



ZBORNIK RADOVA

Trećeg susreta Hrvatskog društva za mehaniku

Mirjana Bošnjak-Klečina
urednica



Osijek, 18. lipnja 2010.

Zbornik radova
Trećeg susreta
Hrvatskog društva za mehaniku



Osijek
18. lipnja 2010.

Zbornik radova Trećeg susreta Hrvatskog društva za mehaniku

Urednica: Mirjana Bošnjak-Klečina

Izdavač: Hrvatsko društvo za mehaniku

Oblikovanje korica: Grafika d.o.o. Osijek

Tisak: Grafika d.o.o. Osijek

Naklada: 100 primjeraka

ISBN 978-953-7539-12-2

**CIP zapis dostupan u računalnom katalogu Gradske i
sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 12103075**

Zbornik radova

Trećeg susreta
Hrvatskog društva za mehaniku

Osijek
18. lipnja 2010.

Urednica
Mirjana Bošnjak-Klečina



Osijek, 2010.

Treći susret Hrvatskog društva za mehaniku

Organizator skupa

HRVATSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKA

Podružnica Osijek
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Građevinski fakultet Osijek
Drinska 16a, 31000 Osijek

Sjedište: Fakultet strojarstva i brodogradnje
Sveučilište u Zagrebu
Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb
<http://www.csm.hr>

Organizacijski odbor

Mirjana BOŠNJAK-KLEČINA,	Sveučilište u Osijeku, predsjednica
Zdravko VIRAG,	Sveučilište u Zagrebu
Ivica SMOJVER,	Sveučilište u Zagrebu
Hrvoje KOZMAR,	Sveučilište u Zagrebu
Vladimir SIGMUND,	Sveučilište u Osijeku
Ivica GULJAŠ,	Sveučilište u Osijeku
Đurđica MATOŠEVIĆ,	Sveučilište u Osijeku
Jurko ZOVKIĆ,	Sveučilište u Osijeku

Pokrovitelji

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
&
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Građevinski fakultet, Osijek

**Zbornik radova
Trećeg susreta
Hrvatskog društva za mehaniku**

PREDGOVOR

U ruci držite Zbornik radova 3. susreta Hrvatskog društva za mehaniku. Ovakvi susreti su prvenstveno zamišljeni s ciljem boljeg međusobnog upoznavanja članova Društva i kao mogućnost mlađim članovima za uvježbavanje izlaganja svoga rada na kongresima. Oni su i dobra prilika za diskusiju o terminologiji na hrvatskom jeziku pa je stoga odlučeno da se svi radovi pišu i izlažu na hrvatskom jeziku, što pridonosi njegovanju i obogaćivanju našega jezika. To je posebno važno jer dobar dio članova Društva djeluje u nastavi na visokim učilištima pa imaju mogućnost širiti dogovorenu terminologiju studentima. Činjenica da je interes za ove skupove, gledajući prema broju radova i sudionika u proteklim godinama, u najmanju ruku konstantan, svjedoči o njihovoj korisnosti.

Već površnom analizom prisjelih radova može se uočiti širina djelovanja članova našega društva u području mehanike. Osim iz klasičnih područja mehanike, pojavljuju se i radovi vezani uz nanomaterijale i područje biomehanike, što svjedoči o činjenici da članovi Društva drže korak sa svjetskim trendom širenja područja djelovanja inženjera. Prema očekivanjima, u radovima dominira teorijski pristup i primjena numeričkih metoda (kako metode konačnih elemenata tako i bezmrežnih metoda), a veseli činjenica da se pojavljuju i prilozi temeljeni na eksperimentalnom pristupu.

Posebnu vrijednost susretima daju prilozi mladih članova Društva, jer su oni naša budućnost. Nadamo se da će oni iz ovakvih skupova izvući najveću korist u smislu svoga razvoja te izmjene mišljenja sa svojim kolegama i starijim članovima Društva, kao i u smislu prikupljanja ideja za svoj budući rad.

Predsjednik Društva
Prof. dr. sc. Zdravko Virag

SADRŽAJ

<u>Brčić, M., Čanđija, M. & Brnić, J.:</u> MODELIRANJE INTERAKCIJA MATRICE NANOKOMPOZITA I NANOCIJEVI	1
<u>Čanđija, M. & Mosler, J.:</u> TERMOPLASTIČNOST UTEMELJENA NA VARIJACIJSKI KONZISTENTNOM MODELU.....	7
<u>Čanžar, P., Tonković, Z., Kodvanj, J., Bakić, A., Drvar, N., Tomičević, Z. & Surjak, M.:</u> EKSPERIMENTALNO I NUMERIČKO MODELIRANJE ZAMORNOG PONAŠANJA MATERIJALA	11
<u>Hoster, J., Sorić, J. & Jarak, T.:</u> BEZMREŽNA MJEŠOVITA KOLOKACIJSKA FORMULACIJA ZA RJEŠAVANJE DVODIMENZIJSKIH LINEARNO-ELASTIČNIH PROBLEMA	17
<u>Jarak, T. & Sorić, J.:</u> NUMERIČKA ANALIZA LJUSKASTIH KONSTRUKCIJA POMOĆU BEZMREŽNE MLPG METODE	23
<u>Kalman, T. & Sigmund, V.:</u> OCJENA MAKROMODELA ZIDANIH ISPUNA U NELINEARNOJ ANALIZI AB OKVIRA SA ZIDANIM ISPUNOM	29
<u>Karšaj, I., Sorić, J. & Humphrey, J.D.:</u> TRODIMENZIJSKI MODEL RASTA I PROMJENE STRUKTURE KRVNE ŽILE	35
<u>Lanc, D., Turkalj, G. & Pešić, I.:</u> ANALIZA IZVIJANJA GREDNIH NOSAČA TANKOSTJENIH KOMPOZITNIH POPREČNIH PRESJEKA	41
<u>Lovrenić-Jugović, M., Tonković, Z. & Skozrit, I.:</u> NUMERIČKO MODELIRANJE AKUMULIRANJA OŠTEĆENJA U KOŠTANOM TKIVU	47
<u>Penava, D., Butenweg, C. & Sigmund, V.:</u> OSVRT NA NELINEARNU ANALIZU HORIZONTALNO OPTEREĆENOG OKVIRA S ISPUNOM PRIMJENOM METODE KONAČNIH ELEMENATA	53
<u>Sesartić, R., Kozulić, V. & Gotovac, B.:</u> GREEN-LAGRANGEV TENZOR DEFORMACIJA ZA ZAKRIVLJENE GREDE U POLARNIM KOORDINATAMA	59

<u>Sigmund, V., Matošević, Đ. & Bošnjak-Klečina, M.:</u>	PONAŠANJE OMEĐENOG ZIĐA PRI CIKLIČKOM OPTEREĆENJU	65
<u>Skozrit, I. & Tonković, Z.</u>	NUMERIČKO MODELIRANJE PUKOTINA U POLIMERNIM MATERIJALIMA	71
<u>Smojver, I. & Ivančević, D.:</u>	NUMERIČKA SIMULACIJA OŠTEĆENJA ZAKRILACA PUTNIČKOG AVIONA OPTEREĆENOGL UDAROM PTICE	77
<u>Štimac, G., Žigulić, R., Braut, S. & Skoblar, A.:</u>	DIZAJN ROBUSNOG REGULATORA ZA SUSTAV AKTIVNOG MAGNETSKOG LEŽAJA	83
<u>Virag, L. & Šavar, M.:</u>	METODA ODREĐIVANJA VOLUMENA TLAČNE POSUDE ZA UBLAŽAVANJE HIDRAULIČKOG UDARA	89
<u>Virag, Z., Lulić, F. & Džijan, I.:</u>	PREGLED HEMODINAMIČKIH MODELA ARTERIJSKOG STABLA	95
<u>Zmaić, Ž., Majić, F. & Voss, R.:</u>	UTJECAJ ZIDOVA ZRAČNOG TUNELA NA STACIONARNO TRANSONIČNO STRUJANJE	103
<u>Zovkić, J. & Sigmund, V.:</u>	EKSPERIMENTALNO ISPITIVANJE AB OKVIRA S ISPUNOM	109
<u>Zastavnik, F. & Vrdoljak, M.:</u>	SIMULACIJA LETA HELIKOPTERA U STVARNOM VREMENU MODELOM PRVE RAZINE	115
<u>Žigulić, R., Braut, S., Skoblar, A. & Štimac, G.:</u>	PARAMETARSKA UZBUDA DISKRETNOG SUSTAVA SA KUBIČNIM NELINEARNOSTIMA	121
<u>Turkalj, G., Munjas, N. & Merdanović, E.:</u>	NUMERIČKA ANALIZA SPOJA GREDNE KONSTRUKCIJE OPTEREĆENOGL NA SAVIJANJE I AKSIJALNO OPTEREĆENJE	127

Zbornik radova

MODELIRANJE INTERAKCIJE MATRICE NANOKOMPOZITA I NANOCIJEVI

Marino Brčić, Marko Čanadija, Josip Brnić

Sažetak: U radu je ukratko predstavljeno modeliranje kompozitnog materijala poboljšanog ugljičnim nanocijevima. Nanocijevi predstavljaju poboljšanja u kompozitnom materijalu, koja trebaju pridonijeti boljim karakteristikama kompozita u odnosu na osnovni materijal. Problem u modeliranju takvog nanokompozitnog materijala predstavlja modeliranje prijenosa opterećenja sa matrice kompozita na nanocijevi. Ta interakcija izvedena je isključivo preko nelinearnih van der Waalovih veza te je u radu predstavljena i opisana teorija takvih veza, kao i prikidan način modeliranja istih, kombiniranjem upotrebe vlastitog softvera i metode konačnih elemenata preko komercijalnog softvera. Također, u radu su predstavljene daljne smjernice i ideje glede istraživanja i modeliranja nanokompozitnih materijala.

Ključne riječi: *nanokompozit, ugljične nanocijevi, van der Waal.*

1. UVOD

Razvoj nanotehnologije zadnjih dvadesetak godina uvelike je pridonio i razvoju novih kompozitnih materijala sa udjelom nanocijevi ili nanočestica. Zaključak je da izuzetna svojstva ugljičnih nanocijevi, kao što su vlačna čvrstoća te električna i termička svojstva, uvelike pridonose poboljšanju kompozitnog materijala te predstavljaju idealan materijal za poboljšanje karakteristika osnovnog materijala i razvoju novih vrsta kompozita - nanokompozita.

Da je uistinu tako pokazuju rezultati istraživanja [1] gdje je krutost kompozitnog filma povećana za 36% do 42% te vlačna čvrstoća za 25%, dodavanjem ugljičnih nanocijevi u iznosu 1% (težinski udio) u osnovni materijal kompozita. Nadalje, eksperimentalna istraživanja [2-4] i simulacije [5,6] prikazuju sposobnost preuzimanja mehaničkog opterećenja ugljičnih nanocijevi unutar nanokompozitnog materijala te time pokazuju da su nanokompozitni materijali izrazito čvrsti i lagani materijali. Puno je pitanja kod istraživanja i modeliranja nanokompozita, još uvijek, ostalo otvoreno. Poseban problem predstavlja eksperimentalno istraživanje nanokompozitnih materijala te je računalno modeliranje značajki takvog materijala vrlo zahvalan pristup.

2. INTERAKCIJA MATRICE I UGLJIČNIH NANOCIJEVI

Poznavanje nanokompozita zahtijeva poznavanje određenih karakteristika i značajki takvih materijala. Jedna od značajki koje imaju važnu ulogu u nanokompozitnom materijalu jest i interakcija između osnovnog materijala, matrice kompozita i poboljšanja, tj. nanocijevi, budući da se mehaničko opterećenje prenosi sa osnovnog materijala na poboljšanje putem takve interakcije. Broj tih interakcija tj. međusučelja između matrice i nanocijevi, je vrlo velik upravo zbog veličine nanocijevi u odnosu na ostatak matrice. U slučaju da su te interakcije slabe ili ne postoje, nanocijev može slobodno klizati unutar matrice, ne pružajući nikakvo poboljšanje kompozitu.

Atom ugljika unutar nanocijevi posjeduje tri sp^2 orbitale koje mu omogućuju kovalentno vezanje, σ vezama, za tri susjedna atoma ugljika te jednu nehibridiziranu $2p$ orbitalu koja mu omogućuje formiranje mreže π veza sa preostalim atomima na određenoj udaljenosti. Te π veze su slabije od σ veza, odnosno nanocijev je sa matricom nanokompozita vezana isključivo putem van der Waalsovih (VDW) veza tj. sila.

2.1. Van der Waalove sile

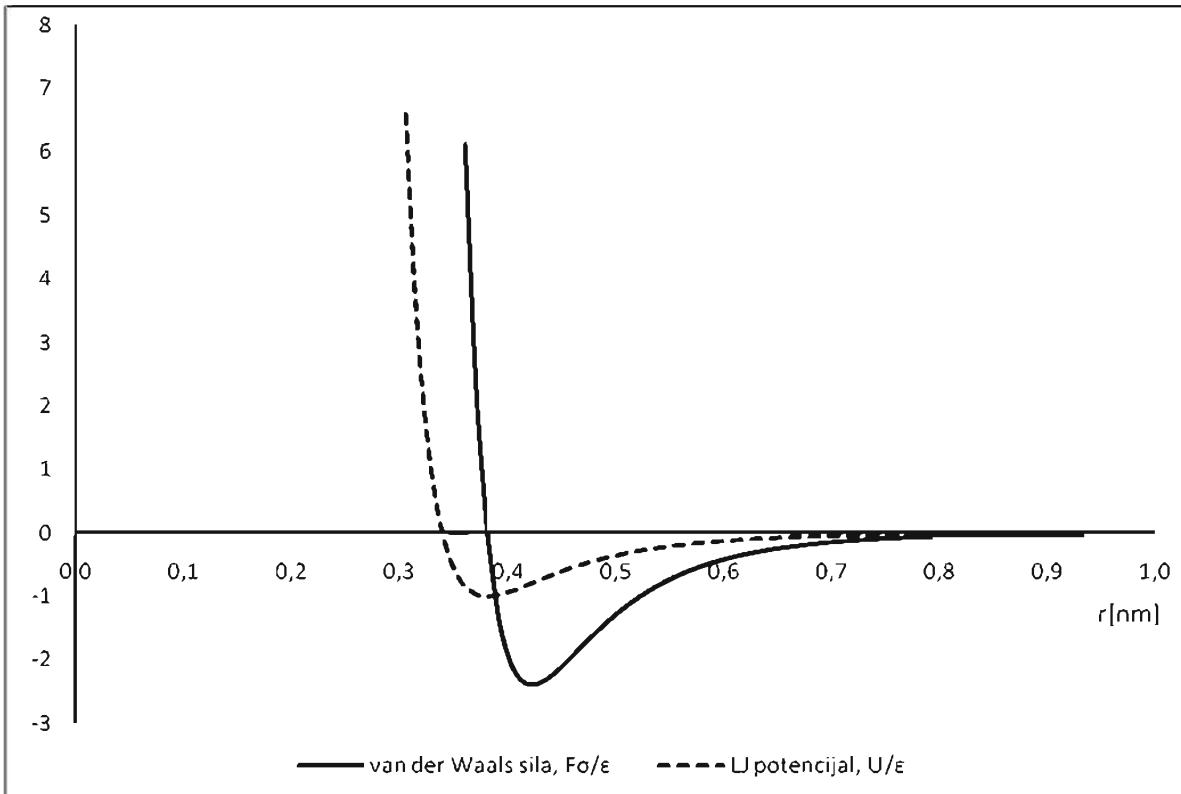
VDW veze nisu kovalentne, a VDW sile između dva atoma na udaljenosti r mogu biti privlačne ili odbojne. Energija koja se javlja između dva atoma zbog takvih veza može se predstaviti pomoću općenitog Lennard – Jones “6-12” potencijala:

$$U(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] \quad (1)$$

gdje je r udaljenost između atoma u interakciji, dok su σ i ϵ Lennard – Jones parametri, koji za atom ugljika iznose $\epsilon = 3,86 \cdot 10^{-13}$ Nmm, $\sigma = 0,34$ nm. Potencijal $U(r)$ djeluje na međuatomskoj udaljenosti do $2,5\sigma$, odnosno na udaljenosti većoj od navedene ne formiraju se VDW veze. Na osnovu gore navedenog Lennard – Jones potencijala, moguće je izvesti izraz za VDW silu između dva atoma:

$$F(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = 24 \frac{\epsilon}{\sigma} \left[2 \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{13} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^7 \right]. \quad (2)$$

Slika 1. prikazuje odnos VDW sile, tj. Lennard – Jones potencijala i udaljenosti r između dva atoma u međusobnoj interakciji.

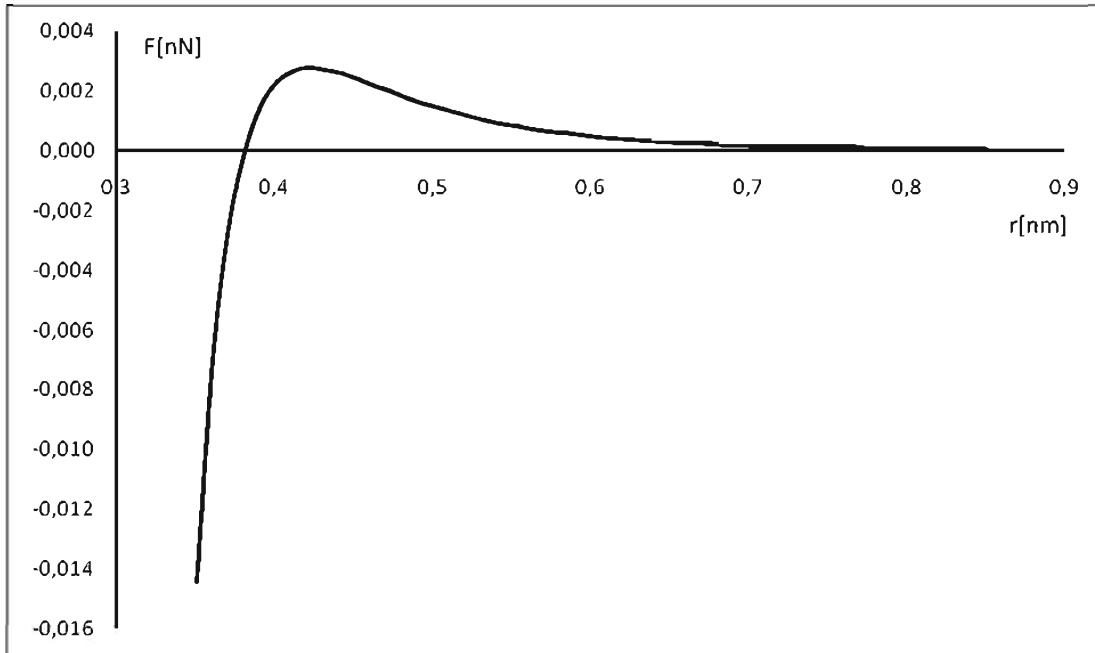


Sl. 1. VDW sile i Lennard – Jones potencijal u odnosu na udaljenost atoma.

2.2. Modeliranje VDW veza

Atom ugljične nanocijevi može formirati vezu sa nekoliko atoma matrice, sve dok je udaljenost između njih manja od 2.5σ (0,85 nm). VDW vezu tada možemo modelirati pomoću štapnog elementa, opterećenog tlačnom ili vlačnom silom, prema izrazu (2).

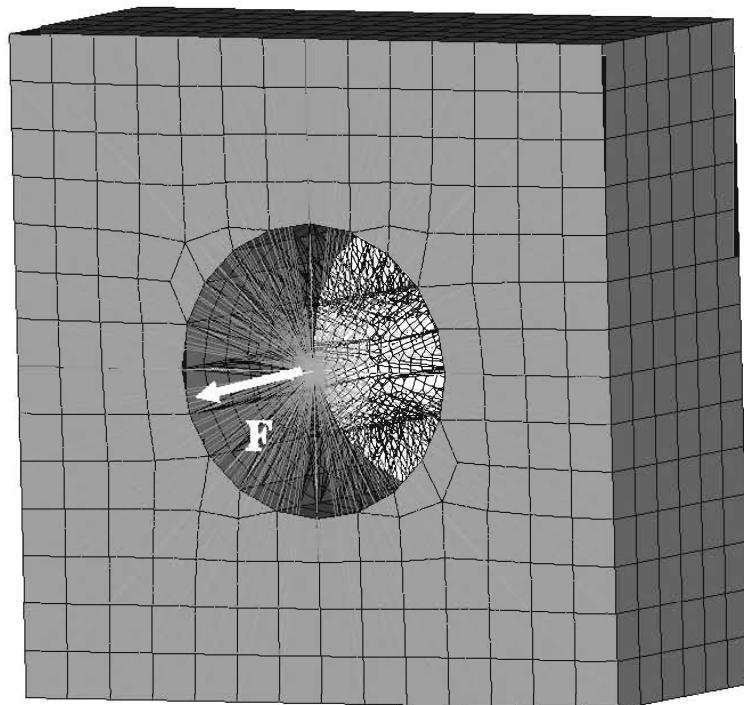
Prema slici 1. vidljivo je da je VDW sila veoma nelinearna, stoga je štapni element potrebno modelirati kao nelinearni element sa modificiranim krivuljom opterećenje – pomak, proizašlom iz izraza za VDW silu (2). VDW sila je unutrašnja sila koja djeluje između dva atoma, atoma nanocijevi i atoma matrice, koji se nalaze na određenoj udaljenosti, stoga, da bi istu modelirali pomoću štapnog elementa potrebno je za štapni element zadati odnos opterećenja i pomaka štapa kada primijenimo opterećenje na štap, da bi savladali tu VDW silu. Zbog toga je krivulja opterećenje – pomak za nelinerani štapni element, dana na slici 2., suprotna od krivulje za VDW silu na slici 1.



Sl. 2. Krivulja opterećenje – pomak za nelinearni štapni element.

3. RVE MODEL NANOKOMPOZITA

Koristeći prethodno navedeni štapni element kao model interakcije matrice nanokompozita i ugljične nanocijevi, moguće je, upotrebom metode konačnih elemenata, odrediti mehanička svojstva nanokompozita, odnosno uzdužni modul elastičnosti. U tu svrhu, modeliran je *representative volume element* (RVE), koji se sastoji od modela jednostrukih ugljičnih nanocijevi [7] te modelirane matrice osnovnog materijala, dok je spoj, međusučelje između matrice i nanocijevi izveden preko spomenutog štapnog elementa, slika 3.



Sl.3. RVE model nanokompozita i ukupna sila F .

RVE je izведен tako da je duljina nanocijevi jednaka duljini RVE modela. Matrica je modelirana heksaedarskim konačnim elementima, model nanocijevi je preuzet iz autorovih dosadašnjih istraživanja ugljičnih nanocijevi [7], dok je spoj između matrice i nanocijevi izведен preko vlastitog softvera izrađenog upravo u svrhu spajanja matrice i nanocijevi. Softver uzima u obzir udaljenost između dvije vrste elemenata, prostorni elementi matrice i gredni elementi nanocijevi, te štapnim elementima spaja samo one čvorove na prostornim elementima sa čvorovima štapnih elemenata koji se nalaze na međusobnoj udaljenosti manjoj od 0,85nm. Štapni elementi su definirani tj. modelirani prema poglavljju 2.2. U tablici 1. dani su osnovni podaci RVE modela. Radi provjere dobivenih rezultata, veličine su odabrane prema literaturi.

RVE				
Broj elemenata: 2130	Broj čvorova: 1643	Duljina: nm	2,952	Površina: nm ²
Matrica				
Duljina: 2,952 nm	Površina: 39,84 nm ²		E = 100 GPa	
Nanocijev				
Duljina: 2,952 nm	Površina: 1,442 nm ²		E = 1000 GPa	

Tablica 1. Osnovni podaci RVE modela

Matrica i nanocijev opterećeni su ukupnom aksijalnom silom $F = 10$ nN (slika 3.). Uzdužni modul elastičnosti RVE modela dobiven je iz aksijalnog opterećenja prema izrazu (3):

$$E = \frac{F \cdot l}{A \cdot \Delta l}. \quad (3)$$

gdje je l duljina, A površina, a Δl uzdužno produljenje RVE modela, koje iznosi $\Delta l = 0,005012$ nm. Uzdužni modul elastičnosti prema (3) iznosi $E = 142,67$ GPa. Tako dobiveni uzdužni modul elastičnosti uspoređen je sa uzdužnim modulom elastičnosti dobivenim preko zakona miješanja (4) za standardne kompozite poboljšane vlaknima. Radi se modulu elastičnosti u smjeru vlakana za poboljšanje.

$$E = E''V'' + E'''(1 - V''). \quad (4)$$

U izrazu (4), E'' je modul elastičnosti matrice, E''' modul nanocijevi, dok je V'' volumni udio nanocijevi u RVE, a u slučaju iste duljine nanocijevi i matrice, tj. RVE modela, jednak je omjeru površine nanocijevi i površine matrice te u ovom slučaju iznosi $V'' = 3,6195\%$. Modul elastičnosti dobiven preko zakona miješanja iznosi $E = 132,57$ GPa.

4. ZAKLJUČAK

Modeliranje nanokompozitnog materijala je višerazinsko modeliranje. U tu svrhu je, na nanorazini, upotrebljen RVE element, koji sadrži matricu, tj. osnovni materijal,

modeliranu sa prostornim elementima te poboljšanje, tj. ugljičnu nanocijev modeliranu kao zakrivljena heksagonalna mreža grednih elemenata. Vrlo je važno ispravno modelirati interakciju između matrice i poboljšanja što je i prikazano u ovom radu, putem nelinearnih štapnih elemenata. U svrhu spajanja dvije različite vrste elemenata, izrađen je vlastiti softver. Takav jedan RVE model aksijalno je opterećen te je određen njegov uzdužni modul elastičnosti koji je uspoređen sa modulom elastičnosti dobivenim preko zakona miješanja klasičnih kompozita i sa rezultatima drugih autora[6,8], uz isti omjer $E'/E'' = 10$ i volumni udio V'' , koji za uzdužni modul elastičnosti dobivaju $E = 143,84$ GPa [6], odnosno $E = 132,55$ GPa [8]. Možemo zaključiti da je model prikladan za daljnje korištenje u istraživanju i modeliranju nanokompozitnih materijala, pri čemu je sljedeći korak izrada vlastitog softvera koji će za numeričku analizu nanokompozita, na sljedećoj razini, koristiti upravo ovako modeliran RVE element, budući da to sa komercijalnim MKE softverom nije moguće.

Literatura:

- [1] Qian D. et al, "Load transfer and deformation mechanisms in carbon nanotube – polystyrene composites", Applied Physics Letters, Vol. 76, No. 20, 2000, str. 2868-2870.
- [2] Wagner H. D. et al, "Stress-induced fragmentation of multiwall carbon nanotubes in a polymer matrix", Applied Physics Letters, Vol. 72, No. 2, 1998, str. 188-190.
- [3] Schadler L. S. et al, "Load transfer in carbon nanotube epoxy composites", Applied Physics Letters, Vol. 73, No. 26, 1998, str. 3842-3844.
- [4] Bower C. et al, "Deformation of carbon nanotubes in nanotube-polymer composites", Applied Physics Letters, Vol. 74, No. 22, 1999, str. 3317-3319.
- [5] Liu Y. J., Chen X. L., "Continuum models of carbon nanotube-based composites using the boundary element method", Electronic Journal of Boundary Elements, Vol. 1, No. 2, 2003, str. 316-335.
- [6] Liu Y. J., Chen X. L., "Evaluations of the effective material properties of carbon nanotube-based composites using a nanoscale representative volume element", Mechanics of Materials, Vol. 35, 2003, str. 69-81.
- [7] Brčić, M., Čanadija, M., Brnić, J., "Strukturni model jednostrukе ugljične nanocijevi", Prvi susret Hrvatskog društva za mehaniku, Vol. 1, 2007, str. 43-48.
- [8] Liu Y. J., Chen X. L., "Square representative volume elements for evaluating the effective material properties of carbon nanotube-based composites", Computational Materials Science, Vol. 29, 2004, str. 1-11.

Autori:

Marino Brčić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, Rijeka, tel. 051/651 560, e-mail: mbrcic@riteh.hr, web stranica: http://www.riteh.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/mt/Brcic.htm

Marko Čanadija, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, Rijeka, tel. 051/651 496, e-mail: markoc@riteh.hr, web stranica: http://www.riteh.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/mt/Canadija.htm

Josip Brnić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, Rijeka, tel. 051/651 491, e-mail: brnic@riteh.hr, web stranica: http://www.riteh.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/osoblje_files/Brnic/HP_Brnic.htm

TERMOPLASTIČNOST UTEMELJENA NA VARIJACIJSKI KONZISTENTNOM MODELU

Čanadija, M. & Mosler, J.

Sažetak: Rad predstavlja primjenu tzv. varijacijski konzistentnih korekcija u kontekstu termoplastičnosti pri velikim deformacijama. Ove korekcije koriste princip maksimalne plastične disipacije i putem minimizacije prikladnog funkcionala računaju traženo polje pomaka i temperature. Kao konstitutivni model koristi se nelinearni izotropni i kinematički model očvršćivanja. Na taj se način konstitutivne varijacijske korekcije primjenjuju u kontekstu neasocijacijske plastičnosti. Rad prikazuje polazišne točke metode, evolucijske jednadžbe i numeričku implementaciju.

Ključne riječi: *termoplastičnost, konstitutivne varijacijske korekcije, optimizacijske metode.*

1 UVOD

Rad predstavlja varijacijske principe koji se koriste za rješavanje spregnutih termoplastičnih problema. Razmatranja su usmjerena u prvom redu na neasocijacijsku plastičnost sa nelinearnim izotropnim i kinematičkim očvršćivanjem pri velikim deformacijama. Osnovni problem leži u identifikaciji potencijala čije stacionarne točke predstavljaju rješenje problema. Kao što je to već uočeno u [1], jednostavno kombiniranje jednadžbi ravnoteže i provođenja topline vodi problemu koji nema varijacijsku strukturu. Opće rješenje ovog problema predlaže se u [1]. Ekstenzija ovog postupka na neasocijacijske iztermičke probleme razvijena je u [2]. U ovome radu razmatranja iz [2] proširuju se na neiztermičko okruženje.

Ovakvo postavljanje termoplastičnog problema u varijacijski okvir ima nekoliko prednosti. Primjerice, metode razvijene za varijacijske probleme postaju dostupne (npr. postojanje i jedinstvenost rješenja). Primjena metode konstitutivnih varijacijskih korekcija (engl. *variational constitutive updates*) vodi nadilaženju klasične metode radikalnog povratka u problemima vremenski nezavisne plastičnosti i stavljanju na raspolaganje cijele palete naprednih optimizacijskih procedura. U kontekstu termoplastičnih deformacija posebno valja naglasiti da se pretvorba disipirane plastična snage u toplinu više ne mora specificirati dodatnim evolucijskim jednadžbama već ona slijedi prirodno iz teorijskog okvira [1].

2 KINEMATIKA PROBLEMA, FUNKCIJA TEČENJA I DISIPACIJA

Neka je zadano tijelo $B \subset \mathbb{R}^3$ u vremenu t . Također, zadano je i gibanje iz početne konfiguracije (t_0) ka trenutnoj konfiguraciji t putem bijektivne funkcije $x = \varphi(X, t)$, gdje x predstavlja točku prostora. Materijalne točke bit će označene sa $X = (X_1, X_2, X_3)$. Gradijent deformiranja definira se:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \partial \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) / \partial \mathbf{X}. \quad (1)$$

Ovaj rad razmatrat će probleme koji uključuju elastične i plastične deformacije. U skladu s tim, usvaja se danas standardna multiplikacijska dekompozicija gradijenta deformiranja na elastični i plastični dio:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p. \quad (2)$$

Od značaja je i gradijent brzine \mathbf{L} definiran kao:

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F}. \quad (3)$$

Uslijed multiplikacijskog razlaganja (2), uvode se elastični i plastični gradijent brzine:

$$\dot{\mathbf{F}}^e = \mathbf{L}^e \mathbf{F}^e, \quad \dot{\mathbf{F}}^p = \mathbf{L}^p \mathbf{F}^p. \quad (4)$$

Za opis očvršćivanja plastičnog materijala koriste se varijable \mathbf{a}_k i α_i , gdje indeks k upućuje na kinematičko, a indeks i na izotropno očvršćivanje.

Jedna od osnovnih značajki plastičnog ponašanja materijala jest funkcija tečenja ϕ . U kontekstu ovih problema, koristit će se funkcija tečenja oblika:

$$\phi(\Sigma, \mathbf{Q}_k, Q_i, \Theta) = \Sigma^{eq}(\Sigma, \mathbf{Q}_k) - Q_i - Q_0^{eq} = 0, \quad (5)$$

gdje su $\Sigma = 2\mathbf{C}^e \partial_{\mathbf{C}^e} \psi$, $\mathbf{C}^e = (\mathbf{F}^e)^T \mathbf{F}^e$ Mandelov tenzor naprezanja, ψ Helmholtzova funkcija slobodne energije, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k(\mathbf{a}_k)$ termodinamička sila konjugirana sa \mathbf{a}_k , $Q_i = Q_i(\alpha_i)$ termodinamička sila konjugirana sa α_i , Θ temperatura, $Q_0^{eq}(\alpha_i, \Theta)$ naprezanje tečenja, te Σ^{eq} ekvivalentno naprezanje.

Imajući u vidu gore navedene veličine, princip maksimalne plastične disipacije moguće je zapisati:

$$\max_{\Sigma, \mathbf{Q}_k, Q_i, \phi \leq 0} D_{mech} = \max_{\Sigma, \mathbf{Q}_k, Q_i, \phi \leq 0} [\Sigma : \mathbf{L}^p + \mathbf{Q}_k : \dot{\mathbf{a}}_k + Q_i \dot{\alpha}_i], \quad (6)$$

čijim se rješenjem dobivaju evolucijske jednadžbe:

$$\mathbf{L}^p = \lambda \partial_\Sigma \phi, \quad \dot{\mathbf{a}}_k = \lambda \partial_{\mathbf{Q}_k} \phi, \quad \dot{\alpha}_i = \lambda \partial_{Q_i} \phi. \quad (7)$$

Valja napomenuti da se u ovome radu koristi neasocijacijski model plastičnosti. Ovo znači da se umjesto funkcije tečenja u (7) koristi neki drugi plastični potencijal što rezultira u nešto drugačijim evolucijskim jednadžbama:

$$\mathbf{L}^p = \lambda \partial_\Sigma g, \quad \dot{\mathbf{a}}_k = \lambda \partial_{\mathbf{Q}_k} g, \quad \dot{\alpha}_i = \lambda \partial_{Q_i} g. \quad (8)$$

3 VARIJACIJSKA FORMULACIJA

3.1 Motivacija: izotermički problem

Kao uvod u termoplastični dio problema, dobro je prvo razmotriti izotermički dio problema. Jednadžbe ravnoteže i prateći rubni uvjeti u tom slučaju glase [3]:

$$\begin{aligned} \text{DIV } \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{B} &= 0 \quad \text{u } B, \text{ gdje je } \partial B = \partial B_\varphi \cup \partial_F B \\ \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} &= \bar{\mathbf{T}} \quad \text{na } \partial_F B, \quad \varphi = \bar{\varphi} \quad \text{na } \partial B_\varphi. \end{aligned} \quad (9)$$

Kako bi se dobio odgovarajući potencijal, prva se jednadžba u (9) može pomnožiti dopustivim varijacijama pomaka η , tj. primijeni se princip virtualnog rada. Dobivena se relacija integrira po cijelom volumenu tijela B , što daje:

$$\int_B (\operatorname{DIV} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{B}) \cdot \boldsymbol{\eta} dV + \int_{\partial_F B} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} - \bar{\mathbf{T}}) \cdot \boldsymbol{\eta} dA \quad (10)$$

Obzirom da je prvi Kirchhoffov tenzor naprezanja $\mathbf{P} = \rho_0 \partial_{\mathbf{F}} \psi$ definiran preko funkcije slobodne energije može se pokazati da jednadžba (10) predstavlja uvjet stacionarnosti potencijala:

$$I(\boldsymbol{\varphi}) = \int_B \psi(\mathbf{F}) dV - \int_B \rho_0 \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\varphi} dV + \int_{\partial_F B} \bar{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\varphi} dA. \quad (11)$$

pa se konfiguracija računa temeljem $\inf_{\boldsymbol{\varphi} \in V} I(\boldsymbol{\varphi})$ što je poznato kao princip minimalne potencijalne energije.

3.2 Termoplastični problem

Ukoliko se na spregnuti termoplastični problem pokuša primijeniti isti pristup kao u izotermnom slučaju, tj. množenjem jednadžbi ravnoteže i održanja energija s dopustivim varijacijama, dobiva se slaba forma koja ne potječe iz potencijala [1]. Ispravna varijacijska forma dobiva se uvođenjem faktora:

$$f(\Theta, \bar{\Theta}) = \Theta / \bar{\Theta}, \quad (12)$$

gdje je Θ tzv. vanjska temperatura odnosno uobičajena temperatura koja se koristi u standardnoj mehanici kontinuma, dok je $\bar{\Theta}$ tzv. ravnotežna temperatura:

$$\bar{\Theta} = \partial_N E(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, \mathbf{a}, N). \quad (13)$$

U ravnoteži ove su dvije temperature jednake, tj. $f=1$, no ovaj se uvjet ne koristi *a priori*. Na taj se način, slijedom razmatranja u [1] potencijal može pisati:

$$I[\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \Theta, \dot{N}, \dot{\mathbf{a}}] = \int_B [\dot{E} - \Theta \dot{N} + \Delta(f \dot{\mathbf{F}}^p, f \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{G})] dV - G(\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \Theta) \quad (14)$$

$$G(\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \Theta) = \int_B \rho_0 \mathbf{B} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} dV - \int_{\partial_F} \bar{\mathbf{T}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}} dS + \int_B \rho_0 R \log \frac{\Theta}{\Theta_0} dV - \int_{\partial_H} \bar{H} \log \frac{\Theta}{\Theta_0} dS.$$

Kinetički potencijal $\Delta(f \dot{\mathbf{F}}^p, f \dot{\mathbf{a}}, \mathbf{G})$ definiran je u skladu sa [2] uz proširenje Fourierovim potencijalom koji opisuje provođenje topline. Rješenje termoplastičnog varijacijskog problema sada slijedi iz uvjeta stacionarnosti:

$$\inf_{\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \dot{N}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{F}}^p} \sup_{\Theta} I[\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \Theta, \dot{N}, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{F}}^p]. \quad (15)$$

Teorem poznat iz varijacijskog računa kaže da je određena slaba forma ekvivalenta uvjetu stacionarnosti potencijala ukoliko je njegova druga varijacija simetrična [3], tj.

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) &= \delta E(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \boldsymbol{\eta} \\ \delta G(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\eta}) \cdot \boldsymbol{\xi} &= \delta G(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (16)$$

Upravo ovaj uvjet ispunjava se uvođenjem faktora f , izraz (12). Neispunjavanje ovog uvjeta vodi nesimetričnim matricama krutosti u metodi konačnih elemenata. Većina prethodnih radova iz ovog područja temeljila se na sekvencijalnim shemama. Pri tom se svaki korak rastavlja u dva subproblema u kojima su se jedne varijable držale

nepromjenjivima dok su se druge mijenjale. Svaki od ovih subproblema imao je simetričnu matricu krutosti.

4 KONSTITUTIVNE VARIJACIJSKE KOREKCIJE

Rješenje problema u vremenskom koraku t_n do t_{n+1} svodi se na određivanje inkrementalnog potencijala

$$I_{inc} \left[\dot{\varphi}_{n+1}, \Theta_{n+1}, \dot{N}_{n+1}, \dot{\mathbf{F}}_{n+1}^p, (\dot{\alpha}_k)_{n+1}, (\dot{\alpha}_i)_{n+1} \right] = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \int_B [\dot{E} - \Theta \dot{N} + \Delta] dV + G \right\} dt \quad (17)$$

odnosno traženja uvjeta stacionarnosti istog potencijala:

$$\begin{aligned} & (\varphi_{n+1}, \Theta_{n+1}, N_{n+1}, \mathbf{F}_{n+1}^p, (\alpha_k)_{n+1}, (\alpha_i)_{n+1}) = \\ & = \inf_{\varphi_{n+1}, N_{n+1}, \mathbf{F}_{n+1}^p, (\alpha_k)_{n+1}, (\alpha_i)_{n+1}} \sup_{\Theta_{n+1}} I_{inc} \left[\varphi, \Theta, N, \mathbf{F}_{n+1}^p, (\alpha_k)_{n+1}, (\alpha_i)_{n+1} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Varijacijski problem (18) rješava se primjenom natražne Eulerove integracije i neke od minimizacijskih shema Newtonovog oblika. Kao specijalni slučaj moguće je dobiti i metodu radikaljnog povratka. Na ovaj se način omogućava primjena naprednih numeričkih tehnika razvijenih za potrebe optimizacije.

5 ZAKLJUČAK

Rad je prikazao osnovne elemente varijacijski konzistentnih korekcija koje su od interesa u termoplastičnim analizama. Primjena naprednih numeričkih tehnika razvijenih za optimizacijske probleme omogućava efikasnije numeričko rješavanje spomenutih problema. Metoda se također direktno može primijeniti na razini integracijske točke konačnog elementa.

Literatura:

- [1] Yang, Q., Stainier, L., Ortiz, M., "A variational formulation of the coupled thermo-mechanical boundary-value problem for general dissipative solids", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 54, 2006, str. 401-424.
- [2] Mosler, J., Bruhns, O. T., "On the implementation of rate-independent standard dissipative solids at finite strain - Variational constitutive updates", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 199, Issues 9-12, 2010, str. 417-429.
- [3] Marsden, J.E.M., Hughes, T.J.R., "Mathematical foundations of elasticity, Dover Publications", New York, 1994.

Autori:

Marko Čanđija, Sveučilište u Rijeci, Tehnički Fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 496, fax 051 651 490, e-mail: markoc@riteh.hr.
 Jörn Mosler, GKSS Research Centre, Institute for Materials Research, Materials Mechanics, D-21502 Geesthacht, Njemačka, joern.mosler@gkss.de

EKSPERIMENTALNO I NUMERIČKO MODELIRANJE ZAMORNOG PONAŠANJA MATERIJALA

**Čanžar, P., Tonković, Z., Kodvanj, J., Bakić, A., Drvar, N., Tomičević, Z. i
Surjak, M.**

Sažetak: U radu su prikazani rezultati eksperimentalnih i numeričkih istraživanja niskocikličkog zamora provedenih na aluminijskoj leguri AlCu5BiPb-T8. Eksperimentom su obuhvaćena monotona vlačna ispitivanja, simetrična i asimetrična ciklička ispitivanja, kao i ispitivanje lomne žilavosti i rasta zamorne pukotine u materijalu. U okviru numeričkog modeliranja određeni su parametri materijala za konstitutivni model cikličke plastičnosti. Materijalni model se temelji na više-komponentnom obliku izotropnih i kinematičkih varijabli očvršćenja uz von Mises-ov kriterij tečenja. Numerički algoritam je implementiran u programski paket Abaqus, te je primjenjen za analizu rasta pukotine u blizini zareza. Trenutno se radi na usporedbi numeričkih rezultata s pripadnim eksperimentom primjenom opreme ARAMIS.

