremena. Prema tome, da bi modelirali biokemijski utjecaj tromba, treba definirati raspodjelu proteaza po debljini stijenke. S obzirom da je potrebno samo kvazi-statičko rješenje difuzijske jednadžbe s dva izvora, pojednostavili smo problem na rješavanje prvog Fickovog zakona

$$\frac{\partial M^{\text{elas}}}{\partial t} = \nabla \cdot [D \nabla M^{\text{elas}}] \quad (6)$$

koristeći dostupne eksperimentalne podatke o radikalnoj distribuciji proteaza iz [2]. Rubni uvjeti su definirani kao raspoloživa količina elastaza/kolagenaza u luminalnom sloju, odnosno u adventiciji. Unutar tromba ima $K_N^{\text{elas}} M_{\text{tot}}^N$ elastaza (i $K_N^{\text{MMP}} M_{\text{tot}}^N$ kolagenaza), gdje je M_{tot}^N ukupna količina leukocita (neutrofila), a K_N^{elas} faktor koji opisuje koliko elastaza se proizvodi po jedinici leukocita u vremenskom koraku. Te proteaze se nalaze na radijusu r_L , definiranom na sličan način kao težište:

$$r_L(s) = \frac{1}{M_{\text{tot}}^N(s)} \sum_i M_i^N(s) r_i(s). \quad (7)$$

Broj leukocita u svakom sloju tromba označavamo sa M_i^N . Količina proteaza na vanjskom radijusu ovisi o površini vase *vasorum* A_{tot}^{VV} i ukupnoj količini upalnih stanica u stijenci M_{tot}^{WBC} :

$$M^k(r, s) = \frac{K_N^k M_{tot}^N(s) - K_{WBC}^k M_{tot}^{WBC}(s) - K_{VV}^k A_{tot}^{VV}(s)}{\ln(r_L(s) / r_o)} \ln\left(\frac{r(s)}{r_o}\right) + K_N^k M_{tot}^N(s), \quad (8)$$

gdje k mogu biti elastaze ili kolagenaze.

Nakon što smo odredili radijalnu raspodjelu proteaza, možemo definirati funkcije uklanjanja. Primjerice za elastin:

$$q_i^e(s - \tau) = \exp\left(-\int_{\tau}^s (k_q^e + w_{q, elas}^e M^{elas}(r, \tau)) d\tau\right), \quad (9)$$

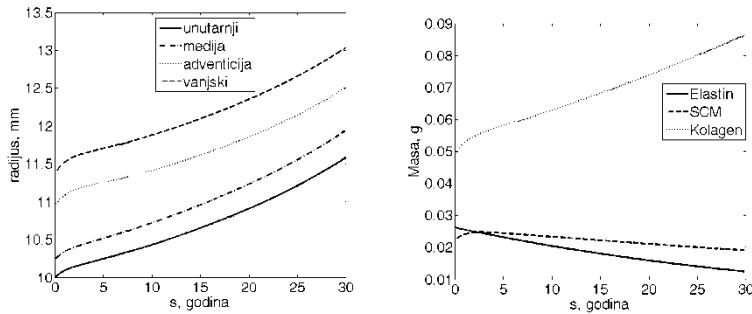
gdje je k_q^e parametar brzine uklanjanja mase elastin uslijed polu-života od 40 godina, a $w_{q, elas}^e$ težinski faktor.

Uz utjecaj tromba na stijenku je modelirana i apoptoza i smanjenje maksimalne kontraktilnosti mišićnih stanica.

3 REZULTATI

3.1 Starenje zdrave stijenke aorte

Za razliku od kolagena i mišićnih stanica, elastin se stvara isključivo prije rođenja, ali ima znatno duži poluživot od 40 godina (u odnosu na 70 dana za kolagen). Starenjem se gubi elastin koji se ne može nadoknaditi, te se zbog toga i zdrava krvna žila širi. Da bi vidjeli kako se model ponaša kad se elastin razgrađuje, što je tipično za AAA, simulirali smo starenje zdrave stijenke aorte. Iz literature ([7]) očekujemo da će se unutarnji promjer povećavati približno 0,07 mm godišnje.



Sl. 1. Promjena radijusa (lijevo) i masa strukturalno bitnih dijelova (desno) u slučaju starenja

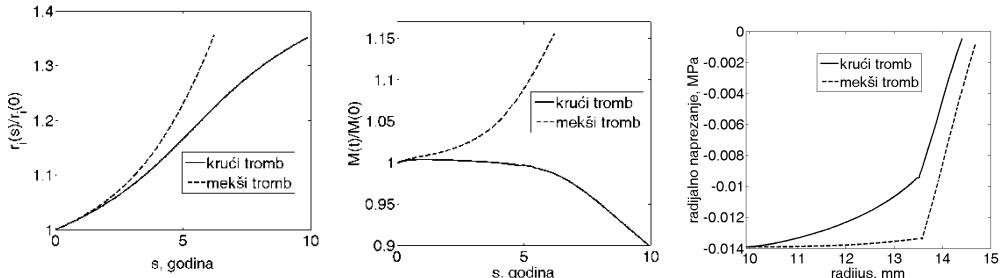
Kod simulacije ta vrijednost ovisi o parametrima koji opisuju brzinu stvaranja/uklanjanja kolagena i mišićnih stanica uslijed promjene naprezanja i koncentracije vazodilatatora (K_σ i K_C).

Na slici 1. su prikazani rezultati za vrijednosti $K_\sigma = 0,55$ i $K_C = 0,15$. Za takve zadane vrijednosti unutarnji promjer aorte raste prosječnom 0,11 mm godišnje tijekom 30 godina. Za parametre $K_\sigma = 0,75$ i $K_C = 0,25$ (brža adaptacija kolagena na

promjene), brzina širenja lumena se smanjuje na 0,5 mm/godina (rezultati nisu prikazani).

3.2 Utjecaj mehaničkih svojstava intraluminalog tromba na rast aneurizme

U slučaju aneurizme, rast je difuzije proteaza iz luminalnog sloja ILT-a mnogo brži: širenje aneurizme od 2 mm/godina se smatra stabilnim rastom, dok se rast od 1 cm godišnje smatra visoko rizičnim za rupturu.



Sl. 2. Vremenska promjena unutarnjeg radijusa aorte (lijevo) i ukupne mase stijenke (sredina), te radikalna raspodjela naprezanja kroz tromb i stijenku (desno) za različita mehanička svojstva tromba

Slika 2. prikazuje rezultate za tromb sa parametrima $\mu = 9,7 \text{ kPa}$, $k_1 = 15,9 \text{ kPa}$ i $k_2 = 2,7$ (krući tromb), kao u [11], te deset puta manjim (mekši tromb). U slučaju krućeg tromba, rast je stabilniji (prosječna brzina rasta vanjskog promjera aneurizme je 0,68 mm godišnje, dok je kod mekšeg 1,09 mm). Na slici 2. desno je prikazana raspodjela radikalnih naprezanja kroz tromb i stijenku aorte. Krući tromb preuzima otprilike trećinu naprezanja stijenke, dok mekši tromb gotovo da ne uspijeva nositi nikakva naprezanja. To za posljedicu ima drugačije promjene u masi strukturalno bitnih dijelova stijenke i ukupna masa stijenke (po jedinici duljine) kod krućeg dijela pada, odnosno debljina stijenke se uz stanjenje uslijed širenja dodatno smanjuje zbog pada mase. Kod mekšeg tromba ukupna masa stijenke raste, te debljina stijenke ostaje približno konstantna.

4 ZAKLJUČAK

Model zdrave aorta pokazuje dobra poklapanja s literaturom. Kod simuliranja rasta aneurizme, osim biokemijskom utjecaju na razgradnju proteina u stijenci (elastina i kolagena), tromb ima značajno mehaničko djelovanje. Stvaranje strukturalno bitnih dijelova stijenke je proporcionalno razlici u naprezzanjima u odnosu na zdravo, homeostatsko stanje. Da bi mogli točnije računati raspodjelu naprezanja kroz tromb i stijenku, tj. simulirati mehanički utjecaj tromba, potrebno je poznavati parametre materijala za strukturalno bitne dijelove tromba, prvenstveno fibrina koji daje čvrstoću ILT-u.