Ključne riječi: *niskociklički zamor, aluminijска legura, eksperiment, metoda konačnih elemenata, ciklička plastičnost.*

1 UVOD

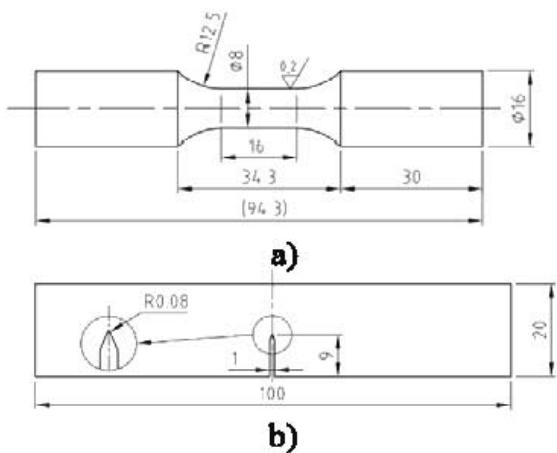
Zamoru materijala konstrukcijskih komponenata još uvijek se pridaje posebna pažnja. Eksperimentalna istraživanja ponašanja materijala uobičajeno se provode na epruvetama sa i bez zareza izloženim cikličkom opterećenju s konstantnim amplitudama [6]. Za što realnije modeliranje cikličkog ponašanja materijala potrebno je provoditi ispitivanja i s promjenljivim amplitudama opterećenja. Da bi se numeričkim simulacijama u što većoj mjeri približilo eksperimentalno dobivenim rezultatima, potrebno je što točnije definirati konstitutivne jednadžbe materijala i numeričke algoritme za njihovo rješavanje [3, 4].

U radu je dan prikaz preliminarnih rezultata eksperimentalnih i numeričkih istraživanja koja se izvode s ciljem modeliranja procesa iniciranja i rasta zamorne pukotine u aluminijskoj leguri AlCu5BiPb-T8. Eksperimentalna istraživanja napravljena su u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku, a numeričko modeliranje u Laboratoriju za numeričku mehaniku Fakulteta strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Eksperimenti su provedeni na epruvetama sa i bez zareza na dinamičkoj kidalici (LFV 50-HH; Walter, Bai AG), kao i na cilindričnim epruvetama bez zareza na kvazi-statičkoj kidalici (MESSPHYSIK BETA 50-5) pri sobnoj temperaturi. Određene su mehaničke karakteristike materijala za opisivanje rasta pukotine za različite nivoje opterećenja, kao i parametri materijala za definiranje konstitutivnih jednadžbi cikličke plastičnosti. Numerički algoritam za Reissner-Mindlinov kinematički model prikazan u [8,9] izведен je za trodimenzijski model i implementiran u programski paket

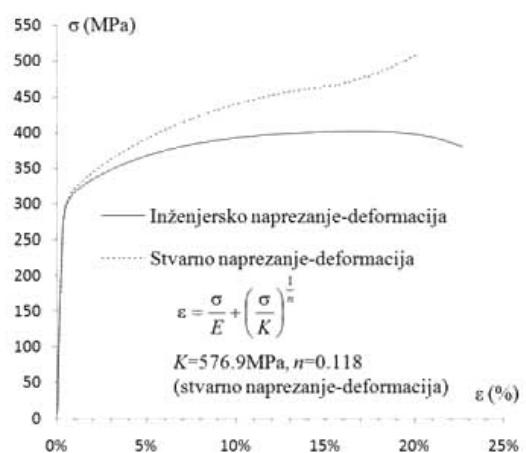
ABAQUS [5]. Numerički rezultati uspoređeni su s pripadnim eksperimentalnim. Osim toga, prikazana je primjena optičke opreme ARAMIS za analizu rasta pukotine.

2 EKSPERIMENT

Za eksperimentalno i numeričko modeliranje niskocikličkog zamornog ponašanja materijala provedena su monotona vlačna ispitivanja, kao i jednoosna simetrična i asimetrična ciklička ispitivanja, na cilindričnim epruvetama bez zareza čija je geometrija dana na slici 1a (ASTM EN606). Osim toga, za ispitivanje lomne žilavosti i rasta zamorne pukotine u materijalu primijenjene su epruvete sa zarezom, debljine 10mm, za savijanje u tri točke (SENB) u skladu sa standardom ASTM E1820 (slika 1b). Kemijski sastav aluminijске legure AlCu5BiPb-T8 izražen u postocima je kako slijedi: 0,4Si; 5Cu; 0,7Fe; 0,4Pb; 0,4Bi; 0,3Zn. Na slici 2 prikazan je dijagram ovisnosti naprezanja o deformaciji s pripadnim parametrima za Ramberg-Osgoodov materijalni model. Granica razvlačenja materijala je $\sigma_{0,2} = 305$ MPa, vlačna čvrstoća $\sigma_M = 400$ MPa, modul elastičnosti $E = 200$ GPa te Poissonov faktor $\nu = 0,3$. Postotno produljenje nakon loma materijala iznosi 22%.



Sl. 1. Oblik i dimenzije epruveta

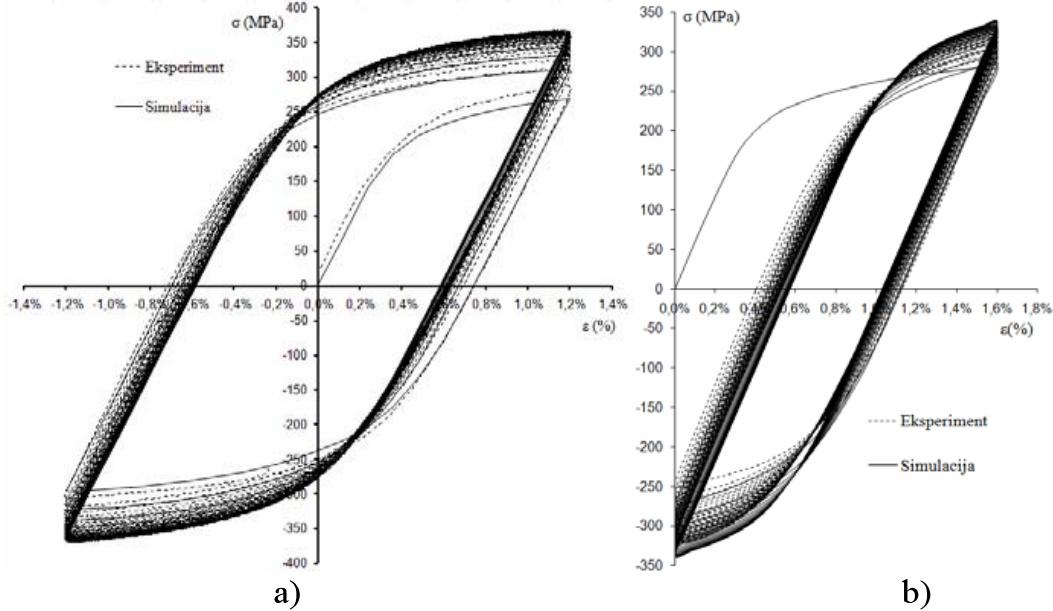


Sl. 2. Ovisnost naprezanja o deformaciji

Ciklička ispitivanja provedena su pri konstantnim amplitudama deformacija i naprezanja korištenjem mehaničkog ekstenzometra duljine 10 mm. Sl. 3 prikazuje histereze za slučaj simetričnog i asimetričnog opterećivanja s kontroliranom deformacijom. Pritom je amplituda deformacije ($\Delta\varepsilon / 2$) za simetrični test iznosila 1,2% (sl. 3a), dok su kod asimetričnog testa amplituda deformacije, kao i srednja deformacija, bile jednakе 0,8% (sl. 3b). Iz dijagrama je vidljivo da dolazi do značajnog cikličkog očvršćenja materijala što se očituje u povećanju amplitute naprezanja s brojem opterećenja sa suprotnim predznakom. Pritom se stabilizirano naprezanje dobiva nakon desetak ciklusa opterećivanja. Nadalje, uspoređujući petlje histereza za simetrični i asimetrični test, može se zaključiti da srednja deformacija nema značajan utjecaj na cikličko očvršćenje materijala.

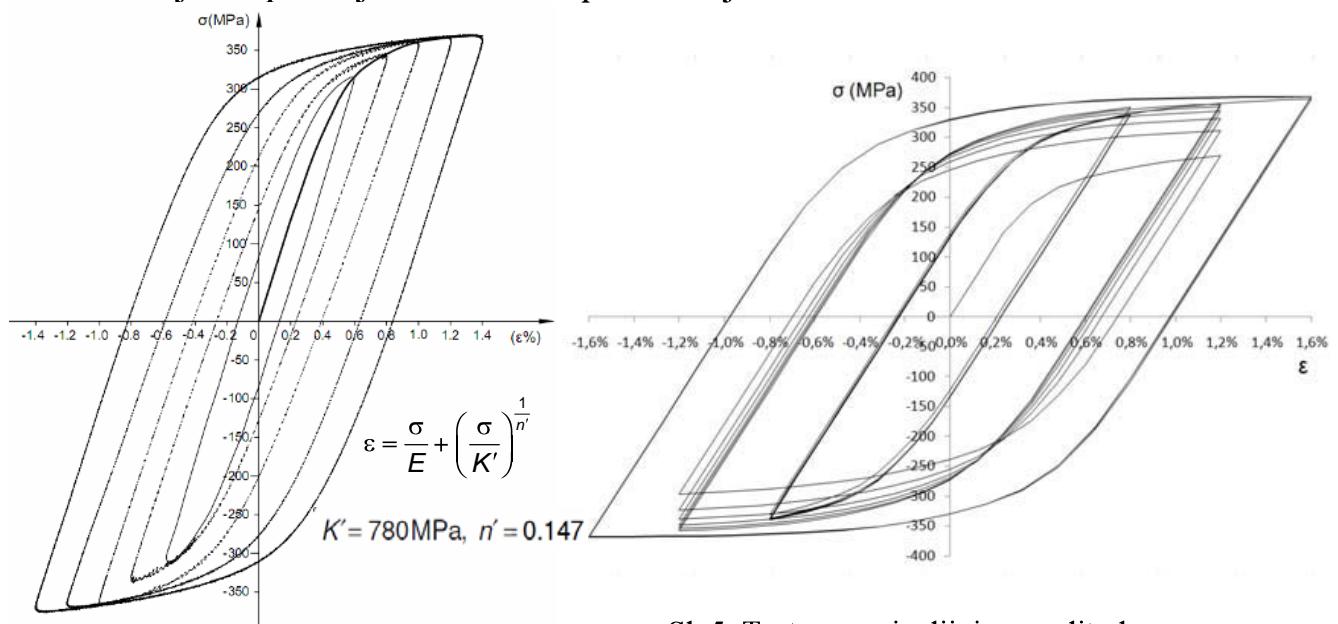
Na slici 4 prikazane su stabilizirane histereze za slučaj cikličkog opterećivanja s povećavanjem amplitude deformacije. Ovdje je amplituda povećavana u koracima od 0,2%, dok je srednja deformacija bila jednaka nuli. Broj ciklusa za svaki korak je 40, a maksimalna amplituda deformacije je jednaka 1,4%. Krivulja cikličko naprezanje-

deformacija, koja je od velike važnosti za niskociklički zamor, konstruirana je na slici 4 na način da povezuje vrhove stabiliziranih petlji histereza. Za njenu analitičku aproksimaciju primjenom Ramberg-Osgoodovog materijalnog modela primjenjena je metoda najmanjih kvadrata te su dobiveni parametri materijala prikazani na slici 4.



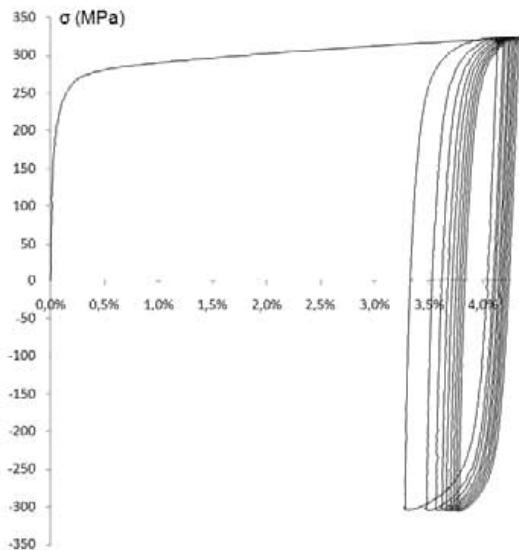
Sl. 3. Usporedba eksperimentalnih i numeričkih rezultata za: a) simetrični test, b) asimetrični test

Da bi se pokazao utjecaj povećanja i smanjenja amplitude deformacije na cikličko ponašanje materijala, provedena su ispitivanja s promjenljivim amplitudama deformacije. Za test koji se sastoji od tri koraka s amplitudama jednakim 1,2%, 0,8% i 1,6%, s po šest ciklusa opterećenja u svakom koraku, dobivene su histereze prikazane na slici 5. Testovi puzanja (*ratcheting tests*) provedeni su pri konstantnim amplitudama naprezanja s različitim kombinacijama srednjeg naprezanja i amplitude naprezanja. Tipična krivulja ovisnosti naprezanja o deformaciji za amplitudu naprezanja od 630 MPa i srednjim naprezanjem od 10 MPa prikazana je na slici 6.

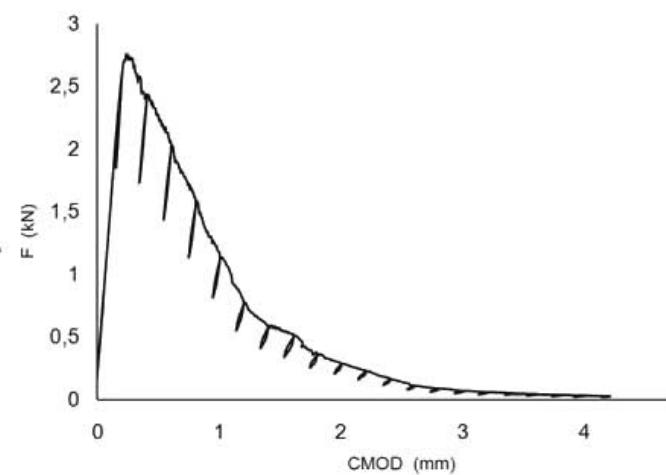


Sl. 4. Stabilizirane histereze

Sl. 5. Test s promjenljivim amplitudama deformacije (1,2%, 0,8% i 1,6%)

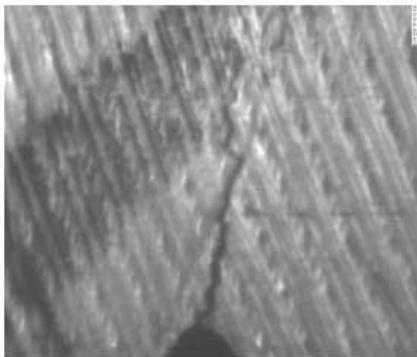


Sl. 6. Test puzanja (*ratcheting test*)

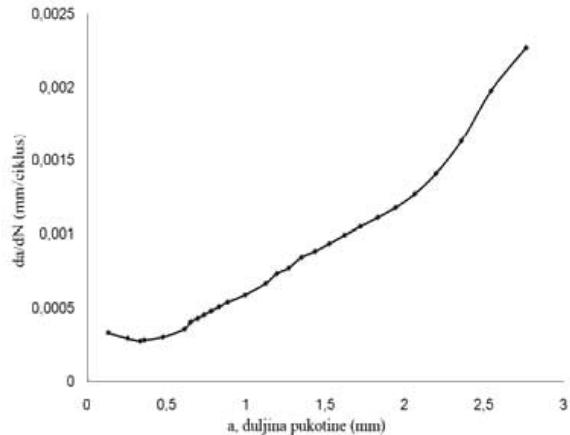


Sl. 7. Ovisnost sile o otvaranju usta pukotine

Na slici 7 prikazan je dijagram ovisnosti sile o otvaranju usta pukotine (*crack mouth opening displacement*) za određivanje lomne žilavosti materijala na SENB epruveti ($K_{IC}=24 \text{ MPa m}^{1/2}$). Na istoj SENB epruveti provedena je analiza rasta zamorne pukotine (da/dN). Testirano je 15 epruveta s konstantnim amplitudama opterećenja s 3 različita omjera R u iznosu od 0,1; 0,25 i 0,5. Duljina pukotine je mjerena sa video kamерom s velikim uvećanjem (sl. 8). Na slici 9 prikazani su rezultati za rast pukotine za $R=0,1$ i $\Delta F/2=1,08 \text{ kN}$.



Sl. 8. Zamorni rast pukotine



Sl. 9. Krivulja zamornog rasta pukotine

4 NUMERIČKA FORMULACIJA

U radovima [5] i [6] detaljno je prikazan izvod numeričkog algoritma za Reissner-Mindlinov kinematički model za analizu problema cikličke plastičnosti ljuskastih konstrukcija. U ovom radu algoritam je prilagođen za trodimenijski model te je implementiran u programski paket ABAQUS [5] primjenom korisničke rutine UMAT. Na taj način je omogućeno realnije opisivanje stanja naprezanja i deformacija u vrhu pukotine za slučaj cikličkih opterećenja. U tablici 1 dane su osnovne konstitutivne jednadžbe spomenutog modela cikličke plastičnosti.

Tablica 1: Osnovne konstitutivne jednadžbe modela cikličke plastičnosti

$$\text{Dekompozicija ukupne deformacije na elastični i plastični dio: } \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (1)$$

$$\text{Prirast tenzora naprezanja: } \dot{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}. \quad (2)$$

$$\text{Von Mises-ov zakon tečenja: } F(\sigma^{ij}, \alpha^{ij}, a) = \frac{1}{2} (S^{ij} - \alpha'^{ij})(S_{ij} - \alpha'_{ij}) - \frac{1}{3} k^2 (a) \leq 0. \quad (3)$$

$$\text{Asocijativni zakon tečenja: } \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial F(\sigma^{ij}, \alpha^{ij}, a)}{\partial \sigma^{ij}} \quad (4)$$

$$\text{Nelinearni zakon kinematičkog očvršćenja: } \alpha^{ij} = \sum_{m=1}^2 \alpha_m^{ij},$$

$$\text{gdje je } \dot{\alpha}_m^{ij} = A_m \dot{\lambda} \eta^{ij} - B_m \dot{\varepsilon}_{eqv}^p \alpha_m^{ij}, \dot{\varepsilon}_{eqv}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}^{pij}}. \quad (5)$$

$$\text{Nelinearni zakon izotropnog očvršćenja: } k = \sigma_Y + a. \quad (6)$$

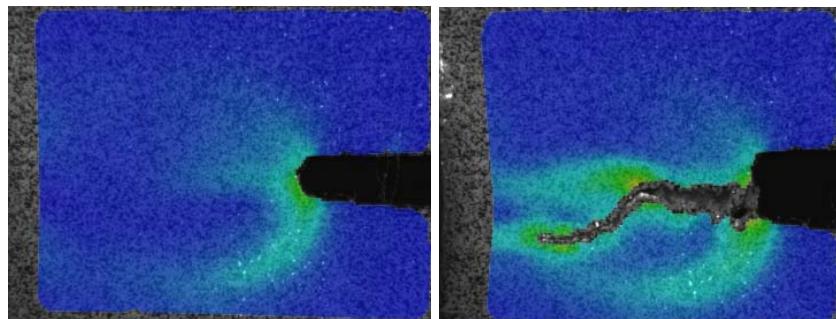
$$\text{Unutarnja varijabla izotropnog očvršćenja: } a = \sum_{m=1}^2 a_m, \text{ gdje je } \dot{a}_m = C_m (D_m - a_m) \dot{\varepsilon}_{eqv}^p. \quad (7)$$

$$\text{Kuhn-Tucker-ovi uvjeti: } F(\sigma^{ij}, \alpha^{ij}, a) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} F(\sigma^{ij}, \alpha^{ij}, a) = 0. \quad (8)$$

$$\text{Relativno naprezanje: } \eta^{ij} = \sigma^{ij} - \alpha^{ij}. \quad (9)$$

5 USPOREDBA EKSPERIMENTALNIH I NUMERIČKIH REZULTATA

Slika 3a prikazuje usporedbu numeričke simulacije i eksperimentalno dobivenih rezultata iz simetričnog cikličkog eksperimenta uz kontrolu deformacije. Osim za prvi ciklus, postignuto je zadovoljavajuće podudaranje rezultata, jer je komponenta kinematskog očvršćenja kalibrirana pomoću stabilizirane krivulje naprezanje-deformacija. Točnost računalne simulacije istražena je usporedbom simulirane petlje histereze naprezanje-deformacija s eksperimentalnim podacima za asimetričan pokus, sl. 3b. Dobiveno naprezanje-deformacija iz numeričke simulacije dobro se podudara sa stvarnim ponašanjem materijala. Korišteni parametri materijala, u svim numeričkim simulacijama, identični onima koje se koriste u simetričnim cikličkim ispitivanjima uz kontrolu deformacije. Ovaj je model nadalje primijenjen za analizu deformacija i naprezanja u vrhu pukotine te procjenu rasta pukotine u SENB epruveti. Geometrija SENB epruveta je diskretizirana elementima prvog reda sa četiri čvora za ravniško stanje deformacije. U blizini vrha zareza kreirana je vrlo fina mreža elemenata. Tijekom simulacije zamora, akumulacija oštećenja je praćena u zarezu kao i u vrhu pukotine.



Sl. 10. Primjena optičkog sustava Aramis

Numerički rezultati koji opisuju rast pukotine nisu iskazani u ovom radu. Ti rezultati predstavljaju sadržaj trenutnog istraživanja. Na slici 10 prikazana je primjena optičke opreme ARAMIS [1] za analizu iniciranja i rasta pukotine.

6 ZAKLJUČAK

U radu je eksperimentalno i numerički istraženo niskocikličko zamorno ponašanje aluminijske legure AlCu5BiPb-T8. Eksperimentom su obuhvaćena monotona vlačna ispitivanja, simetrična i asimetrična ciklička ispitivanja, kao i ispitivanje lomne žilavosti i rasta zamorne pukotine u materijalu. Određeni su parametri materijala za konstitutivni model cikličke plastičnosti. Za modeliranje cikličke plastičnosti i opisivanje stanja naprezanja i deformacija u vrhu, izведен je algoritam za trodimenijski kinematički model. Točnost računalne simulacije provjerena je usporedbom izračunatih i eksperimentalno dobivenih petlji histereze naprezanja i deformacije.

Literatura:

- [1] Aramis GOM mbH, <http://gom.com>
- [2] Čanžar, P., Tonković, Z., Kodvanj, J., Bakić, A., Tomičević, Z., "Modelling of cyclic plasticity and crack propagation", International Conference on Fracture and Damage Mechanics, Nagasaki, Japan (2010).
- [3] Ding, F., Feng, M., Jiang, Y., "Modelling of fatigue crack growth from a notch", Int. Journal of Plasticity, 23 (2007), str. 1167-1188.
- [4] Fan, F., Kalnaus, S., Jiang, Y., "Modelling of fatigue crack growth of stainless steel 304L", Mechanics of Materials, 40 (2008) No. 11, str. 961-973.
- [5] Hibbit, Karlsson & Serensen, Inc., "ABAQUS/Standard. User's guide and theoretical manual", Version 6.9, (2009).
- [6] Hopperstad, O.S., Langseth, M, Remseth, S., "Cyclic Stress-Strain Behaviour of Alloy AA6060, Part I", Int. Journal of Plasticity, 11 (1995) No. 6, str. 725-739.
- [7] Nukala, K.P.V.V., "A return mapping algorithm for cyclic viscoplastic constitutive models", Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 195 (2006), str. 148-178.
- [8] Sorić, J., Tonković, Z., Krätzig, W.B., "A new formulation of numerical algorithms for modelling of elastoplastic cyclic response of shell-like structures", Computers & Structures, 78 (2000), str. 161-168.
- [9] Tonković, Z., Sorić, J., Skozrit, I., "On Numerical Modelling of Cyclic Elastoplastic Response of Shell Structures", Computer Modelling in Engineering & Sciences (CMES), 26 (2008) No. 2, str. 75-90.

Autori:

Predrag Čanžar, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 616 8448, fax. 01 616 8187, e-mail: predrag.canzar@fsb.hr

Zdenko Tonković, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 616 8450, fax. 01 616 8187, e-mail: ztonkov@fsb.hr, web stranica: www.fsb.hr/lm/staff/tonkovic

BEZMREŽNA MJEŠOVITA KOLOKACIJSKA FORMULACIJA ZA RJEŠAVANJE DVODIMENZIJSKIH LINEARNO-ELASTIČNIH PROBLEMA

Hoster, J., Sorić, J., Jarak, T.

Sažetak: Prikazana je bezmrežna numerička kolokacijska mješovita formulacija za rješavanje dvodimenzijskih linearno-elastičnih problema. Izvedene interpolacijske funkcije oblika temeljene su na *Moving Least Squares (MLS)*, *Polynomial Point Interpolation (PPI)* i *B-Spline* [4] aproksimacijskim funkcijama. Prirodni rubni uvjeti uključeni su u formulaciju pomoću kaznene metode. Točnost predložene formulacije pokazana je u numeričkom primjeru usporedbom dobivenih rezultata s dostupnim numeričkim rješenjima.

Ključne riječi: mješovita formulacija, kolokacija, B-Spline, MLPG, 2D linearno-elastično

1 UVOD

Približno rješavanje problema u mehanici čvrstih tijela numeričkim metodama se provodi najviše metodom konačnih elemenata (MKE). U MKE broj čvorova u elementu, odnosno broj čvornih nepoznanica ovisi o aproksimaciji prepostavljenog rješenja. Na taj način je red funkcije rješenja jednoznačno vezan za broj čvorova i čvornih nepoznanica. U bezmrežnim metodama područje problema je diskretizirano čvorovima između kojih ne postoji *a priori* povezanost na način kao u konačnim elementima. Općenito u bezmrežnim metodama postoji viši stupanj kontinuiteta aproksimiranog rješenja po području problema. U bezmrežnim metodama temeljenim na metodi težinskog reziduala integriranje slabe forme se provodi po području proizvoljnog oblika, postavljenom oko svakog čvora diksretizacije. Vrlo često korišten princip u ovim metodama je tzv. *Local Petrov-Galerkin* koji omogućuje slobodan odabir testne funkcije, odnosno funkcije kojom se množi rezidual [1, 3]. Općenito zbroj svih područja integracije ne pokriva nužno područje problema, a moguće je i preklapanje područja integracije. Ako je kao testna funkcija odabrana Dirac-delta impulsna funkcija integral reziduala po području integracije može se svesti na jednadžbe u čvorovima diskretizacije. Ovakva formulacija koja koristi Dirac-delta impulsnu funkciju kao testnu funkciju naziva se kolokacijska formulacija.

U svakom čvoru diskretizacije nepoznanice su dvije komponente pomaka i tri komponente naprezanja koje se javljaju u ravniškom stanju naprezanja. Komponente pomaka su aproksimirane neovisno o komponentama naprezanja istim aproksimacijskim funkcijama. Jednadžbe su prvo diskretizirane pomoću čvornih naprezanja. Rubni uvjeti sila su zadovoljeni pomoću kaznene metode. Broj jednadžbi je dvostruko veći od broja čvorova diskretizacije, što je manje od broja čvornih naprezanja. Dodatne jednadžbe se dobivaju diskretizacijom jednadžbi koje povezuju pomake i naprezanja. Konačni sustav jednadžbi ima čvorne pomake kao nepoznanice. Rubni uvjeti pomaka su zadovoljeni izravno.

2 BEZMREŽNA FORMULACIJA

U formulaciji numeričke kolokacijske mješovite formulacije polazi se od jednadžbi ravnoteže

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{unutar } \Omega, \quad (1)$$

i zadanih rubnih uvjeta

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{na } \Gamma_u, \quad (2)$$

$$t_i \equiv \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{na } \Gamma_t, \quad (3)$$

gdje je Ω područje problema, Γ_u dio ruba na kojem su zadani osnovni (*Dirichletovi*) rubni uvjeti, Γ_t dio ruba na kojem su zadani prirodni (*Neumannovi*) rubni uvjeti uz uvjet $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma = \partial\Omega$. Prema metodi lokalnog težinskog reziduala (*Meshless Local Petrov-Galerkin, MLPG*) [3] predloženo je

$$\int_{\Omega_s} (\sigma_{ij,j} + f_i) v_{ki} d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_t} (t_i - \bar{t}_i) v^*_{ki} d\Gamma = 0, \quad (4)$$

gdje je v_{ki} testna funkcija za jednadžbe ravnoteže, v^*_{ki} testna funkcija za jednadžbe rubnih uvjeta sila i α kazneni (*penalty*) parametar. Za aproksimaciju polja pomaka i naprezanja koriste se iste aproksimacijske funkcije. Na osnovi tih aproksimacijskih funkcija izvedene su funkcije oblika koje imaju svojstvo interpolacije čvornih vrijednosti, tzv. Kroneker-delta svojstvo. U ovoj formulaciji prirodni rubni uvjeti su zadovoljeni pomoću kaznene metode a osnovni rubni uvjeti su zadovoljeni izravno nakon postavljanja jednadžbi za sve čvorove. Ova formulacija će točno zadovoljiti svaku raspodjelu osnovnih i prirodnih rubnih uvjeta između čvorova diskretizacije koja je uključena u bazu aproksimacije riješenja, jer svaka od korištenih aproksimacija ima svojstvo reprodukcije funkcija sadržanih u bazi [2, 3]. U kolokacijskoj metodi kao testna funkcija je odabrana Dirac-delta impulsna [1] $v_{ki} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^I)$, pa iz jednadžbi (4) slijedi

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}^I) + f_i(\mathbf{x}^I) - \alpha(t_i(\mathbf{x}^k) - \bar{t}_i(\mathbf{x}^k)) = 0. \quad (5)$$

Za čvorove koji ne leže na rubu Γ_t u jednadžbama (5) izostavlja se kazneni član za zadovoljavanje rubnih uvjeta sila a za čvorove na rubu Γ_t potpuni oblik jednadžbi (5).

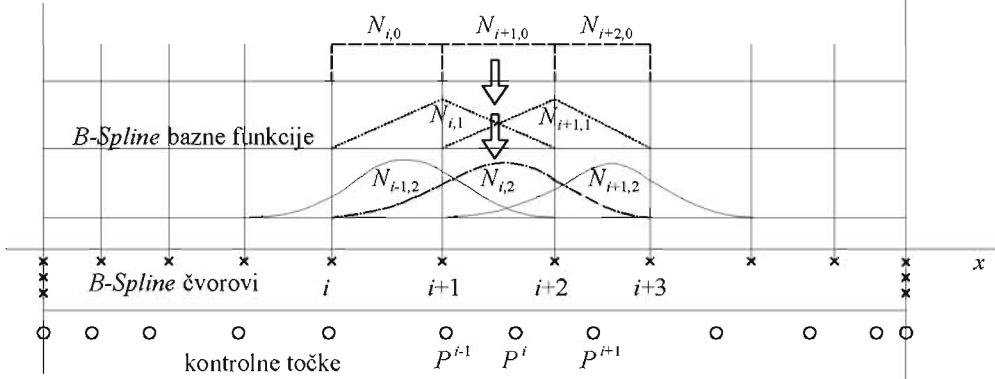
2.1 B-Spline

U dvodimenzijskom prostoru polje neke veličine $u(x, y)$ aproksimirano pomoću *B-Spline* funkcija može se prikazati kao

$$u(x, y) = \sum_{I=1}^n P^I B_I(x, y), \quad (6)$$

gdje su P^I „kontrolna“ vrijednost pridružena I -toj baznoj funkciji, $B_I(x, y)$ I -ta *B-Spline* bazna funkcija a n broj baza koje utječu na aproksimaciju u trenutnoj točki. Bazna funkcija u dvodimenzijskom prostoru definirana je kao ortogonalni tensorski umnožak baznih funkcija u jednodimenzijskom prostoru,

$B_I(x, y) = N_k(x)M_r(y)$. B -Spline bazna funkcija je po dijelovima polinom, lokalnog je karaktera te je u svakoj točki područja nenegativna. Sve su baze prvog ili višeg stupnja definirane pomoću baze nultog stupnja. Bazne funkcije u jednodimizijskom prostoru su definirane pomoću B -Spline čvorova koji određuju područja na kojima je neka baza različita od nule. Bazna funkcija nultog stupnja $N_{i,0}(x)$ je jedinična odskočna funkcija definirana na čvornom rasponu $[x_i, x_{i+1}]$. Sve bazne funkcije višeg stupnja se izračunavaju pomoću baznih funkcija nultog stupnja prema Cox-DeBooreovoj rekurzivnoj formuli [4]. B -Spline bazne funkcije nultog, prvog i drugog stupnja u jednodimizijskom prostoru prikazane su na slici 1.



Sl. 1. B -Spline bazne funkcije

Bazna funkcija stupnja p definirana je na čvornom rasponu $x \in [x_i, x_{i+p+1}]$. Bazna funkcija u dvodimizijskom prostoru definirana je kao ortogonalni tensorski umnožak baznih funkcija u jednodimizijskom prostoru, pa je opet definirana na lokalnom području $x \in [x_i, x_{i+p+1}]$, $y \in [y_j, y_{j+q+1}]$.

Kontrolne vrijednosti su parametri pridruženi kontrolnim točkama. Kontrolne točke su smještene na području definicije pripadne bazne funkcije. B -Spline čvorovi mogu biti ponovljeni, tj., na istoj koordinati moguće je ponoviti do $p+1$ B -Spline čvorova te time u toj točki postići vrijednost baze jednaku 1, što je slučaj na rubnim točkama prostora prema slici 1.

Da bi se postigla interpolacija u kontrolnim točkama potrebno je postaviti uvjete da u tim kontrolnim točkama B -Spline aproksimacija izračuna zadane vrijednosti. Uvjet interpolacije se provodi na način da se postavljaju jednadžbe koje opisuju aproksimiranu vrijednost u svakoj kontrolnoj točki. Zadana vrijednost u svakoj kontrolnoj točki je na desnoj strani jednadžbe. Koeficijenti uz kontrolne vrijednosti su vrijednosti pripadnih B -Spline baznih funkcija u kontrolnim točkama. Time se dobije sustav od N jednadžbi za N kontrolnih točaka.

Taj se sustav simbolički može zapisati kao $\mathbf{B}\mathbf{k} = \mathbf{u}$. Članovi matrice \mathbf{B} su vrijednosti B -Spline baznih funkcija u kontrolnim točkama, vektor \mathbf{k} sadrži kontrolne vrijednosti a vektor \mathbf{u} jesu željene, odnosno interpolirane vrijednosti u kontrolnim točkama. Invertiranjem matrice \mathbf{B} dobivaju se kontrolne vrijednosti prikazane preko interpoliranih vrijednosti u kontrolnim točkama. Iz tog razloga kontrolne točke se dalje smatraju čvorovima diskretizacije jer su njima pridružene interpolirane vrijednosti komponenata pomaka.

Vraćanjem kontrolnih vrijednosti u (6) dobivaju se interpolirajuće funkcije oblika

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \Phi^I(\mathbf{x}) u^I = \sum_{I=1}^N \sum_{j=1}^N B_j(\mathbf{x}) B^{-1}_{(jI)} u^I. \quad (7)$$

3 MJEŠOVITA FORMULACIJA

U dvodimenzijskim problemima komponente pomaka u svakom čvoru su $(\mathbf{u}^I)^T = [u^I \ v^I]$, a za stanje ravninskog naprezanja komponente naprezanja u čvorovima su $(\boldsymbol{\sigma}^I)^T = [\sigma_x^I \ \sigma_y^I \ \tau_{xy}^I]$. Za interpolaciju pomaka i naprezanja koriste se iste funkcije oblika temeljene na *MLS* [3], *PPI* [2] i *B-Spline* (7) aproksimacijama koje imaju svojstvo interpolacije, odnosno Kroneker-delta svojstvo. Interpolacija veličina polja provodi se nezavisno za pomake i naprezanja prema

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \Phi^I(\mathbf{x}) u_i^I, \quad \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \Phi^I(\mathbf{x}) \sigma_{ij}^I. \quad (8)$$

Diskretiziranjem jednadžbi (5) za unutarnje čvorove uz interpolaciju (8) dobiva se

$$\sum_{I=1}^N \Phi_{,j}^I(\mathbf{x}^J) \sigma_{ij}^I = -f_i(\mathbf{x}^J), \quad J = 1, N. \quad (9)$$

Diskretiziranjem jednadžbi (5) za čvorove na Γ_t uz interpolaciju (8) dobiva se

$$\sum_{I=1}^N (\Phi_{,j}^I(\mathbf{x}^J) \sigma_{ij}^I - \alpha \Phi^I(\mathbf{x}^J) \sigma_{ij}^I n_j) = -f_i(\mathbf{x}^J) - \alpha \bar{\mathbf{t}}_i(\mathbf{x}^J), \quad J = 1, N_s \quad (10)$$

Budući da je prema (9) broj jednadžbi ravnoteže manji od broja čvornih komponenata naprezanja potrebno je uvesti dodatne jednadžbe koje povezuju komponente naprezanja i pomaka u čvorovima. Za linearno-elastični materijal Hookeov zakon povezuje komponente naprezanja s komponentama deformacija prema $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$. U slučaju malih deformacija komponente deformacije su prikazane pomoću komponenata pomaka prema $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$. Prethodne jednadžbe diskretizirane prema (8) su

$$C_{ijkl} \sum_{I=1}^N (\Phi_{,m}^I(\mathbf{x}^J) u_k^I + \Phi_{,k}^I(\mathbf{x}^J) u_m^I) = \sigma_{ij}^J, \quad J = 1, N. \quad (11)$$

Jednadžbe (9) mogu se simbolički zapisati kao

$$\mathbf{K}_\sigma \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}. \quad (12)$$

Iz izraza (5) rubni uvjeti sila se mogu simbolički zapisati kao

$$(-\alpha \Theta) \boldsymbol{\sigma} = -\alpha \bar{\mathbf{t}}, \quad (13)$$

gdje je Θ matrica koja obuhvaća funkcije oblika i komponente vanjske normale na mjestu djelovanja prirodnih rubnih uvjeta u skladu sa $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$. Zbrajanjem jednadžbi (12) i (13) dobije se

$$(\mathbf{K}_\sigma - \alpha \Theta) \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} - \alpha \bar{\mathbf{t}}. \quad (14)$$

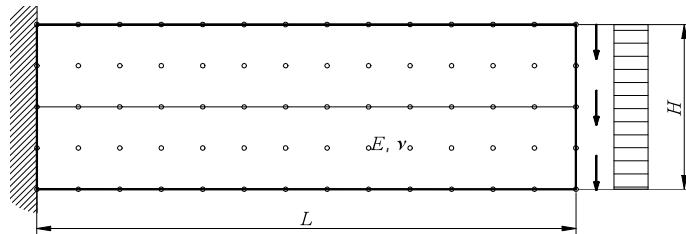
Jednadžbe koje povezuju pomake i naprezanja (11) zapisane simbolički su $\mathbf{T} \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}$ pa uvrštavanjem u (14) dobivamo

$$(\mathbf{K}_\sigma - \alpha \boldsymbol{\Theta}) \mathbf{T} \mathbf{u} = \mathbf{f} - \alpha \bar{\mathbf{t}}. \quad (15)$$

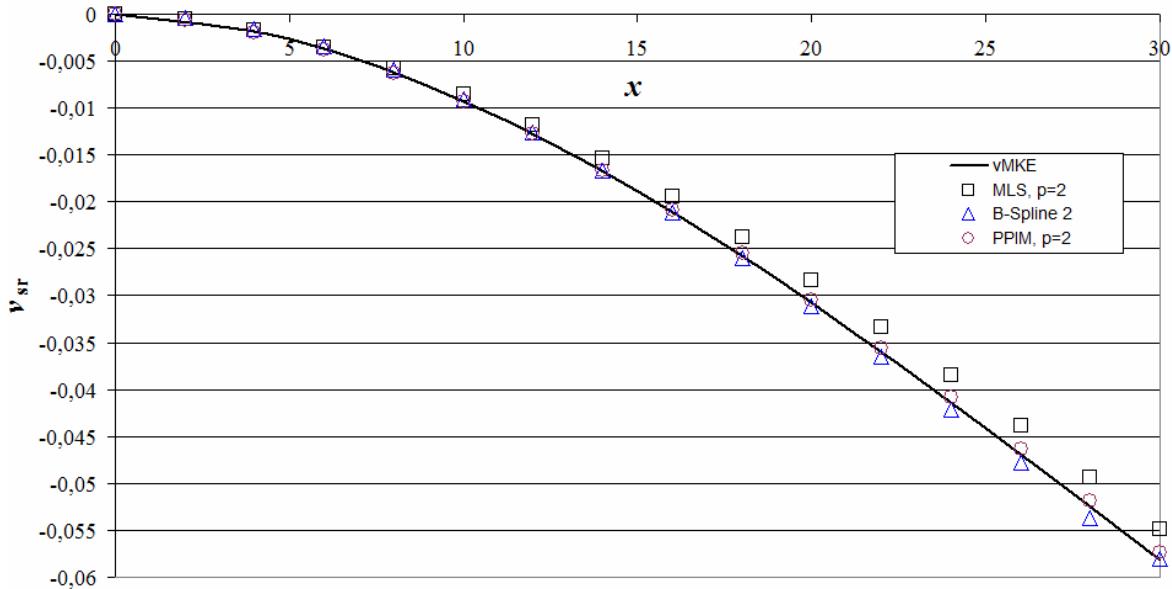
Nadalje, $(\mathbf{K}_\sigma - \alpha \boldsymbol{\Theta}) \mathbf{T}$ se može označiti s \mathbf{K} , $\mathbf{f} - \alpha \bar{\mathbf{t}}$ se može označiti s \mathbf{R} pa se jednadžbe (15) mogu pojednostavniti s $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{R}$. U ovaj se sustav jednadžbi uvode osnovni rubni uvjeti (2) izravno zbog svojstva interpolacije funkcija oblika.

4 NUMERIČKI PRIMJER, KONZOLA

Za primjer prema slici 2 pomaci na lijevom kraju su spriječeni, tj. $u, v = 0$. Za usporedbu je korišteno numeričko rješenje dobiveno metodom konačnih elemenata. Na slici 3 uspoređeni su poprečni pomaci na srednjoj liniji konzole.



Sl. 2. Konzola opterećena jednolikom kontinuirano na slobodnom kraju, diskretizirana s 31×11 pravilno razmještenih čvorova



Sl. 3. Pomaci na elastičnoj liniji konzole

Na dijagramu na slici 3 prikazani su pomaci na srednjoj liniji konzole. Puna linija predstavlja pomake dobivene metodom konačnih elemenata a oznakama su prikazani pomaci dobiveni predloženom numeričkom metodom uz tri različite aproksimacijske sheme. *B-Spline* i *PPIM* aproksimacije daju bolja riješenja od onog dobivenog pomoću *MLS* aproksimacijske sheme.

5 ZAKLJUČAK

Prikazana je nova bezmrežna numerička formulacija temeljena na kolokacijskoj mješovitoj formulaciji za linearno-elastične dvodimenzione probleme. Primijenjena je nova aproksimacijska shema koja se temelji na *B-Spline* baznim funkcijama. *B-Spline* bazne funkcije imaju lokalni karakter pa je matrica sustava pojasna. Izračunavanje funkcija oblika i njihovih derivacija temeljenih na *B-Spline* funkcijama je vrlo jednostavno i brzo. Funkcija interpolirana pomoću *B-Splinea* stupnja p ima C^{p-1} kontinuitet na cijelom području. Primijenjene su i *MLS* i *PPI* aproksimacijske sheme za usporedbu s *B-Spline* aproksimacijom. U mješovitoj formulaciji komponente pomaka i naprezanja su aproksimirane nezavisno istim aproksimacijskim funkcijama. Budući da nema integracije slabe forme, izračunavanje matrice sustava je vrlo jednostavno i brzo. Potrebne su najviše prve derivacije funkcija oblika.

U *B-Spline* aproksimaciji je proizvoljan odabir *B-Spline* čvorova što može utjecati na kvalitetu aproksimirane funkcije. U *MLS* aproksimacijskoj shemi postoje proizvoljni parametri koji utječu na kvalitetu aproksimacije kao što je veličina domene težinske funkcije ili vrsta težinske funkcije. *B-Spline* ima svojstvo reprodukcije funkcija koje su sadržane u bazi pa, ako je korišten *B-Spline* stupnja $p \geq 2$, aproksimirana funkcija može opisati pomake krutog tijela i polje konstantne deformacije.

Rubni uvjeti sila zadovoljeni su pomoću kaznene (*penalty*) metode. Jednadžbe su diskretizirane čvornim komponentama naprezanja. Na taj način broj jednadžbi je manji od broja čvornih nepoznanica pa je potrebno uvesti dodatne jednadžbe. Dodatne jednadžbe su poveznica pomaka i naprezanja tako da u konačnici dobivamo sustav s čvornim komponentama pomaka. Osnovni rubni uvjeti se zbog interpolacijskih svojstava funkcija oblika uvode izravno.

Na analiziranom numeričkom primjeru je uočeno da je konvergencija monotona. Numerički primjer pokazuje da je rješenje postignuto primjenom *B-Spline* aproksimacije u usporedbi s *MLS* i *PPI* aproksimacijskim shemama najbolje.

Literatura:

- [1] Atluri, S.N., Liu, H.T., Han, Z.D., Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Mixed Collocation Method For Elasticity Problems. CMES, vol.14, no.3, 141-152, 2006.
- [2] Liu, G.R., Gu, Y.T., An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming. Springer, 2005.
- [3] Atluri, S.N., The Meshless Method (MLPG) for Domain & BIE Discretizations. Tech Science Press, 2004.
- [4] Rogers, D. F., An Introduction to NURBS: with historical perspective. Academic Press, 2001.

Autori:

Josip Hostler, Jurica Sorić, Tomislav Jarak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb,
josip.hostler@fsb.hr, tel. 01 6168115, jurica.soric@fsb.hr, tel. 01 6168103,
tomislav.jarak@fsb.hr, tel. 01 6168514, web: http://www.fsb.hr/mechanics/chair_mechanics/.

NUMERIČKA ANALIZA LJUSKASTIH KONSTRUKCIJA POMOĆU BEZMREŽNE MLPG METODE

Jarak, T. & Sorić, J.

Sažetak: Prikazan je solid-shell MLPG koncept za analizu ljuskastih konstrukcija. Izvedeni su modeli temeljeni na metodi pomaka kao i mješoviti algoritmi. Ljuskasti kontinuum je parametriziran, a diskretizacija je provedena u parametarskom prostoru pomoću čvorova koji se nalaze na gornjoj i donjoj plohi ljuske. Jednadžbe modela zadovoljene su u lokalnoj slaboj formi koja je izvedena pomoću lokalnog Petrov-Galerkinova postupka. Sve nepoznate veličine polja aproksimirane su pomoću jednakih MLS funkcija u tangencijalnoj ravnini srednje plohe, dok su za interpolaciju po debljini stijenke primijenjeni jednostavni polinomi. U globalnim sustavima jednadžbi javljaju se kao neovisne varijable samo čvorni pomaci. Učinkovitost prikazanih formulacija pokazana je pomoću numeričkog primjera.

Ključne riječi: *MLPG metoda, ljuske, metoda pomaka, mješovita formulacija, locking.*

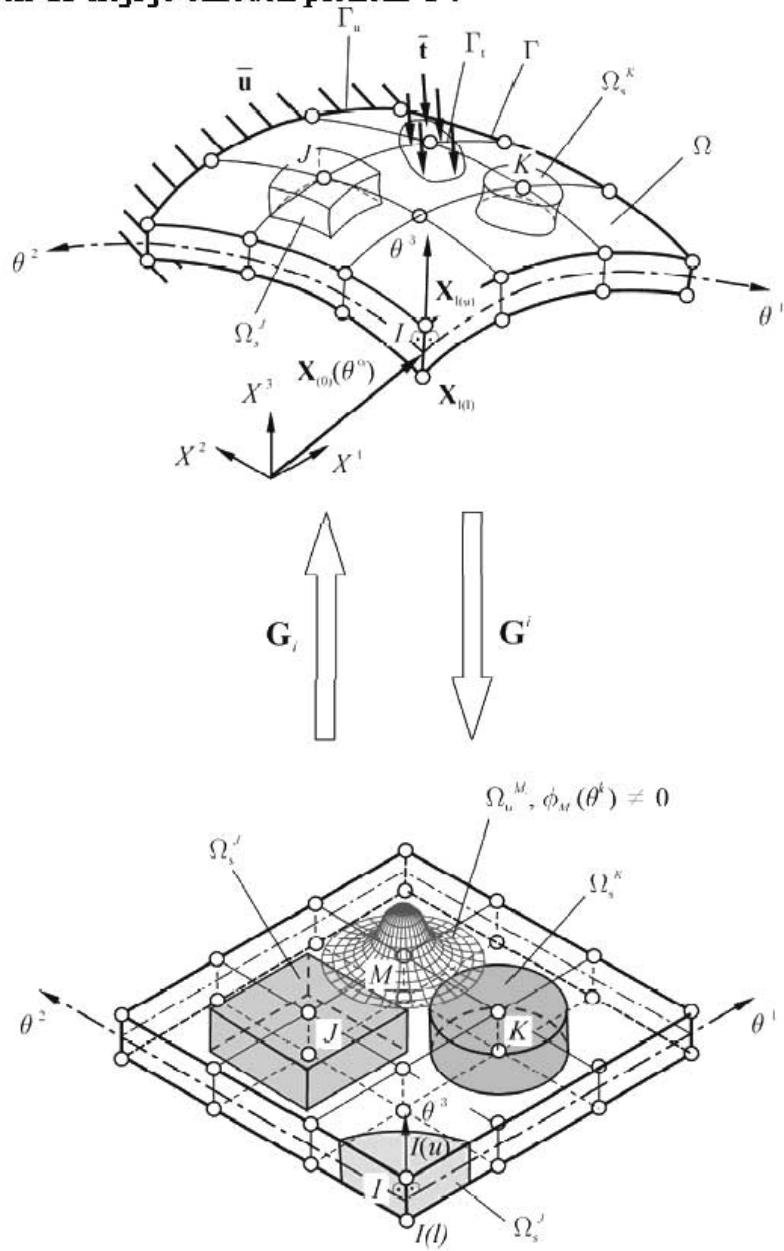
1 UVOD

Većina do sada razvijenih bezmrežnih formulacija za analizu ploča i ljusaka, kao što je npr. ona prikazana u [1], temelji se na nekoj od klasičnih teorija ljusaka te ne sadrži sve komponente tenzora naprezanja. U određenim slučajevima takav pristup onemogućava točnu analizu procesa deformiranja ljuskastih konstrukcija. Jedan od načina da se uključe sve komponente tenzora deformacija i naprezanja u numeričke modele za ljuskaste konstrukcije je primjena tzv. solid-shell koncepta [2].

U ovom radu prikazane su solid-shell bezmrežne formulacije. Svi algoritmi izvedeni su primjenom MLPG metode [3]. Primjena solid-shell koncepta omogućava da se kontinuum ljuskastih konstrukcija opiše pomoću kinematičkih relacija koje vrijede za standardna trodimenzijska (3-D) čvrsta tijela. Diskretizacija je provedena pomoću parova čvorova koji se nalaze na gornjoj, odnosno donjoj plohi ljuske. Oko čvorova definirana su lokalna potpodručja za koja su pomoću Petrov-Galerkinova principa izvedene slabe forme jednadžbi ravnoteže. Iz tih slabih formi moguće je izvesti različite algoritme u kojima se uz pomake mogu neovisno aproksimirati i neke od komponenata tenzora deformacija ili naprezanja. U mješovitim formulacijama se primjenom odgovarajućih kolokacijskih postupaka izvode zatvoreni globalni sustavi jednadžbi u kojim su neovisne varijable samo čvorni pomaci. U prikazanim formulacijama sve neovisne varijable aproksimirane su pomoću metode pomicnih najmanjih kvadrata (*moving least squares*, MLS) [3] u smjerovima tangenti na srednju plohu dok su u smjeru normale korišteni jednostavni polinomi. U prikazanim formulacijama primijenjene su posebne procedure za izbjegavanje nepoželjnog Poissonovog debljinskog lockinga (*Poisson's thickness locking*) i poprečnog posmičnog lockinga (*transversal shear locking*).

2 SOLID-SHELL MLPG KONCEPT

U skladu sa solid-shell pristupom, ljska se promatra kao 3-D deformabilno tijelo smješteno u globalnom Kartezijevom koordinatnom sustavu prema slici 1. Tijelo zauzima volumen Ω koji je omeđen plohom Γ .



Sl. 1. Diskretizacija ljskastog kontinuma

Razmatra se samo statički slučaj opterećenja pa polaznu jaku formu diferensijalnih jednadžbi za sve izvedene formulacije predstavljaju standardne 3-D jednadžbe ravnoteže

$$\sigma_{ij} + b_i = 0, \text{ unutar } \Omega, \quad (1)$$

gdje je σ_{ij} tenzor naprezanja, a b_i je vektor volumnih sila. Te jednadžbe moraju biti zadovoljene u svim točkama unutar Ω , a njihovo rješenje mora zadovoljiti pripadne geometrijske rubne uvjete \bar{u}_i propisane na dijelu globalne plohe Γ_u ,

$$u_i = \bar{u}_i, \text{ na } \Gamma_u, \quad (2)$$

kao i prirodne rubne uvjete koji su propisani na dijelu globalne plohe Γ_t ,

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i, \text{ na } \Gamma_t. \quad (3)$$

U okviru ovog rada geometrija ljsaka je opisana definiranjem geometrije srednje plohe i normale na srednju plohu. Pri tome je srednja ploha parametrizirana pomoću prikladnih krivocrtnih koordinata θ^α te je opisana matematički egzaktno. Koordinatna os θ^3 je okomita na srednju plohu. Pomoću metričkih vektora parametrizirani kontinuum se preslikava u parametarski prostor, gdje se vrši diskretizacija kontinuma pomoću parova čvorova $I(u)$ and $I(l)$, $I = 1, 2, \dots, N$ u kojima se čvorovi $I(u)$ nalaze na gornjoj, a $I(l)$ na donjoj plohi ljske. Oba čvora u paru leže na istom materijalnom vlaknu koje je u početnom stanju okomito na srednju plohu ljske.

Oko svakog para čvorova I definira se područje koje se naziva lokalna sub-domena. Lokalna sub-domena zauzima volumen Ω_s^I omeđen plohom $\partial\Omega_s^I$. Za svaku Ω_s^I formira se tzv. lokalna slaba forma (*local weak form*, LWF) 3-D jednadžbi ravnoteže primjenom metode težinskog reziduala u obliku

$$\int_{\Omega_s^I} v_{ki} (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{su}^I} v_{ki} (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma = 0, \quad (4)$$

gdje v_{ki} opisuje proizvoljne prihvatljive testne (težinske) funkcije (*test functions*), dok se nepoznate varijable polja σ_{ij} i u_i aproksimiraju pomoću odabranih aproksimacijskih funkcija koje se nazivaju probne funkcije (*trial functions*). Ukoliko bezmrežne aproksimacijske funkcije ne posjeduju Kronecker delta svojstva, geometrijski rubni uvjeti su zadovoljeni primjenom kaznene metode s kaznenim parametrom $\alpha \gg 1$. Γ_{su} je dio $\partial\Omega_s^I$ na kojem su zadani geometrijski rubni uvjeti, $\Gamma_{su}^I = \Gamma_u \cap \partial\Omega_s^I$. Sve varijable u gornjim izrazima su funkcije krivocrtnih koordinata, odnosno $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\theta^k)$, $u_i = u_i(\theta^k)$, $v_{ki} = v_{ki}(\theta^k)$, itd.

U skladu s MLPG metodom, lokalne slabe forme su izvedene primjenom Petrov-Galerkinovog postupka kod kojeg testne i probne funkcije ne moraju pripadati istom prostoru funkcija. U ovom radu testne funkcije su opisane linearnim polinomima u smjeru normale na srednju plohu dok se u ravnini tangentnoj na srednju plohu koriste Heavisideove step funkcije. Varijabla v_{ki} je odabrana tako da se može zapisati u sljedećem obliku

$$v_{ki} = \delta_{ki} v(\theta^j) \quad (5)$$

gdje δ_{ki} označava Kronecker delta simbol, a v predstavlja proizvoljno odabranu prihvatljivu funkciju

$$v(\theta^j) = c_1 + c_2 \theta^3, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Nepoznate veličine polja u svim predloženim algoritmima aproksimirane su primjenom MLS funkcija [1] u tangentnoj ravnini, dok se u smjeru normale također koriste jednostavni polinomi. Primjenom testnih funkcija (5) i (6), lokalna slaba forma (4) može se zapisati u sljedećem obliku

$$\begin{aligned}
& - \int_{L_s^I} n_j \sigma_{kj} d\Gamma - \int_{\Gamma_{st}^I} n_j \sigma_{kj} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}^I} u_k d\Gamma = \\
& \int_{\Omega_s^I} b_k d\Omega + \int_{\Gamma_{st}^I} \bar{t}_k d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}^I} \bar{u}_k d\Gamma, \\
& \int_{\Omega_s^I} \theta^3,_{X^j} \sigma_{kj} d\Omega - \int_{L_s^I} \theta^3 n_j \sigma_{kj} d\Gamma - \int_{\Gamma_{st}^I} \theta^3 n_j \sigma_{kj} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}^I} \theta^3 u_k d\Gamma = \\
& \int_{\Omega_s^I} \theta^3 b_k d\Omega + \int_{\Gamma_{st}^I} \theta^3 \bar{t}_k d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}^I} \theta^3 \bar{u}_k d\Gamma.
\end{aligned} \tag{7}$$

U gornjim izrazima t_i označava vektor naprezanja, \bar{t}_i je njegova zadan vrijednost na dijelu lokalne rubne plohe $\Gamma_{st}^I = \Gamma_t \cap \partial\Omega_s^I$, a L_s^I je dio $\partial\Omega_s^I$ koji se nalazi unutar Ω . Lokalna slaba forma (7) predstavlja ishodište za izvođenje raznih MLPG solid-shell numeričkih formulacija. Ako je neovisna varijabla samo polje pomaka, dobivaju se MLPG algoritmi temeljeni na metodi pomaka, odnosno tzv. primarni MLPG algoritmi. Uz pomake moguće je direktno aproksimirati i druge varijable sustava, npr. komponente tenzora deformacija ili naprezanja. U tom slučaju rezultirajući numerički model predstavlja mješovitu MLPG solid-shell formulaciju.

3 LOCKING EFEKTI U MLPG SOLID-SHELL PRISTUPU

Kao što je poznato iz MKE, solid-shell koncept osjetljiv je na pojavu raznih locking efekata, posebice ako se aproksimira samo polje pomaka. Može se teoretski pokazati da se kod solid-shell MLPG formulacija javlja Poissonov debljinski locking ako je normalna komponenta deformacije konstantna po debljinama. Također, kod tankih struktura javlja se i poprečni posmični locking ukoliko bezmrežne metode ne zadovoljavaju Kirchhoff-Loveove pretpostavke.

U solid-shell MLPG pristupu Poissonov locking može se otkloniti upotrebom hijerarhijske kvadratne interpolacije za poprečnu komponentu pomaka [4], modificiranjem čvornih vrijednosti poprečne normalne komponente deformacije [5] ili direktnim aproksimiranjem poprečne normalne komponente tenzora naprezanja [6].

Kod primarnih metoda, poprečni posmični locking je moguće ublažiti primjenom MLS funkcija s visokim redom baze. Takav pristup nažalost ne otklanja taj locking u potpunosti, a i numerički je neučinkovit [4],[5],[6]. Kod mješovitih formulacija, poprečni posmični locking je u potpunosti na učinkovit i jednostavan način eliminiran direktnim aproksimiranjem komponenata tenzora deformacije [5],[6].

3 DISKRETIZACIJA JEDNADŽBI

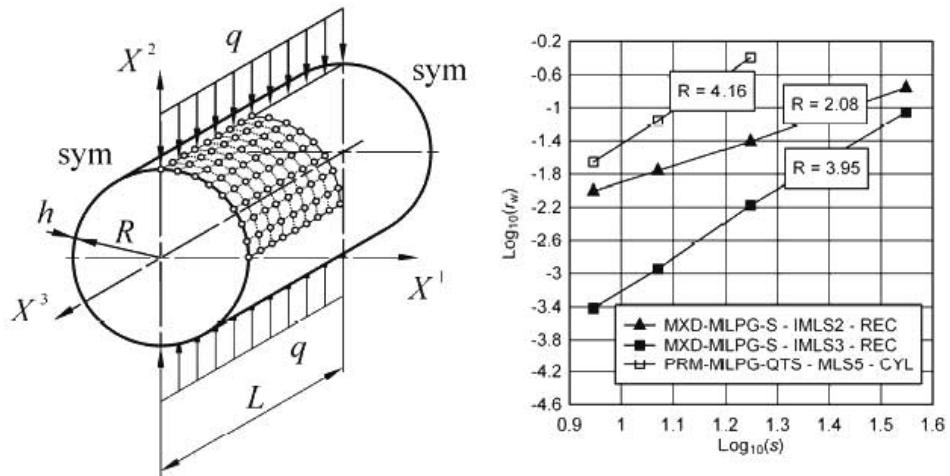
Sve nepoznate varijable polja obično se aproksimiraju pomoću istih MLS funkcija u tangentnim smjerovima na srednju plohu dok se u smjeru normale na srednju plohu primjenjuju jednostavnji polinomi. Diskretizirane varijable mogu se zapisati u sljedećem općenitom matričnom obliku,

$$\omega(\theta^i) = \sum_{J=1}^n \phi_J(\theta^\alpha) \Phi_J^\omega(\theta^3) \hat{\omega}_J, \quad \mathbf{u}(\theta^i) = \sum_{J=1}^n \phi_J(\theta^\alpha) \Phi_J^u(\theta^3) \hat{\mathbf{u}}_J. \tag{8}$$

U gornjim izrazima \mathbf{u} je aproksimirani vektor pomaka, a $\boldsymbol{\omega}$ je vektor koji sadrži aproksimirane komponente tenzora deformacija i naprezanja. Vektori $\hat{\mathbf{u}}$, i $\hat{\boldsymbol{\omega}}$, su pripadni vektori čvornih vrijednosti povezanih, ϕ , predstavlja 2-D MLS čvorne funkcije oblika pomoću kojih se opisuje raspodjela varijabli u smjerovima koji su tangentni na srednju plohu, a matrice Φ^u i Φ^ω opisuju raspodjelu u smjeru normalu na srednju plohu.

Uvrštanjem aproksimacija (8) u lokalne slabe forme (7), dobivaju se diskretizirane jednadžbe. Ukoliko je potrebno, zatvoreni sustav jednadžbi na globalnoj razini dobiva se postavljanjem odgovarajućih dodatnih relacija. U metodi pomaka do dodatnih jednadžbi može se doći primjenom testne funkcija koja je kvadratna u smjeru normale [4]. Kod mješovitih formulacija potrebno je postaviti dodatne ograničavajuće uvjete za aproksimirane komponente tenzora deformacije ili naprezanja u pojedinim točkama [5],[6]. Iz tih se izraza izračunavaju nepoznate čvorne vrijednosti komponenata deformacija ili naprezanja pomoću aproksimiranog polja pomaka. Ta se transformacija čvornih vrijednosti na jednostavan način može obaviti primjenom odgovarajućih kolokacijskih postupaka [5],[6]. Uvrštanjem tako izračunatih čvornih vrijednosti deformacija i naprezanja u diskretizirane lokalne slabe forme izvodi se globalni sustav jednadžbi u kojem se kao nepoznanice javljaju samo nepoznate čvorne vrijednosti pomaka.

4 NUMERIČKI PRIMJER



Sl. 2. Numerički primjer: diskretizacija (lijevo) i brzina konvergencije (desno)

Analizirana je dugačka cilindrična ljska, opterećena linjskim kontinuiranim opterećenjem iznosa $q=1$ duž gornje, odnosno donje izvodnice. Duljina ljske je $L=300$, polumjer je $R=90$, a debljina stijenke ljske je $h=0,9$. Materijal je linearno elastičan s modulom elastičnosti $E=210000$ i Poissonovim koeficijentom $\nu=0,3$. Zbog simetrije, samo je jedna osmina ljske diskretizirana pomoću jednoliko raspoređenih čvorova prema slici 2.

Provedena je analiza brzine konvergencije pomaka, a rezultati su prikazani na slici 2. Uspoređene su vrijednosti dobivene pomoću mješovite formulacije u kojoj je aproksimirana poprečna normalna komponenta naprezanja kako bi se eliminirao

Poissonov locking [6] i primarne formulacije kod u kojoj je korištena kvadratna testna funkcija [4]. Vidljivo je da u mješovitoj formulaciji moguće postići mnogo veću ukupnu točnost rješenja primjenom MLS funkcija nižeg reda nego kod formulacija temeljenih na metodi pomaka što ukazuje na mnogo manju osjetljivost mješovitog MLPG pristupa na poprečni posmični locking.

5 ZAKLJUČAK

Prikazan je solid-shell MLPG koncept za analizu ljskastih konstrukcija pomoću kojeg je moguće izvesti različite mješovite i primarne numeričke modele. Diskretizacija je provedena pomoću čvorova koji se nalaze na gornjoj i donjoj plohi ljske. Pomoću lokalnog Petrov-Galerkinova postupka izvedene su slabe forme uvjeta ravnoteže. Sve nepoznate veličine polja aproksimirane su pomoću jednakih MLS funkcija u ravnini srednje plohe, dok su za interpolaciju po debljini stjenke primjenjeni jednostavni polinomi. U globalnim sustavima jednadžbi javljaju se kao neovisne varijable samo čvorni pomaci.

Predloženi mješoviti pristup pokazuje značajne prednosti u usporedbi s formulacijama temeljenima na klasičnoj metodi pomaka. Mješoviti pristup mnogo je manje osjetljiv na pojavu locking efekata u slučaju tankih ljsaka. Moguće je postići veću ukupnu točnost pomoću MLS funkcija nižeg reda pa je stoga numerička učinkovitost mješovite formulacije značajno veća. Osim toga, derivacije MLS funkcija potrebno je izračunavati samo u čvorovima, a ne u svim točkama integracije, što dodatno pridonosi numeričkoj učinkovitosti.

Literatura:

- [1] Noguchi H., Kawashima T., Miyamura T., "Element free analyses of shell and spatial structures", Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 47, 2000, str. 1215-1240.
- [2] K.Y. Sze. Three-dimensional continuum finite element models for plate/shell analysis. Prog. Struct. Engng. Mater., vol. 4, 2002, pp. 400-407.
- [3] Atluri, S.N., "The Meshless Method (MLPG) for Domain & BIE Discretization", Tech Science Press Forsyth USA, 2004.
- [4] Jarak, T., Sorić J., Hostler, J., "Analysis of shell deformation responses by the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach", CMES: Comput. Model. Eng. Sci., 2007, Vol. 18, str. 235-246.
- [5] T. Jarak and J. Sorić. Analysis of rectangular square plates by the mixed Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach. CMES: Comput. Model. Eng. Sci., 2008, vol. 38, pp. 231-261.
- [6] Sorić, J., Jarak, T., "Mixed Meshless formulation for analysis of shell-like structures", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2010, Vol.199, str. 1153-1164.

Autori:

Tomislav Jarak, Jurica Sorić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje Zagreb, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel. 01 6168 514, fax 01 6168 187, e-mails: {tomislav.jarak,jurica.soric}@fsb.hr,
web stranica: <http://www.fsb.hr/lnm/>

OCJENA MAKRO MODEL A ZIDANIH ISPUNA U NELINEARNOJ ANALIZI AB OKVIRA SA ZIDANIM ISPUNOM

Kalman, T. & Sigmund, V.

Sažetak: Ponašanje armiranobetonskih okvirnih zgrada pri djelovanju potresa vrlo često rezultira konstruktivnim posljedicama koje izaziva prisutnost zidanih ispuna. Zidani ispun, koji općenito ima visoku krutost i čvrstoću, igra ključnu ulogu u odgovoru armiranobetonske okvirne zgrade pri djelovanju horizontalnog opterećenja, posebno u početnim fazama potresa. Iako većina nacionalnih propisa na daje jasne odredbe za modeliranje, niti upute pri projektiranju zidanih ispuna, njihov konstruktivni doprinos horizontalnoj krutosti takvih kompozitnih konstrukcija se ne smije zanemariti. Cilj ovog rada je usporedba i evaluacija postojećih makro modela zidanih ispuna u armiranobetonskim okvirima. Analiza nelinearnog seizmičkog odgovora provedena je pomoću programa Seismostruct [SeismoSoft, 2006] koji obuhvaća jednostavne i složene modele zidanih ispuna. Makro modeli zamjenskih ekvivalentnih dijagonala obuhvaćaju prijedloge dostupne u nacionalnim propisima i literaturi. Za modeliranje uporabljeni su armiranobetonski okviri s različitim omjerima visine i duljine i različitim tipovima ispuna (slaba, srednja i jaka).

Rezultati istraživanja daju pregled dostupnih makro modela zidanih ispuna u armiranobetonskim okvirima i usporedbu rezultata eksperimentalnih ispitivanja sa numerički dobivenim vrijednostima.

Ključne riječi: armiranobetonski okviri, model zidanog ispuna, nelinearna analiza

1 UVOD

Jednoliko i ravnomjerno raspodijeljeni zidani ispuni u armiranobetonskim okvirima doprinose povećanju krutosti i nosivosti okvira i smanjenju prirodnog perioda sustava koje vodi do smanjenja međukatnog pomaka pri djelovanju jakih potresa. Povećanje poprečne sile i redukcija međukatnog pomaka ovakvog sustava, u odnosu na prazni okvir, može izazvati ozbiljna oštećenja ukoliko se pri projektiranju ne uzme u obzir uzajamno djelovanje i raspodjela ispune u okvirnim sustavima. Cilj projektiranja su sigurne i ekonomski prihvatljive konstrukcije kod kojih se moraju iskoristiti prednosti povećanja krutosti i nosivosti sustava, ali u granicama koje neće dovesti do nepoželjnih posljedica u ponašanju. Prema dokazima laboratorijskih istraživanja okvira sa zidanim ispunom najosjetljivija „točka“ ovih kompozitnih sustava je stup okvira omeđen sa ispunom. Rješenje problema zahtjeva razumijevanje ponašanja zida i okvirnih betonskih elemenata pri djelovanju dinamičkih opterećenja, koje se može razriješiti generalizacijom rezultata eksperimentalnih istraživanja.

S obzirom da su armiranobetonski okviri sa zidanim ispunom najčešći tip sustava za višekatne zgrade nužan je razvoj detaljnih uputa za seizmičko projektiranje ovakvih sustava.

2 PREGLED NUMERIČKIH MODELA ZIDANOG ISPUNA

Makro modeli zidanog ispuna se baziraju na fizikalnom razumijevanju globalnog ponašanja i predstavljaju se zamjenskim ekvivalentnim dijagonalama. Pojednostavljeni pristup modelu rezultira očiglednim prednostima u smislu proračunske jednostavnosti.

Holmes je prvi predložio zamjenu ispuna sa ekvivalentnom dijagonalom istih materijalnih karakteristika uz pretpostavku da je širina ekvivalentne dijagonale jednaka $1/3$ duljine dijagonale između tlačno opterećenih kutova.

Stafford Smith i Carter (1969) su za određivanje širine dijagonale predložili niz grafikona koji prikazuju krivulje w/d , (gdje je d duljina dijagonale ispuna), na osnovu bezdimenzionalnog parametra krutosti λh ispuna i okvira i odnosa visine i raspona ispuna. Za svaki odnos visine i raspona ispuna dane su krivulje za četiri različita uvjeta opterećenja: $R/Rc=0$, $R/Rc =1/2$, $R/Ry =1$ and $R/Rc=1$, gdje R , Rc i Ry redom predstavljaju naneseno opterećenje, opterećenje koje izaziva slom ispuna i opterećenje uslijed kojeg dolazi do popuštanja u ispunu. U fazi analize ispun se zamjenjuje se zamjenskom dijagonalom sa definiranom širinom dijagonale w , istog materijala i debljine.

Mainstonov rad (1971) predstavlja procesuiranje i usklađivanje metode zamjenske dijagonale koje su razvili Holmes i Smith. Formule za izračun širine dijagonale je podijelio s obzirom na tip ispuna (opečni ili betonski ispun) i vrijednost bezdimenzionalnog parametra krutosti λh . Fema 356 je preuzeila preporuke Mainstonea, pa je u tablici 1 samo prikazana prihvaćena formula.

Tablica 1. Pregled prijedloga različitih autora za izračun širine ekvivalentne dijagonale.

Autori / pravilnik	Određivanje širine ekvivalentne dijagonale
Stafford-Smith i Carter (1969)	$\lambda h = h^4 \sqrt{\frac{E_c \cdot t \cdot \sin(2\theta)}{4E \cdot I \cdot h'}}$; odnos h/l ispuna
Mainstone (1971) i Fema 356	$w = 0,175 \cdot (\lambda \cdot h)^{-0,4} \cdot w'$
Žarnić (1992)	$A_s = K_t \frac{l_p}{E_p}$; $h_s = \frac{A_s}{t_p}$; $K_t = \frac{1}{\frac{5 \cdot h_t^3}{12 \cdot E_p \cdot I_p} + \frac{0,6 \cdot h_t}{G_p \cdot A_p}}$
Eurocode 8	15% d

Žarnić (1992) preporučuje primjenu ekscentrične dijagonale kao modela za zidani ispun, koja je za stup pridržana na $2/3$ visine ispuna. Poprečna površina (A_s) i širina ekvivalentne dijagonale (h_s) mogu se odrediti pomoću krutosti trokutnog dijela ispuna i materijalnih i geometrijskih karakteristika ispuna, kako je prikazano u tablici 1.

Eurokod 8 na vrlo konzervativan način predlaže širinu dijagonale kao 15% duljine dijagonale zidanog ispuna.

3 EKSPERIMENTALNI UZORCI AB OKVIRA S ZIDANIM ISPUNOM

Iz eksperimentalne baze podataka koja obuhvaća uzorke jednokatnih, jednorasporskih okvira sa zidanim ispunima odabrana su tri uzorka za modeliranje različitih omjera visina i raspona i različitih tipova čvrstoća ispuna: slab, srednji i jaki.

Od eksperimenata koje je proveo Colangelo (2005) odabrana su dva uzorka I to tako da jedan odgovara okviru sa slabim ispunom (N2), a drugi sa ispunom srednje tlačne čvrstoće (C1). Uzorak koji odgovara okviru s jakim tipom ispuna (M1) eksperimentalno je ispitao Žarnić (1985).

Tablica 2. Osnovne geometrijske i materijalne karakteristike uzoraka

	Okvir		Ispun		
	f_c (MPa)	E_c (MPa)	t (m)	f_m' (MPa)	E_m (MPa)
N2 /l=0,57	44,5	35576	0,16	2,74	1212
C1 /l=0,75	43,7	35390	0,12	5,10	4230
M2 /l=0,70	15,2	17860	0,12	14,4	5486

4 NUMERIČKO MODELIRANJE ZIDANIH ISPUNA

Za numeričko modeliranje uporabljen je Seismostruct (Seismosoft, 2006.) koji pomoću konačnih elemenata pripisuje nelinearne materijalne i geometrijske karakteristike komponenata sustava. Nelinearnost elemenata okvira je definirana preko materijalne nelinearnosti betona (ovijeni i neovijeni dijagrama betona prema Kent i Parku) i čelika (bilinearni dijagram) sa područjima plastičnih zglobova. Za zidani ispun je uporabljen Crisafullijev (1997) makromodel panela koji obuhvaća četiri dijagonale i dvije posmične opruge. Nelinearnost je simulirana pomoću histereznog pravila Crisafullija (1997) baziranog na aksijalnom tlačnom ponašanju zida ispuna.

Makromodel ispuna sa varijabilnim površinama dijagonala ima debljinu jednaku debljini zidanog ispuna i inicijalnu površinu definiranu prema prijedlozima različitih autora kako je prikazano u tablici 3.

Varijacija poprečne površine presjeka dijagonala definirana je preko četiri parametra: inicijalne i krajne površine Ams1 and Ams2 (9% Ams1 – kalibrirana vrijednost) i aksijalnih deformacija ϵ_1 i ϵ_2 pri kojima površine mijenjaju svoje vrijednosti.

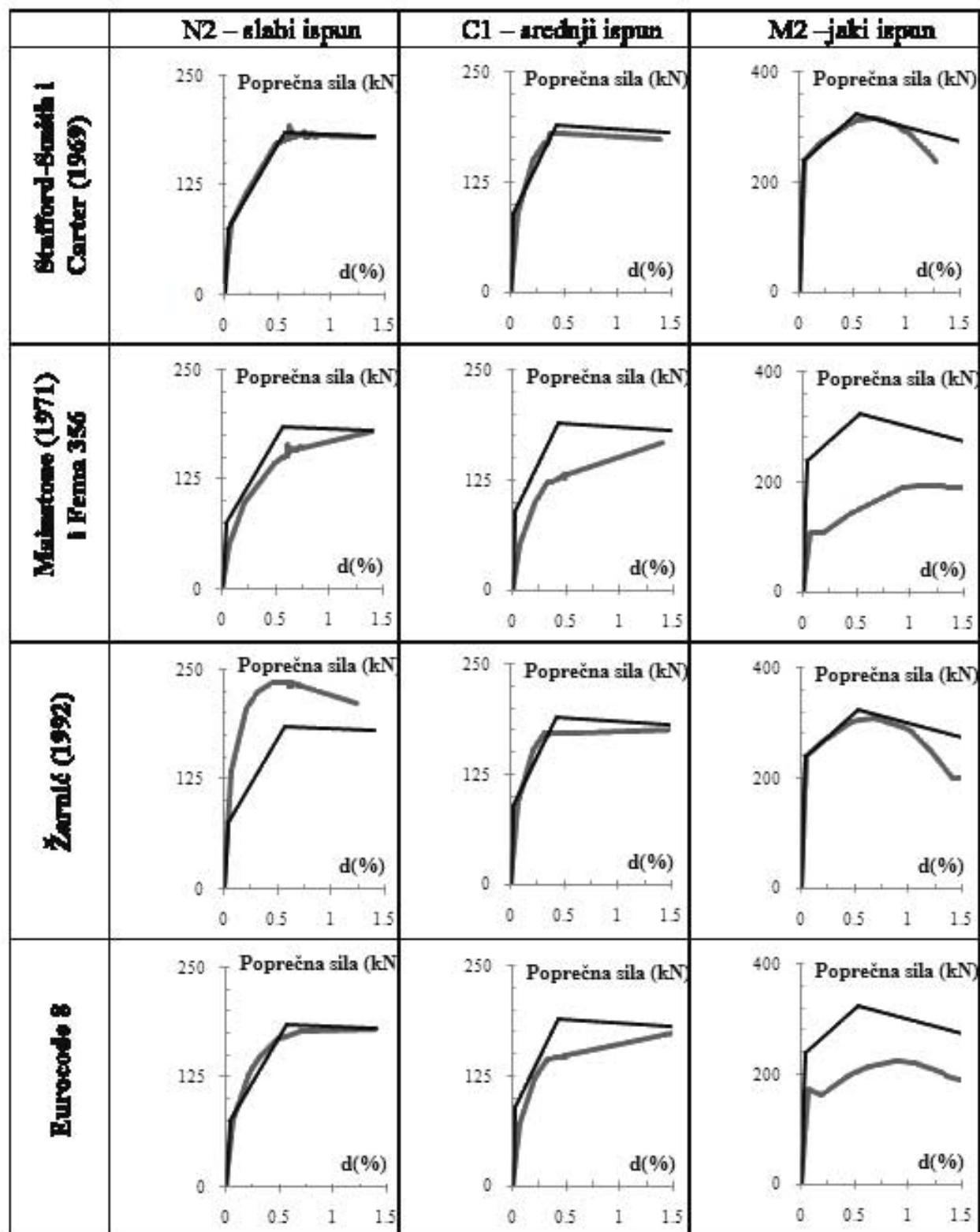
Tablica 3. Inicijalne širine ekvivalentnih dijagonala eksperimentalnih uzoraka prema različitim prijedlozima autora (Poglavlje 2) izražene u metrima

uzorak i tip ispuna	Stafford-Smith i Carter (1969)	Mainstone (1971) i FEMA 356	Žarnić (1992)	Eurocode 8
N2 - slab	0,45	0,17	1,16	0,40
C1- srednji	0,51	0,17	0,51	0,32
M2 - jaki	0,72	0,22	0,70	0,38

Primijenjena je pushover analiza sa rastućim horizontalnim opterećenjem i konstantnim aksijalnim vertikalnim opterećenjem stupova. Ponašanje eksperimentalnih uzoraka je definirano specifičnim točkama primarne krivulje preko poprečne sile i međukatnog pomaka: područje popuštanja i granične nosivosti okvira sa zidanim ispunom.

5 REZULTATI NELINEARNE ANALIZE

Numerička komparativna studija je izrađena s ciljem ocjene preporuka različitih autora za modeliranje tlačnih dijagonala zidanog ispuna za simulaciju ponašanja okvira s ispunima neovisno o čvrstoći zidanog ispuna. Rezultati su prikazani na slici 1.



Sl. 1. Rezultati nelinearne analize prema uputama različitih autora

Na osnovu rezultata može se zaključiti:

- preporuke Stafford-Smitha i Cartera za sva tri tipa ispuna daju vrlo dobre rezultate u odnosu na primarne krivulje dobivene eksperimentalnim istraživanjima;
- preporuke Mainstonea, iako su uključene u pravila za modeliranje ispuna ekvivalentnim dijagonalama prema FEMI 365 rezultiraju jako lošim predviđanjem ponašanja, naročito za modele sa ispunom srednje i jake tlačne čvrstoće;
- kao što je i očekivano, izrazi koje predlaže Žarnić odgovaraju srednjem i jakom tipu ispuna,koje je on i obuhvatio u svom eksperimentalnom radu na osnovu kojeg je bazirao svoje preporuke;
- preporuke Eurocoda 8 su dale dobre rezultate samo za slab tip ispuna.

6 ZAKLJUČAK

Provedena je numerička studija s ciljem usporedbe i provjere vjerodostojnosti postojećih uputa za primjenu makro modela zidanih ispuna u armiranobetonskim okvirima. Za modeliranje su uporabljena tri eksperimentalna uzorka modela okvira sa zidanim ispunom s različitim omjerima visine i raspona ispuna i tri različita tipa ispuna: slab, srednji i jaki. Na idealiziranim modelima primjenjena je pushover analiza s ciljem simulacije eksperimentalno dobivenih primarnih krivulja. Makro model za zidani ispun bazira se na modelu bazne ekvivalentne dijagonale sa histereznim pravilom aksijalnog ponašanja ziđa. Ovakav pristup modeliranju obuhvaća globalno ponašanje ispuna koji je zamijenjen sa četiri ekvivalentne dijagonale i dvije posmične opruge koje predstavljaju posmično ponašanje i osigurava kompetentnu evaluaciju nelinearnog odgovora i definiranja područja ponašanja sustava. Rezultati numeričke studije pokazuju da se primjenom uputa Stafford- Smitha i Cartera za određivanje širine ekvivalentne dijagonale može predvidjeti ponašanje sustava koje odgovara primarnoj krivulji dobivenoj eksperimentalnim istraživanjem. Kako su rezultati ove studije ograničeni na sustave okvira s zidanim ispunom s jednim katom i jednim rasponom, nužna je primjena predloženih modela na višekatne i višerasponske konstrukcije.

Napomena:

Istraživanja u ovom radu obavljena su u okviru znanstvenog projekta br. (149-1492966-1536) "Seizmički proračun okvirnih konstrukcija s ispunom" koji financira Ministarstvo znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske. Autori se zahvaljuju na potpori.

Literatura:

- [1] Colangelo, F., "Pseudo-dynamic seismic response of reinforced concrete frames infilled with non-structural brick masonry", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 34:1219-1241,2005.
- [2] Crisafulli, F.J., "Seismic behavior of reinforced concrete structures with masonry infills", PhD Thesis. Christchurch, New Zealand, 1997.
- [3] Eurocode 8, "Design of Structures for Earthquake Resistance. Part 1: General Rules, Seismic Actions and Rules for Buildings. Draft No.6", European Committee for Standardization CEN, Brussels, 2003.
- [4] FEMA 356, "Prestandard and Commentary for the Seismic Rehabilitation of Buildings", American Society of Civil Engineers for the Federal Emergency Management Agency,

Washington, D.C., 2000.

- [5] Kalman, T., Sigmund, V., “[Seismic capacity of infilled frames using neural networks](#)” 6th ICCSM Proceedings, Zagreb, Croatian Society of Mechanics, 2009.
- [6] Kaushik, H.B., Rai, D.C., Jain, S.K, “Stress-Strain Characteristics of Clay Brick Masonry under Uniaxial Compression”, Journal of Materials in Civil Engineering. 19(9), str.728-739, 2007.
- [7] Mainstone, R.J., “Stress- On the stiffnesses and strengths of infilled frames”, Proceeding of the Institution of Civil Engineers. Supplement IV, str.57-90, 1971.
- [8] SeismoSoft “Seismostruct- A computer program for Static and Dynamic Nonlinear Analysis of Framed Structures”, <http://www.seismosoft.com/>, 2006.
- [9] Stafford Smith, B., Carter, C., “A method of analysis for infilled frames”, Proceeding of the Institution of Civil Engineers. 44, 31-48., 1969.
- [10] Žarnić R., “Analiza obnašanja armiranobetonskih okvirov z zidanimi polnili pri potresni obtežbi”, Fakulteta za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1985.
- [11] Žarnić R., “Neelastični odgovor armiranobetonskih okvirov z zidanimi polnili na potresno obtežbo”, Fakulteta za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana, 1992.