Literatura:

- [1] Darling, R.C., Messina, C.R., Brewster, D.C., Ottinger, L.W., "Autopsy study of unoperated abdominal aortic aneurysms. The case for early resection" Circulation, Vol.45, 1977, str. II161–4.
- [2] Fontaine, V., Touat, Z., Mtairag, E.M., Vranckx, R., Louedec, L., Houard, X., Andreassian, B., Sebbag, U., Palombi, T., Jacob, M.-P., Meilhac, O., Michel, J.-B., 2 "Role

of leukocyte elastase in preventing cellular re-colonization of the mural thrombus", The American journal of pathology, Vol.164, 2004, str. 2077–87.

[3] Humphrey, J.D., Rajagopal, K.R., "A constrained mixture model for growth and remodeling of soft tissues", Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol.12, 2002, str. 407–430.

[4] Inzoli, F., Boschetti, F., Zappa, M., Longo, T., Fumero, R., "Biomechanical factors in abdominal aortic aneurysm rupture", European Journal of Vascular Surgery, Vol.7, 1993, str. 667–74.

[5] Karšaj, I., Humphrey, J.D., "A multilayered wall model of arterial growth and remodeling", Mechanics of materials, Vol.44, 2012, str. 110–119.

[6] Karšaj, I., Soric, J., Humphrey, J.D. "A 3-D framework for arterial growth and remodeling in response to altered hemodynamics", International Journal of Engineering Science, Vol.48, 2011, str. 1357–1372.

[7] Länne, T., Sonesson, B., Bergqvist, D., Bengtsson, H., Gustafsson, D., "Diameter and compliance in the male human abdominal aorta: influence of age and aortic aneurysm", European journal of vascular surgery, Vol.6, 1992, str. 178–84.

[8] Mäyränpää, M.I., Trosien, J.A., Fontaine, V., Folkesson, M., Kazi, M., Eriksson, P., Swedenborg, J., Hedin, U., " Mast cells associate with neovessels in the media and adventitia of abdominal aortic aneurysms", Journal of Vascular Surgery, 50, 2009, 388–96.

[9] Rodriguez, E.K., Hoger, A., McCulloch, A.D., "Stress-dependent finite-growth in soft elastic tissues", Journal of biomechanics, Vol.27, 1994, str. 455–467.

[10] Simão da Silva, E., Rodrigues, A.J., Magalhães Castro de Tolosa, E., Rodrigues, C.J., Villas Boas do Prado, G., Nakamoto, J.C., "Morphology and diameter of infrarenal aortic aneurysms: a prospective autopsy study", Cardiovascular surgery, 8, 2000, 526–32.

[11] Tong, J., Cohnert, T., Regitnig, P., Holzapfel, G.A., "Effects of age on the elastic properties of the intraluminal thrombus and the thrombus-covered wall in abdominal aortic aneurysms: biaxial extension behaviour and material modelling", European Journal of Vascular and Endovascular Surgery, Vol.42, 2011, str. 207–19.

[12] Vande Geest, J.P., Sacks, M.S., Vorp, D.A.. "The effects of aneurysm on the biaxial mechanical behavior of human abdominal aorta", Journal of Biomechanics, Vol.39, 2006, str. 1324–34.

Autori:

Lana Virag, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel.: 616 8490, fax: 616 8187, e-mail: lana.virag@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/virag/

John S. Wilson, Yale University, School of Engineering and Applied Mechanics, 55 Prospect street, New Haven, CT 06511, tel. +1 (203) 432 6428, e-mail: john.wilson@yale.edu

Igor Karšaj, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel.: 616 8125, fax: 616 8187, e-mail: igor.karsaj@fsb.hr, web stranica: www.fsb.unizg.hr/lnm/staff/karsaj/

Jay D. Humphrey, Yale University, School of Engineering and Applied Mechanics, 55 Prospect street, New Haven, CT 06511, tel. +1 (203) 432 6428, e-mail: jay.humphrey@yale.edu, web stranica: seas.yale.edu/faculty-research/faculty-directory/jay-humphrey

ZLATAR RAD
Zlatar dario

PRIMJENA FEM/DEM METODE U ANALIZI ČVOROVA ARMIRANO-BETONSKIH OKVIRA

Živaljić, N., Nikolić, Ž., Smoljanović, H.

Sažetak: U ovom radu prikazana je primjena kombinirane metode konačno-diskretnih elemenata (FEM/DEM) u numeričkoj analizi čvorova AB okvira. Analiza je provedena pomoću novog numeričkog modela za simulaciju ponašanja AB konstrukcija izloženih statičkom i dinamičkom opterećenju zasnovanog na FEM/DEM metodi. Pojava pukotine ostvarena je modelom diskretnе pukotine, a ponašanje materijala u pukotini temelji se na eksperimentalnim krivuljama koje opisuju stanje naprezanja u betonu oko pukotine te deformacije armaturne šipke. Primjena prikazanog modela provedena je analizom nastanka i širenja pukotina u krajnjim i srednjim čvorovima AB okvira izloženih monotono rastućem i cikličkom opterećenju za različite tipove armiranja.

Ključne riječi: FEM/DEM, čvor AB okvira, statičko opterećenje, dinamičko opterećenje

1 UVOD

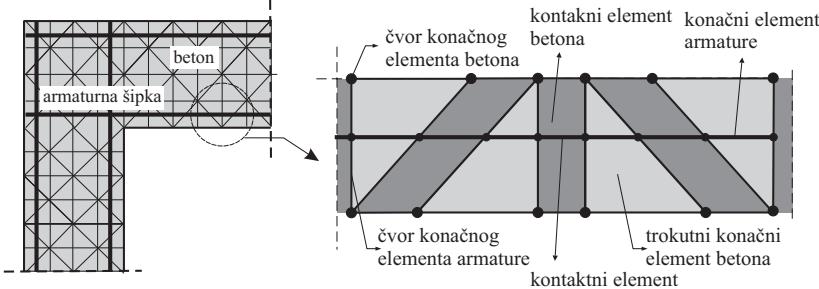
Za predviđanje ponašanja i potpunog sloma AB konstrukcija, numerički model bi trebao biti u mogućnosti uključiti pojave vezane za ponašanje AB konstrukcija uslijed dinamičkog djelovanja u linearno elastičnoj fazi, pojavu i razvoj pukotina, gubitak energije uslijed pojave nelinearnih efekata, inercijalne efekte uslijed gibanja, međudjelovanja koja su posljedica dinamičkog kontakta te naposljetku postizanja stanja mirovanja koje se javlja kao posljedica gubitka energije u konstrukciji [1, 2].

U ovom radu prikazan je model nastanka i razvoja pukotine u betonu [3] razvijen u okviru FEM/DEM metode. Ovaj model zasniva se na kombinaciji klasične formulacije očvršćivanja u konstitutivnom zakonu ponašanja materijala u metodi konačnih elemenata i modela pukotine za vlačno omekšanje u relaciji naprezanje-deformacija. U okviru modela prikazanog u ovom radu implementiran je model armaturne šipke [4, 5] u postojeći Y2D program zasnovan na FEM/DEM metodi [6, 7]. Pucanje betona je omogućeno kombinacijom razmazanog i diskretnog modela pukotine. Beton i armatura se analiziraju odvojeno, ali njihova veza pri otvaranju i širenju pukotina uzeta je u obzir relacijama koje opisuju odnos veličine pukotine u betonu i deformacije armaturne šipke [8]. Cikličko ponašanje čelika modelirano je poboljšanim Katovim modelom [9].

2 MODELIRANJE AB KONSTRUKCIJE

U ovom radu koristi se razvijeni model armature koji je implementiran u Y2D kod zasnovan na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata. Beton je diskretiziran trokutnim konačnim elementima, dok su armaturne šipke modelirane dvočvornim

štapnim elementima ugrađenim u konačne elemente betona. Način diskretizacije AB konstrukcije prikazan je na Slici 1.