Autori:

Tanja Kalman, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Crkvena 21, Osijek tel. 0912240747, e-mail: tkalman@gfos.hr, web stranica: www.gfos.com

Vladimir Sigmund, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Crkvena 21, Osijek tel. 0912240748, e-mail: sigmund@gfos.hr, web stranica: www.gfos.com

TRODIMENZIJSKI MODEL RASTA I PROMJENE STRUKTURE KRVNE ŽILE

Igor Karšaj, Jurica Sorić & Jay D Humphrey

Sažetak: Razvijen je trodimenijski matematički pristup koji može opisati promjenu geometrije, strukture i mehaničkih svojstava arterije opterećene s promjenjivim srednjim krvnim tlakom i krvnim tokom. Numerički model može u potpunosti dati prethodno potvrđene rezultate dobivene pomoću dvodimenzijskih modela, ali i izračunati radikalne promjene masenih udjela pojedinih komponenanta izvanstanične matrice i molekula koje utječu na kontrakciju ili širenje stijenke arterije. Vrlo važno svojstvo ovog modela je da može predvidjeti promjene zaostalih naprezanja, opisanih preko kuta otvaranja, kao posljedica povećanja ili smanjenja krvnog tlaka. Izloženi materijalni model temeljen na spregnutoj teoriji smjesa (*constrained mixture theory*) produbljuje razumijevanje mehanobioloških promjena i omogućuje napredak kod kliničkih zahvata na arterijskim bolestima (npr. aneurizme, ateroskleroza).

Ključne riječi: arterija, teorija spregnutih smjesa, rast i promjena strukture, zaostala naprezanja

1 UVOD

U posljednjih 15 godina, potaknuti u najvećem dijelu radom Rodrigueza i suradnika [6], posvećuje se sve veća pažnja problemima matematičkog modeliranja rasta (promjena u masi) i prestrukturiranja (promjene mikrostrukture) kod mekih tkiva i to posebno kod arterija. Istraživanje je vrlo zahtjevno zbog vrlo kompleksne mehanike krvnih žila, kompozitne strukture kao i aktivnog djelovanja glatkih mišićnih stanica i pasivnog anizotropnog hiperelastičnog ponašanja. Pristup Rodrigueza i suradnika je kinematički tj. G&R se samo opisuje, a ne ulazi se u uzroke takvog ponašanja (promjena krvnog tlaka i masenog toka). Humphrey i Rajagopal [3] predlažu u osnovi drugačiji pristup temeljen na opisu promjena i proizvodnje odnosno razgradnje izvanstaničnih dijelova stijenke žile kao posljedica promjene normalnih vrijednosti vanjskog opterećenja. Uvode pojam spregnutih smjesa (*constrained mixture model*) u kojem su pojedeni dijelovi spregnuti u smjesu u kojoj se moraju gibati i deformirati zajedno (npr. arterija). No svaki od tih dijelova može posjedovati vlastitu konfiguraciju (*natural configuration*) u kojoj nemaju zaostalih naprezanja.

Daljnji razvoj G&R na temeljima iz [3] napravljen je u radu Baeka i suradnika [1] za moždane aneurizme i dalje proširen od Valentina i suradnika [7] za moždane arterije. Iako su ograničeni na membransko ponašanje ti modeli nam daju bitne informacije o mehanizmima G&R (npr. ovisnost o naprezanju, o koncentraciji vazodilatatora i vazokonstriktora). Dani 2-D modeli daju nam informaciju o prilagodbi arterija dok bi 3-D pristup trebao tome još dodati informaciju o utjecaju raspodjele i preddeformiranja pojedinih konstituenata (elastin, kolagen) unutar stijenke, [2]. Trodimenijski modeli mogu uzeti u obzir i raspodjelu medustaničnih struktura koje ne doprinose nosivosti krvne žile (npr. kisik, molekule koje uzrokuje kontrakciju ili

dilataciju žila te proteina koji utječu na razgradnju mehanički bitnih dijelova). Machyshyn i suradnici [5] predlažu 3-D model temeljen na kinematičkom pristupu Rodrigueza što je ujedno i jedan od bitnih nedostataka takvog pristupa. Wan i suradnici [8] razvili su 3-D G&R model temeljen na principima Humphreya i Rajagopala. Koristili su proračun na osnosimetričnom cilindru dok su proizvodnju komponenata definirali u prirodnoj konfiguraciji svakog konstituenta (eksperimentalno nije moguće ispitati tu hipotezu).

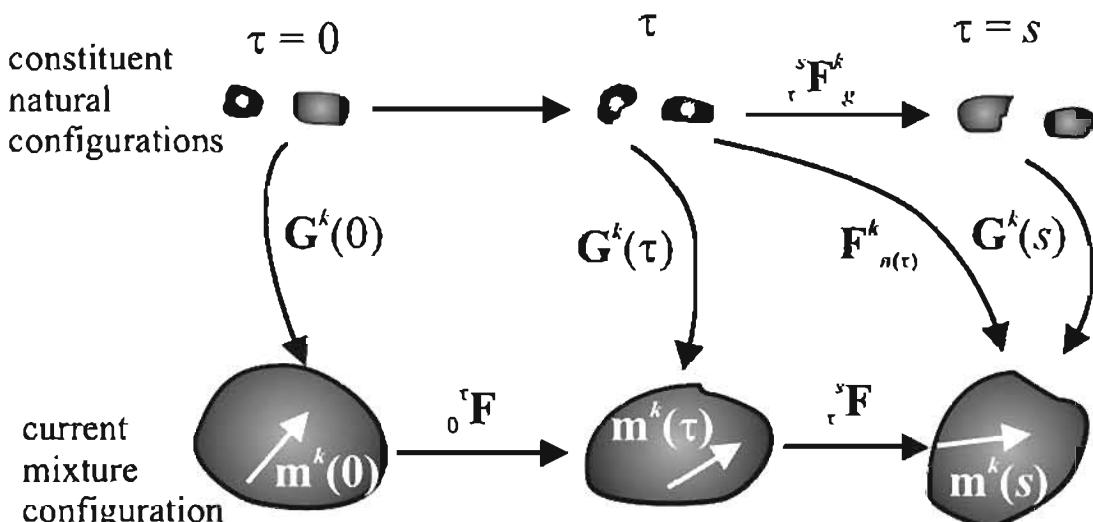
2 KINEMATIKA

Prednost novoga 3-D modela u odnosu na prethodne je formulacija teorije u *in vivo* konfiguraciji (trenutna konfiguracija smjese), Slika 1, i prirodnoj konfiguraciji svakog konstituenta (bez zaostalih naprezanja). Važno je napomenuti da je takva teorija vrlo bliska stvarnom ponašanju arterija jer se sve prilagodbe i proizvodnja konstituenata događa *in vivo*.

U skladu s prethodnim 2-D modelima pretpostavka je da mehanička svojstva i deformacije ugradnje (*deposition stretches*) G^k novostvorenih struktura (kolagen, glatke mišićne stanice) ostaju konstantne bez obzira na promjenu geometrije. Gradijent deformiranja $F_{n(\tau)}^k(s)$ predstavlja preslikavanje iz prirodne konfiguracije svakog konstituenta k u trenutku τ u trenutnu konfiguraciju smjese u trenutku s . Preslikavanje unutar trenutne konfiguracije smjese između dva trenutka τ i s opisano je s ${}^\tau_s F$. Pretpostavka je da se gustoća mase smjese ne mijenja, $\rho(s) \approx \rho(0)$, pa vrijedi relacija

$$\det {}_0^s F = J(s),$$

gdje je $J(s)$ lokalna promjena volumena u *in vivo* konfiguraciji. Smjer vlaknastih struktura (kolagen i meke mišićne stanice) opisan je vektorom položaja $m^k(\tau)$ za svaki pojedini trenutak.



Slika 1 Prikaz najvažnijih konfiguracija

3 KINETIKA

U našem pristupu, za razliku od prethodnih radova proizvodi se masa, a ne gustoća što je mnogo bliže stvarnom ponašanju jer se u stijenci žile stvara masa, a ne gustoća. Promjena mase smjesa (termin smjesa se koristi za opis međudjelovanja mehanički bitnih dijelova - elastin, kolagen i glatke mišićne stanice) stoga je

$$M^k(s) = M^k(0)Q^k(s) + \int_0^s m^k(\tau)q^k(s-\tau)d\tau. \quad (10)$$

Indeks k označava pojedini konstituent (elastin, kolagen ili glatke mišićne stanice), $\tau \in [0, s]$ je G&R vrijeme, dok su m^k i q^k članovi koji se odnose na proizvodnju i uklanjanje mase pojedinih struktura. Za proizvodnju / uklanjanje pojedinih struktura koristi se sljedeći izraz

$$m^k(\tau) = m_B^k \left(1 + K_\sigma^k \Delta\sigma(\tau) + K_C^k \Delta C(\tau) \right) \quad (11)$$

gdje je m_B^k proizvodnja u homeostatskim uvjetima, a K_σ^k i K_C^k su faktori ovisnosti proizvodnje povezani uz promjenu homeostatskog pritiska u stijenci

$$\Delta\sigma(\tau) = \| \mathbf{t}^{\text{collagen or SMC}}(\tau) \| - \| \mathbf{t}_h^{\text{collagen or SMC}} \|, \quad (12)$$

i promjene koncentracije vazokonstriktora i vazodilatatora u endotelnim stanicama

$$\Delta C(\tau) = C(\tau) - C_B. \quad (13)$$

Funkcija uklanjanja

$$q^k(s-\tau) = \exp\left(-\int_\tau^s K^k(\tilde{\tau})d\tilde{\tau}\right), \quad (14)$$

opisuje životni vijek pojedine strukture krvne žile opisane parametrom uklanjanja $K^k(\tilde{\tau})$.

4 NAPREZANJA

Ponašanje arterija može se opisati pomoću nelinearnog, anizotropnog elastičnog modela. Naprezanja su stoga dana kao

$$\mathbf{t} = \frac{2}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T + t^{\text{active}} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta, \quad (15)$$

gdje je W energija sustava za elastično deformiranje, a t^{active} je aktivni doprinos mekih mišićnih stanica u cirkularnom smjeru. Koristeći teoriju smjesa energija se rastavlja kao suma energija pojedinih struktura $W = \sum_k \phi^k \hat{W}^k$ gdje je ϕ^k maseni udio pojedine strukture. U skladu s [1], pohranjena energija svake strukture k može se zapisati kao

$$W^k(s) = \frac{M^k(0)}{\sum_k M^k(s)} Q^k(s) \hat{W}^k \left(\mathbf{C}_{n(0)}^k(s) \right) - \int_0^s \frac{m^k(\tau)}{\sum_k M^k(s)} q^k(s-\tau) \hat{W}^k \left(\mathbf{C}_{n(\tau)}^k(s) \right) d\tau. \quad (16)$$

5 PRIMJENA 3 - D FORMULACIJE NA OSNO SIMETRIČNI CILINDAR

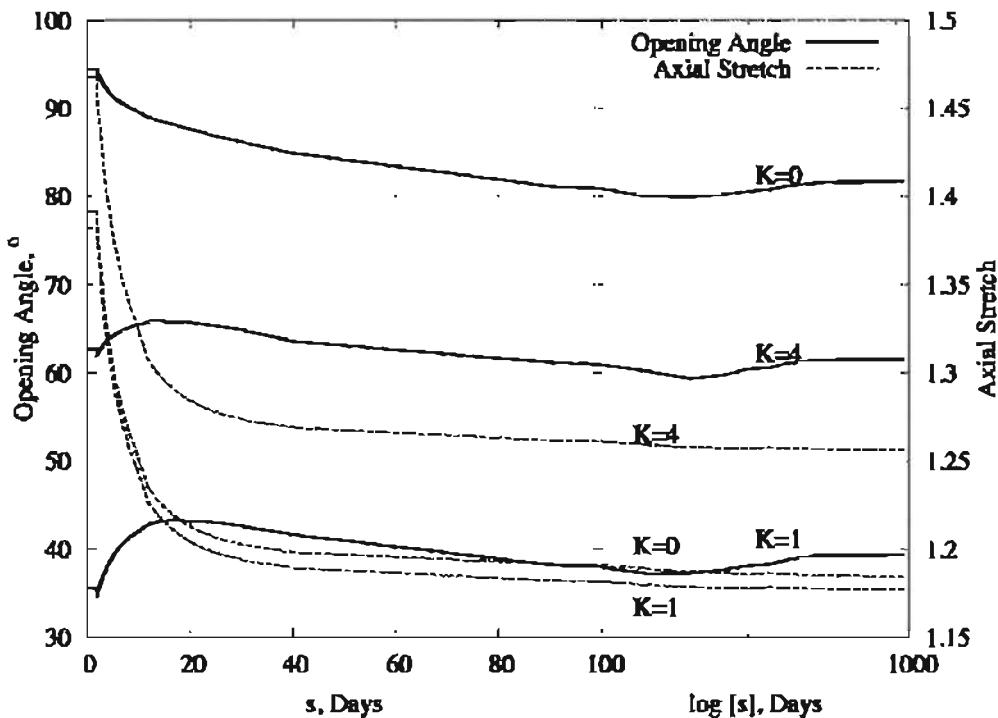
Kako ugradnja predložene teorije u opću 3-D geometriju zahtjeva upotrebu metode konačnih elemenata, koja još nije u potpunosti razvijena za probleme G&R, mi smo prve simulacije napravili na cilindričnom dijelu arterije (karotidna arterija, bazilarna arterija). Jednadžbe ravnoteže za problem osnosimetričnog cilindra su

$$P = \int_{r_i}^{r_o} (t_{\theta\theta} - t_{rr}) \frac{dr}{r}, \quad (17)$$

$$L = 2\pi \int_{r_i}^{r_o} t_{zz} dr, \quad (18)$$

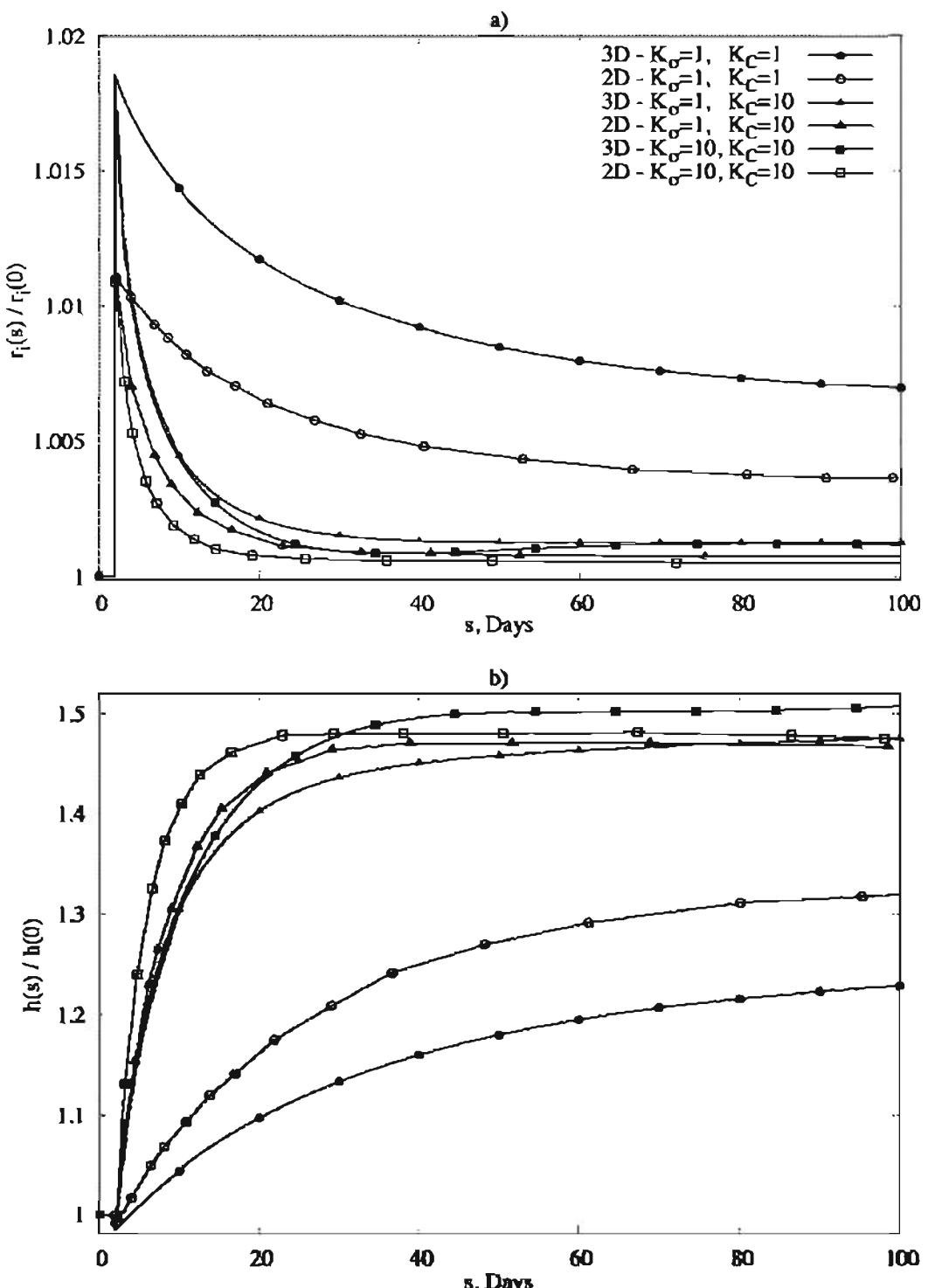
$$r_o(\tau)^2 - r_i(\tau)^2 = \frac{J_m(\tau)M(0)}{\rho(\tau)\pi l}. \quad (19)$$

6 NUMERIČKI REZULTATI



Slika 2 Vremenski tijek promjene kuta otvaranja i osne deformacije

Potvrdu točnosti i učinkovitosti modela napravili smo na problemu bazilarnih arterija (podaci dobiveni od [7]) opterećenih promjenjivim hemodinamičkim uvjetima (50% povećanje krvnog tlaka). 3-D modelom uspjeli smo dobiti već potvrđene rezultate 2-D proračuna, Slika 3 i uz to smo potvrdili rezultate za kut otvaranja i osnu deformaciju, Slika 2. Kao što je i objavljeno u literaturi kut otvaranja se prvo povećava, a nakon toga slijedi njegovo smanjenje na početne vrijednosti, [4].



Slika 3 Hipertenzija - promjene normiranog unutarnjeg radijusa (a) i normirane debljine stijenke (b)

Literatura

- [1] Baek, S., Rajagopal, K. R., & Humphrey, J. D. "A theoretical model of enlarging intracranial fusiform aneurysms.", *J Biomech Eng* 128, 2006, str 142-149.
- [2] Cardamone, L., Valentin, A., Eberth, J. F., & Humphrey, J. D. "Origin of axial prestretch and residual stress in arteries.", *Biomech Model Mechanobiol*, Vol 8, No.6, 2009, str 431-446

- [3] Humphrey, J. & Rajagopal, K. "A constrained mixture model for growth and remodeling of soft tissues.", Mathematical models and methods in applied sciences, 12, 2002, str. 407-430.
- [4] Liu, S. Q. & Fung, Y. C. "Relationship between hypertension, hypertrophy, and opening angle of zero-stress state of arteries following aortic constriction.", J Biomech Eng 111, 1989, str. 325-335.
- [5] Machyshyn, I. M., Bovendeerd, P. H. M., van de Ven, A. A. F., Rongen, P. M. J., & van de Vosse, F. N. "A model for arterial adaptation combining microstructural collagen remodeling and 3D tissue growth.", Biomech Model Mechanobiol, 2010, online, .
- [6] Rodriguez, E. K., Hoger, A., & McCulloch, A. D. "Stress-dependent finite growth in soft elastic tissues." J Biomech 27, 1994, str. 455-467.
- [7] Valentín, A., Cardamone, L., Baek, S., & Humphrey, J. D. "Complementary vasoactivity and matrix remodelling in arterial adaptations to altered flow and pressure.", J R Soc Interface, Vol 6, 2009, str 293-306.
- [8] Wan, W., Hansen, L., & Gleason, Jr, R. L. "A 3-D constrained mixture model for mechanically mediated vascular growth and remodeling." Biomech Model Mechanobiol, 2009 online.

Autori

Igor Karšaj, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, Zagreb, igor.karsaj@fsb.hr

Jurica Sorić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, Zagreb, jurica.soric@fsb.hr

Jay D Humphrey, Department of Biomedical Engineering and M.E. DeBakey Institute, Texas A&M University, College Station, TX, USA, jhumphrey@tamu.edu

ANALIZA IZVIJANJA GREDNIH NOSAČA TANKOSTIJENIH KOMOZITNIH POPREČNIH PRESJEKA

Lanc, D., Turkalj, G. & Pešić I.

Sažetak: Rad prezentira numerički model za analizu izvijanja grednih konstrukcija tankostijenih laminatno-kompozitnih poprečnih presjeka. Algoritam je razvijen koristeći jednodimenzionalni prostorni gredni konačni element. Gredni je element pravocrtan i prizmatičan. Uključeni su efekti prostornih pomaka i efekti prostornih rotacija. Deformacije su pretpostavljene malima. Primjenjena je klasična teorija laminata bazirana na Kirchhoff-Love-ovojoj teoriji tankih ploča.

Ključne riječi: tankostijene gredne konstrukcije, kompoziti, izvijanje

1 UVOD

Tankostijene gredne konstrukcije čine vrlo važnu klasu konstrukcijskih elemenata u inženjerskoj praksi a zbog svojega su oblika posebice sklone gubitku stabilne forme [1, 4]. Analiza je njihova odziva posebice složena u režimima velikih prostornih rotacija [2]. Ovaj rad prezentira numerički model za analizu izvijanja grednih konstrukcija tankostijenih laminatno-kompozitnih poprečnih presjeka. S obzirom na u novije vrijeme sve veću raširenost uporabe laminatno-kompozitnih konstrukcija, analiza izvijanja u smislu određivanja kirtičnog opterećenja kod kojega konstrukcija gubi nosivost od krucijalnog je značaja.

Gredni je element pravocrtan i prizmatičan. Uključeni su efekti prostornih pomaka, a također, preko nelinearnog polja pomaka i efekti prostornih rotacija, čime je karakter svih unutarnjih momenata dobiven kao polutangencijalan te je osigurana ravnoteža spojeva pojedinih nekolinearnih grednih članova konstrukcije. Nadalje, predpostavljeno je da se pri deformiranju projekcija srednje kontura poprečnoga presjeka u vlastitu ravninu ne mijenja, a posmične su deformacije u srednjoj plohi zanemarene.

Problem stabilnosti tretiran je kao problem vlastitih vrijednosti čime se kao najniža vlastita vrijednost dobiva kritično opterećenje a odgovarajući vlastiti vektor odgovara deformiranom obliku konstrukcije.

2 TEORIJSKE POSTAVKE

2.1 Pomaci

U grednom kartezijevom koordinatnom sustavu za koji se uzdužna os grede koja spaja težišta O čvornih presjeka poklapa s osi z dok su x i y glavne centralne osi poprečnog presjeka, pomaci točaka poprečnog presjeka kao krutog tijela su:

$$w_0 = w_0(z), \quad u_s = u_s(z), \quad v_s = v_s(z), \quad \varphi_z = \varphi_z(z), \quad \varphi_x = -\frac{dv_s}{dz}, \quad \varphi_y = \frac{du_s}{dz}, \quad \theta = \frac{d\varphi_z}{dz} \quad (1)$$

gdje je w_0 translacijski pomak u smjeru z definiran za težiste poprečnog presjeka; u_s i v_s transkacijski su pomaci u smjeru x i y , definirani za centar smicanja; dok su φ_z , φ_x i φ_y rotacijski pomaci oko z , x i y osi. Pomak θ predstavlja tzv. parameter vitoperenja poprečnog presjeka. Polje pomaka točaka poprečnog presjeka definirano je izrazom:

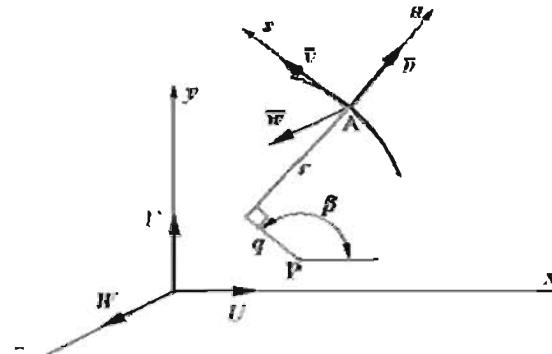
$$U_{\text{uk}}^T = \{W \quad U \quad V\} = \{w + \tilde{w} \quad u + \tilde{u} \quad v + \tilde{v}\} \quad (2)$$

U izrazu (2) w , u i v predstavljaju komponente standardnog linearne polja pomaka dok su \tilde{w} , \tilde{u} i \tilde{v} veličine drugog reda zbog uključenih efekata velikih rotacija u skladu s [6, 7].

Na sl. 1. prikazan je dio konture prostornog tankostijenog grednog nosača. U konturnom koordinatnom sustavu (z , s , n) definirani su pomaci srednje linije konture presjeka $\bar{w}, \bar{u}, \bar{v}$, dok su pomaci točaka udaljenih od srednje linije definirani kao:

$$w(z, s, n) = \bar{w} - n \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}; \quad v(z, s, n) = \bar{v} - n \frac{\partial \bar{u}}{\partial s}; \quad u(z, s, n) = \bar{u} \quad (3)$$

pri čemu je s označen radijus konture, a q udaljenost proizvoljno odabrane točke pola P od pravca normale n .



Sl. 1. Pomaci točaka konture poprečnog presjeka

Veza grednih i konturnih pomaka izražena je kao:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= W(z, s, n); \\ \bar{v} &= U(z, s, n) \cos \beta + V(z, s, n) \sin \beta; \\ \bar{u} &= U(z, s, n) \sin \beta - V(z, s, n) \cos \beta \end{aligned} \quad (4)$$

2.2 Deformacija

Predpostavljajući nelinearno polje pomaka grede, tenzor deformacije sastoji se od tri dijela:

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} + \tilde{\epsilon}_{ij}; \quad e_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \eta_{ij} = 0.5u_{k,i}u_{k,j}, \quad \tilde{\epsilon}_{ij} = 0.5(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}). \quad (5)$$

Uz Vlasovu predpostavku da je srednja deformacija γ_{zz} u srednjoj plohi jednaka nuli te uz predpostavku da se projekcija konture poprečnog presjeka ponaša kao kruto tijelo, komponente deformacije različite od nule u egzaktnom obliku su:

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} - n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}; \quad e_{zs} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = -2n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s \partial z}; \quad (6a)$$

$$\eta_{zz} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]; \quad \eta_{zs} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial s}; \quad (6b)$$

$$\tilde{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}; \quad \tilde{\epsilon}_{zs} = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \quad (6c)$$

2.3 Unutarnje sile

Konstitutivna jednadžba za jedan laminatni sloj glasi:

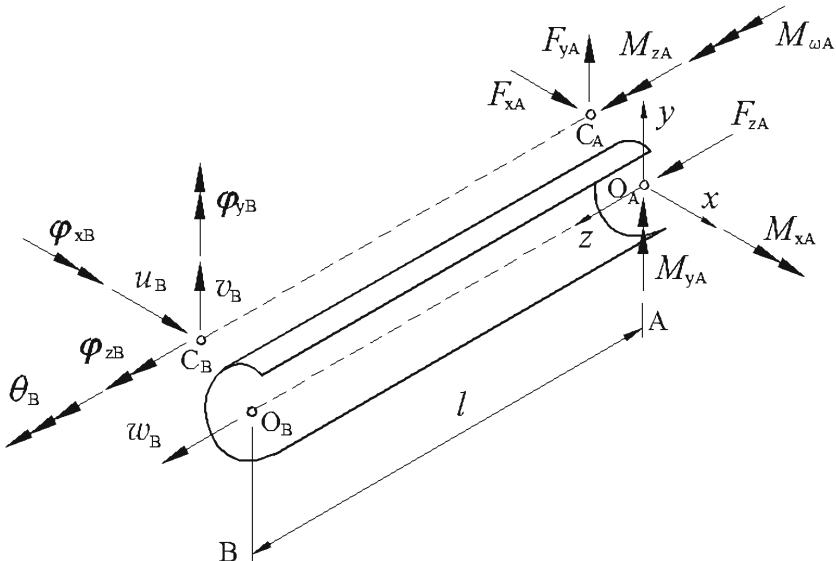
$$\begin{pmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11}^* & \bar{Q}_{16}^* \\ \bar{Q}_{16}^* & \bar{Q}_{66}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_z \\ \gamma_{zs} \end{pmatrix} \quad (7)$$

gdje su \bar{Q}_{ii}^* tzv. reducirane krutosti prema [5]. Integriranjem po debljini laminata n kao i po duljini konture s , te transformacijom u gredni koordinatni sustav slijede unutarnje sile poprečnog presjeka grede:

$$\begin{aligned} F_z &= \int_A \sigma_z dnds; \quad M_z = \int_A \tau_{zs} n dnds; \quad M_\omega = \int_A \sigma_z (\omega - nq) dnds; \\ M_x &= \int_A \sigma_z (y - n \cos \beta) dnds; \quad M_y = \int_A \sigma_z (x + n \sin \beta) dnds; \end{aligned} \quad (8)$$

3 GREDNI KONAČNI ELEMENT

3.1 Čvorni vektori



Sl. 2. Tankostijeni gredni konačni element: čvorni pomaci i čvorne sile

Na sl. 2 prikazan je prostorni tankostijeni gredni konačni element s dva čvora označena s A i B. O i C predstavljaju težište i centar smicanja poprečnog presjeka. Konačni element ima sveukupno 14 stupnjeva slobode gibanja (7 po čvoru) te su odgovarajući vektori čvornih pomaka i čvornih sila e-tog elementa:

$$(\mathbf{u}^e)^T = \{w_{\text{oA}}, u_{\text{sA}}, v_{\text{sA}}, \varphi_{\text{zA}}, \varphi_{\text{xA}}, \varphi_{\text{yA}}, w_{\text{oB}}, u_{\text{sB}}, v_{\text{sB}}, \varphi_{\text{zB}}, \varphi_{\text{xB}}, \varphi_{\text{yB}}, \theta_{\text{A}}, \theta_{\text{B}}\}, \quad (9)$$

$$(\mathbf{f}^e)^T = \{F_{\text{zA}}, F_{\text{xA}}, F_{\text{yA}}, M_{\text{zA}}, M_{\text{xA}}, M_{\text{yA}}, F_{\text{zB}}, F_{\text{xB}}, F_{\text{yB}}, M_{\text{zB}}, M_{\text{xB}}, M_{\text{yB}}, M_{\text{wA}}, M_{\text{wB}}\}. \quad (10)$$

3.2 Ravnotežne jednadžbe

Primjenom principa virtualnih radova na gredni konačni element slijedi:

$$\delta \mathcal{U}_E + \delta \mathcal{U}_G = \delta \mathcal{W}, \quad (11)$$

gdje prvi član s lijeve strane znaka jednakosti predstavlja virtualnu potencijalnu energiju deformiranja:

$$\delta \mathcal{U}_E = \int_V S_{ij} \delta e_{ij} dV = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_E^e \mathbf{u}^e, \quad (12)$$

drugi član virtualni geometrijski potencijal:

$$\delta \mathcal{U}_G = \int_V S_{ij} (\delta \eta_{ij} + \delta \tilde{e}_{ij}) dV - \int_{A_o} t_i \delta \tilde{u}_i dA_o = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_G^e \mathbf{u}^e, \quad (13)$$

dok član s desne strane znaka jednakosti predstavlja virtualni rad vanjskih sila, tj.

$$\delta \mathcal{W} = \int_V S_{ij} \delta e_{ij} dV = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{f}^e. \quad (14)$$

U gornjim izrazima \mathbf{k}_E^e i \mathbf{k}_G^e predstavljaju elastičnu (linearnu) i geometrijsku (nelinearnu) matricu krutosti konačnog elementa. Obje su matrica dimenzija (14×14) . Vektor \mathbf{f}^e predstavlja vektor čvornih sila.

U cilju formiranja jednadžbe konstrukcije, izraze (12)-(14) definirane u lokalnom koordinatnom sustavu, potrebno je transformirati u globalni sustav, pa imamo:

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (15)$$

gdje je \mathbf{K}_E elastična matrica krutosti konstrukcije, \mathbf{K}_G geometrijska matrica krutosti konstrukcije, a \mathbf{U} i \mathbf{F} su vektori inkrementalnih čvornih pomaka i čvornih sila konstrukcije. Jednadžba (15) nelinearna je u pomacima \mathbf{U} jer je $\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G(\mathbf{U})$, te se mora rješavati inkrementalno-iterativno, no kako je za svaku razinu vanjskog opterećenja odnos unutarnjih sila uvijek isti te ukoliko je promjena unutarnjih sila proporcionalna promjeni vanjskog opterećenja, moguće je kod slaganja matrice \mathbf{K}_G izlučivanje zajedničkog parametra λ , nakon čega je preostali dio matrice linearan. U tom se slučaju izraz (15) može napisati:

$$(\mathbf{K}_E + \lambda \hat{\mathbf{K}}_G) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (16)$$

Kada je promatrani sustav savršen, odnosno ukoliko se vrijednost vanjskog opterećenja pri gubitku stabilnosti ne mijenja, inkrement opterećenja konstrukcije \mathbf{F} jednak je nuli, pa jednadžba (16) postaje:

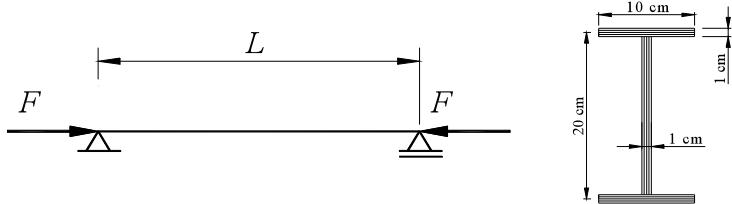
$$(\mathbf{K}_E + \lambda \hat{\mathbf{K}}_G) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (17)$$

čime smo dobili tzv. vlastitu ili svojstvenu zadaću stabilnosti, a čijim se rješavanjem dobivaju vlastite vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, koje imaju značenje kritičnog opterećenja kod kojeg konstrukcija gubi stabilnost. Svakoj vrijednosti kritičnog opterećenja pripada vlastiti vektor \mathbf{U} koji u ovom slučaju predstavlja samo formu gubitka stabilnosti. Od praktičnog značaja je samo najniža vlastita vrijednost, odnosno samo njoj

odgovarajuća prva kritična sila izvijanja. Promatranje problema stabilnosti na ovakav način, kao problema vlastitih vrijednosti, naziva se linearnom analizom stabilnosti ili lineariziranom zadaćom stabilnosti.

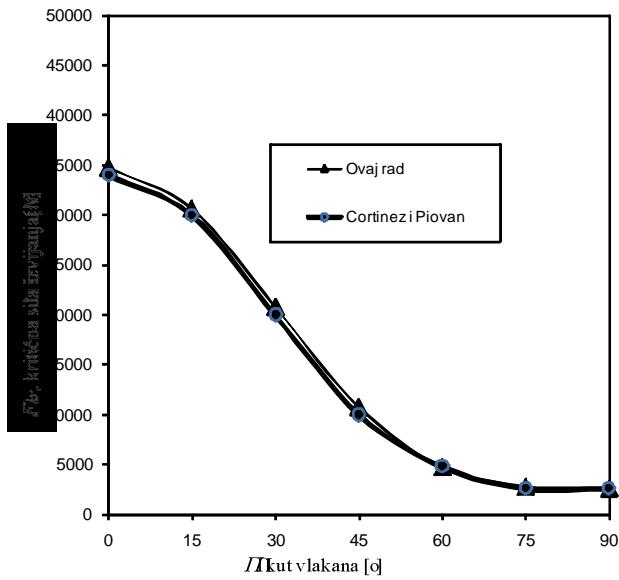
4 PRIMJER

Sl. 3. prikazuje prostu gredu opterećenu tlačnom silom F . Greda je duljine $L = 8 \text{ m}$ i tankostijenog je poprečnog presjeka I-profila dimenzija ($10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$).



Sl. 3. Izvijanje proste grede

Struk i pojasevi profila četveroslojni su laminati s rasporedom kuteva vlakana $[+\varphi, -\varphi, +\varphi]$. Materijalne su značajke laminata: $E_1 = 133.4 \text{ GPa}$, $E_2 = 8.78 \text{ GPa}$, $G_{12} = 3.67 \text{ GPa}$ i $\nu_{12} = 0.26$. Rezultati za promjenu kritične sile izvijanja s promjenom kuta orijentacije vlakana φ , prikazani su na slici 4. zajedno s rezultatima Cortinez i Piovana [3] datima za usporedbu.



Sl. 4. Promjena kritične sile izvijanja s promjenom kuta orijentacije vlakana

5 ZAKLJUČAK

U radu je prikazan konačnoelementni gredni model za analizu izvijanja kompozitnih grednih konstrukcija. Izrađen je originalan računalni program koji bez obzira na tek započetu fazu razvoja već može poslužiti kao dobra osnova pri analizi i konstruiranju spomenutog tipa konstrukcija. Daljnji rad na problemu bit će usmjeren na proširenje kompjuterskog programa u smislu nelinearnog rješavanja problema stabilnosti čime bi se omogućilo praćenje deformiranja konstrukcije u pred i post fazi izvijanja.

Literatura:

- [1] Alfutov, N. A., "Stability of Elastic Structures", Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [2] Chang, S. P., Kim, S. B., Kim, M. Y., "Stability of shear deformable thin-walled space frames and circular arches", Journal of Engineering Mechanics, 122, 1996, 844-854.
- [3] Cortinez, V.H., Piovan, M.T., "Stability of composite thin-walled beams with shear deformability", Computers & Structures, 84, 2006, 978-990.
- [4] Galambos, T. V., "Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures", John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [5] Lee, J., Kim, S.E., "Lateral buckling analysis of thin-walled laminated channel-section beams", Composite Structures, 56, 2002, 391-399.
- [6] Turkalj, G., Brnic, J., Prpic-Orsic, J., "Large rotation analysis of elastic thin-walled beam-type structures using ESA approach", Computers & Structures, 81(18-19), 2003, 1851-1864.
- [7] Yang, Y. B., Kuo, S. R., "Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures", Prentice Hall, New York, 1994.

Autori:

Domagoj Lanc, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051 651495, fax 051 651490, e-mail: dlanc@riteh.hr, web stranica: www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/Katedra.htm

Goran Turkalj, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051 651499, fax 051 651490, e-mail: goran.turkalj@riteh.hr, web stranica: www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/Katedra.htm

Igor Pešić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051 651503, fax 051 651490, e-mail: ipesic@riteh.hr, web stranica:

www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/Katedra.htm

NUMERIČKO MODELIRANJE AKUMULIRANJA OŠTEĆENJA U KOŠTANOM TKIVU

Lovrenić-Jugović, M., Tonković, Z. & Skozrit, I.

Sažetak: U radu je izведен numerički integracijski algoritam za konstitutivni model koji spreže mehanizam oštećenja s efektima viskoelastičnosti u koštanom tkivu. Eksperimentalno dobiveni parametri konstitutivnog modela preuzeti su iz literature. Izvedeni algoritam zajedno s Jacobijevom matricom implementiran je u programske paket ABAQUS primjenom korisničke rutine UMAT. Numerički rezultati uspoređeni su s pripadnim eksperimentalnim.

Ključne riječi: koštano tkivo, oštećenje, viskoelastičnost, numerički algoritam.

1 UVOD

Uslijed monotonog opterećenja, puzanja i zamora u koštanom tkivu dolazi do pojave oštećenja. Pretpostavka je da do akumuliranja oštećenja u kosti dolazi zbog toga što s opterećivanjem stvaranje oštećenja postaje brže od pregradnje, što može dovesti i do njenog loma. Numerički algoritmi za analizu oštećenja u inženjerskim materijalima u novijoj literaturi primjenjuju se za modeliranje bioloških tkiva. Pri tome se najveći broj radova odnosi upravo na analizu mehanizama pregradnje i akumuliranja oštećenja u koštanom tkivu [3, 4].

Istraživanja prikazana u radu zasnivaju se na relacijama mehanike oštećenja i termodinamike kontinuma te na konstitutivnim relacijama izvedenim za kompozite [2]. Uz pretpostavku malih deformacija izvedene su konstitutivne jednadžbe za analizu oštećenja u ljudskoj kortikalnoj kosti koje sprežu mehanizme oštećenja s efektima viskoelastičnosti. Pritom je izvršena dekompozicija gradijenta deformacije na vremenski ovisan viskoelastičan dio i nelinearan dio uslijed oštećenja. U cilju pojednostavljenja numeričkog postupka zanemaren je utjecaj plastičnih deformacija. Na temelju eksperimentalnih rezultata jednoosnog rastezanja epruveta uzetih s podkoljenične kortikalne kosti iz literature [6], određeni su parametri koji ulaze u formulaciju funkcije gustoće energije deformiranja na kojoj se temelji konstitutivni model. Vremenski ovisne konstitutivne jednadžbe zapisane su u inkrementalnom obliku te je izведен algoritam za njihovo rješavanje na razini materijalne točke konačnog elementa. Algoritam je implementiran u programski paket ABAQUS primjenom korisničke rutine UMAT [1]. Rezultati istraživanja uspoređeni su s realnim eksperimentalnim vrijednostima [4-6].