Sl. 1. Diskretizacija AB konstrukcije

U prvom koraku pojedina armatura se unosi kao jedna šipka. Sjecišta armaturne šipke i krajeva konačnih elemenata betona definiraju konačne elemente armature. Do trenutka nastanka pukotine konstrukcija se ponaša kao kontinuum. Deformacija trokutnog elementa utječe na deformaciju konačnog elementa armature. Nastanak i razvoj pukotine u betonu odvija se unutar kontaktnog elementa betona. Istodobno se armatura unutar kontaktnog elementa betona deformira, a njeno nelinearno ponašanje modelira se linijskim kontaktnim elementom. Ponašanje kontaktnog elementa betona i armature analizira se odvojeno, ali je njihova veza pri otvaranju i širenju pukotina uzeta u obzir relacijama koje opisuju odnos veličine pukotine u betonu i deformacije armaturne šipke.

2.1 Model betona u kontaktnom elementu betona

U ovom radu model betona zasnovan je na nastanku i razvoju pukotine u modu I i II [3]. Model je razvijen na osnovu eksperimentalnih krivulja naprezanje-deformacija za beton u vlaku. Površina ispod te krivulje sastoji se od dijela kojim se opisuje ponašanje betona do trenutka nastanka pukotine [3] i dijela kojim je opisano vlačno omekšanje nakon prekoračenja vlačne čvrstoće [10]. Mjesto nastanka pukotine podudara se s rubom konačnog elementa. Kontinuitet između elemenata osiguran je *penalty* metodom [1]. Odvajanjem krajeva konačnih elemenata nastaje naprezanje kao funkcija veličine pukotine δ [3]. Veza između susjednih elemenata do trenutka prekoračenja vlačne čvrstoće osigurana je modelom normalnih i posmičnih opruga [3].

2.2 Model čelika u kontaktnom elementu armature

U ovom modelu veza između veličine pukotine u betonu i deformacije armaturne šipke opisana je relacijama koje su razvili Shima [11] i Shin [8]. Model se temelji na eksperimentalnim krivuljama koje opisuju stanje deformacije armaturne šipke u pukotini uzimajući u obzir i plastične deformacije nastale uslijed cikličkog opterećenja.

Veza deformacija- izvlačenje prije pojave tečenja usvojena je kao:

$$s = \varepsilon_s (6 + 3500 \varepsilon_s), \quad (1)$$

$$s = \left(\frac{S}{D} \right) \cdot K_{fc}, \quad K_{fc} = \left(\frac{f'_c}{20} \right)^{2/3}, \quad (2)$$

gdje je $s = s(\varepsilon_s)$ normalizirano izvlačenje armaturne šipke, D je promjer, a f'_c tlačna čvrstoća betona. Normalizirano izvlačenje nakon pojave tečenja definirano je izrazom:

$$s = s_{pl} + s_e, \quad (3)$$

gdje je s_e normalizirano izvlačenje armaturne šipke u elastičnoj zoni, a s_{pl} u zoni plastifikacije. U kontaktnom elementu armature modeliran je utjecaj zakriviljenosti duž armaturne šipke u zoni savijanja [6, 7]. Utjecaj udaljenosti susjednih pukotina uzet je u obzir preko faktora redukcije α koji je funkcija udaljenosti pukotine l_{cr} . Reducirano normalizirano izvlačenje definirano je izrazom:

$$s_{cr} = \alpha s \quad (4)$$

gdje se s izračunava prema izrazu (1), a α je usvojen kao:

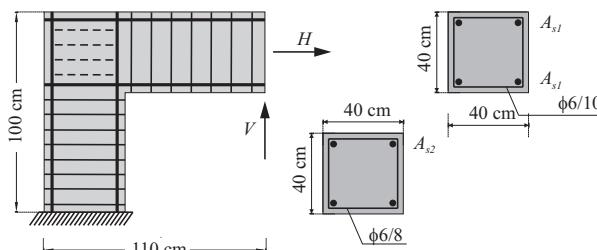
$$\alpha = 1 - e^{-(0.065l_{cr}/D+0.5)^3}, \quad \alpha \leq 0.087l_{cr}/D \quad (5)$$

U okviru ovog rada nelinearno ponašanje materijala armature opisano je poboljšanim Katovim modelom za simulaciju cikličkog ponašanja čelika [9].

3 NUMERIČKI PRIMJERI

3.1 Krajnji čvor okvira izložen monotono rastućem opterećenju

U ovom primjeru analiziran je krajnji čvor okvira s geometrijskim karakteristikama i načinom armiranja prikazanim na Slici 2. Karakteristike materijala prikazane su u Tablici 1.



Sl. 2. Geometrija i način armiranja krajnjeg čvora okvira

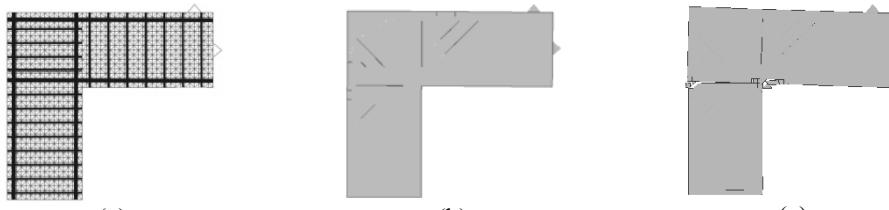
Beton	Čelik		
Modul elastičnosti, E_c (MPa)	29730	Modul elastičnosti, E_s (MPa)	210 000
Poissonov koeficijent, ν	0.2	Granica popuštanja, f_y (MPa)	400
Vlačna čvrstoća, f_t (MPa)	3.15	Granična čvrstoća, f_u (MPa)	500
Tlačna čvrstoća, f_c (MPa)	30.0	Površina pop. presjeka, A_{s1} (m^2)	0.00026
Energija loma, G_f (N/m)	100	Površina pop. presjeka, A_{s2} (m^2)	0.000452

Tablica 1. Karakteristike materijala kao ulazni parametri

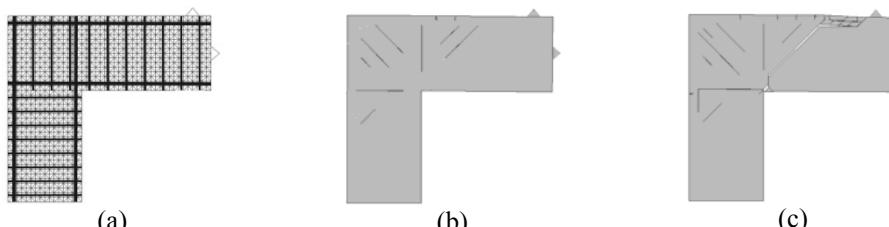
Čvor je armiran na dva načina te je izložen monotono rastućem vertikalnom i horizontalnom opterećenju iste vrijednosti. Analiziran je nastanak i širenje pukotina za oba tipa armiranja.

Diskretizacija čvora i nastale pukotine prikazane su na Slikama 3 i 4. Može se uočiti da za I. tip armiranja dominantne pukotine nastaju u vrhu stupa, dok se za drugi slučaj lom ostvaruje u gredi.

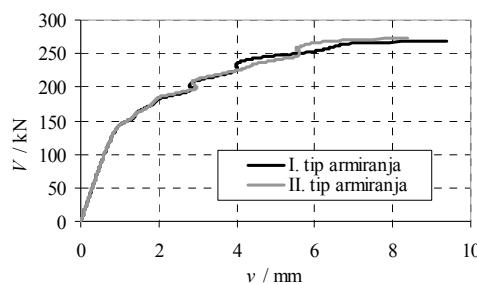
Slika 5 prikazuje vezu vertikalne sile i vertikalnog pomaka za oba tipa armiranja odakle se može uočiti da je za slučaj armiranja s horizontalnim vilicama u čvoru ostvaren veći pomak, ali je nosivost manja 1.5%.