2 VISKOELASTIČNOST SPREGNUTA S OŠTEĆENJEM

Konstitutivne jednadžbe prvotno predložene u radovima [2, 6] uzete su za opisivanje ponašanja ljudskog koštanog tkiva. Pritom je primijenjena teorija viskoelastičnosti gdje su nelinearni efekti uključeni kroz mehaniku oštećenja kontinuma koja se temelji na

termodynamici nepovrativih procesa. Pretpostavljeno je da vremenski ovisno naprezanje i oštećenje utječu na viskoelastičnu deformaciju kroz vremenski ovisno efektivno naprezanje, $\tilde{\sigma}$. Za slučaj aksijalnog opterećenja, ukupna viskoelastična deformacija spregnuta s oštećenjem definirana je slijedećom relacijom

$$\varepsilon = \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\tilde{\sigma}(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (1)$$

gdje J označava viskoelastičnu podatljivost originalnog materijala, dok je t oznaka za vrijeme, a τ označava vrijeme retardacije. Prema Parsamianu [6] predložene su slijedeće jednadžbe za podatljivost i efektivno naprezanje

$$J = J_0 + J_1 t^\gamma, \quad (2)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - w(t)}, \quad (3)$$

gdje su J_0 , J_1 i γ parametri materijala, a σ je Cauchy-evo naprezanje. Zakon oštećenja za slučaj puzanja materijala pretpostavljen je u obliku

$$\dot{w} = \left[\frac{\langle \sigma - \sigma_{th} \rangle}{C(1-w)} \right]^r, \quad (4)$$

gdje su C i r parametri materijala, dok je vrijednost u uglatoj zagradi McAulay-ova zagrada, sa značenjem da iščezava ako je izraz u zagradi manji od nule. Prema tome, kost je linearno viskoelastičan materijal ako je naprezanje manje od graničnog ($\sigma < \sigma_{th}$), a iznad te vrijednosti naprezanja ($\sigma > \sigma_{th}$) ponaša se kao viskoelastičan materijal u kojem se akumulira oštećenje. Pritom je pretpostavka da u početnom trenutku u materijalu nema oštećenja ($t = 0, w = 0$), tako da prethodna jednadžba nakon integriranja poprima oblik

$$1 - w = \left\{ 1 - \frac{t}{t_F} \right\}^{\frac{1}{1+r}}, \text{ gdje je } t_F = \frac{1}{1+r} \left[\frac{C}{\langle \sigma - \sigma_{th} \rangle} \right]^{\frac{1}{r}}. \quad (5)$$

Nakon uvrštavanja jednadžbi (2-5) u jednadžbu (1) i nakon provođenja integriranja, dobiva se slijedeća jednadžba za ukupnu viskoelastičnu deformaciju spregnutu s oštećenjem

$$\varepsilon = J_0 \sigma \left(1 - \frac{t}{t_F} \right)^{\frac{1}{1+r}} + J_1 \sigma t^r \cdot {}_2F_1(1, \alpha, 1+r, \beta), \quad (6)$$

gdje je ${}_2F_1$ hipergeometrijska funkcija.

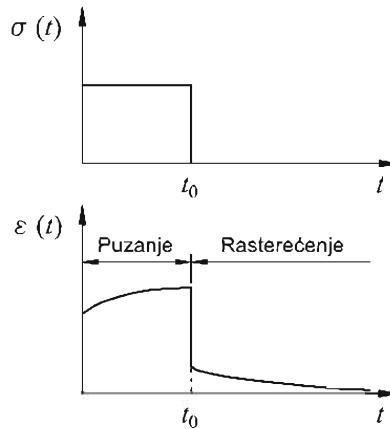
Za opisani konstitutivni model parametri materijala preuzeti su od Parsamiana [6]. U ovom radu parametri su dobiveni iz eksperimentalnih ispitivanja uzoraka koji su uzeti s desne podkoljenične kortikalne kosti 54. godišnjeg muškarca. Test puzanja je proveden primjenom konstantnog vlačnog opterećenja duž longitudinalne osi kosti za pet nivoa opterećenja, što je prikazano u tablici 1. Također su u [6] određeni parametri materijala za definiranje oštećenja pri puzanju (r i C) aproksimacijom eksperimentalnih podataka krivuljom loma ($r=11,265$; $C=36,617$). Osim toga, viskoelastični parametri J_0 , J_1 i γ određeni su iz podataka testova za slučaj kratkog vremena puzanja s opterećenjem ispod graničnog nivoa. Za graničnu vrijednost

naprezanja (σ_{th}) u radu [6] je predložen iznos od 75,29 MPa. Zanemarivanjem članova koji znatno ne utječu na rješenje, jednadžba (6) je pojednostavljena i za slučaj puzanja predstavljena je jednadžbom (7), a za slučaj rasterećenja jednadžbom (8)

$$\varepsilon = J_0 \sigma + J_1 \sigma t^\gamma, \quad \text{za } 0 < t < t_0, \quad (7)$$

$$\varepsilon = J_1 \sigma \left[t^\gamma - (t - t_0)^\gamma \right], \quad \text{za } t > t_0, \quad (8)$$

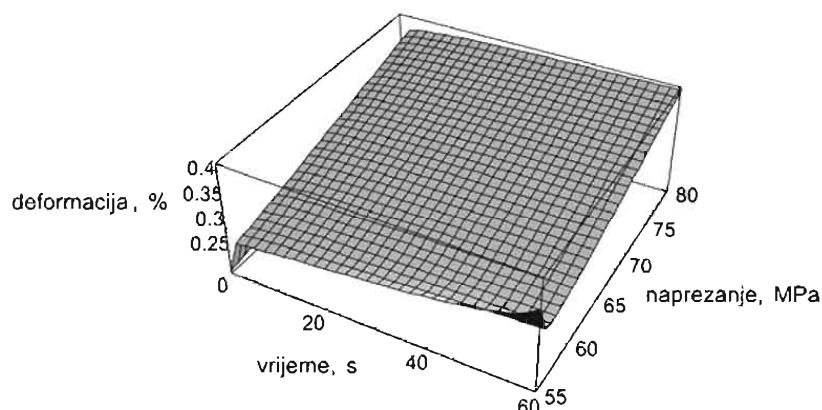
gdje je t_0 vrijeme početka rasterećivanja.



Sl. 1. Tipična krivulja puzanja i rasterećenja

Tablica 1. Parametri materijalnog modela dobiveni eksperimentalno testom puzanja [6]

Uzorak	Naprez, σ (MPa)	Modul podatljivosti, J_0 ($\times 10^{-6}$ MPa $^{-1}$)	Konstanta, J_1 ($\times 10^{-6}$ MPa $^{-1}$ sec $^{-\alpha}$)	Konstanta, γ	Youngov modul, E (GPa)
T7	63,43	37,734	12,482	0,0695	26,501
T9	74,73	46,262	4,621	0,089	21,616
T10	66,97	27,432	15,6	0,055	36,454
T11	61,55	41,349	9,998	0,0929	24,182
T12	59,66	36,74	10,907	0,056	27,218
Srednja vrijednost	-	37,9	10,7	0,0724	26,383



Sl. 2. Ovisnost deformacije i naprezanja o vremenu u kortikalnoj kosti

Rezultati za parametre materijala prikazani su u tablici 1. U numeričkom modelu korištena je srednja vrijednost ovih parametara, koji su dani u tablici 1. Na slici 2 grafički je prikazana ovisnost deformacije i naprezanja o vremenu za kortikalnu kost.

3 NUMERIČKA FORMULACIJA I REZULTATI

Za integraciju opisanog konstitutivnog modela primijenjena je implicitna integracijska shema. Obnovljene vrijednosti varijabli stanja na kraju vremenskog koraka određuju se za dani prirast deformacije u vremenu. Za to je potrebno konstitutivne jednadžbe zapisati u slijedećem inkrementalnom obliku

$$f_{t_n+\Delta t} = f_{t_n} + \Delta f, \quad (9)$$

gdje je f proizvoljna funkcija, f_{t_n} njena vrijednost na početku inkrementa, Δf promjena funkcije kroz inkrement i Δt je vremenski inkrement. Na taj način, za nivo naprezanja ispod graničnog, jednadžbe (7) i (8) mogu se zapisati na slijedeći način

$$\Delta\sigma = M(t) \cdot \Delta\varepsilon + M(t) \cdot \varepsilon - \sigma, \quad \text{za puzanje,} \quad (10)$$

$$\Delta\sigma = N(t) \cdot \Delta\varepsilon + N(t) \cdot \varepsilon - \sigma, \quad \text{za rasterećenje,} \quad (11)$$

gdje su $M(t) = 1/\left[J_0 + J_1(t + \Delta t)^\gamma\right]$ i $N(t) = 1/J_1\left[(t + \Delta t)^\gamma - (t + \Delta t - t_0)^\gamma\right]$.

Ubrzanje konvergencije globalnog inkrementalnog postupka ostvareno je primjenom Jacobjeve matrice koja je izvedena u obliku

$$\partial\Delta\sigma/\partial\Delta\varepsilon = M(t), \quad \text{za puzanje,} \quad (12)$$

$$\partial\Delta\sigma/\partial\Delta\varepsilon = N(t), \quad \text{za rasterećenje.} \quad (13)$$

Za vrijednost naprezanja iznad granične vrijednosti ($\sigma_{th} = 75,29$ MPa), jednadžbu (7) možemo zapisati u slijedećem nelinearnom obliku

$$\begin{aligned} F_{t_n+\Delta t} &= -\varepsilon - \Delta\varepsilon + J_0(\sigma + \Delta\sigma) \left[1 - \frac{1}{\alpha}(r+1) \left(\frac{\sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}}{C} \right)^r \cdot (t + \Delta t) \right]^{-\alpha} + \\ &+ J_1(\sigma + \Delta\sigma)(t + \Delta t)^\gamma \left[1 + \frac{1}{1+\gamma} \left(\frac{\sigma + \Delta\sigma - \sigma_{th}}{C} \right)^r \cdot (t + \Delta t) \right] = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Za određivanje prirasta naprezanja $\Delta\sigma$, prethodna jednadžba rješava se Newtonovom iterativnom metodom

$$\Delta\sigma^{(i+1)} = \Delta\sigma^{(i)} - \frac{F_{t_n+\Delta t}^{(i)}}{\left(\frac{dF_{t_n+\Delta t}}{d\Delta\sigma} \right)^{(i)}}, \quad (15)$$

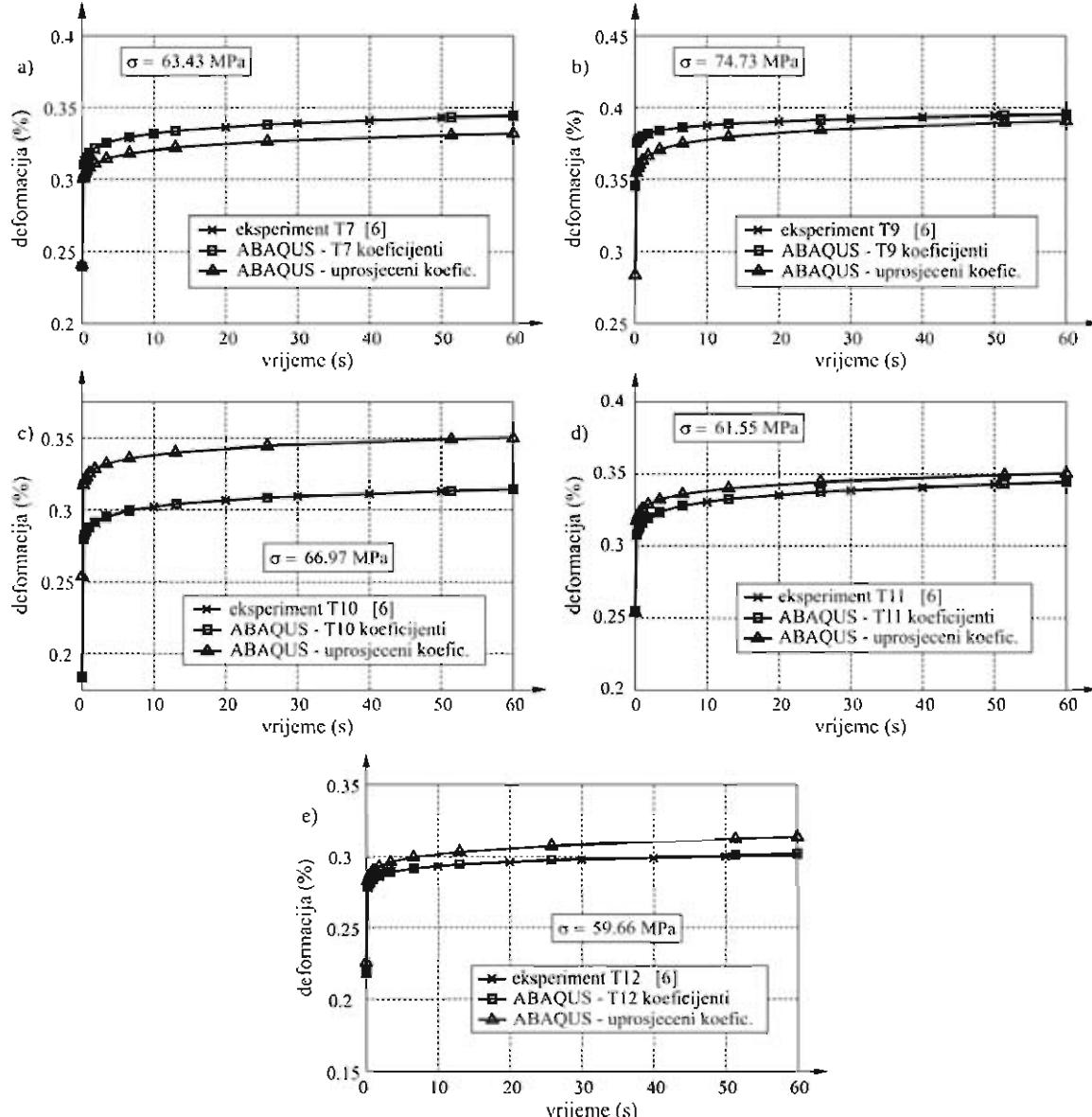
gdje i označava iteracijski korak. $\left(\frac{dF_{t_n+\Delta t}}{d\Delta\sigma} \right)^{(i)}$ se izračunava pomoću konačnih razlika na način

$$\left(\frac{dF_{t_n+\Delta t}}{d\Delta\sigma} \right)^{(i)} = \frac{F_{t_n+\Delta t}^{(i)} - F_{t_n+\Delta t}^{(i-1)}}{\Delta\sigma^{(i)} - \Delta\sigma^{(i-1)}}. \quad (16)$$

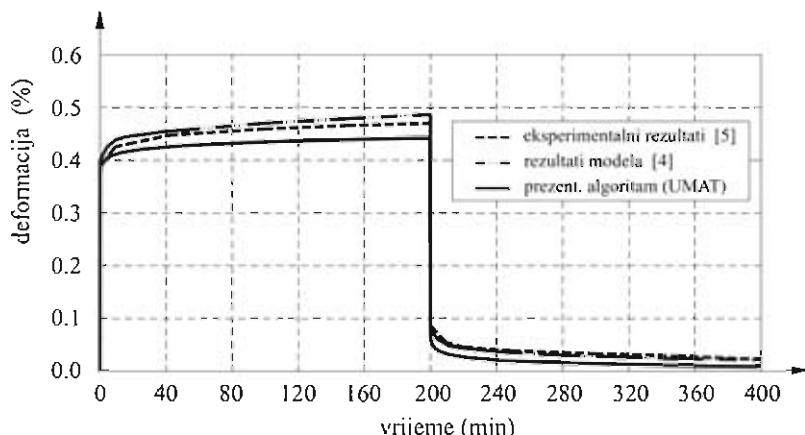
Za tako određeni prirast naprezanja $\Delta\sigma$, određuju se vrijednosti naprezanja i unutarnjih varijabli na kraju vremenskog intervala. Izvedeni algoritam implementiran

je na razini materijalne točke u dostupne konačne elemente u programskom paketu ABAQUS/Standard koristeći korisničku rutinu UMAT [1].

Za provjeru točnosti izведенog algoritma provedena je simulacija puzanja s jednim jednoosnim konačnim elementom za različite nivoje opterećenja. Ovdje je prvo primjenjeno jednoosno vlačno opterećenje za koje je pripadna deformacija u trenutku $t=0$ dobivena iz elastične analize. Nakon toga opterećenje je držano konstantnim te je uslijedila vremenski ovisna analiza puzanja. Na slici 3 prikazana je krivulja ovisnosti deformacije puzanja o vremenu koja je uspoređena s rezultatima eksperimentalnih istraživanja dobivenih u [4]. Osim toga, simuliran je slučaj puzanja i rasterećenja. Na slici 4 dana je usporedba ovisnosti deformacije o vremenu između rješenja dobivenih u ovom radu i eksperimentalnih [5] i numeričkih rješenja [4]. Dobiveno je dobro podudaranje rješenja.



Sl. 3. Usporedba ovisnosti deformacije o vremenu između prezentiranog rada i objavljenih rješenja u Parsamianu [6]



Sl. 4. Usporedba ovisnosti deformacije o vremenu između prezentiranog rada, objavljenih eksperimenata [5] i numeričkog rješenja [4]

4 ZAKLJUČAK

Izведен je numerički algoritam za integraciju viskoelastičnog konstitutivnog modela spregnutog s oštećenjem za analizu koštanog tkiva. Pretpostavljene su male deformacije te je zanemaren utjecaj plastičnih deformacija. Trenutno prikazani algoritam omogućuje modeliranje ponašanja ljudske kortikalne kosti uz uvjete jednoosnog opterećenja. Točnost numeričke procedure testirana je usporedbom dobivenih rješenja s eksperimentalnim i numeričkim rezultatima iz literature. Proces puzanja i rasterećenja razmatran je za različite nivoje opterećenja. Numerički algoritam pokazuje odličnu podudarnost s realnim ponašanjem kortikalne kosti za analizirane uvjete. Tema daljnog istraživanja je formulacija i implementacija trodimenzionalnog vremenski ovisnog algoritma za modeliranje ortotropnog viskoelastičnog ponašanja kortikalne kosti spregnutog s oštećenjem.

Literatura :

- [1] ABAQUS/Standard, "User's guide and theoretical manual", Version 6.9, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc, 2009.
- [2] Abdel-Tawab, K., Weitsman Y.J., "A strain-based formulation for the coupled viscoelastic/damage behavior", Technical report, The University of Tennessee, 1997.
- [3] Lovrenić-Jugović, M., Tonković, Z., Skozrit, I., "Numerical modelling of viscoelastic/damage behaviour of cortical bone", Key Engineering Materials, No. 417-418, 2009, str. 273-276.
- [4] Natali, A.N., Carniel, E.L. Pavan, P.G., "Constitutive modelling of inelastic behaviour of cortical bone", Medical Engineering & Physics, No.30, 2008, str. 905-912.
- [5] Melnis, A.E., Knets, I.V., Moorlat, P.A., "Deformation behavior of human compact bone tissue upon creep under tensile testing", Mech. Composite Materials, 15, 1980, str. 574-579.
- [6] Parsamian, G.P., "Damage mechanics of human cortical bone", PhD thesis, West Virginia University, 2001.

Autori:

Martina Lovrenić-Jugović, tel. +385 1 61 68 514, e-mail: martina.lovrenic@fsb.hr,
Zdenko Tonković, tel. +385 1 61 68 450, e-mail: ztonkov@fsb.hr,
Ivica Skozrit, tel. +385 1 61 68 115, e-mail: ivica.skozrit@fsb.hr,
Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, web stranica: <http://www.fsb.hr/lnm>

OSVRT NA NELINEARNU ANALIZU HORIZONTALNO OPTEREĆENOOG OKVIRA S ISPUNOM PRIMJENOM METODE KONAČNIH ELEMENATA

Penava, D., Butenweg, C. & Sigmund, V.

Sažetak: Nelinearnom analizom armirano betonskog okvira s ispunom primjenom metode konačnih elemenata nastoji se vjerno opisati ponašanje uslijed djelovanja seizmičkog opterećenja, te time predvidjeti mehanizam sloma zidne ispune i okvira. Opisan je postupak modeliranja u računalnom programu ATENA 2D v.2.1.1 s usvojenim modelima ponašanja materijala koji najprikladnije opisuju nelinearno ponašanje armirano betonskih elemenata, nearmirane zidne ispune, te kontakta između njih, gdje do izražaja dolazi veliki izbor parametara. U skladu s tim rezultati su uspoređeni s prethodnim eksperimentalnim istraživanjima. Kalibrirani numerički model primijenjen je za istraživanje ponašanja okvira s različitim omjerom dimenzija ispune (L/H). Rezultati istraživanja predstavljeni su u obliku krivulja sila – pomak, dobivenih eksperimentalnim i numeričkim putem i prikaza glavnih naprezanja, te su uspoređeni s analitičkim rješenjima dobivenih primjenom pojednostavljenih rješenja.

Ključne riječi: nelinearnost, modeliranje, okvir, ispuna

1 OPĆE NAPOMENE

Terminologija okvir s ispunom u ovome radu odnosi se na slučaj gdje se pri djelovanju horizontalnog opterećenja ostvaruje interakcija između okvira i ispune (puni kontakt). Izvješća s potresom pogodenih područja pokazala su da je oštećenje okvira vezano za utjecaj ispune [3]. Općenito, sustav se sastoji od armirano-betonskog ili čeličnog okvira i nearmirane zidne ispune, gdje je okvir projektiran da prenosi vertikalna i horizontalna opterećenja (vjetar, potres), a ispuna samo vlastitu težinu. Uobičajeno se konstrukcija modelira primjenom metode zamjenjujuće dijagonale [2], što daje dobru sliku globalnog ponašanja konstrukcije. Prilikom interakcije okvira i ispune dolazi do interakcije posmičnih i tlačnih naprezanja u ispunama, te do lokalnog gubitka nosivosti (drobljenje uglova ispune). Modeli s tlačnim dijagonalama ne mogu predvidjeti te slučajeve. Moraju se primijeniti metode koje se zasnivaju na meso ili mikro nivou modeliranja. Kao što će biti prikazano u tekstu dolje, prednost je kada se elementi ispune mogu modelirati odvojeno i povezati kontakt elementima (anizotropija) u cjelinu, te zajedno s okvirom u konačan sustav. Time je moguće za svaki materijal definirati prikladni zakon ponašanja. Također je moguće pratiti pojavu plastičnih zglobova u okviru, te plastične deformacije armature, što je je ujedno i glavni problem kod okvirnih konstrukcija koje se projektiraju na potres.

U ovome radu usredotočujemo se na nelinearnu analizu armirano betonskog okvira s nearmiranom zidnom ispunom primjenom metode konačnih elemenata, gdje će nam kao osnova poslužiti prethodna eksperimentalna istraživanja materijalnih svojstava zidne ispune i ponašanja okvira pri horizontalnom cikličkom opterećenju. Za modeliranje smo koristili računalni program ATENA 2D v.2.1.1, koji nam omogućava da s postupnim povećanjem horizontalne sile (engl. force controlled) ili pomaka (engl. displacement controlled) na vrhu okvira, imamo detaljan uvid u razvoj oštećenja u okviru i ispuni okvira (horizontalno klizanje, raspucavanje elemenata ispune). Koncept graničnog stanja nosivosti (engl. ultimate limit state) i graničnog stanja oštetljivosti (engl. damage limit state) u propisima za nosive konstrukcije definiran je u ovisnosti je o horizontalnom pomaku vrha okvira (engl. storey drift) [2], čime je model koristan i za praktične primjene.

2 KONSTITUTIVNI MODELI

Kao što je spomenuto u prethodnom poglavlju, nosivi sustav u horizontalnom smjeru čine okvir i ispuna. Pošto je ponašanje pri opterećenju različito za materijal okvira i ispune, potrebno je za svaki od njih odabrati prikladan model ponašanja materijala. U ovome radu ograničavamo se na modele ponašanja materijala ugrađene u računalni program ATENA 2D v.2.1.1.

2.1 Armirano-betonski okvir

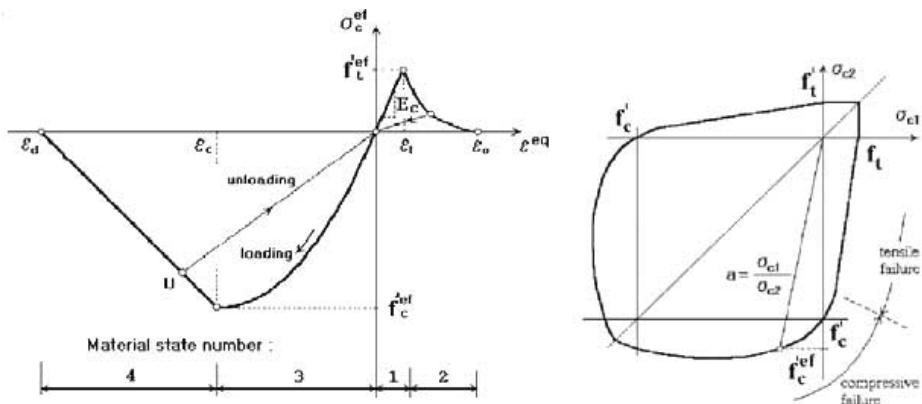
Nelinearno ponašanje betona opisano je s već provjerenim SBETA konstitutivnim modelom. To je nelinearni elastični pristup koji opisuje: nelinearno ponašanje betona u tlaku s očvršćavanjem i popuštanjem, raspucavanje u vlaku, teorije čvrstoće (dvoosno stanje naprezanja), smanjenje čvrstoće nakon raspucavanja u tlaku, te smanjenje posmične čvrstoće nakon raspucavanja. Pri dvoosnom stanju naprezanja nelinearno ponašanje opisano je jednoosnim zakonima (Sl.1.) uz pomoć ekvivalentnih naprezanja σ_c^{eq} i deformacija ϵ^{eq} .

Ponašanje betona u vlaku bez pukotina prepostavlja se da je linearno-elastično. Ponašanje nakon raspucavanja, kada se javlja popuštanje definirano je s različitim modelima širenja pukotina [1].

Uzdužnu i poprečnu armaturu moguće je modelirati kao diskretne štapne elemente (1D) ili „razmazivanjem“ preko određene površine betonskog elementa. U oba pristupa model ponašanja materijala definira se kao jednoosni bi-linearni ili multi-linearni.

2.2 Nearmirana zidna ispuna

Prepostavlja se da se zidni elementi također mogu modelirati primjenom SBETA konstitutivnog modela (nazovi krt materijal), uz primjenu prikladnih mehaničkih svojstava.



S1.1. Dijagram ekvivalentno jednoosno naprezanje – ekvivalentna deformacija za beton (dijelo) i funkcija čvrstoće betona pri dvoosnom stanju naprezanja (desno)

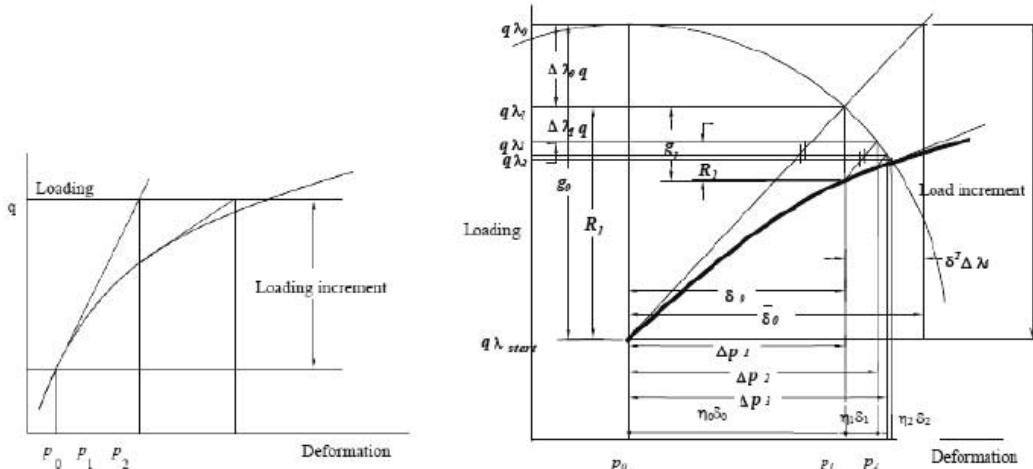
Kontakt (engl. interface) elementi zasnivaju se na Mohr-Coulomb teoriji čvrstoće s nemogućnošću primanja vlačnih naprezanja (S1.3.), te simuliraju ponašanje kontakta između zidnih blokova i reški morta, te kontakta između zidne ispune i okvira.

3 KONAČNI ELEMENTI

Sustav se sastoji od betonskih okvira s pripadnom armaturom, te elementima zidne ispune povezanih mortom. Primjenom ravninskih konačnih elemenata modelirani su betonski stupovi i grede, te elementi zidne ispune. Matrice krutosti navedenih elemenata sastoje se od linearног i nelinearnог dijela.

Uzdužna armatura stupova i greda modelirana je primjenom linijskih konačnih elemenata uz definiranje interakcije s okolnim betonom. Reške morte modelirane su kontakt elementima.

Prije nelinearnog proračuna potrebno je predstudijom provjeriti konvergenciju mreže konačnih elemenata.



S1.2. Newton-Raphson metoda (lijevo) i Arc-length (desno) metoda

4 RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

Nelinearne jednadžbe rješavaju se primjenom Newton-Raphson ili Arc-length numeričkih metoda (Sl.2.). Prva se zasniva na inkrementalnom proračunu, kvadratom brzinom konvergencije (smanjenje pogreške), gdje se za svaki inkrement proračunava tangencijalna matrica krutosti. Tokom iteracija nivo opterećenja je stalan, dok algoritam traži stanje ravnoteže za trenutnu vrijednost opterećenja. Nedostatak metode je nemogućnosti savladavanja ekstrema funkcije.

Primjenom Arc-length metode, opterećenje i deformacija konvergiraju, te je moguće prijeći preko ekstrema funkcije, što daje prednost ovoj metodi u odnosu na Newton-Raphson postupak.

5 PRIMJER

5.1 Opis nelinearnog modela

U prethodnim poglavljima ilustriran je način modeliranja okvira s ispunom odabirom modela ponašanja materijala, konačnih elemenata, te metode za rješavanje nelinearnih jednadžbi. Kao rezultat pratiti će se raspodjela najmanjih normalnih naprezanja. Materijalna svojstva dana su u Tablici 1.

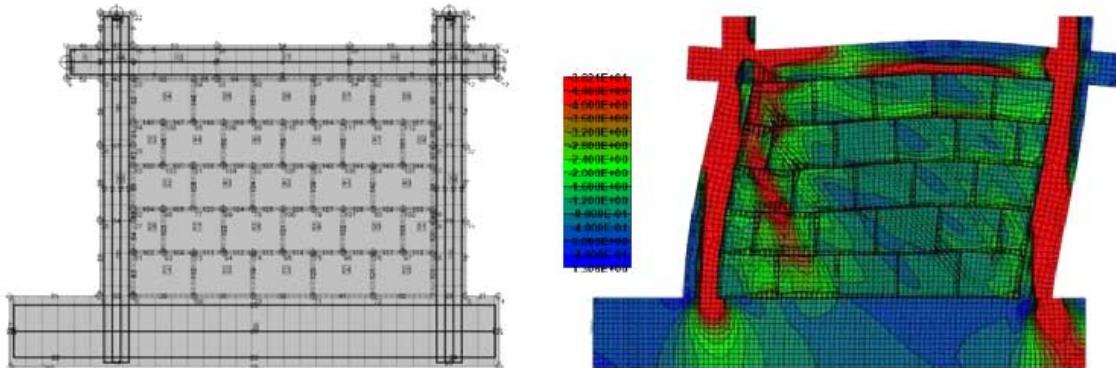
Horizontalno opterećenje kontrolirano je prirastom sile (engl. force controlled) na lijevom kraju betonske grede. Dodano je stalno vertikalno opterećenje na stupovima, jer se uzima u obzir da je promatrani okvir u prizemlju objekta. Odabrana je Newton-Raphson metoda za rješavanje jednadžbi.

Zidni element			
Tlačna čvrstoća	f_{bc}	= 14,53	MPa
Vlačna čvrstoća	f_{bt}	= 0,23	MPa
Modul elastičnosti	$E_{b,v}$	= 25	GPa
Poissonov omjer	μ	= 0,12	
Beton			
Tlačna čvrstoća	f_c	= 35,0	MPa
Vlačna čvrstoća	f_{ct}	= 3,2	MPa
Modul elastičnosti	E_{cm}	= 32	GPa
Poissonov omjer	μ	= 0,2	
Mort			
Adhezijska vlačna čvrstoća	f_{tk}	= 0,16	MPa
Posmična čvrstoća	f_{vk0}	= 0,25	MPa
Koeficijent kliznog trenja	μ	= 0,42	N/m
Armatura			
Modul elastičnosti	E_s	= 210	GPa
Granica tečenja	f_{yk}	= 500	MPa

Tablica 1. Materijalna svojstva za nelinearni proračun

5.2 Rezultati proračuna

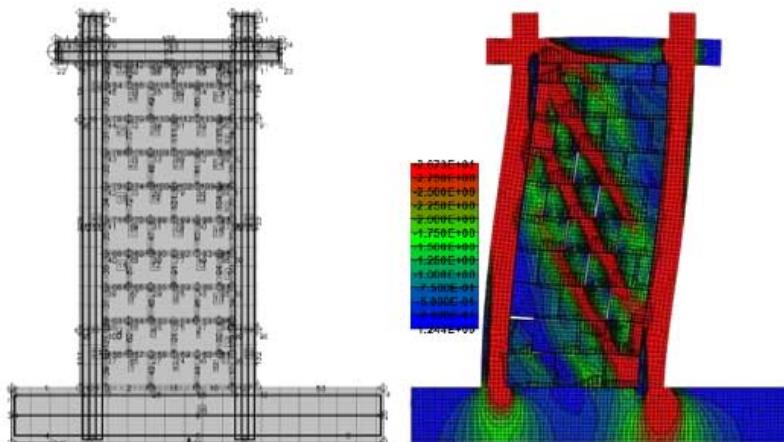
Prikazani su okviri s ispunom istih materijalnih, ali različitih geometrijskih svojstava; 1. $L/H=1,8/1,3$ m i 2. $L/H=1,0/2,5$ m. Dimenzije poprečnih presjeka i materijalna svojstva okvira su identični.



Sl.3. ATENA 2D numerički model (lijevo) i raspodjela glavnih naprezanja σ_{\max} (MPa) za odnos stranica ispune $L/H=1,8/1,3$ m

Uslijed horizontalnog opterećenja dolazi do drobljenja ugla, stvaranja tlačne dijagonale i horizontalnog klizanja po reškama ispune (najizraženije u sredini ispune). Mechanizam sloma može se opisati kao kombinacija posmičnog i dijagonalnog vlačnog sloma.

U drugome slučaju karakteristična je pojava više tlačnih dijagonala u odnosu na prethodni (Sl.4). Uslijed savijanja dolazi do drobljenja uglova ispune. Nosivost sustava 1. modela otkazala je pri horizontalnoj sili od 260,0 kN, te 2. modela pri sili od 180,0 kN.



Sl.4. ATENA 2D numerički model (lijevo) i raspodjela glavnih naprezanja σ_{\max} (MPa) za odnos stranica ispune $L/H=1,0/2,5$ m

6 ZAKLJUČAK

Ukoliko postoji kontakt između ispune i okvira, prilikom djelovanja horizontalnog opterećenja dolazi do interakcije dvaju konstruktivnih elemenata. Interakcija se može interpretirati primjenom nelinearne analize i metode konačnih elemenata. Analiza se vrlo lako može proširiti i na slučajeve s različitim geometrijskim karakteristikama. Na

rezultatima dvaju primjera vidljiva je povezanost mehanizma sloma uslijed horizontalnog opterećenja s geometrijskim karakteristikama ispune.

Literatura:

[1] Červenka V., Jendele L., Červenka J., „ATENA Program Documentation“, <http://www.cervenka.cz/>, 2009.

[2] FEMA 306: Evaluation of earthquake damaged concrete and masonry wall buildings – Basic Procedures Manual, Applied Technology Council (ATC), 1998.

[3] Marjani F., Ersøy U., „Behavior of Brick Infilled Reinforced Concrete Frames Under Reversed Cyclic Loading”, ECAS2002 International Symposium on Structural and Earthquake Engineering, 2002.

Autori:

Davorin Penava, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Zavod za tehničku mehaniku, Drinska 16a, 31000 Osijek, tel. +385(0)31/274-377, e-mail: dpenava@gfos.hr

Christoph Butenweg, RWTH Universität Aachen, Fakultät für Bauingenieurwissenschaften, Lehrstuhl für Baustatik und Baudynamik, tel. (+49)241 / 80 25863, e-mail: butenweg@lbb.rwth-aachen.de

Vladimir Sigmund, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Zavod za tehničku mehaniku, Crkvena 21, 31000 Osijek, tel. +385(0)31/540-070, e-mail: sigmund@gfos.hr

GREEN-LAGRANGEV Tenzor deformacija za zakrivljene grede u polarnim koordinatama

Sesartić, R., Kozulić, V. & Gotovac, B.

Sažetak: U ovom radu promatra se linijski zakrivljeni gredni element u ravnini. Na osnovu diferencijalnih jednadžbi ravnoteže i polja pomaka zakrivljenog elementa izvedene su egzaktne algebarsko-trigonometrijske bazne funkcije za gredne elemente konstantne zakrivljenosti. Bazne funkcije uključuju zajednički utjecaj savijanja, smicanja i uzdužnih sila. Korištenjem dobivenih baznih funkcija izvedena je matrica krutosti zakrivljenog konačnog dvočvornog elementa sa 6 stupnjeva slobode. Ovako dobivena matrica krutosti potpuno eliminira nepovoljni efekt smicanja i membranski efekt (shear and membrane locking effects). Primjenjujući zakrivljene gredne elemente s egzaktnim baznim funkcijama razvijen je numerički model pomoću kojeg se za lukove opterećene statičkim opterećenjem u čvorovima dobivaju točni rezultati neovisno o broju konačnih elemenata korištenih u proračunu. Izvedene egzaktne algebarsko-trigonometrijske bazne funkcije mogu biti osnova za izvođenje geometrijske matrice krutosti u analizi stabilnosti zakrivljenih konstrukcija.

Uzimajući utjecaj deformiranja zakrivljenog nosača nastalog od savijanja, uzdužne i poprečne sile prikazat će se Green-Lagrangeova formulacija potrebna za analizu stabilnosti lučnih konstrukcija u ravnini. Iz takve formulacije primjenom lineariziranog (inkrementalnog) principa virtualnih radova izvele bi se ravnotežne jednadžbe izvijenog zakrivljenog grednog nosača.

Ključne riječi: Zakrivljeni gredni element, matrica krutosti, efekt smicanja, efekt membrane.

1 UVOD

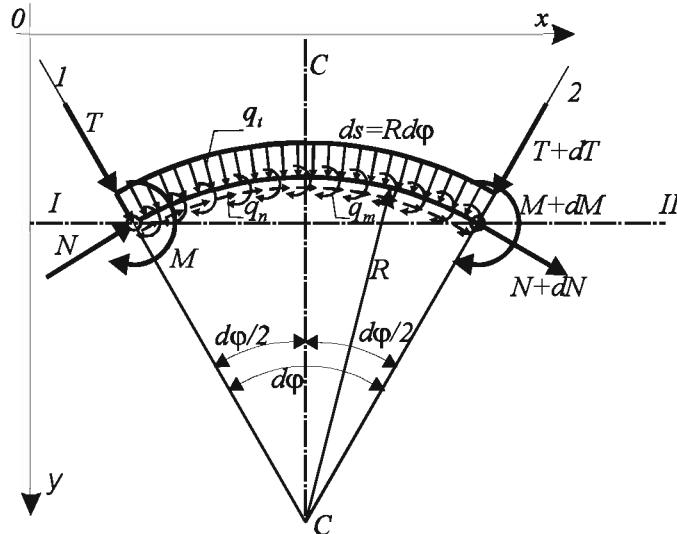
Promatra se zakrivljeni štap u ravnini konstantnog poprečnog presjeka pod djelovanjem statičkog opterećenja u ravnini luka. Prilikom deformiranja promatrani su mali pomaci te je veza između komponenata i deformacija prikazana u obliku Cauchyjeva tenzora deformacija. Na izdvojenom diferencijalnom dijelu izvedene su diferencijalne jednadžbe ravnoteže zakrivljenog grednog elementa. U diferencijalne jednadžbe ravnoteže uvedeni su izrazi za unutrašnje sile izražene preko pomaka te je dobiven sustav od tri diferencijalne jednadžbe drugog reda koji uz odgovarajuće rubne uvjete u potpunosti opisuju problem. Sprezanjem i analizom sustava od tri diferencijalne jednadžbe drugog reda dobivene su egzaktne algebarsko-trigonometrijske bazne funkcije na grednom elementu konstantne zakrivljenosti. Korištenjem egzaktnih baznih funkcija za opisivanje polja pomaka formirana je egzaktna matrica krutosti zakrivljenog elementa u kojoj su potpuno eliminirani efekt smicanja i efekt membrane. Primjenjujući egzaktnu matricu krutosti razvijen je numerički model pomoću kojeg se za lukove opterećene statičkim opterećenjem u čvorovima dobivaju točni rezultati neovisno o broju konačnih elemenata korištenih u proračunu.

Za rješavanje problema stabilnosti veza između komponenata deformacija i pomaka prikazana je pomoću Green-Lagrangeovog tenzora deformacija u odabranom polarnom

koordinatnom sustavu. U istom polarnom koordinatnom sustavu napisane su Navierove jednadžbe ravnoteže.

2 JEDNADŽBE RAVNOTEŽE ZAKRIVLJENOG GREDNOG ELEMENTA

Zakrivljeni štap u ravnini je konstantnog poprečnog presjeka opterećen raspodijeljenim uzdužnim opterećenjem q_n , poprečnim opterećenjem q_t , te raspodijeljenim momentom q_m prema slici 1.



Slika 1. Diferencijalni dio štapa

Diferencijalni dio zakrivljenog štapa izdvojen je presjecima 1 i 2 u kojima su definirani pozitivni smjerovi unutarnjih sila gdje je: N uzdužna sila, T poprečna sila a M moment savijanja.

Iz uvjeta ravnoteže diferencijalnog dijela zakrivljenog grednog elementa dobivaju se sljedeće jednadžbe [4]:

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T}{R} - q_n = 0, \quad \frac{dT}{ds} + \frac{N}{R} - q_t = 0, \quad \frac{dM}{ds} + T - q_m = 0 \quad (1)$$

Jednadžbe ravnoteže zakrivljenog grednog elementa (1) mogu se dobiti i iz Navierovih jednadžbi ravnoteže [1]. Transformacijom Navierovih jednadžbi iz desnog Kartezijevog koordinatnog sustava u koordinatni sustav (r, φ) prikazan na slici 3., dobivaju se jednadžbe ravnoteže u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - 2 \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} - \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + f_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \sigma_{rr} - \frac{1}{r} \sigma_{\varphi\varphi} + f_r &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

gdje su: σ_{ij} – komponente naprezanja u polarnom koordinatnom sustavu (r, φ) , f_φ i f_r volumenske sile.

Uzimajući unutrašnje sile u poprečnom presjeku definirane preko naprezanja:

$$\int_A \sigma_{\varphi\varphi} dA = N, \quad \int_A \sigma_{r\varphi} dA = T, \quad \int_A \sigma_{r\varphi} \cdot r dA = -M \quad (3)$$

te integriranjem obje jednadžbe iz (2) po površini poprečnog presjeka i množenjem prve jednadžbe iz (2) sa r te integriranjem po površini poprečnog presjeka, dobivaju se također izrazi (1). Rješenje diferencijalnih jednadžbi (1) uz zanemarivanje volumenskih sila i uz određene rubne uvjete dalo bi vezu između unutrašnjih sila u proizvoljnom presjeku i u presjecima na krajevima nosača.