Sl. 3. Krajnji čvor okvira s horizontalnim vilicama (I. tip armiranja): (a) diskretizacija, pukotine za sile: (b) $V=H=254.8$ kN, (c) after $V=H=268.2$ kN.



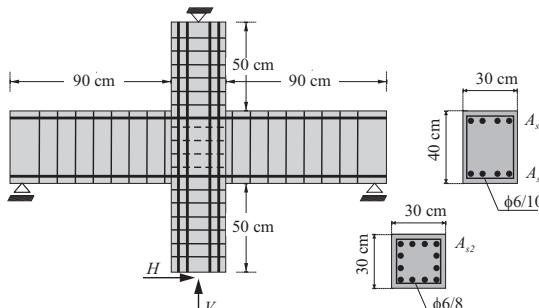
Sl. 4. Krajnji čvor okvira s vertikalnim vilicama (II. tip armiranja): (a) diskretizacija, pukotine za sile: (b) $V=H=265.3$ kN, (c) after $V=H=272.2$ kN.



Sl. 5. Veza vertikalna sila - vertikalni pomak za pojedini tip armiranja

3.2 Srednji čvor okvira izložen cikličkom opterećenju

U ovom primjeru analiziran je srednji čvor okvira s geometrijom i načinom armiranja prikazanim na Slici 6. Karakteristike materijala prikazane su u Tablici 2.

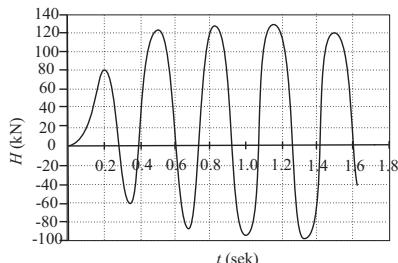


Sl. 6. Geometrija i način armiranja srednjeg čvora okvira

Čvor je armiran na tri načina (horizontalne vilice u čvoru – I. tip; vertikalne vilice u čvoru – II. tip; bez vilica u čvoru – III. tip) i izložen djelovanju konstantne vertikalne sile $V=700$ kN i cikličkom horizontalnom opterećenju (Slika 7).

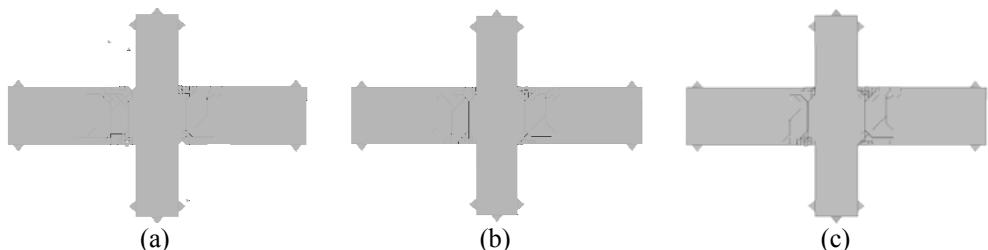
Beton		Čelik	
Modul elastičnosti, E_c (MPa)	29730	Modul elastičnosti, E_s (MPa)	210 000
Poissonov koeficijent, ν	0.2	Granica popuštanja, f_y (MPa)	400
Vlačna čvrstoća, f_t (MPa)	3.15	Granična čvrstoća, f_u (MPa)	500
Tlačna čvrstoća, f_c (MPa)	30.0	Površina pop. presjeka, A_{sl} (m ²)	0.000452
Energija loma, G_f (N/m)	100	Površina pop. presjeka, A_{s2} (m ²)	0.001357

Tablica 2. Karakteristike materijala kao ulazni parametri

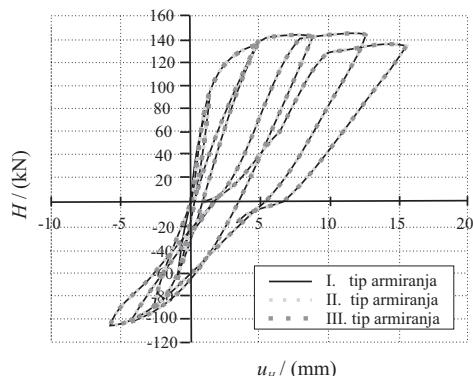


Sl. 7. Cikličko opterećenje srednjeg čvora okvira

Na Slici 8 prikazan je način širenja pukotina za sva tri tipa armiranja na kraju ostvarenog horizontalnog opterećenja. Slika 9 prikazuje vezu horizontalne sile i pomaka za sva tri tipa armiranja, gdje se može uočiti vrlo sličan zakon ponašanja