Na slici 2. prikazan je deformirani nosač pod vanjskim opterećenjem. Nakon projiciranja geometrije diferencijalnog elementa luka prije i nakon deformacije na koordinatne osi x i y te nakon potrebnih kombinacija i sređivanja [4], dobivaju se veze između komponenata pomaka i pripadajućih deformacija kako slijedi:

- uzdužna tangencijalna deformacija:

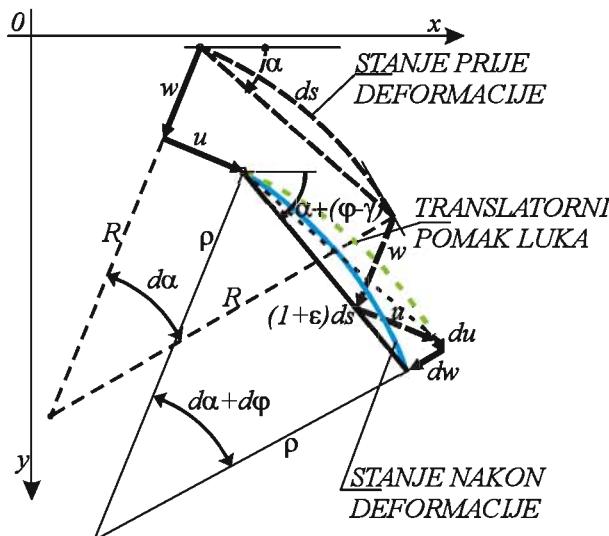
$$\varepsilon(s) = \frac{du}{ds} \quad (4)$$

- posmična deformacija (kut koji nastaje međusobnim klizanjem dva susjedna presjeka na razmaku ds) u smjeru normale:

$$\gamma(s) = \varphi(s) - \frac{dw}{ds} \quad (5)$$

- uz pretpostavku da je kut γ konstantan duž diferencijalnog elementa ds , promjena zakrivljenosti lučnog nosača je:

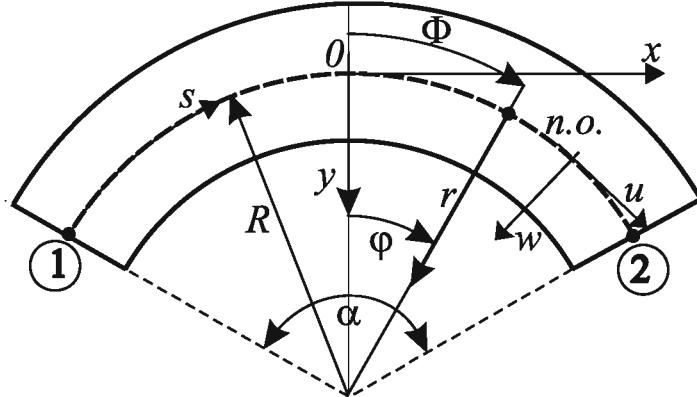
$$\kappa(s) = \frac{d\varphi}{ds} \quad (6)$$



Slika 2. Pomak linije štapa

Komponente Cauchyjeva tenzora deformacija za ravniško stanje naprezanja u odabranom koordinatnom sustavu su oblika:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial w}{\partial r} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{w}{r} \\ \gamma_{r\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\end{aligned}\tag{7}$$



Slika 3. Element luka u odabranim koordinatnim sustavima

Sređivanjem izraza (7) koristeći ranije veze (4), (5) i (6) te uzimajući u obzir da se radijus ne mijenja po visini grede konačno se mogu napisati izrazi za relativne deformacije zakrivljenog grednog nosača u uzdužnom, poprečnom i rotacijskom smjeru respektivno:

$$\begin{aligned}\varepsilon_u &= \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{R} \\ \varepsilon_w &= \varphi - \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R} \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{d\varphi}{ds}\end{aligned}\tag{8}$$

Množenjem karakteristika otpornosti presjeka grede s pripadajućim deformacijama iz (6), dobivaju se unutarnje sile izražene preko deformacija (pomaka):

$$\begin{aligned}N &= -EA \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{w}{R} \right) \\ T &= kGA \left(\varphi - \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{u}{R} \right) \\ M &= -EI \frac{d\varphi}{ds}\end{aligned}\tag{9}$$

Uvođenjem izraza za sile u poprečnom presjeku (9) u izraz za ravnotežu diferencijalnog dijela zakrivljenog elementa (1), dobiva se sustav od tri diferencijalne jednadžbe drugog reda u obliku:

$$\begin{aligned}
& \frac{EA}{R^2} \frac{d^2 u}{ds^2} - \frac{kGA}{R^2} u(s) - \frac{EA + kGA}{R^2} \frac{dw}{ds} + \frac{kGA}{R} \varphi(s) = -q_n \\
& \frac{EA + kGA}{R^2} \frac{du}{ds} + \frac{kGA}{R^2} \frac{d^2 w}{ds^2} - \frac{EA}{R^2} w(s) - \frac{kGA}{R} \frac{d\varphi}{ds} = -q_t \\
& \frac{kGA}{R} u(s) + \frac{kGA}{R} \frac{dw}{ds} + \frac{EI}{R^2} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} - kGA \varphi(s) = -q_m
\end{aligned} \tag{10}$$

Prevođenjem sustava od tri diferencijalne jednadžbe drugog reda (10) u diferencijalnu jednadžbu elastične linije zakrivljenog štapa izražene preko samo jedne komponente pomaka, dobiva se jednadžba elastične linije zakrivljenog štapa izražena preko pomaka $u(s)$, preko pomaka $w(s)$ ili preko pomaka $\varphi(s)$ u obliku diferencijalne jednadžbe šestog reda, petog reda ili četvrtog reda respektivno. Opće rješenje dobivenih diferencijalnih jednadžbi može se napisati u algebarsko trigonometrijskom obliku [3]:

$$\begin{aligned}
u(\phi) &= A_0 + A_1 \cdot \phi + A_2 \cdot \sin(\phi) + A_3 \cdot \phi \cdot \sin(\phi) + A_4 \cdot \cos(\phi) + A_5 \cdot \phi \cdot \cos(\phi) \\
w(\phi) &= B_0 + B_1 \cdot \phi + B_2 \cdot \sin(\phi) + B_3 \cdot \phi \cdot \sin(\phi) + B_4 \cdot \cos(\phi) + B_5 \cdot \phi \cdot \cos(\phi) \\
\varphi(\phi) &= C_0 + C_1 \cdot \phi + C_2 \cdot \sin(\phi) + C_3 \cdot \phi \cdot \sin(\phi) + C_4 \cdot \cos(\phi) + C_5 \cdot \phi \cdot \cos(\phi)
\end{aligned} \tag{11}$$

Za djelovanje jediničnih pomaka u osloncima obostrano upetog luka, svakom jediničnom pomaku su pridružene po tri bazne funkcije. Prema tome, rješavanjem sustava (10) za svaki jedinični pomak dobiva se po 18 koeficijenata.

3 MATRICA KRUTOSTI

Standardnim postupkom minimizacije funkcionala potencijalne energije dobiva se matrica krutosti konačnog elementa lučnog nosača u obliku:

$$\mathbf{K} = \int_s \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} ds \tag{12}$$

gdje je:

- \mathbf{B} matrica deformacija konačnog elementa,
- \mathbf{D} matrica elastičnih svojstava materijala.

Uvođenjem algebarsko trigonometrijskih baznih funkcija (11) u izraz (12) dobiva se egzaktna matrica krutosti.

Neki jednostavni primjeri lukova s konstantnim radijusom zakrivljenosti analizirani su metodom konačnih elemenata korištenjem egzaktne matrice krutosti [4]. Primjenjujući zakrivljene gredne elemente s egzaktnim baznim funkcijama za lukove opterećene statickim opterećenjem u čvorovima dobivaju se točni rezultati neovisno o broju konačnih elemenata korištenih u proračunu [2], što je analogno primjeni Hermite-ovih polinoma za analizu pravocrtnih grednih konstrukcija.

4 ANALIZA STABILNOSTI

Kriterij stabilnosti konstrukcija vrlo često je i kriterij za određivanje faktora sigurnosti te je analiza stabilnosti važan čimbenik pri projektiranju. Ovdje se do sada promatrao samo linearni dio tenzora deformacija odnosno naprezanja, a problem stabilnosti u

osnovi je geometrijski nelinearan problem. Poznati izraz za Green-Lagrangeov tenzor deformacija u desnom Kartezijevom koordinatnom sustavu je oblika:

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}}_{\text{linearni dio tenzora deformacija}} + \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{\text{nelinearni dio tenzora deformacija}} \right), \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (13)$$

Za analizu stabilnosti konstrukcije komponente nelinearnog dijela tenzora deformacija potrebno je prikazati u odabranom polarnom koordinatnom sustavu (r, φ) (slika 3.). Zadaća stabilnosti planira se riješiti formulacijom metode konačnih elemenata principom virtualnog rada gdje će se kao bazne funkcije koristiti egzaktne algebarsko trigonometrijske funkcije.

5 ZAKLJUČAK

U radu su na osnovu polja pomaka i diferencijalnih jednadžbi ravnoteže zakrivljenog konačnog elementa izvedene algebarsko trigonometrijske bazne funkcije. Na osnovu ovako dobivenih baznih funkcija definirana je matrica krutosti zakrivljenog konačnog elementa koja eliminira nepovoljni efekt smicanja i membranski efekt. Korištenjem zakrivljenih konačnih elemenata za lukove opterećene statičnim opterećenjem dobivaju se glatki dijagrami unutarnjih sila odnosno eliminira se skok u dijagramu poprečnih i uzdužnih sila na mjestu spoja dva konačna elementa. Korištenjem algebarsko trigonometrijskih baznih funkcija za rješavanje zadaće stabilnosti zakrivljenih grednih nosača očekuju se kvalitetna numerička rješenja problema stabilnosti, analogno već dobivenim rezultatima statičkih analiza lučnih konstrukcija [4].

Literatura

- [1] Boresi, A.P., Lynn, P.P., "Elasticity in engineering mechanics", Prentice-hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- [2] Gotovac, B., Sesarić, R., Kozulić, V., "Točna numerička formulacija zakrivljenog grednog elementa", Građevinar, Vol.59, Broj 12, 2009, str. 1129-1141.
- [3] Litewka, P.; Rakowski, J., "The exact thick arch finite element", Computers & Structures, vol. 68, 1998, pp. 369-379.
- [4] Sesarić, R., "Doprinos numeričkoj analizi zakrivljenih grednih nosača", Magistarski rad, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Split, 2008.

Autori:

Renata Sesarić, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Matice hrvatske 15, 21000 Split, tel. 021 303 365, fax. 021 465 117, e-mail: renata.sesartic@gradst.hr

Vedrana Kozulić, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Matice hrvatske 15, 21000 Split, tel. 021 303 365, fax. 021 465 117, e-mail: vedrana.kozulic@gradst.hr

Blaž Gotovac, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Matice hrvatske 15, 21000 Split, tel. 021 303 335, fax. 021 465 117, e-mail: blaz.gotovac@gradst.hr

PONAŠANJE OMEĐENOOG ZIĐA PRI CIKLIČKOM OPTEREĆENJU

V.Sigmund, Đ.Matošević & M. Bošnjak-Klečina

Sažetak: Konstrukcije od omeđenog ziđa općenito se bolje odupiru djelovanju potresnih opterećenja od nearmiranih zidova. Pri određivanju nosivosti ovakovih konstrukcija najčešće se doprinos vertikalnih ab dijelova ovakovih konstrukcija zanemaruje. Cilj ovog istraživanja je određivanje doprinosa nosivosti na horizontalna djelovanja ab dijelova omeđenog ziđa, posebno načina povezivanja ziđa s vertikalnim seklažima. Prema "Tehničkom propisu za zidane konstrukcije" nije dopušteno vertikalni kontakt između ziđa i armiranog betona izvoditi bez odgovarajućeg "zuba" ili spona,, a što znatno otežava izvedbu. U svrhu dobivanja eksperimentalnih rezultata ispitana su tri tipa zidova kod kojih su veze između ziđa i vertikalnih ab dijelova izvedene na slijedeće načine : A) bez posebne veze na kontaktu zida i betona; B) istacima zidnih elemenata svakog drugog reda u beton; C) ugradnjom vilica u vertikalni serklaž i njihovim sidrenjem u horizontalnu rešku zida;. Uzorci su izvedeni u mjerilu 1:1,5 i ispitani na horizontalno cikličko opterećenje.

Ključne riječi: omeđeno zide, eksperimentalni rezultati, veza između ziđa i betona, cikličko opterećenje

1 UVOD

Zidane konstrukcije, kao jedne od najstarijih vrsta građevina i danas se često primjenjuju, posebno zbog svoje niske cijene, jednostavnosti izvedbe, trajnosti i dobre nosivosti. Opće poznata pravila o tlocrtnom i vertikalnom obliku, detaljima i načinu izvedbe mogu osigurati zadovoljavajuću sigurnost i otpornost ovakovih konstrukcija na sve vrste opterećenja. Ipak, u slučaju dinamičkih opterećenja može doći do krtih lomova, prvenstveno ziđa, najčešće na mjestima kontakta s materijalima boljih elasto-plastičnih svojstava. Kod omeđenih zidova to je kontakt ab vertikalnih seklaža i ziđa. Kako je ziđe kompozitni nehomogeni material, sastavljen od zidnih elemenata i morta, s različitim mogućnostima izvedbe, teško ga je modelirati u linearном, a pogotovo u nelinearnom području ponašanja. Pri tome posebno treba naglasiti da konačna kvaliteta izvedene konstrukcije ovisi o cijelom nizu činilaca, od vrste upotrebljenog elementa za zidanje, debljinama i načinu popunjavanja sljubnica, do obučenosti zidara, učestalosti nadzora i sl. Jedini pravi uvid u mehaničke karakteristike ovog materijala moguće je dobiti pokusima na odgovarajućim modelima.

U svrhu određivanja mehaničkih karakteristika ziđa koje kvalitetom i načinom izvedbe odgovara prosječnoj hrvatskoj građevinskoj praksi izvedeni su uzorci za ispitivanje od materijala sa područja Slavonije (zidni element "Opeka" Osijek, produžni mort 1:1:5, beton C30/37 - tvornica betona "Gradnja" Osijek, armatura RA-400/500) u mjerilu 1:1,5. Pri tome su napravljena po tri ispitna uzorka od svakog tipa povezivanja ziđa s vertikalnim ab serklažima: A) bez posebne veze na kontaktu zida i betona; B) upuštanjem dijelova opečnih elemenata u beton; C) ugradnjom vilica u

vertikalni serklaž i njihovim sidrenjem u horizontalnu rešku zida. Kvaliteta pojednih sastavnih dijelova ugrađenih u ziđe prethodno je ispitana. Zidovi su u nivou gornjeg ab serklaža opterećivani naizmjenično po dva puta jednakim opterećenjem s korakom od 10 kN. Nakon dosezanja granične nosivosti monotonim opterećenjem su opterećivani do konačnog sloma. Pri tome se nastojalo vertikalno opterećenje održati stalnim, koliko je to uz postojeću opremu bilo moguće.

1.1 Mehanizam sloma omeđenog ziđa

Prema odredbama EC6 proračunske metode za određivanje nosivosti na vertikalna i horizontalna opterećenja su detaljno propisane, ali jednake su za omeđeno i neomeđeno ziđe. Pri određivanju nosivosti omeđenog ziđa brutto presjek ziđa se opisuje mehaničkim svojstvima ziđa, bez uzimanja u obzir armirano betonskih dijelova. Međutim, eksperimentalna istraživanja pokazuju značajan doprinos ab vertilaknih serklaža nosivosti ovakovih konstrukcija, pogotovo za horizontalna opterećenja. Ovi elementi povećavaju duktilitet i disipaciju energije u konstrukciji. Mehanizam sloma koji je uočen na ispitanim modelima uglavnom pokazuje slijedeće faze: do pojave prvih značajnih pukotina konstrukcija djeluje kao cjelina; potom u ziđu nastaju prve dijagonalne pukotine, koje se pri dosezanju granice nosivosti počnu širiti u vertikalne armirano betonske elemente. Pri tome vertikalne armature Šipke preuzimaju poprečna opterećenja svojim moždaničkim mehanizmom. Drobljenje ziđa u sredini zida prethodi konačnom slomu koji nastaje uslijed izvijanja armature u jednom od vertikalnih ab serklaža.

Naravno posmična nosivost ziđa ovisi o nivou vertikalnog pritiska u zidu. U omeđenom ziđu na vertikalnom i horizontalnom kontaktu ziđa i betona nastaje dodatni horizontalni pritisak čija razdioba i veličina može bitno utjecati na njegovu ukupnu nosivost.

Posmična nosivost omeđenog ziđa ovisi dakle o mehaničkim karakteristikama ugrađenih materijala, veličinama i položaju vertikalni ab elemenata i vertikalnom opterećenju. Pritisak koji nastaje na kontaktu ziđa i ab vertikalnih serklaža svakako je ovisan o vrsti kontakta, a utječe na njegovu posmičnu nosivost. Popuštanje omeđenog zida događa se u slučaju malog vertikalnog opterećenja, a savijanje samo kod vrlo ktatkih zidova.

2 OPIS ISPITIVANJA OMEĐENOG ZIĐA

Uzorci su modelirani u skladu s EC8 i EC6 te izvedeni u mjerilu 1:1,5. Pojedini zid predstavlja model prizemnog zida u zgradu s jednim katom, tavanom i kosim krovom. Preuzima 25 kvadrata međukatnih i krovne konstrukcije. Pri tome je zid konzolno učvršćen u ab temelj. Ziđe je izvedeno od zidnih elemenata od pečene gline , produžnog morta opće namjene s sljubnicama širine 1cm potpuno popunjene mortom. Ispitivanje je provedeno 28 dana nakon betoniranja vertikalnih i horizontalnih serklaža.

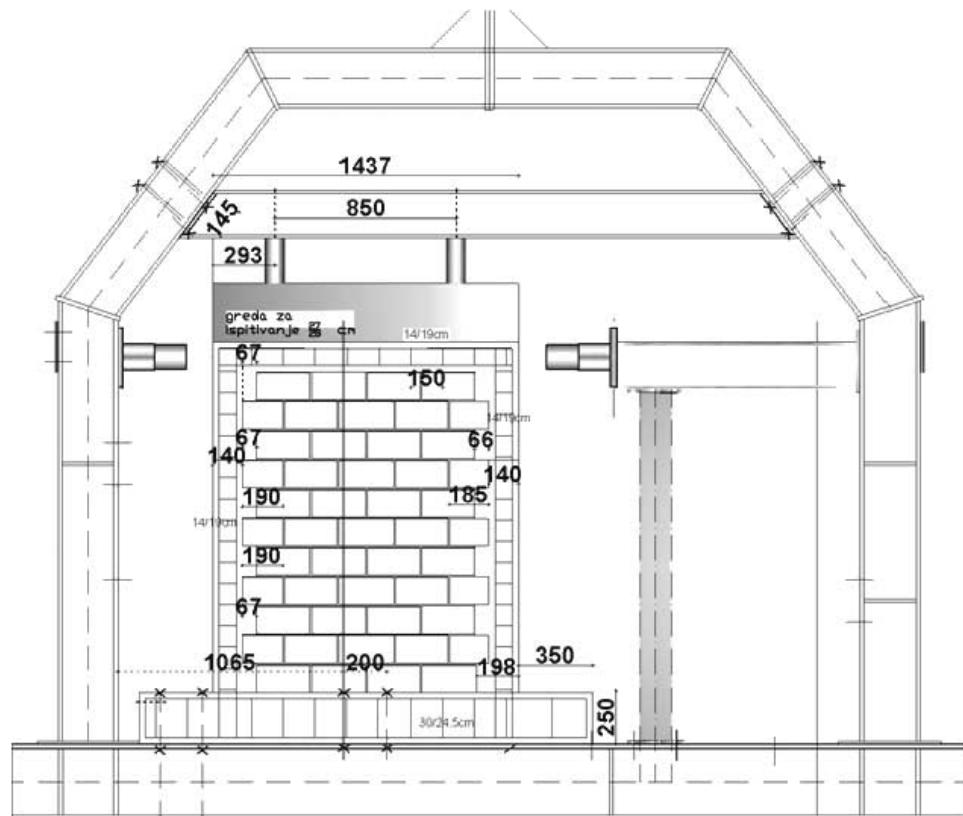
2.1 Opis modela

Dimenzije uzorka zida prikazane su u crtežu 2.1., a mehaničke karakteristike pojedinih materijala ugrađenih u zidove, a ispitanih posebno u tablici 2.1. Dimenzije modela zida su $l/h=216/248(\text{cm})$, vertikalni ab serklaži $21/28,5(\text{cm})$ armirani su Šipkama RA-400/500, 4Φ12, usidrenim u temelj, te vilicama Φ8/15cm. Jednako su

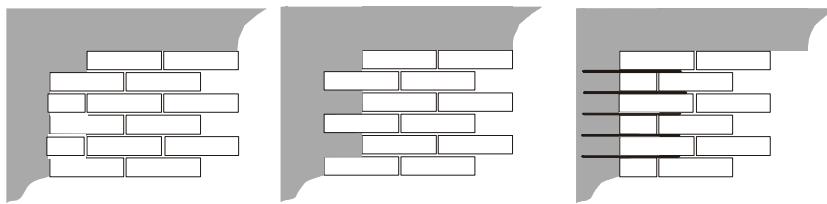
armirani i horizontalni serklaži na gornjem rubu zida s razmakom vilica 20cm. Odnos visine prema širini zida iznosi 1,27, a debljina zida je 28,5 cm. Zidovi tipa B) imaju u svakom drugom redu "zub" opeke upušten u beton duljine 10cm, a tipa C) u svakoj reški vilici $\Phi 8$ mm, povezanu za armaturu vertikalnog serklaža. Vrste načina povezivanja zida s vertikalnim ab elementima zida prikazani su na crtežu 2.2. Na konzolni zid učvršćen u čeličnom okviru postavljena je armirano betonska greda koja vertikalno opterećenje od dvije hidrauličke preše prenosi na zid kao jednoliko raspodjeljeno opterećenje. S obje strane zida postavljene su horizontalne hidrauličke preše koje su opterećivale zid naizmjenično. Vremenski tijek opterećivanja prikazan je na crtežu 2.3. U visini horizontalnog serkalaža zid je naizmjenično opterećivan horizontalnom silom u svojoj ravnini, dok je vertikalno pritisnut do odgovarajućeg nivoa tlaka.

Zidni element	Opečni zidni element V-5 Dimenzija 25/19/19 (cm) grupe 2 prema EC6 normalizirane tlačne čvrstoće $17,03 \text{ N/mm}^2$
Mort	M 3,59
Beton	$f_c = 38,03 \text{ Mpa}$
Armatura	RA-400/500
Vlačna čvrstoća zida	$0,15 \text{ N/mm}^2$

Tablica 2.1. Mehanička svojstva ugrađenih materijala



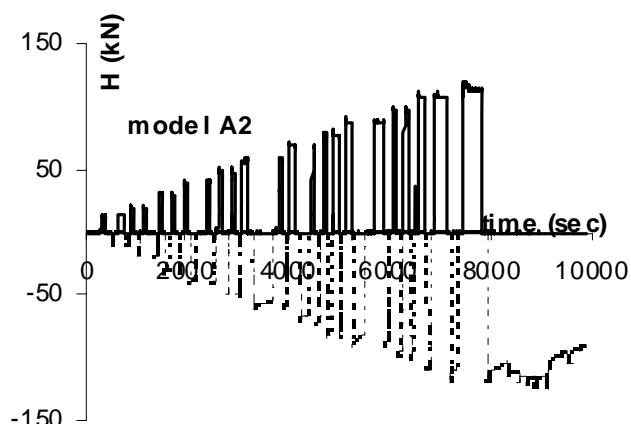
Crtež. 2. 1. Uzorak zida



Crtež 2.2. Način povezivanja ziđa s vertikalni ab serklažima

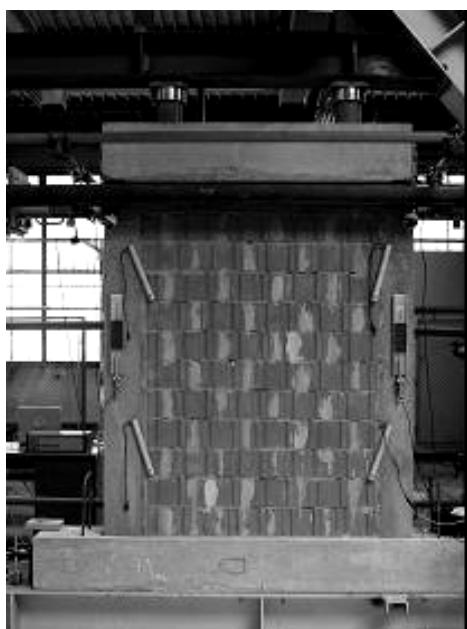
A) bez povezivanja; B) povezivanje cik-cak; C) povezivanje vilicama

Svaki ciklus opterećivanja i rasterećivanja ponavljan je dva puta uz korak povećanja sile od 10kN. Mjereni su horizontalni pomaci u nivou gornjeg ruba zida, gornjeg nivoa temelja, vertikalni pomaci gornjeg ruba zida i promjena duljina dijagonala pomoću LVDT mernih instrumenta, te klizanje između ziđa i ab vertikalnih serklaža te deformacije ab serklaža na mjestima upetosti u temelj pomoću deformetara baze 20cm. Sve sile i pomaci bilježeni su u vremenskim intervalima od 1 sekunde.



Crtež 2.3. Tijek opterećivanja i rasterećivanja uzorka

2.2 Prikaz rezultata ispitivanja



Fotografija 2.1. Prikaz načina ispitivanja uzorka

Na osnovu pokusima mjerениh veličina pomaka i sile određene su histerezne krivulje sva tri modela. Potom su određene anvelope ponašanja od kojih je na crtežu 2.4. prikazana anvelopa ponašanja za model tipa B. Anvelopa ponašanja idealizirana je bilinearnim modelom gdje veličinu elastične krutosti određuje pojava prve značajne pukotine u ziđu. Graničnu nosivost i granični horizontalni pomak predstavljaju vrijednosti horizontalne sile i pomaka koji odgovaraju padu najveće postignute horizontalne sile od 20%. Faktor ponašanja dobije se kao:

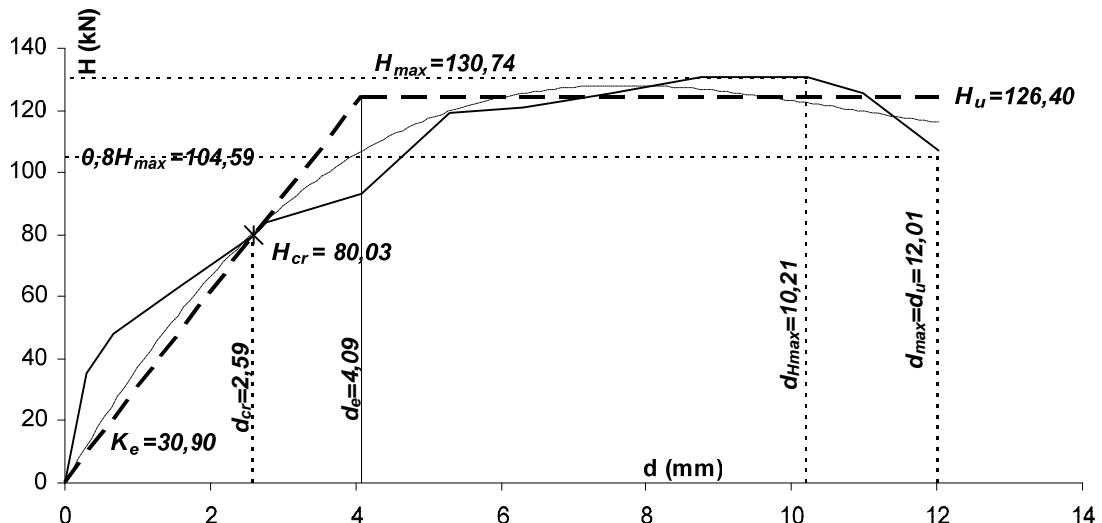
$$\mu_u = \frac{d_u}{d_e}, \quad (2.3)$$

gdje je:

d_u = horizontalni pomak odgovarajući padu vrijednosti sile F_{max} od 20%;

d_e = pomak odgovarajući granici elastičnosti.

Izmjerene i izračunate vrijednosti elemenata anvelope ponašanja sve tri vrste modela prikazane su u tablici 2.2.



2.4. Histerezna anvelopa horizontalnih pomaka i sila otpora zida za tip B
- bilinearna krivulja ponašanja

uzorak tipa	mjereno				određeno				
	H_{cr} (kN)	H_{max} (kN)	d_{cr} (mm)	d_{Hmax} (kN)	d_e (mm)	d_u (mm)	K_e (kN/mm)	H_u (kN)	μ_u
A	89,06	125,34	2,48	6,7	3,35	8,51	35,91	120,30	2,54
B	80,03	130,74	2,59	10,21	4,09	12,01	30,90	126,40	2,94
C	109,48	131,34	3,02	4,87	3,61	14,1	36,25	130,75	3,91

Tablica 2.2. Mjereni i izračunati parametri bilinearne krivulje ponašanja

Iz određenih bilinearnih krivulja koje prikazuju odnos horizontalne sile i pomaka vrha zida vidi se slijedeće: najveća horizontalna sila otpora H_{max} podjednaka je za sve tri vrste zidova, ali su njima odgovarajući pomaci d_{Hmax} bitno različiti; horizontalni pomak odgovarajući pojavi prve značajne pukotine d_{cr} blago raste od tipa "A" do "C"; najveći horizontalni pomak d_u raste od tipa "A" do "C"; određeni faktori ponašanja μ_u su u skladu s propisanim prema EC8 i rastu od tipa "A" do "C".

3 ZAKLJUČAK

Način povezivanja zida i vertikalnog serklaža utječe na veličinu najvećih pomaka koje zid može podnijeti prije sloma, ali bitno ne povećava njegovu nosivost.

Promatranjem rezultata mjerjenja najveće se razlike mogu uočiti u vrijednostima graničnih pomaka (d_u) i faktoru ponašanja. Područje plastičnog ponašanja omedenog zida se povećava sprezanjem vertikalnih serklaža i zida. Vrijednost faktora ponašanja

raste od tipa "A" do "C", na osnovu čega se može zaključiti da ovisi o tipu povezivanja vertikalnih serklaža i ziđa i to na način da se povezivanjem (posebice elastičnim – vilicama) poboljšavaju njegova svojstva pri preuzimanju horizontalnih cikličkih opterećenja.

ZAHVALA

Prikazano istraživanje dio je projekta „Seizmički proračun okvirnih konstrukcija s ispunom“ koji podupire Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske na čemu smo zahvalni.

Literatura

- [1] Aničić D., Fajfar P., Petrović B., Szavits-Nossan A., Tomažević M. (1990), Zemljotresno inženjerstvo- visokogradnja, Jugoslavia
- [2] Costa, A. (2007), Experimental Testing of Lateral Capacity of Masonry Piers. An Application to Seismic Assessment of AAC Masonry Buildings, Universita degli Studi di Pavia tska
- [3] Sorić, Z. (2004), Zidane konstrukcije 1, Sveučilište u Zagrebu, Hrvat
- [4] Tomažević, M. (2000), Resistant Design of Masonry Buildings, Imperial College Press, London
- [5] Đ. Matošević, V. Sigmund, J. Zovkić, „Experimental Testing of Masonry and Masonry Piers“, 6th ICCSM Proceedings, Zagreb : Croatian Society of Mechanics, 2009.
- [6] prENV 1996-1-1: Design of masonry structures – Part 1-1:General rules for buildings - Rules for reinforced and unreinforced masonry, European Committee for Standardization, Bruxelles, 1995
- [7] EN 1996-1-1: Design of masonry structures – Part 1-1:Common rules for buildings - Rules for reinforced and unreinforced masonry, European Committee for Standardization, Bruxelles, 2004
- [8] Tehnički propis za zidane konstrukcije, Narodne novine br. 1/2007.

Autori:

Vladimir Sigmund, Sveučilište J.J. Strossmayera Osijek, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Drinska 16a, Osijek, tel. 031 540070, fax. 031 540071, e-mail: sigmund@gfos.hr

Durđica Matošević, Sveučilište J.J. Strossmayera Osijek, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Drinska 16a, Osijek, tel. 031 274377, fax. 031 274444, e-mail: dmatos@gfos.hr

Mirjana Bošnjak-Klečina, Sveučilište J.J. Strossmayera Osijek, Građevinski fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Drinska 16a, Osijek, tel. 031 274377, fax. 031 274444, e-mail: mbosnjak@gfos.hr

NUMERIČKO MODELIRANJE PUKOTINA U POLIMERNIM MATERIJALIMA

Skozrit, I., Tonković, Z.

Sažetak: Na temelju eksperimentalnih rezultata iz literature za polietilen srednje gustoće izведен je algoritam za integriranje vremenski ovisnih konstitutivnih relacija koje sprežu elastoplastičnost i puzanje. Algoritam je implementiran u korisničku rutinu CREEP programskog paketa ABAQUS te je verificiran usporedbom s eksperimentalnim rezultatima iz literature. U cilju točnijeg modeliranja realnog ponašanja polietilena i izračunavanja parametara mehanike loma trenutno se provode eksperimentalna istraživanja na epruvetama sa i bez zareza.

Ključne riječi: polietilen srednje gustoće, puzanje, metoda konačnih elemenata, C-integral

1 UVOD

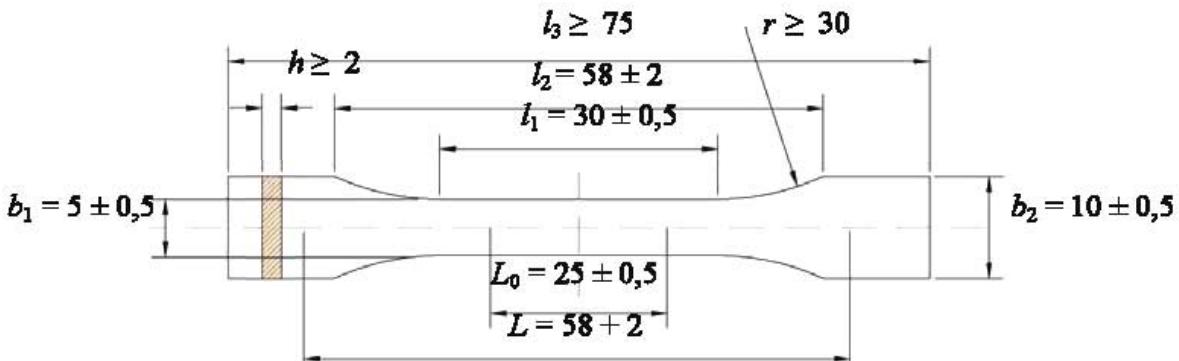
Sve veća potreba za primjenom polietilena kao konstrukcijskog materijala (cijevi za distribuciju vode i plina) zahtijeva nove metode za procjenu cjelovitosti konstrukcijskih komponenata. Točno modeliranje lomnog i viskoelastičnog ponašanja polietilena osnova je za procjenu cjelovitosti cijevi, kao i za proces njihovog projektiranja i optimiranja [2, 3].

Budući da su polietilenske cijevi najčešće opterećene na puzanje, prikazani rad odnosi se na numeričko modeliranje mehanizma puzanja i loma pri sporom širenju pukotine [5]. Numerički algoritmi za analizu pukotina u metalnim materijalima u novijoj literaturi primjenjuju se za modeliranje pukotina u polimerima, izraz za računanje J -integrala može se koristiti za računanje C -integrala, ako deformaciju zamijenimo s brzinom deformacije [5, 6]. Prikazana istraživanja se vrše u cilju razvoja novog algoritma za izračunavanje parametara mehanike loma i modeliranja mehanizama puzanja u polietilenu primjenom realnog materijalnog modela.

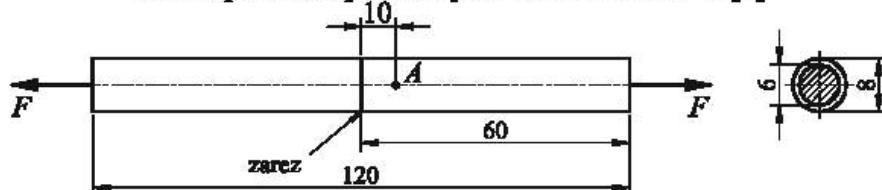
2 KONSTITUTIVNI MODEL MATERIJALA

Ponašanje polietilena je izrazito nelinearno i vremenski ovisno. Za modeliranje vremenski ovisnog elastoplastičnog ponašanja polietilena i što točnije određivanje parametara materijala potrebno je provesti eksperiment statičkog-vlačnog pokusa pri različitim brzinama deformiranja, na standardnoj epruveti za ispitivanje polimera prema standardu EN ISO 527-2 [1] prikazanoj na sl. 1. Osim toga, za određivanje parametara materijala u konstitutivnom modelu koji spreže lomno ponašanje polietilena s vremenski ovisnim puzanjem materijala uobičajeno se u literaturi provode eksperimenti puzanja na vlačno opterećenim osnosimetričnim epruvetama sa zarezom [2, 3]. U okviru eksperimenata koji se provode u Laboratoriju za eksperimentalnu mehaniku Sveučilišta u Zagrebu primjenjuju se epruvete duljine 120 mm i promjera 8 mm s potpunim obodnim zarezom (*Full Notched Crack Tensile (FNCT) specimen*) (sl.

2) dubine 1 mm i radius vrha zareza oko 10 μm . Pritom se epruveta najprije opterećuje vlačnom silom do iznosa koji odgovara naprezanju u najmanjem presjeku σ_{sa} od 8 MPa. Nakon toga se opterećenje drži konstantno i mjeri deformacija uslijed puzanja materijala epruvete. Eksperiment se provodi na temperaturi od 80°C.



Sl. 1. Epruveta tipa 1BA prema EN ISO 527-2 [1]



Sl. 2. Osnosimetrična epruveta s potpunim obodnim zarezom (Full Notched Crack Tensile (FNCT) specimen) [2, 3]

Kako se opisani eksperimenti još uvijek provode, zajedno s određivanjem parametara materijala u konstitutivnim relacijama, podaci za nelinearno vremenski ovisno i lomno ponašanje polietilena srednje gustoće korišteni u ovom radu preuzeti su iz literature [2, 3].

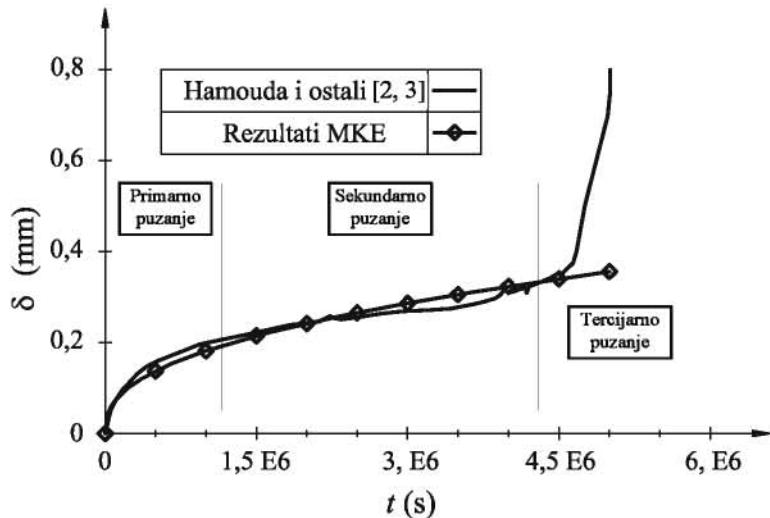
Dijagram međusobne ovisnosti pomaka δ , točke A (sl. 2) uslijed puzanja polietilena o vremenu t prikazan je na sl. 3. Na dijagramu se razlikuju tri karakteristična područja koji definiraju: primarno, sekundarno i tercijarno puzanje. U primarnom području promjena pomaka s vremenom kontinuirano opada. Za vrijeme sekundarnog puzanja promjena pomaka s vremenom je konstantna što odgovara stacionarnom puzanju, dok u tercijarnom puzanju pukotina propagira kroz preostali ligament epruvete sve do potpunog loma.

Na osnovi prikazanih eksperimentalnih rezultata, predložen je primarno-sekundarni zakon puzanja kako slijedi:

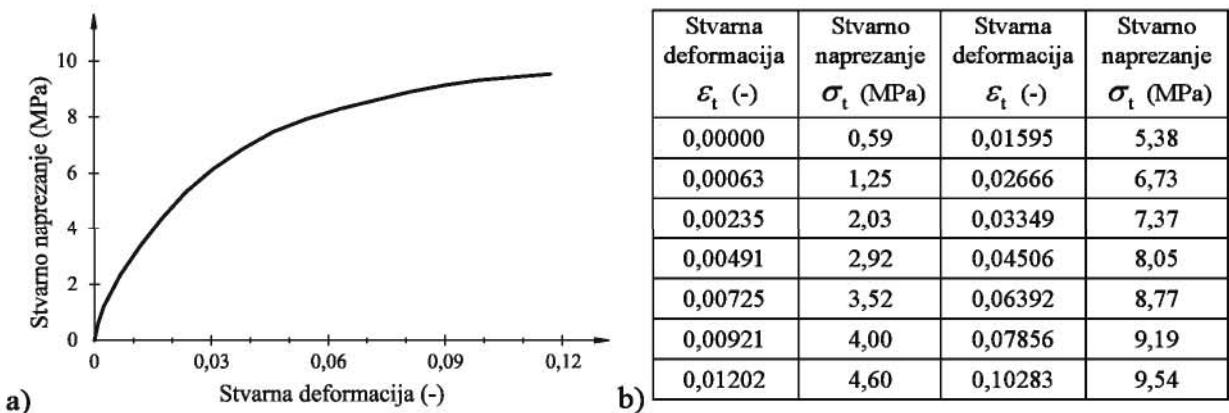
$$\dot{\varepsilon}_0 = B_1 \cdot p \cdot t^{(p-1)} \cdot \sigma^n + B_2 \cdot \sigma^n, \quad (1)$$

gdje je $\dot{\varepsilon}_0$ je brzina deformacije puzanja, σ je ekvivalentno Von Misesovo naprezanje, a parametri materijala dobiveni su aproksimacijom krivulje sa sl. 3: $B_1 = 5,73 \cdot 10^{-9}$, $B_2 = 1,13 \cdot 10^{-12}$, $p = 0,41$, $n_1 = 5,81$ i $n_2 = 6,1$.

Sl. 4a prikazuje nelinearno elastoplastično ponašanje razmatranog polietilena u obliku krivulje stvarno naprezanje-deformacija. Vrijednosti stvarnih naprezanja i deformacija primjenjenih u numeričkoj analizi prikazane su na sl. 4b. Budući da je provedena analiza velikih deformacija, nakon vrijednosti od 11% pretpostavljeno je idealno plastično ponašanje materijala.



Sl. 3. Dijagram međusobne ovisnosti pomaka točke A uslijed puzanja materijala i vremena pri 60°C za $\sigma_{\text{net}} = 8 \text{ MPa}$ [2, 3]



Sl. 4. a) Krivulja stvarno naprezanje-deformacija i b) vrijednosti stvarnih naprezanja i deformacija [2, 3]

3 NUMERIČKO MODELIRANJE MEHANIZMA PUZANJA

Za izračunavanje C -integrala u ABAQUS/Standard-u [4] za eksponencijalni zakon puzanja, što je slučaj kod metala, postoji ugrađena rutina. No za prikazani primarno-sekundarni zakon puzanja za polietilen srednje gustoće opisan jednadžbom (1), izračunavanje C -integrala zahtijeva primjenu korisničke rutine CREEP.

Za primjenu konstitutivnog modela u numeričkoj formulaciji, prikazane vremenski ovisne jednadžbe potrebno je zapisati u inkrementalnom obliku. Za poznate vrijednosti unutarnjih varijabli stanja sa kraja prethodnog vremenskog koraka t potrebno je odrediti njihove vrijednosti u trenutku $t + \Delta t$. U skladu s tim, inkrementalna forma zakona puzanja definiranog jednadžbom (1) ima oblik:

$$\varepsilon_{c,t+\Delta t} = \varepsilon_{c,t} + \Delta \varepsilon_c, \quad (2)$$

$$\Delta \varepsilon_c = B_1 \cdot \sigma^{n_1} \cdot [t^{p_1} - (t - \Delta t)^{p_1}] \quad \text{za } t \leq t_{fp}, \quad (3)$$

$$\Delta \varepsilon_c = B_2 \cdot \sigma^{n_2} \cdot \Delta t \quad \text{za } t > t_{fp}, \quad (4)$$

gdje je vrijeme prijelaza između primarnog i sekundarnog puzanja t_{fp} dano izrazom:

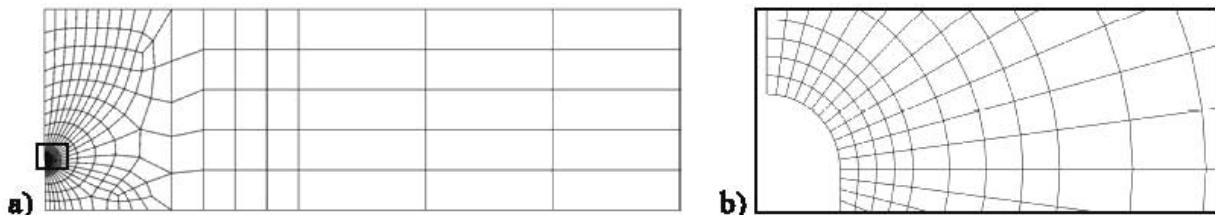
$$t_{fp} = \left(\frac{B_2}{p_1 B_1} \right)^{\frac{1}{n-1}} \sigma^{\left(\frac{n_2-n_1}{n-1} \right)}. \quad (5)$$

Konzistentni operator može se zapisati u obliku:

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon_c}{\partial \sigma} = \Delta \varepsilon_c \cdot \frac{n_1}{\sigma} \text{ za } t \leq t_{fp} \quad i \quad \frac{\partial \Delta \varepsilon_c}{\partial \sigma} = \Delta \varepsilon_c \cdot \frac{n_2}{\sigma} \text{ za } t > t_{fp}. \quad (6)$$

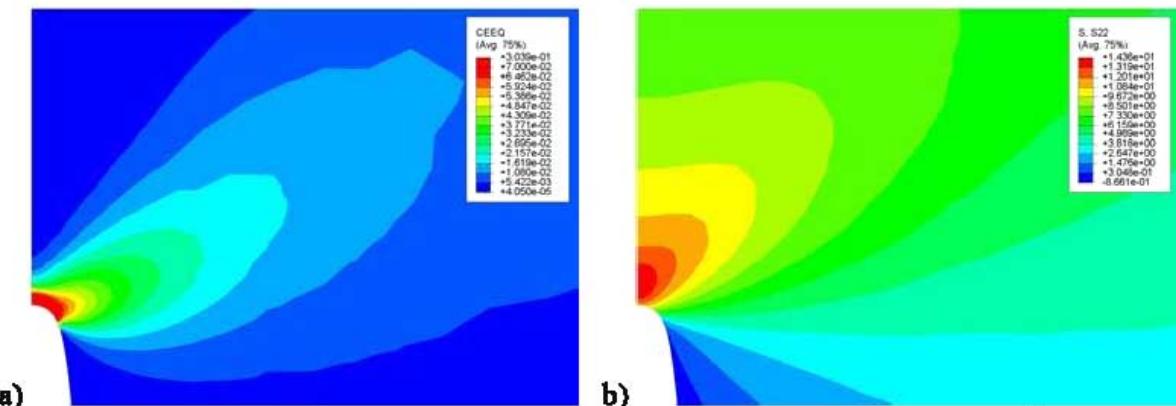
Prikazani algoritam implementiran je na nivou materijalne točke integracije konačnih elemenata programskog paketa ABAQUS [4] primjenom korisničke rutine CREEP.

Za verifikaciju prikazanog algoritma provedena je simulacija puzanja na FNCT epruveti. Tipična mreža konačnih elemenata korištena u analizi prikazana je na sl. 5a dok je usitnjena mreža u zaobljenom vrhu zareza dana na sl. 5b. Primjenom simetrije, modelirana je samo četvrtina epruvete. Za diskretizaciju epruvete korišten je osamčvorni osnosimetrični konačni element s reduciranjem integracijom (CAX8R). Dijagram međusobne ovisnosti pomaka točke A uslijed puzanja materijala i vremena u usporedbi s eksperimentalnim rezultatima [2, 3] dan je na sl. 3. Kao što je vidljivo sa slike dobiveno je vrlo dobro poklapanje numeričkih i eksperimentalnih rezultata.



Sl. 5. Mreža konačnih elemenata za FNCT epruvetu: a) cijela mreža i b) mreža u vrhu zareza

Na sl. 6 dan je prikaz deformacija i naprezanja u vrhu zareza nakon 10^5 s. Raspodjela ekvivalentne deformacije od puzanja prikazana je na sl. 5a, a raspodjela maksimalnog glavnog naprezanja σ_{22} dana je na sl. 5b.



Sl. 6. Prikaz raspodjele deformacija i naprezanja u vrhu zareza nakon 10^5 s:
a) ekvivalentna deformacija od puzanja i b) naprezanje σ_{22} (MPa)

4 C-INTEGRAL

Točnije opisivanje stanja naprezanja i deformacije u vrhu pukotine osnova je za efikasno određivanje stacionarnog C^* -integrala koji je definiran kao linjski integral, zamjenom deformacije s brzinom deformacije u izrazu za J -integral, u obliku [5]

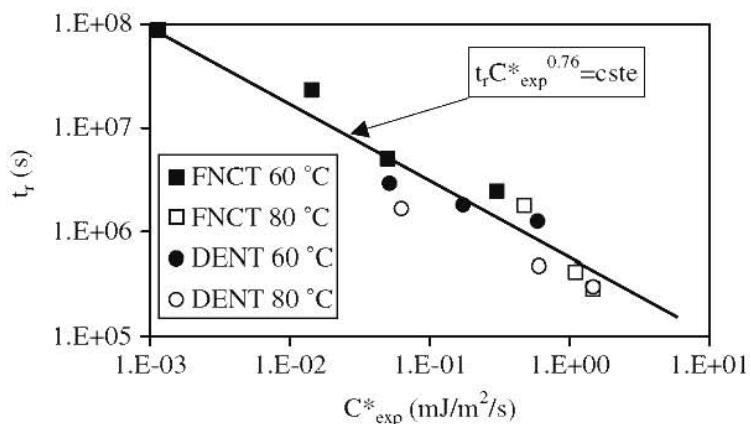
$$C^* = \int_{\Gamma} \left(\dot{W} dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds, \quad (7)$$

gdje Γ označava konturu integrala (integral je potrebno računati blizu vrha pukotine tako da je brzina elastične deformacije mala u odnosu na brzinu deformacije puzanja), u_i su komponente vektora pomaka, T_i su komponente vektora razvlačenja na ds , x i y su pravokutne koordinate i ds je inkrement duljine na konturi integrala Γ . U jednadžbi (7), \dot{W} je brzina gustoće energije deformiranja koja je definirana izrazom

$$\dot{W} = \int_0^{\dot{\varepsilon}_ij^c} \sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij}^c, \quad (8)$$

gdje je σ_{ij} naprezanje i $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$ brzina deformacije puzanja.

Procjena cjelevitosti polimernih konstrukcija provodi se na sličan način kao i kod metala. Parametar mehanike loma koji određuje radni vijek polimerne konstrukcije je stacionarni C^* -integral. Dijagram procjene cjelevitosti konstrukcije (*Failure Assessment Diagram - FAD*) za polietilen srednje gustoće u ovisnosti o stacionarnom C^* -integralu i vremenu do loma t_r predložen je u literaturi [2, 3] (sl. 7).



Sl. 7. Dijagram procjene cjelevitosti FNCT epruvete od polietilena srednje gustoće [2, 3]

Približni izraz za određivanje stacionarnog C^* -integrala za promatranu FNCT epruvetu dobiven na temelju eksperimenata glasi [2, 3]:

$$C^* = \left(\frac{n_2 - 1}{n_2 + 1} \right) \frac{F \dot{\delta}}{2\pi R^2}, \quad (9)$$

gdje je R radius preostalog ligamenta epruvete, F je opterećenje epruvete i $\dot{\delta}$ je eksperimentalno dobivena brzina puzanja povezana sa sekundarnim puzanjem [2, 3]. Određivane su vrijednosti C^* -integrala metodom konačnih elemenata, koristeći prikazani integracijski algoritam, na pet kontura oko vrha zareza, a rezultati za prvu konturu (najbližu vrhu zareza) su odbačeni i uzeta je srednja vrijednost preostalih četiriju kontura.

Za zadane vrijednosti: $F = 226,2 \text{ N}$, $\dot{\delta} = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ mm/s}$ i $t = 4 \cdot 10^6 \text{ s}$ izračunata je vrijednost C^* -integrala koristeći izraz (9) $C^*_{exp} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ kJm}^{-2}\text{s}^{-1}$, a C^* -integral dobiven metodom konačnih elemenata iznosi $C^*_{MKE} = 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ kJm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Usporedbom rezultata možemo vidjeti relativno dobro poklapanje rezultata.

Plan dalnjih istraživanja je primjena metode referentnog naprezanja za određivanje C^* -integrala. Pritom će se primijeniti analogija između plastičnosti i puzanja, na način da deformaciju zamjenimo s brzinom deformacije pa izraz za C^* -integral glasi [5]

$$C^* = \left(\frac{E}{E'} \right) \frac{K^2 \dot{\varepsilon}_c}{\sigma_{ref}}. \quad (10)$$

5 ZAKLJUČAK

U radu je dan prikaz istraživanja koja se vrše u cilju razvoja efikasnog algoritma za izračunavanje parametara mehanike loma i modeliranja mehanizama puzanja u polietilenu srednje gustoće primjenom realnog materijalnog modela. Prikazan je konstitutivni model koji spreže mehanizme elastoplastičnosti i puzanja. Izведен je algoritam na razini točke integracije konačnog elementa za integriranje vremenski ovisnih konstitutivnih relacija te je implementiran u programski paket ABAQUS. Usporedbom s eksperimentalnim rezultatima iz literature provjerena je točnost izvedenog algoritma [7]. Na primjeru FNCT epruvete prikazana je usporedba vrijednosti C -integrala dobivena eksperimentalno i numerički primjenom izvedenog algoritma. Daljnja istraživanja usmjerena su na provedbu eksperimentata te izvođenje nove metode za procjenu C -integrala za cijev s pukotinom opterećenu unutarnjim tlakom.

Literatura:

- [1] EN ISO 527-2:1993 Plastics -- Determination of tensile properties -- Part 2: Test conditions for moulding and extrusion plastics.
- [2] Hamouda, H.B.H., Laiarinandrasana, L., Piques, R., "Fracture mechanics global approach concepts applied to creep slow crack growth in a medium density polyethylene (MDPE)", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 74, 2007, str. 2187-2204.
- [3] Hamouda, H.B.H., Laiarinandrasana, L., Piques, R., "Viscoplastic behaviour of a medium density polyethylene (MDPE): Constitutive equations based on double nonlinear deformation model", International Journal of Plasticity, Vol. 23, 2007, str. 1307-1327.
- [4] Hibbit, Karlsson & Serensen, Inc., ABAQUS/Standard, Version 6.9, 2010.
- [5] Kim, Y.-J., Kim, J.-S., Huh, N.-S., Kim, Y.-J., "Engineering C-integral estimates for generalised creep behaviour and finite element validation", International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 79, 2002, str. 427-443.
- [6] Lu, X., Brown, N., "The transition from ductile to slow crack growth failure in a copolymer of polyethylene", Journal of Materials Science, Vol. 25, 1990, str. 411-416.
- [7] Skozrit, I., Tonković, Z., "On Numerical Analysis of Creep Fracture Behaviour of Medium Density Polyethylene", Key Engineering Materials, Vol. 417-418, 2010, str. 233-236.

Autori:

Ivica Skozrit, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 616 8115, fax. 01 616 8187, e-mail: ivica.skozrit@fsb.hr, web stranica: www.fsb.hr/lnm/staff/skozrit

Zdenko Tonković, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 616 8450, fax. 01 616 8187, e-mail: ztonkov@fsb.hr, web stranica: www.fsb.hr/lnm/staff/tonkovic

NUMERIČKA SIMULACIJA OŠTEĆENJA ZAKRILCA PUTNIČKOG AVIONA OPTEREĆENOGL UDAROM PTICE

Smojver, I., Ivančević, D.

Sažetak: U ovom radu dan je primjer primjene suvremenih numeričkih pristupa u rješavanju problema određivanja oštećenja složene zrakoplovne konstrukcije prilikom udara ptice. U tu svrhu korišten je program Abaqus/Explicit koji je pogodan za rješavanje nelinearnih dinamičkih problema primjenom eksplicitne numeričke integracije. Numerički proračun metodom konačnih elemenata primijenjen je na vrlo detaljnog modelu zakrilca koji se sastoji od *sandwich* konstrukcija, te dijelova izrađenih od različitih aluminijskih legura i kompozitnih materijala. Pri modeliranju korišteni su trodimenzionalni, ljskasti i trodimenzionalni ljskasti elementi, a za spajanje u jedinstven model konačnih elemenata korištene su odgovarajuće kinematske veze. Modeliranje ptice izvršeno je primjenom spregnutog Euler-Lagrange (*Coupled Eulerian Lagrangian - CEL*) pristupa kako bi se izbjegle numeričke poteškoće sa distorzijom konačnih elemenata modela ptice. Konstitutivni model materijala ptice odabran je u skladu s uobičajenim aproksimacijama u numeričkom modeliranju udara ptice. Materijalni modeli zakrilca uključuju razne načine popuštanja poput oštećenja matrice i vlakna kompozitnih materijala, popuštanje jezgre *sandwich* konstrukcije i elastoplastično ponašanje aluminijskih legura sa kriterijem maksimalno dopuštene plastične deformacije.

Ključne riječi: Zrakoplovne konstrukcije, kompozitni materijali, udar ptice, mehanika oštećenja

1 UVOD

Točnost numeričkih simulacija, a i eksperimenata, udara ptice ovisi o fizikalno točnom modeliranju ponašanja udarača. Prilikom udara velikom brzinom, u materijalu ptice se pojavljuju naprezanja koja su znatno veća od čvrstoće materijala, što dovodi do tečenja materijala ptice, pri čemu se njegova čvrstoća može zanemariti. Ta činjenica svrstava udar ptice u skupinu udara mekih tijela. Velike deformacije materijala ptice mogu izazvati numeričke probleme ako se za diskretizaciju ptice primijene standardni konačni elementi. Konvencionalna Lagrangeova formulacija konačnih elemenata je nepodobna za diskretizaciju udarača jer velika distorzija konačnih elemenata ptice drastično smanjuje stabilni vremenski korak integracije eksplicitnih metoda integracije što napoljetku može dovesti i do prekida analize. Unatoč navedenim problemima ovaj pristup je primijenjen u [2], [4], i [5].

Pristup predstavljen u ovom radu temelji se na radu prikazanom u [5]. U odnosu na [5] poboljšano je modeliranje udarača uz primjenu spregnutog Euler-Lagrange pristupa kojeg pruža Abaqus/Explicit. Time se poboljšala numerička stabilnost analiza i fizikalno ponašanje udarača prilikom udara. Prednost CEL analiza u odnosu na konvencionalnu Lagrangeovu formulaciju je da se problemi povezani sa distorzijom konačnih elemenata ptice izbjegavaju korištenjem Eulerove formulacije za model ptice. Modelom konačnih elemenata se tada diskretizira prostor u kojemu teče Eulerov materijal. Pri tome je mreža konačnih elemenata fiksna u prostoru, a materijal prolazi

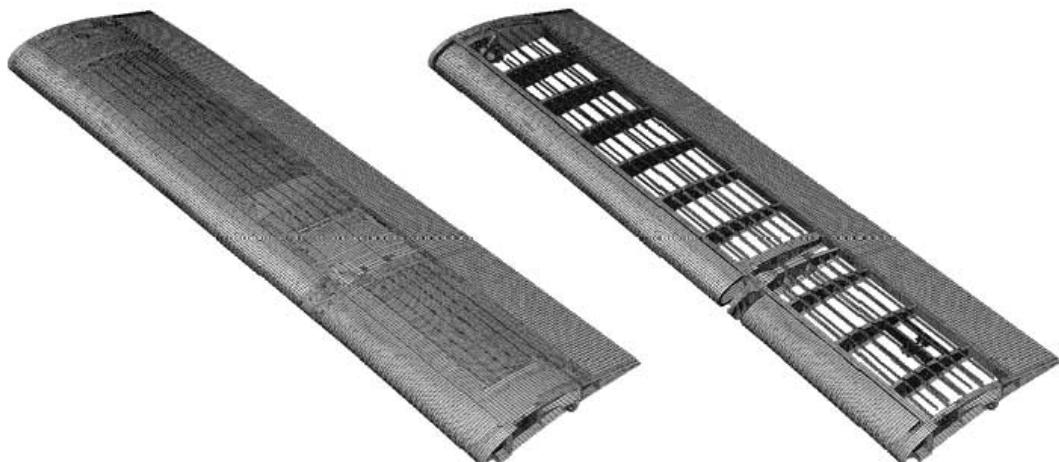
kroz mrežu. Model zakrilca je u CEL analizama diskretiziran standardnim konačnim elementima, a pri prenošenju sila s modela udarača na metu koriste se kontaktni algoritmi. Pri tome se kontakt ostvaruje samo sa Eulerovim materijalom, a ne sa ostatom mreže Eulerovih elemenata.

2 NUMERIČKI MODEL

2.1 Model konačnih elemenata zakrilca

Nosivu konstrukciju unutarnjeg zakrilca čine 3 ramenjače – prednja, stražnja i pomoćna, te 14 rebara. Ovi dijelovi konstrukcije izrađeni su od različitih aluminijskih legura (Al 2024-T42, Al 7050-T7451 i Al 7075-T7351), dok je oplata izrađena od ugljičnim vlaknima ojačane epoksidne smole, te je i dodatno ojačana sa ukupno deset uzdužnica od čega se šest uzdužnica nalazi na gornjoj, a četiri na donjoj oplati. Napadni i izlazni rubovi izvedeni su kao *sandwich* konstrukcije čija je jezgra napravljena od Nomex-a. Oplata *sandwich* napadnog ruba napravljena je od ugljičnim vlaknima ojačane epoksidne smole, dok je oplata *sandwich* konstrukcije izlaznog ruba napravljena od legure Al 2024-T42.

Veliki dio geometrije zakrilca pogodan je za diskretizaciju dvodimenzionalnim ljkastim konačnim elementima (označeni kao S4R i S3R u Abaqusu). Napadni i izlazni rubovi, koji su izvedeni kao *sandwich* konstrukcije, su zbog relativno velike debljine takvih konstruktivnih elemenata diskretizirani pomoću trodimenzionalnih konačnih elemenata. Tanki slojevi oplate *sandwicha* diskretizirani su trodimenzionalnim ljkastim elementima (SC8R) koji koriste formulaciju sličnu običnim ljkastim elementima. Jezgra *sandwich* konstrukcija diskretizirana je pomoću standardnih trodimenzionalnih elemenata (C3D8R). Budući da trodimenzionalni elementi imaju samo translacijske stupnjeve slobode gibanja, a dvodimenzionalni ljkasti elementi imaju i translacijske i rotacijske stupnjeve slobode gibanja, potrebno je koristiti kinematske veze kako bi se opterećenje momentima ispravno prenijelo na trodimenzionalne elemente. Ukupan broj konačnih elemenata je 109585 od kojih su 69696 dvodimenzionalni ljkasti elementi, 16020 trodimenzionalni ljkasti elementi i 23665 trodimenzionalnih elemenata. Nadalje, pomoću 204 gredna konačna elementa modelirana su ojačanja prednje ramenjače. Slikom 1 prikazana je mreža konačnih elemenata zakrilca.



Sl. 1. Mreža konačnih elemenata zakrilca, sa prikazanom oplatom (lijevo) i bez oplate (desno)

2.2 Konstitutivni modeli i modeli oštećenja za kompozitne materijale

Oštećenje kompozitnih dijelova konstrukcije zakrilca izvedeno je korištenjem Abaqus-ovog modela popuštanja za jednousmjerene kompozitne materijale [1]. Ovaj model temeljen je na Hashinovom kriteriju popuštanja, te je moguće razlikovati četiri načina popuštanja: pucanje vlakna pri vlačnom opterećenju, izvijanje ili pucanje vlakna pri tlačnom opterećenju, pucanje matrice prilikom vlačnog i sмиčnog opterećenja te pucanje matrice uslijed tlačnog i sмиčnog opterećenja. Mehanička svojstva ugljičnim vlaknima ojačane epoksidne smole preuzeta su iz [6]. Oštećenje se simulira pomoću parametara oštećenja koji smanjuju odgovarajuće članove matrice elastičnosti. Parametri oštećenja vlakna (d_f), matrice (d_m) i sмиčni parametar oštećenja (d_s) odražavaju trenutno stanje oštećenosti materijala i poprimaju vrijednosti od 1 za neoštećeni materijal do 0 za potpuno oštećeni materijal. Matrica elastičnosti koja uzima u obzir i parametre oštećenja ima oblik

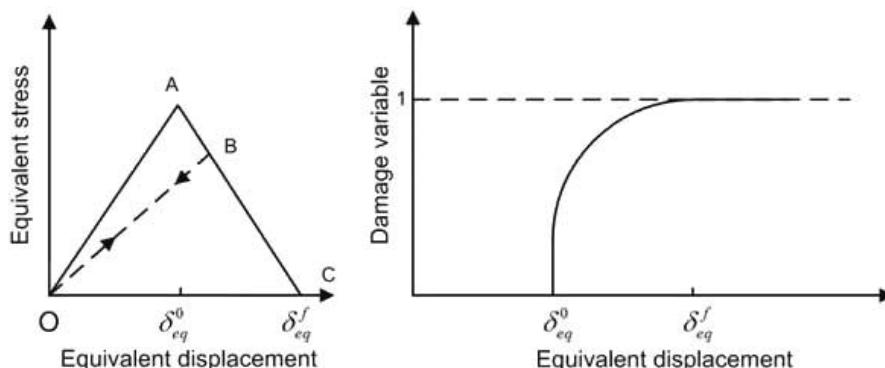
$$\mathbf{C}_d = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} (1-d_f)E_1 & (1-d_f)(1-d_m)\nu_{21}E_1 & 0 \\ (1-d_f)(1-d_m)\nu_{12}E_2 & (1-d_m)E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-d_s)G_{12}D \end{bmatrix}, \quad (1)$$

gdje je $D = 1 - (1-d_f)(1-d_m)\nu_{12}\nu_{21}$. E_1 , E_2 , G_{12} , ν_{12} , i ν_{21} su konstante elastičnosti jednousmjerensih slojeva u njihovom glavnom materijalnom koordinatnom sustavu.

Kako bi se izbjegla ovisnost smanjivanja svojstava materijala o gustoći mreže konačnih elemenata uvedena je formulacija na temelju ekvivalentnih vrijednosti pomaka. Linearno elastično ponašanje koje prethodi nastanku oštećenja prikazano je linijom sa pozitivnim nagibom (OA) na lijevom dijagramu slike 2. Kada je ispunjen kriterij popuštanja, započinje faza oštećivanja, koja je prikazana linijom sa negativnim nagibom (AC) na lijevom dijagramu slike 2. Rasterećenje i ponovno opterećenje nakon nastupanja oštećenja prikazano je linijom OB odnosno BO na lijevom dijagramu slike 2. Površina ispod trokuta OAC jednaka je energiji potrošenoj na oštećenje. Nakon nastanka oštećenja parametri oštećenja mijenjaju se prema izrazu

$$d = \frac{\delta_{eq}^f (\delta_{eq}^f - \delta_{eq}^0)}{\delta_{eq}^f (\delta_{eq}^f - \delta_{eq}^0)}, \quad (2)$$

gdje je sa δ_{eq}^0 označen ekvivalentni pomak pri nastanku oštećenja, a δ_{eq}^f je ekvivalentni pomak pri kojemu je materijal u potpunosti oštećen po pojedinom načinu popuštanja. Jednadžba (2) je grafički prikazana na desnom dijagramu slike 2.



Sl. 2. Dijagram naprezanje – ekvivalentni pomak (lijevo); ovisnost parametara oštećenja o ekvivalentnom pomaku (desno)

Ukoliko u nekom elementu sve materijalne točke dosegnu kritičnu vrijednost oštećenja za načine popuštanja povezane sa oštećenjem vlakna, vrijednosti se postavljaju na nulu i dolazi do "brisanja" elementa iz mreže konačnih elemenata. Provjera valjanosti opisanog modela za oštećenja kompozitnih laminata pri udarnom opterećenju opisana je u [5].

2.3 Coupled Eulerian Lagrangian (CEL) modeliranje udara ptice

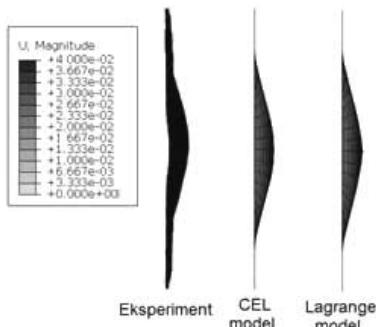
Model konačnih elemenata ptice u CEL analizama obično predstavlja stacionaran volumen u obliku kocke kroz koji se kreće materijal ptice i udara u mrežu Lagrange-ovih konačnih elemenata. Za CEL analize Abaqus koristi posebne (Eulerove) EC3D8R trodimenzionalne konačne elemente koji mogu biti potpuno ili djelomično popunjeni materijalom ptice. Ostatak mreže Euler-ovih konačnih elemenata popunjen je takozvanim prazninskim (*void*) materijalom, a praćenje kretanja materijala ptice unutar mreže Eulerovih konačnih elemenata postiže se računanjem omjera popunjenošću pojedinog elementa materijalom ptice - *Eulerian Volume Fractions* - EVF. Ukoliko je vrijednost EVF-a jednaka 1, konačni element je u potpunosti popunjen materijalom ptice a potpuno prazan konačni element poprima vrijednost EVF-a jednaku nuli. Granica materijala se u CEL analizama mora računati za svaki vremenski korak eksplicitne integracije, a ni u jednom trenutku se ta granica ne mora poklapati sa geometrijom mreže Euler-ovih konačnih elemenata. Inicijalno "popunjavanje" mreže Eulerovih konačnih elemenata materijalom ptice postiže se pomoću tzv. programa za računanje volumnih udjela (*Volume Fraction Tool*) koji je ugrađen u pretprocesor Abaqus/CAE.

Uobičajene pretpostavke koje se koriste u numeričkim analizama problema udara ptice primjenjene su i u ovom radu. Geometrija ptice je aproksimirana valjkom sa polukuglastim završetcima i odnosom duljine i promjera jednakim 2. Prema [2], ovakav oblik geometrije zamjenskih ptica u eksperimentalnim ispitivanjima najbolje oponaša vremensku promjenu tlakova prilikom udara pravih ptica. Konstitutivni model ptice opisan je pomoću jednadžbe stanja - *Equation of State* - EOS materijala. Svojstva ovog materijala slična su vodi, budući da se materijal pravih ptica sastoji većinom od vode i zraka u šupljim kostima i plućima. Kako bi se u obzir uzeo utjecaj zarobljenog zraka, gustoća zamjenskog materijala je smanjena na 938 kg/m^3 , prema [2]. Svojstva vode za Mie-Grueneisen jednadžbu stanja preuzeta su iz [3]. Materijalni model ptice korišten u ovom radu provjeren je u usporedbi sa dostupnom literaturom o udarima na krutu ploču, kako je opisano u [5].

2.4 Usporedba CEL i Lagrange modela ptice

Model CEL ptice korišten radu verificiran je u usporedbi sa eksperimentalnim podacima ([7]) udara ptice u aluminijsku ploču. Ptice mase 1.81 kg (4 lb) su ispaljene na ploče izrađene od Al 6061-T6. Aluminijска ploča ima dimenzije 550 x 550 x 6.35 mm, a pričvršćena je pomoću šest vijaka za potporni okvir koji ima otvor promjera 0.4064 m. Potporni okvir zamijenjen je rubnim uvjetima koji sprječavaju translacijske stupnjeve slobode gibanja u smjeru kretanja udarača svim čvorovima izvan polumjera otvora potpornog okvira. Dodatno je 6 čvorova uklješteno kako bi se simulirao utjecaj vijaka kojima je ploča spojena za okvir. Dimenzije volumena Euler-ovih elemenata su 1.4 x 1.4 x 0.5 m te sadrži ukupno 980000 elemenata.

Usporedba CEL i Lagrange modela ptice prikazan je slikom 3. Eksperimentalno izmjerena maksimalna vrijednost progiba pri brzini udara od 145.7 m/s je 41.3 mm. Numerički izračunate vrijednosti iznose 40.7 mm za Lagrange pticu i 38.54 mm za CEL pticu. Unatoč činjenici da je vrijednost najvećeg progiba pri korištenju Lagrangeove ptice bliža eksperimentalnim vrijednostima, raspodjela pomaka i oblik deformirane ploče je sličniji rezultatima eksperimenta pri korištenju CEL modela. Realniji oblik deformirane ploče je posljedica fizikalno poboljšanog modeliranja tečenja materijala ptice pri udaru.



Sl. 3. Usporedba oblika deformirane ploče [m].

3. ANALIZA I REZULTATI

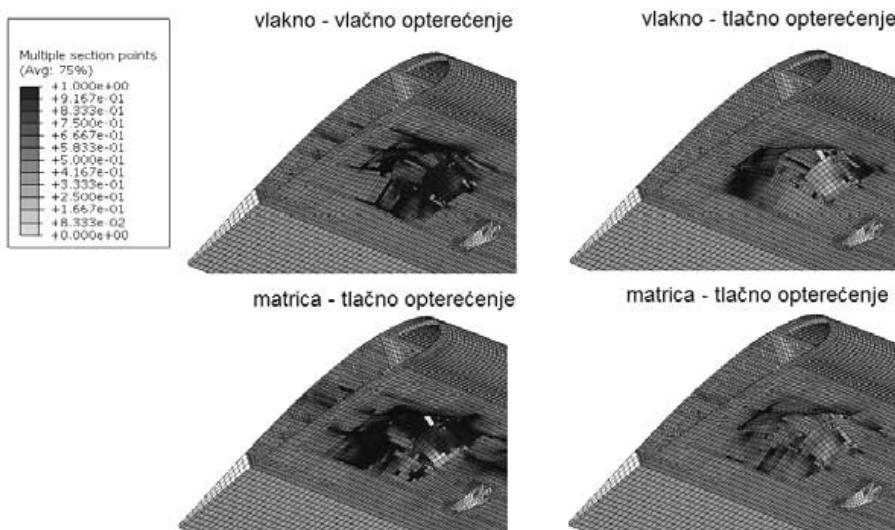
Mogućnosti numeričkog modela za simulaciju oštećenja na realnim zrakoplovnim konstrukcijama za potrebe ovog rada pokazane su na simulaciji udara ptice mase 1.81 kg u područje zakrilca koje je najvjerojatnije izloženo udaru ptice, pri uobičajenim parametrima leta putničkog aviona u fazi slijetanja. Masa od 1.81 kg odabrana je jer prema FAR 25.571 zakrilci putničkih aviona moraju izdržati udar takve ptice u normalnim operativnim uvjetima bez ugrožavanja sigurnosti leta.

Materijal ptice se u ovom primjeru nalazi u volumenu dimenzija $1 \times 1 \times 0.6$ m koji sadrži 600000 Eulerovih elemenata. Kompozitna ploča u području udara sastoji se od 20 jednouzmjerenih slojeva ukupne debljine 2.5 mm. Slikom 4 prikazane su konture Hashinovih kriterija popuštanja donje oplate zakrilca. Kinetička energija ptice je za odabране početne uvjete dovoljna za stvaranje vrlo ozbiljnih oštećenja konstrukcije zakrilca. Materijal ptice u potpunosti probija donju oplatu i zaustavlja se na gornjoj oplati. Unatoč probijanju donje oplate može se pretpostaviti da ovakav udar ptice ne bi ugrožavao sigurnost aviona, budući da glavni nosivi elementi, rebra i ramenjače, nisu oštećeni prilikom udara. Kako bi se potvrdila ova pretpostavka potrebno je u analizi uzeti u obzir aerodinamičko opterećenje i utvrditi da li oštećena konstrukcija zakrilca može izdržati takvo „statičko“ opterećenje. Ovaj pristup je trenutno razmatran u dalnjem razvoju metodologije.

4. ZAKLJUČAK

Rad prikazuje numeričku simulaciju oštećenja realne konstrukcije zakrilca velikog putničkog aviona. U odnosu na prethodne rezultate, opisane u [5], glavni napredak učinjen je u realnijem modeliranju ponašanja materijala ptice prilikom udara. Poboljšanje se postiglo zamjenom Lagrange modela konačnih elemenata za modeliranje ptice sa CEL pristupom. Osim u točnosti rezultata napredak je postignut i

u pogledu stabilnosti eksplisitne nelinearne dinamičke analize, budući da kod CEL analiza ne dolazi do distorzije konačnih elemenata ptice. Poboljšano modeliranje ponašanja ptice također poboljšava i odziv mete u koju udara ptica, kako je pokazano primjerom u poglavlju 2.4. Glavni nedostatak CEL analiza je povećano vrijeme računanja, koje ovisno o broju Eulerovih elemenata za analize udara u model zakrilca prelazi 24 sata na dvoprocesorskoj radnoj stanici sa ukupno 8 procesorskih jezgri. Za sličnu analizu sa Lagrange modelom ptice potrebno je približno 8 sati računanja.



Sl. 4. Konture Hashin-ovih kriterija popuštanja (poprečni presjek)

Literatura:

- [1] Abaqus Analysis User Manual, Version 6.8. Dassault Systèmes, 2008.
- [2] Airoldi, A., Cacchione, B., "Modelling of Impact Forces and Pressures in Lagrangian Bird Strike Analyses", International Journal of Impact Engineering, No. 32., 2006, str. 1651-1677.
- [3] Chizari, M., Barrett, L.M., Al-Hassani, S.T.S., "An Explicit Numerical Modelling of the Water Jet Tube Forming", Computational Materials Science, No. 45., 2009, str. 378-384.
- [4] Lavoie, M.A., Gakwaya, A., Nejad Ensan, M., Zimek, D.G., "Review of Existing Numerical Methods and Validation Procedure Available for Bird Strike Modelling", International Conference on Computational & Experimental Engineering and Sciences, 2007, str. 111-118.
- [5] Smoijver, I., Ivancevic, D., "Numerical Simulation of Bird Strike Damage Prediction in Airplane Flap Structure", Composite Structures, No. 92., 2010, str. 2016-2026.
- [6] Springer, G.S., "Mechanics of composite structures", Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [7] Welsh C.J., Centoze, V., "Aircraft Transparency Testing - Artificial Birds", Arnold Engineering Development Center, Report AEDC-TR-86-2, 1986.

Autori:

Ivica Smoijver, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za zrakoplovstvo, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 6168 267, fax 01 6168 267, e-mail: ismojver@fsb.hr, web stranica: <http://fsb.hr/aero/ismojver.htm>

Darko Ivančević, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za zrakoplovstvo, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 6168 260, e-mail: divancevic@fsb.hr

DIZAJN ROBUSNOG REGULATORA ZA SUSTAV AKTIVNOG MAGNETSKOG LEŽAJA

Štimac, G., Žigulic, R., Braut, S. & Skoblar, A.

Sažetak: Aktivni magnetski ležajevi (AML) predstavljaju moderno tehnološko rješenje za smanjenje vibracija kod rotacijskih strojeva, te pružaju mnoge prednosti u odnosu na konvencionalne ležajeve (nema trenja, niži troškovi održavanja, itd.). Oni su svojstveno nestabilni sustavi, a zbog složene dinamike gibanja između rotora i elektromagneta zahtjeva se kontinuirana aktivna regulacija položaja rotora. Osim toga, zatvoreni sustav mora biti robustan na različite nesigurnosti modela sustava, koje nastaju zbog neophodnog odstupanja stvarnog od matematičkog modela i na nepredvidive vanjske poremećaje. U ovom je radu izrađen matematički model aktivnog magnetskog ležaja u obliku linearног modela prostora stanja, na osnovu kojeg je razvijen robusni regulator primjenom H_{∞} metode. Model rotora, koji je smješten na aktivnim magnetskim ležajevima i pripadni regulacijski algoritam su implementirani u kompjuterski program MATLAB, gdje je provedena simulacija i dobiven odziv rotora.

Ključne riječi: magnetski ležaj, H_{∞} regulacija, simulacija

1 UVOD

Aktivni magnetski ležajevi (AML) osiguravaju beskontaktno pridržavanje osovine (rotora) temeljeno na principu elektromagnetske levitacije iz čega proizlaze njihove brojne prednosti u odnosu na konvencionalne ležajeve (rad bez zagađivanja, niski troškovi održavanja, niski toplinski gubici). Međutim, zbog složene dinamike gibanja između rotora i elektromagneta sustav AML je svojstveno nestabilan zbog čega se zahtjeva kontinuirana aktivna regulacija položaja rotora. S obzirom da standardne regulacijske metode ne uzimaju u obzir sve faktore koji utječu na ponašanje rotora sve se veća pažnja posvećuje primjeni robusnijih regulacijskih metoda (LQG, H_{∞} , μ -synthesis) [1].

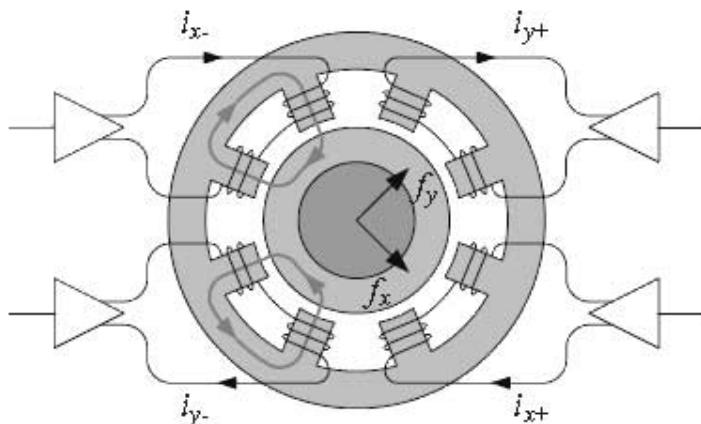
60-ih godina prošlog stoljeća, kada se prvi put javlja LQG (Linear Quadratic Gaussian) regulacijska metoda, s kojom se postiže kvalitetna regulacija sustava s dobro poznatom dinamikom, započinje primjena naprednijih regulacijskih metoda u prostoru stanja i na sustav AML [2-6]. Pri tome je učinkovitu nadogradnju LQG metode predstavljala H_{∞} metoda, koja osigurava robusnost i u slučaju nedovoljno poznate dinamike ili karakteristika sustava te postizanje dobrih robusnih svojstava unatoč vanjskim poremećajima i nesigurnostima sustava [7].

U ovom je radu implementiran H_{∞} regulacijski algoritam na AML sustav. Na osnovi matematičkog modela prostora stanja AML, koji uzima u obzir mehanička i električna svojstva sustava, izrađen je H_{∞} regulator odabirom prikladnih težinskih funkcija. Učinkovitost dobivenog regulatora je provjerena praćenjem odziva sustava na nekoliko

jednostavnijih vrsta uzbudnih sila. Implementacija regulacijskog algoritma i sve simulacije provedene su u kompjuterskom programu Matlab.

2 MODEL AML

U ovom je poglavlju iznesen model prostora stanja tipičnog radijalnog magnetakog ležaja prikazan na slici 1, preuzetoj iz [8]. Razmatrani se sustav sastoji od feromagnetskog rotora i statora s osam elektromagnetskih polova podijeljenih u četiri elektromagneta. Takođe se strukturu prolaskom struje kroz zavojnici elektromagneta statora osigurava beskontaktna levitacija rotora u magnetskom polju.



Slika 1. 8-polni radijalni aktivni magnetski ležaj

Osnovni model AML slijedi iz Newtonovog zakona, koji za os x glasi

$$m\ddot{x} = f_x, \quad (1)$$

a koji definira dinamiku rotora u magnetskom polju, gdje je m koncentrirana masa rotora, $f_x = k_x x + k_i i$ linearna magnetska sila u smjeru osi x dobivena linearizacijom oko radne točke, x pomak rotora, i_x struja u zavojnici elektromagneta u smjeru osi x , k_x koeficijent sile-pomak i k_i koeficijent sile-struja [8]. Osnovni se model može proširiti uzimanjem u obzir električnih svojstava zavojnica elektromagneta (induktivitet L , otpor R) i napona pojačala u , odakle iz Kirchoffovog zakona proizlazi

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + k_u \frac{dx}{dt}, \quad (2)$$

gdje je $k_u dx/dt$ napon induciran u zavojnici elektromagneta kao poslijedica gibanja rotora u magnetskom polju statora, a k_u konstanta proporcionalnosti.

Iz jednadžbi (1) i (2), uz pretpostavku da je $k_u = k_i$, dobiva se model AML u obliku prostora stanja:

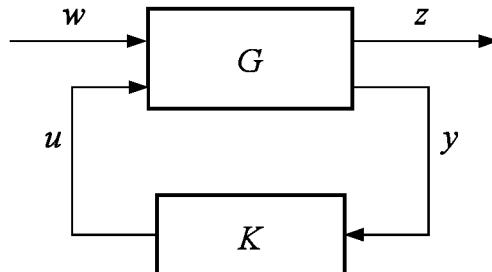
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k_x/m & 0 & k_i/m \\ 0 & -k_i/L & -R/L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0], \quad \mathbf{D} = [0] \quad , \quad (3)$$

gdje je $\mathbf{x} = [x \ v \ i]^T$ vektor stanja, $\mathbf{u} = [u]$ vektor ulaznih varijabli, \mathbf{y} vektor izlaznih varijabli.

3 STANDARDNI PRISTUP PRI DIZAJNU H_∞ REGULATORA

Vezano za H_∞ regulaciju, razmatrani se sustav može prikazati standardnim blok dijagramom danim na slici 2, gdje je K regulator, G proširen generalizirani sustav koji sadrži model sustava AML i sve težinske funkcije, w vektor signala vanjskih ulaza (poremećaji, šum senzora), z greška signala, y mjerene varijable i u regulacijski signal.