Sl. 8. Pukotine nastale u srednjem čvoru okvira na kraju ostvarenog horizontalnog opterećenja:
(a) I. tip armiranja, (b) II. tip armiranja, (a) III. tip armiranja



Sl. 9. Veza horizontalna sila – horizontalni pomak za pojedini tip armiranja

5 ZAKLJUČAK

U ovom radu prikazan je numerički model za analizu ponašanja AB konstrukcija zasnovan na kombiniranoj metodi konačno-diskretnih elemenata.

Razvijeni numerički model armature temelji se na eksperimentalnim krivuljama koje opisuju stanje deformacije armaturne šipke u pukotini uvezši u obzir utjecaj zakriviljenosti duž armaturne šipke u zoni savijanja te utjecaj udaljenosti pukotina. Pucanje betona opisano je modelom diskretne pukotine. U prikazanom modelu koriste se materijalni modeli za simulaciju cikličkog ponašanja betona i armature.

Primjena prikazanog modela provedena je analizom krajnjeg i srednjeg čvora AB okvira izloženih monotono rastućem i cikličkom opterećenju.

Literatura :

- [1] Munjiza, A. "The combined finite-discrete element method", John Wiley & Sons, 2004.
- [2] Munjiza, A., Owen, D.R.J., Bicanic, N., "A combined finite-discrete element method in transient dynamics of fracturing solids", Eng. Computations, Vol.12, 1995, str. 145-174.
- [3] Munjiza, A., Andrews, K.R.F. and White, J.K., "Combined single and smeared crack model in combined finite-discrete element method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 44, 1999, str. 41-57.
- [4] Živaljić, N., Nikolić, Ž., Munjiza, A., "A combined finite discrete element model for reinforced concrete under seismic load", E. Onate, R. Owen, D. Perić, B. Suarez eds. COMPLAS XI, Barcelona, 2011.
- [5] Nikolić, Ž, and Mihanović, A., "Non-linear finite element analysis of post-tensioned concrete structures", Engineering Computations, Vol. 14, 1997, str. 509-528.
- [6] Živaljić, N., "Metoda konačno-diskretnih elemenata za seizmičku 2D analizu AB konstrukcija", Disertacija, Sveučilište u Splitu, Hrvatska, Split, 2012.
- [7] Živaljić, N., Smoljanović, H., Nikolić, Ž., "A combined finite-discrete element model for RC structures under dynamic loading", Eng. Computations 2013, (accepted for publication).
- [8] Shin, H., Maekawa, K., Okamura, H. "Analytical approach of RC members subjected to reversed cyclic in plane loading", Proceeding of JCI Colloquium on Ductility of Concrete Structures and its Evaluation, 1988, str. 245-256.
- [9] Kato, B., "Mechanical properties of steel under load cycles idealizing seismic action", Bulletin D'Information, AICAP-CEB symposium, Rome, Vol. 131, 1979, str. 7-27.
- [10] Hordijk, D.A., "Tensile and tensile fatigue behaviour of concrete – experiments, modelling and analyses", Heron, Vol. 37, 1992, str. 3-79.
- [11] Shima H., Chou L. and Okamura H., "Micro and macro model for bond behaviour in RC", Jour. Fac. Eng., The University of Tokyo, Vol. 39, 1987, str. 133-194.

Autori:

Nikolina Živaljić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-323, e-mail: nikolina.zivaljic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

Željana Nikolić, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-332, e-mail: zeljana.nikolic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr

Hrvoje Smoljanović, Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, tel. 021/303-378, e-mail: hrvoje.smoljanovic@gradst.hr, web stranica: www.gradst.hr