Slika 2. Generalizirani blok dijagram H_∞ regulacije

S obzirom da veza između ulaznih i izlaznih signala u sustav $\mathbf{G}(s)$ glasi

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

te da vrijedi relacija $\mathbf{u} = K(s) \mathbf{y}$ prijenosna funkcija zatvorenog sustava od vanjskih ulaza w prema vanjskim izlazima z glasi

$$\mathbf{T}_{zw} = \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{G}_{22} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{G}_{21}. \quad (5)$$

Cilj H_∞ regulacije je odrediti regulator $\mathbf{K}(s)$ koji će stabilizirati sustav $\mathbf{G}(s)$ na način da se minimizira greška z zbog vanjskih ulaza w , što se postiže minimiziranjem H_∞ norme dane prijenosne funkcije \mathbf{T}_{zw} ,

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty = \sup [\sigma_{\max}(\mathbf{G}(s))], \quad (6)$$

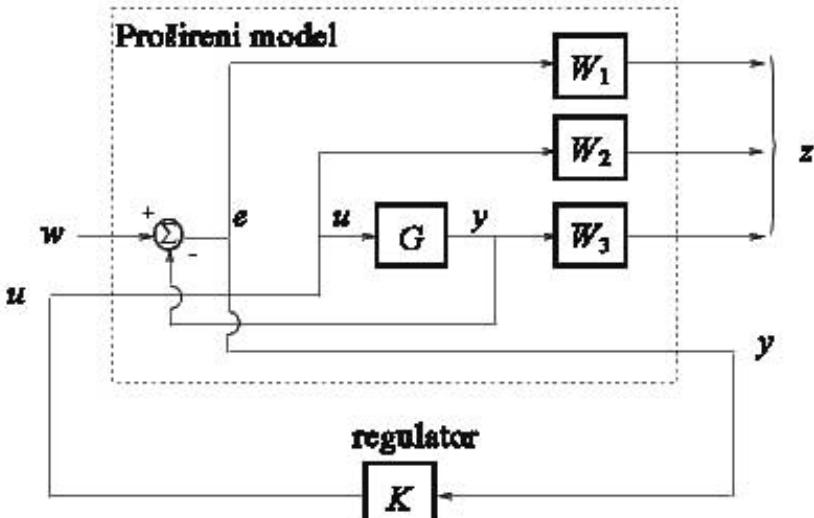
gdje je $\sigma_{\max}(\mathbf{G}(s))$ maksimalna singularna vrijednost prijenosne funkcije $\mathbf{G}(s)$.

4 REZULTATI SIMULACIJE

Problem H_∞ regulacije se može formulirati kao minimizacija funkcije

$$\mathbf{T}_{zw} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 R \\ W_3 T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 (I + GK)^{-1} \\ W_2 K (I + GK)^{-1} \\ W_3 GK (I + GK)^{-1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

gdje su W_1 , W_2 i W_3 težinske funkcije s kojima se proširuje osnovni model i omogućuju oblikovanje signala, $S = (I + GK)^{-1}$ funkcija osjetljivosti i $T = 1 - S = GK(I + GK)^{-1}$ komplementarna funkcija osjetljivosti [7]. Odabir težinskih funkcija za neki specifični sustav je veoma zahtjevan dio dizajna regulatora. Funkcija W_1 definira gornju granicu funkcije osjetljivosti S i vezana je za uklanjanje vanjskih poremećaja i smanjenje greške u ustaljenom stanju. Funkcija W_3 definira granicu komplementarne funkcije T te se odabire na način da smanjuje oscilacije sustava. Funkcijom W_2 se prigušuje šum i ubrzava odziv sustava. Prošireni model sa svim težinskim funkcijama je prikazan na slici 3.



Slika 3. Proširen model sustava s težinskim funkcijama

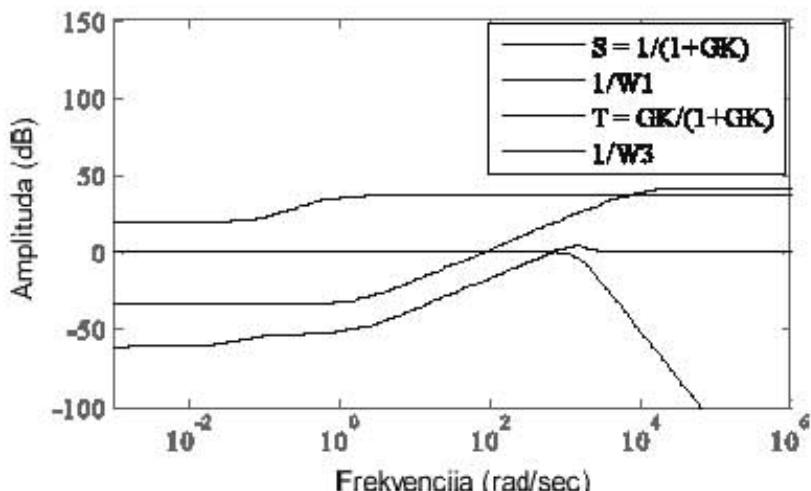
Regulator je dobiven na osnovu programskog koda izrađenog u kompjuterskom programu Matlab, primjenom naredbi iz Robust Control Toolbox, koji se temelji na Glover-Doyle algoritmu [9]. Algoritam rješava problem (7) i pronađe skup regulatora koji zadovoljavaju uvjet

$$\|T_{zw}\|_\infty < 1, \quad (8)$$

Simulacija je provedena primjenom standardne Matlab naredbe *hinfsyn*, za slijedeće vrijednosti karakteristika AML sustava (3): $m = 3.14$ kg, $k_l = 190$ N/A, $k_x = 0.68 \cdot 10^6$ N/m, $R = 0.57 \Omega$, $L = 26.48$ H. Nakon detaljnog podešavanja odabранe su slijedeće težinske funkcije:

$$W_1(s) = 0,008 \frac{s+10000}{s+1,67} \\ W_2(s) = 10^{-9} \\ W_3(s) = 0,014 \frac{s+0,67}{s+0,086} \quad (9)$$

Veza između težinskih funkcija te S i T funkcija dana je na slici 4.

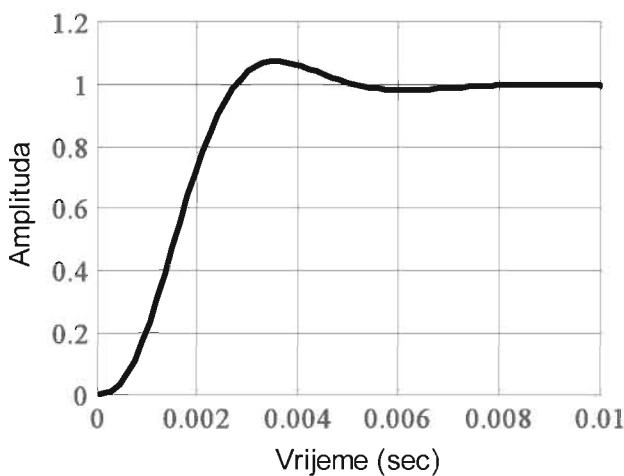


Slika 4. Veza između težinskih funkcija te S i T funkcija

Na slici 4. je vidljivo da se amplituda $S(s)$ funkcije nalazi ispod krivulje W_1^{-1} , a amplituda $T(s)$ funkcije ispod krivulje W_3^{-1} , čime je pokazano da se uz dobiveni regulator promatrani sustav može dovesti do stabilnosti. Prijenosna funkcija dobivenog H_∞ regulatora glasi:

$$H_\infty = \frac{-8,745 \cdot 10^{10} s^4 - 9,378 \cdot 10^9 s^3 - 1,898 \cdot 10^{16} s^2 - 2,034 \cdot 10^{15} s - 3,494 \cdot 10^{13}}{s^5 + 1647 s^4 + 1,57 \cdot 10^6 s^3 + 8,562 \cdot 10^8 s^2 + 1,67 \cdot 10^8 s + 4,062 \cdot 10^6} \quad (10)$$

Provjerom odziva zatvorenog sustava AML i H_∞ regulatora definiranog prijenosnom funkcijom (10) pokazano je da sustav postiže zadovoljavajući odziv na jednostavnije uzbude. Npr. u slučaju jedinične skokovite uzbude vrijeme porasta iznosi oko 0,0017s, a vrijeme ustaljivanja 0,0048s (slika 5). Međutim, u slučaju složenijih uzbuda potrebno je provesti dodatno podešavanje težinskih funkcija (9).



Slika 5. Odziv zatvorenog sustava na skokovitu uzbudu

5 ZAKLJUČAK

U ovom je radu implementiran H_∞ regulacijski algoritam na AML sustav. Regulator je izrađen u kompjuterskom programu Matlab primjenom standardne naredbe *hinfsyn* te iterativnim postupkom odabira i podešavanja težinskih funkcija kojima se omogućava oblikovanje signala.

Na osnovu analize odziva zatvorenog sustava na poremećajne sile pokazano je da je uz dani regulator odziv sustava AML zadovoljavajući, što je prikazano na primjeru skokovite uzbude. Međutim, u slučaju drugih vrsta uzbuda potrebno je provesti detaljnije podešavanje.

Literatura:

- [1] Zhou, K., Doyle, J.C., "Robust and Optimal Control", Prentice Hall New Jersey, 1995.
- [2] Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P., Francis, B.A., "State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.34, No.8, 1989, str. 831-847.
- [3] Kwakernaak, H., "Robust Control and H_∞ Optimization – Tutorial Paper", Automatica, Vol.29, No.2, 1993, str. 255-273.

- [4] Gosiewski, Z., Mystkowski, A., "Robust Control of Active Magnetic Suspension: Analytical and Experimental Results", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.22, No.1, 2008, str. 1297-1303.
- [5] Jastrzebski R.P., Hynnen, K.M., Smirnov, A., " H_∞ Control of Active Magnetic Suspension", Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.24, No.1, 2010, str. 995-1006.
- [6] Nonami, K., Ito T., " μ Synthesis of Flexible Rotor-Magnetic Bearing Systems", IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol.4, No.5, 1996, str. 503-512. ¶
- [7] Skogestad, S., Postlethwaite I., "Multivariable Feedback Control – Analysis and Design", John Wiley & Sons New York, 2005.
- [8] Schweitzer G., Maslen E.H., "Magnetic Bearings – Theory, Design and Application to Rotating Machinery", Springer-Verlag Berlin, 2009.
- [9] Balas, G., Chiang, R., Packard, A., Safonov M., "Robust Control Toolbox", The MathWorks, 2009.

Autori:

Goranka Štimac, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051651498, fax: 051651416, e-mail: gstimac@riteh.hr, web stranica:

http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/goranka_eng.htm

Roberto Žigulić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051651492, fax: 051651416, e-mail: zigulic@riteh.hr, web stranica:

http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/roberto_eng.htm

Sanjin Braut, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051651502, fax: 051651416, e-mail: sbraut@riteh.hr, web stranica:

http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/sanjin_eng.htm

Ante Skoblar, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051651498, fax: 051651490, e-mail: askoblar@riteh.hr, web stranica:

http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/ante_eng.htm

METODA ODREĐIVANJA VOLUMENA TLAČNE POSUDE ZA UBLAŽAVANJE HIDRAULIČKOG UDARA

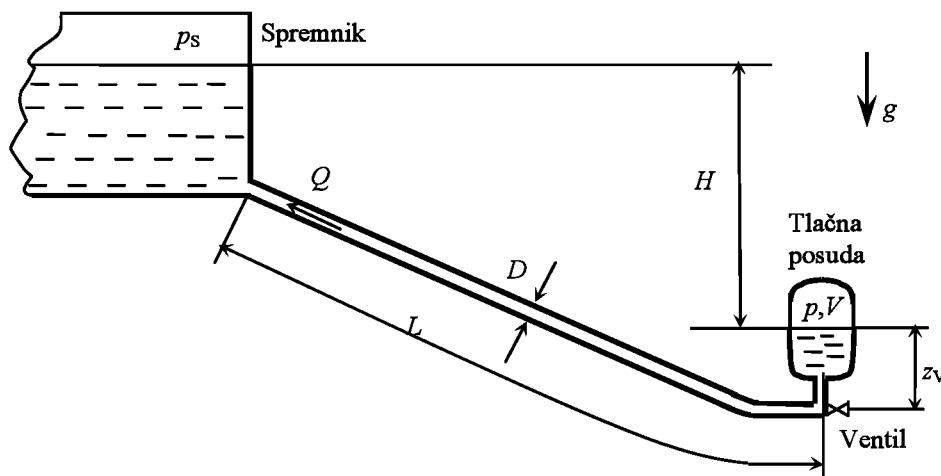
Virag, L., Šavar, M.

Sažetak: U radu je definiran matematički nestacionarnog strujanja u jednostavnom cjevovodnom sustavu s tlačnom posudom prema teoriji krutog stupca. Matematički model je preveden u bezdimenzijski oblik i integriran Runge Kutta metodom četvrtog reda točnosti, te je izrađen univerzalni radni dijagram za određivanje potrebnog volumena posude za zaštitu sustava od hidrauličkog udara temeljem minimalno i maksimalno dopuštenog tlaka na poziciji tlačne posude. Prikazan je način primjene radnog dijagrama na jednom konkretnom primjeru, a volumen (konstanta) posude određena pomoću radnog dijagrama je iskorištena u računalnom programu HUdar koji se temelji na modelu slabostlačivog strujanja i elastičnog cjevovoda. Prema očekivanju je tom metodom dobiven nešto niži maksimalni tlak i nešto viši minimalni tlak, što je doprinos elastičnosti cjevovoda i kapljevine.

Ključne riječi: hidraulički udar, tlačna posuda, teorija krutog stupca

1 UVOD

Pri naglim promjenama režima strujanja kapljevine u cjevovodu (npr. naglom prekidu strujanja) dolazi do hidrauličnog udara čija posljedica može biti pojava nedopušteno visokog ili niskog tlaka. Jedan od načina da se taj udar ublaži je ugradnja tlačne posude, djelomično ispunjene plinom, kao amortizera tlačnih valova.



Sl. 1. Jednostavni cjevovod

Slika 1 prikazuje tipični primjer cjevovoda na čijoj je lijevoj strani veliki zatvoreni spremnik, a na desnoj tlačna posuda ispred ventila kojim je cjevovod odvojen od ostatka sustava. U stacionarnom režimu je ventil otvoren i kapljevina struji prema

spremniku, a u tlačnoj posudi fluid miruje, ne utječe niti istječe iz nje. Nakon trenutnog zatvaranja ventila posuda će se početi prazniti, te će u noj tlak opadati. Ovo strujanje iz posude će spriječiti naglu promjenu tlaka, koja bi se pojavila da posude nema, te će doći do postupnog usporavanja kapljevine, a u trenutku kad se kapljevina zaustavi je tlak u tlačnoj posudi minimalan, a energija u tlačnoj posudi će biti manja od energije spremnika, te dolazi do povratnog strujanja u tlačnu posudu. Time kapljevina ubrzava, a energija posude raste. Kada energija posude postane veća od energije spremnika počinje usporavanje, pa se u određenom trenutku kapljevina zaustavlja i tada je tlak u posudi maksimalan, a volumen plina u njoj minimalan. S obzirom da je u tom trenutku energija spremnika manja od energije posude, ponovno dolazi do strujanja prema spremniku, odnosno počinje drugi period oscilirajućeg strujanja. U teorijskom slučaju bez trenja, ovo oscilirajuće strujanje se ponavlja unedogled. U realnim sustavima je fluid viskozan, a cijev hrapava, te se mehanička energija pretvara u unutarnju, a oscilacije trnu. Očito je da će najveće amplitude tlaka i protoka biti u prvom periodu takvog oscilirajućeg strujanja. Nakon nekog vremena se sva kinetička energija pretvoriti u unutarnju, pa kapljevina postigne stanje mirovanja.

Opisano nestacionarno strujanje se najčešće opisuje modelom jednodimenziskog strujanja u kojemu se uzima u obzir i elastičnost cjevovoda i stlačivost kapljevine. Jednadžbe su hiperboličkog karaktera i efikasno se rješavaju metodom karakteristika [1]. Na katedri za mehaniku fluida je prema takvom pristupu razvijen računalni program HUDar [2], koji za zadalu konfiguraciju cjevovoda prema slici 1, i zadalu veličinu tlačne posude određuje vremensko prostornu raspodjelu tlaka. Primjenom takvog programa se do potrebnog volumena posude dolazi metodom pokušavanja, a svrha ovog rada je razviti metodu s pomoću koje se na temelju zadalog maksimalno i minimalno dopuštenog tlaka na poziciji tlačne posude direktno određuje potrebni volumen i početni tlak plina u posudi koja će osigurati da tlak ostane u zadanim granicama. Ako je u sustavu ugrađena tlačna posuda, koja sustavu daje elastičnost, tada se elastičnost cijevi i stlačivost kapljevine može zanemariti, pa će se ovdje koristiti teorija krutog stupca.

2 MATEMATIČKI MODEL

Na slici 1 su definirane veličine: z_v je srednja visina kapljevine u tlačnoj posudi, H je razina kapljevine u spremniku u odnosu na visinu kapljevine u tlačnoj posudi, V volumen plina u posudi, p_s absolutni tlak u spremniku, a p absolutni tlak u posudi. Neka je cjevod promjera D i duljine L , te neka je protok Q definiran pozitivan za smjer strujanja od spremnika prema ventilu.

Nakon prekida stacionarnog strujanja protokom Q_0 trenutnim zatvaranjem ventila vrijedi jednadžba kontinuiteta

$$Q = vA = \text{konst.} \quad (1)$$

te modificirana Bernoullijeva jednadžba od slobodne površine u spremniku do slobodne površine u tlačnoj posudi koja uz zanemarivanje ubrzavanja fluida u spremniku glasi

$$\underbrace{\frac{p_s}{\rho g} + h}_{h_s} = \underbrace{\frac{p}{\rho g}}_h + \underbrace{\alpha |\mathcal{Q}| \mathcal{Q}}_{\Delta h_F} + \frac{L}{g} \frac{dv}{dt}. \quad (2)$$

Simbol ρ označuje gustoću kapljevine, g gravitaciju, h piezometričku visinu posude, v brzinu, A površinu poprečnog presjeka cijevi. Δh_F su gubici piezometričke visine u cjevovodu od spremnika do ventila.

Prepostavlja se politropska promjena plina u tlačnoj posudi, što znači da vrijedi:

$$pV^n = \text{konst.}, \text{ odnosno } hV^n = C \quad (3)$$

Konstantu C nazivamo konstantom tlačne posude, a n koeficijentom politropske promjene ($1 \leq n \leq \kappa$). Ako je $n=1$ radi se o izotermnoj promjeni, a ako je $n=\kappa$ promjena je adijabatska.

Nakon zatvaranja ventila sav fluid ulazi u tlačnu posudu, što znači da je smanjenje volumena zraka razmjerna dotoku kapljevine koji ulazi u posudu, odnosno

$$\frac{dV}{dt} = -\mathcal{Q} \quad (4)$$

Kombinacijom jednadžbi (1) do (4), uvodeći supstituciju $\mathcal{Q} = Q_0 \cdot \tilde{\mathcal{Q}}$, $h = h_s \cdot \tilde{h}$, te $t = \frac{LA}{Q_0} \cdot \tilde{t}$ i tri bezdimenzijska parametra:

$$\pi_1 = \frac{gA^2 h_s}{Q_0^2}; \pi_2 = \frac{\Delta h_F}{h_s}; \pi_3 = \frac{LA h_s^{1/n}}{C^{1/n}} \quad (5)$$

dobiva se sustav jednadžbi

$$\frac{d\tilde{\mathcal{Q}}}{d\tilde{t}} = \pi_1 \cdot (1 - \tilde{h}) - \pi_1 \cdot \pi_2 |\tilde{\mathcal{Q}}| \tilde{\mathcal{Q}} \quad (6)$$

$$\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{t}} = n \cdot \pi_3 \cdot \tilde{h}^{1+1/n} \cdot \tilde{\mathcal{Q}} \quad (7)$$

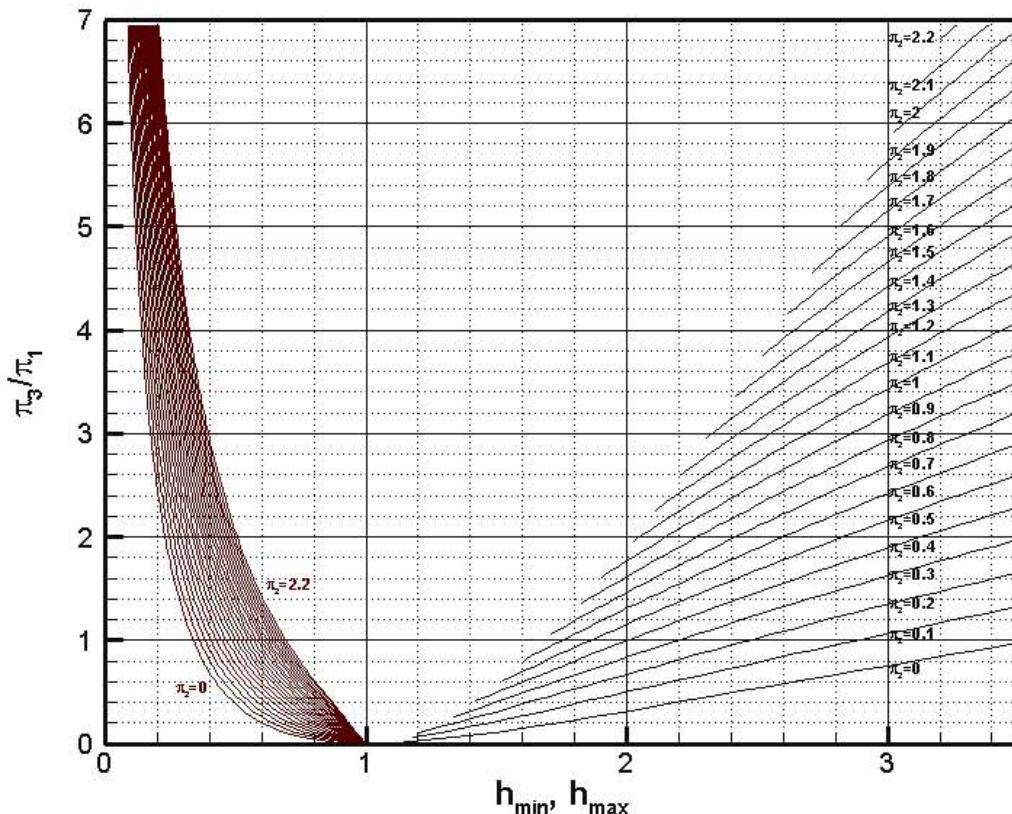
Također, za integraciju su nam potrebni u rubni uvjeti koji u bezdimenzijskom obliku izgledaju ovako: $\tilde{\mathcal{Q}}(0) = -1$ i $\tilde{h}(0) = 1 + \pi_2$.

3 INTEGRACIJA MATEMATIČKOG MODELA – RADNI DIJAGRAM

Sustav od dvije nelinearne obične diferencijalne jednadžbe (6) i (7) uz zadane početne uvjete se lako integrira Runge-Kutta metodom, a ovdje je korištena metoda četvrtog reda primjenom paketa Matlab, odnosno funkcije ode45. Rezultat integracije su funkcije $\tilde{\mathcal{Q}} = f_1(\tilde{t}, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ i $\tilde{h} = f_2(\tilde{t}, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ na zadanom bezdimenzijskom vremenu integracije \tilde{t} . Program za svaku kombinaciju π parametara zapisuje ekstremne vrijednosti piezometričke visine kako bi bilo moguće nacrtati dijagrame ovisnosti maksimalnog i minimalnog tlaka u ovisnosti o parametrima u određenom rasponu.

Iako bezdimenzijski protok i tlak ovise o tri π parametra, lako se pokaže da ekstremne vrijednosti piezometričke visine h_{\max} i h_{\min} , za koje vrijedi $\frac{dh}{dt} = 0$, ovise

samo o parametru π_2 i omjeru parametra π_3 i π_1 . Ova činjenica uvelike olakšava prikaz rezultata dijagramima, jer se zavisnosti oblika $h_{\max} = h_{\max}(\pi_2, \pi_3 / \pi_1)$ mogu prikazati jednim dijagramom s parametarskim krivuljama, što je dano na slici 2, za odabrani raspon parametara. U istom su dijagramu prikazani rezultati za h_{\min} (vrijednosti do 1) i h_{\max} (vrijednosti preko 1). Ovaj dijagram je univerzalan vrijedi za bilo koju kombinaciju dimenzijskih parametara modela, a u nastavku se daje primjer primjene ovoga dijagrama.



Sl. 2. Radni dijagram: ovisnost ekstrema piezometričke visine o π parametrima za $n=1,4$

Postupak primjene radnog dijagrama je sljedeći:

- 1) Odredi stacionarno stanje strujanja i parametar π_2 .
- 2) Iz zadanih maksimalno i minimalno dopuštenog tlaka izračunaj \tilde{h}_{\min} i \tilde{h}_{\max} .
- 3) Iz radnog dijagrama očitaj dvije vrijednosti π_3 / π_1 , a kriterij je niža vrijednost. Ako je niža vrijednost za \tilde{h}_{\max} , onda očitaj novu vrijednost \tilde{h}_{\min} , a ako je niža vrijednost za \tilde{h}_{\min} onda očitaj novu vrijednost za \tilde{h}_{\max} .
- 4) Izračunaj maksimalni volumen zraka za \tilde{h}_{\min} što je minimalno potrebnii volumen posude.

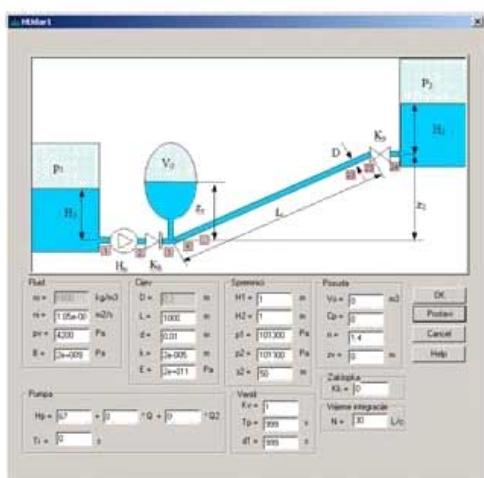
Jasno je da je za funkcioniranje tlačne posude jedino važna njena konstanta $C = hV^n$, što znači da posuda mora sadržavati određenu količinu zraka (npr. može se propisati volumen zraka u posudi u stanju mirovanja sustava ili u stanju stacionarnog strujanja). Stoga je važno periodično kontrolirati stanje zraka u posudi i po potrebi ga nadopuniti. Obično se volumen posude poveća za određeni postotak, tako da se osigura

od eventualnih problema curenja zraka ili njegova otapanja u vodi, dakle da se konstanta posude smanji, a da posuda ostane u funkciji zaštite.

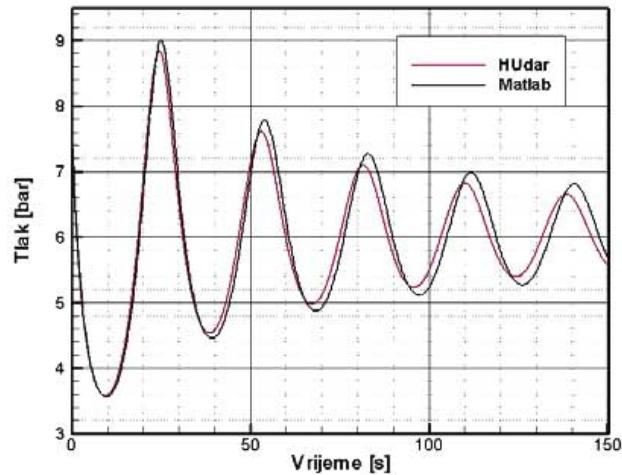
4 PRIMJER PRIMJENE RADNOG DIJAGRAMA

Analizira se problem strujanja iz spremnika 1 u spremnik 2 u kojima su visine fluida $H_1 = H_2 = 1 \text{ m}$, otvorenih prema atmosferskom tlaku $p_a = 101300 \text{ Pa}$, s pomoću pumpe, visine dobave $H_p = 67 \text{ m}$, uz visinsku razliku $z_2 = 50 \text{ m}$ kao što je prikazano na slici 3, iz sučelja programa *HUdar*. Cjevovod je duljine $L=1000 \text{ m}$, unutarnjeg promjera $D=180 \text{ mm}$, a fluidu je gustoće $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$, kinematičke viskoznosti $\nu=1,05 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Analizira se slučaj nestanka električne energije, koji se modelira trenutnim smanjenjem visine dobave pumpe na nulu, odnosno trenutnim zatvaranjem zaklopke.

U prvom koraku se određuju parametri stacionarnog strujanja u cjevovodu. Za zadane parametre sustava je stacionarna brzina strujanja $v_0 = 1,969 \text{ m/s}$, protok $Q_0 = 50,11 \text{l/s}$.



Sl. 3. Sučelje *HUdar*



Sl. 4. Usporedba rezultata za tlak

Temeljem zadanih podataka na slici 3 slijedi da je:

$$h_s = z_2 + H_2 + \frac{p_2}{\rho g} = 50 + 1 + \frac{101300}{1000 \cdot 9,81} = 61,33 \text{ m}$$

Iz zadane visine pumpe $H_p = 67 \text{ m}$, uz visinsku razliku $z_2 = 50 \text{ m}$, visina gubitaka je $\Delta h_F = H_p - z_2 = 17 \text{ m}$, što znači da je $\pi_2 = \Delta h_F / h_s = 0,277$, a za zadana ograničenja u tlaku su parametri $\tilde{h}_{\max} = p_{\max} / (\rho g h_s) = 1,49$ i $\tilde{h}_{\min} = p_{\min} / (\rho g h_s) = 0,166$. Iz radnog dijagrama na slici 2 se može očitati, po kriteriju $\tilde{h}_{\max} \pi_3 / \pi_1 = 0,378$, a po kriteriju $\tilde{h}_{\min} \pi_3 / \pi_1 = 4,02$. Prema izrazu za omjer $\pi_3 / \pi_1 = \frac{L Q_0^2}{g A h_s^{1-1/n} C^{1/n}}$, kriterij je manji omjer $\pi_3 / \pi_1 = 0,378$, jer daje veću konstantu posude, tj. veći volumen dobiti za manji, pa je

$$C = \left(\frac{L \cdot Q_0^2}{g \cdot A \cdot h_s^{1-\frac{1}{n}} \frac{\pi_3}{\pi_1}} \right)^n = \left(\frac{1000 \cdot (50,11 \cdot 10^{-3})^2}{9,81 \cdot \frac{0,18^2 \cdot \pi}{4} \cdot 61,33^{1-\frac{1}{1,4}} \cdot 0,378} \right)^{1,4} = 19,06 \quad (8)$$

Temeljem odabranog omjera $\pi_3 / \pi_1 = 0,378$ iz dijagrama za \tilde{h}_{\min} se može očitati $\tilde{h}_{\min} = 0,591$, iz čega možemo izračunati maksimalni volumen zraka u posudi

$$V_{\max} = \left(\frac{C}{\tilde{h}_{\min} h_s} \right)^{\frac{1}{n}} = 0,632 \text{ m}^3.$$

Slika 4. prikazuje usporedbu vremenske promjene tlaka dobivene predloženom metodom (označeni kao Matlab) i rezultata programa HUdar s istom konstantom posude. Maksimalni tlak u sustavu je 9 bar (to je bio kriterij zaštite), dok program HUdar daje nešto niži maksimalni tlak i nešto viši minimalni tlak, što je posljedica uzimanja u obzir elastičnosti cjevovoda i kapljevine.

6 ZAKLJUČAK

- U radu je postavljen i riješen matematički model nestacionarnog strujanja nastalog nakon trenutnog zatvaranja ventila u sustavu spremnik-cjevovod s ventilom i tlačnom posudom.
- Matematički model se temelji na teoriji krutog stupca. Rezultati rješavanja matematičkog modela su dani u obliku radnih dijagrama pomoću kojih se može jednostavno odrediti potrebnu veličinu volumena tlačne posude.
- Dobiveni radni dijagram može poslužiti za dimenzioniranje tlačne posude u zaštiti od hidrauličkog udara, ali treba voditi računa da metoda prati samo tlak u tlačnoj posudi, pa su moguće pogreške u smislu izbora položaja posude ili loše odabranog minimalnog dopuštenog tlaka.
- Za slučaj složenijih cjevovoda, svakako treba koristiti metode temeljene na modelu slabostlačivog strujanja uz primjenu metode karakteristika, jer takve metode daju raspodjelu tlaka po čitavoj duljini cjevovoda, čime se smanjuje mogućnost pogreške u projektiranju zaštite od hidrauličkog udara.

Literatura:

- [1] Fox, J.A., *Hydraulic Analysis of Unsteady Flow in Pipe Networks*, The Macmillan Press Ltd., London, 1979.
- [2] Virag, Z., Šavar, M., *HUdar priručnik*, FSB, Zagreb, 2007.

Autori:

Lana Virag, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, 1000 Zagreb, e-mail: lana.virag@fsb.hr

Mario Šavar, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Katedra za mehaniku fluida, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168 438, fax 01/6156 940, e-mail: mario.savar@fsb.hr, web stranica: <http://www.fsb.hr/hydro/savar/index.htm>

PREGLED HEMODINAMIČKIH MODELA ARTERIJSKOG STABLA

Virag, Z., Lulić, F. & Džijan, I.

Sažetak: U radu je dan pregled hemodinamičkih modela s koncentriranim parametrima i jednodimenzionalnih modela za opis arterijskog stabla. Jednokomorni modeli s koncentriranim parametrima mogu poslužiti tek za modeliranje otpora koje srce osjeća pri ubrizgavanju krvi u arterije. Višekomorni modeli i modeli T-cijevi mogu modelirati osnovne promjene u slici strujanja zbog fiziološke promjene parametara arterijskog stabla. Jednodimenzionalni modeli mogu vjerno opisati vremensko-prostornu sliku strujanja u velikim arterijama, dok je u bliskoj budućnosti za očekivati širu primjenu hibridnih modela u kojima se kombinira jednodimenzionalni model na ravnim dijelovima arterijskog stabla i trodimenzionalni model u blizini račvanja i zakriviljenih dijelova arterija i to temeljeno na točno snimljenoj geometriji velikih arterija. Puni trodimenzionalni modeli se u dogledno vrijeme neće šire primjenjivati zbog previsokih zahtjeva na računalo i velikog broja ulaznih podataka.

Ključne riječi: Modeli s koncentriranim parametrima, jednodimenzionalni modeli.

1 UVOD

U ljudskom krvotoku se razlikuju dva zatvorena cirkulacijska kruga: jedan od lijeve klijetke srca preko arterijskog stabla, mreže kapilara i nazad preko venskog stabla do desne predklijetke; i drugi od desne klijetke, preko plućne arterije, kroz plućne kapilare i nazad kroz plućnih vena u lijevu predklijetku. Za potrebe kliničke prakse cirkulaciju je nužno matematički modelirati, kako bi se mogle objasniti promjene i predvidjeti bolesti kardiovaskularnog sustava, te planirati način liječenja. Jedan od dijelova cirkulacijskog sustava je arterijsko stablo, kojemu je zadatak dovesti krv do svakog djelića tijela. Ono se sastoji od dvadesetak generacija granajućih krvnih žila u rasponu promjera od oko 30 mm (aorta) pa do oko 8 μm (kapilare), s velikom varijacijom fizioloških svojstava stijenke (poput elastičnosti i viskoznosti) idući od srca prema periferiji. Ta su svojstva zavisna od fizioloških parametara (poput tlaka, temperature i brzine kucanja srca), a te zavisnosti nije jednostavno istražiti, što dodatno otežava modeliranje, odnosno primjenu modela. U svakom slučaju matematički model mora biti fiziološki realan, što podrazumijeva da promjena parametra modela vjerno odražava stvarne fiziološke promjene u krvotoku. Danas se koriste brojni modeli različitih razina: od nul-dimenzionalnih modela (s koncentriranim parametrima), preko jednodimenzionalnih modela (s raspodijeljenim parametrima) do trodimenzionalnih modela. Svrha ovog rada je dati pregled najčešće korištenih modela s osvrtom na dosege i ograničenja njihove primjene.

2 RAZINE HEMODINAMIČKIH MODELA

2.1 Modeli s koncentriranim parametrima (0D modeli)

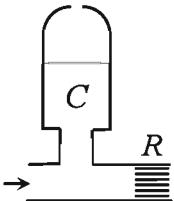
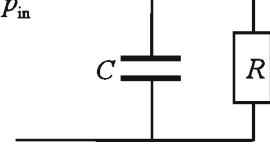
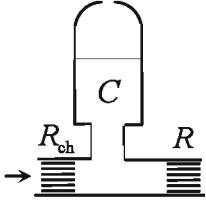
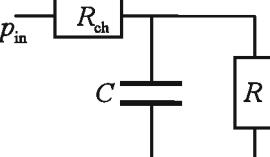
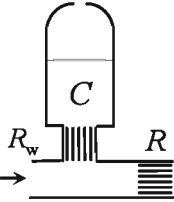
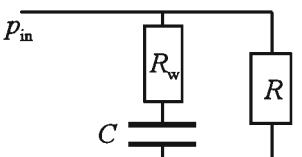
Modeli s jednom komorom

U ovim modelima arterijsko stablo se promatra kao jedna komora volumena V u kojoj vlada jedinstveni tlak p_{in} , u koju krv utječe iz lijeve predklijetke protokom Q_{in} , a izlaz iz komore je kroz mrežu kapilara približno konstantnim protokom Q_{out} . Iza kapilara krv se skuplja kroz venule i vene, a tlak u venama je približno konstantan i obično se uzima da je jednak nuli. Ako je model te komore linearan tada se otpor koji komora pruža strujanju iz srca definira ulaznom impedancijom $\hat{Z}(\omega) = \hat{p}_{in}(\omega)/\hat{Q}_{in}(\omega)$, gdje $\hat{\cdot}$ označuje kompleksne amplitudne Fourierovog reda na frekvenciji ω . U tim modelima veličina $R = \hat{Z}(0)$ označuje periferni otpor koji se pridružuje izlazu iz komore (glavnina pada tlaka od oko 100 mmHg je u arteriolama i kapilarama, dok je pad tlaka u velikim arterijama svega 1 do 2 mmHg). Drugo svojstvo komore je kapacitivnost (sposobnost akumulacije krvi), budući da je protok na ulazu za vrijeme sistole veći od protoka na izlazu, koja se može definirati izrazom $\hat{C}(\omega) = (\hat{Q}_{in} - \hat{Q}_{out})/(j\omega\hat{p}_{in})$, gdje je j imaginarna jedinica. Treće svojstvo komore je disipacija energije povezana s viskoznošću stijenke, koja se može definirati kao integral razlike snaga na ulazu i

$$\text{izlazu iz komore tijekom jednog trajanja } T \text{ takta: } W = \int_0^T p_{in} Q_{in} dt - R Q_{out}^2 T.$$

Tablica 1. prikazuje hidrauličke i električke analogne sheme triju osnovnih modela s pripadajućim izrazima za ulaznu impedanciju i disipaciju energije.

Tablica 1. Osnovni jednokomorni modeli s koncentriranim parametrima

Hidraulička shema	Elektr. analogna shema	Osnovne relacije
		<u>W2 model [1]</u> $\hat{Z}_{in} = \frac{R}{1 + j\omega CR}$ $W = 0$
		<u>W3 model [2]</u> $\hat{Z}_{in} = \frac{R + R_{ch} + j\omega CR R_{ch}}{1 + j\omega CR}$ $W = R_{ch} \int_0^T Q_{in}^2 dt$
		<u>VW3 model [3]</u> $\hat{Z}_{in} = \frac{R(1 + j\omega CR_w)}{1 + j\omega C(R + R_w)}$ $W = R_w \int_0^T (Q_{in} - Q_{out})^2 dt$

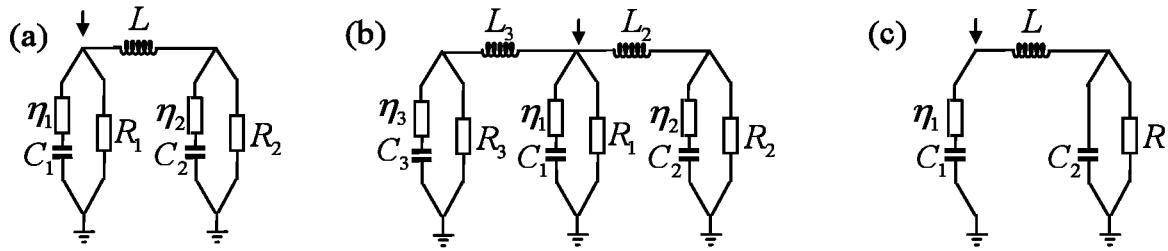
Prvi model arterijskog stabla je definirao Frank [1] u analogiji s vatrogasnom ručnom pumpom, koja se sastoji od komore sa stlačenim zrakom (njem. Windkessel) i cijevi za gašenje požara. Gasitelj stapnom pumpom periodički utiskuje vodu iz spremnika u tlačnu komoru, iz koje voda kontinuirano istječe kroz cijev. Po tome se svi modeli s koncentriranim parametrima nazivaju Windkessel modelima, a Frankov model se naziva dvoelementni Windkessel (W2) model. Osnovni nedostatak ovog modela je da ne modelira disipaciju energije uslijed viskoznosti arterijskih stijenki, te ne modelira dobro ulaznu impedanciju arterijskog stabla (za $\omega \rightarrow \infty$ $Z_{in} \rightarrow 0$, a mjerena pokazuju da Z_{in} teži k nekoj konačnoj vrijednosti). Zbog činjenice da je viskozna disipacija energije u W2 modelu jednaka nuli, taj model ne daje dobru rekonstrukciju mjerene tlaka na temelju mjerene protoka. Nedostatak W2 modela u smislu modeliranja ulazne impedancije je otklonio Westerhof [2] dodavanjem konceptualnog otpora R_{ch} čime je dobio troelementni Windkessel (W3) model, pri čemu je postigao da za $\omega \rightarrow \infty$ $Z_{in} \rightarrow R_{ch}$. Ključ uspjeha ovog modela je da se konceptualnim otporom uvela disipacija energije unutar komore, ali uz pomoć nefiziološkog otpora na kojem se energija disipira, ali samo u fazi ubrizgavanja krvi iz srca u aortu. U [3] su taj model preuredili u viskozni Windkessel (VW3) model, pri čemu otpor R_w modelira viskoznost arterijske stijenke. Kao što je vidljivo iz izraza za disipaciju energije ona se događa i kod punjenja i kod pražnjenja komore, što dovodi do histereze u dijagramu zavisnosti tlaka od volumena komore, što je potvrđeno i eksperimentima. Osim ova tri navedena modela u literaturi postoji i niz drugih varijanti modela, vidjeti npr. [4] u kojima se kombiniraju elementi otpora, kondenzatora i zavojnice (koja u hemodinamici ima ulogu inercije), da bi se postiglo što bolje slaganje modelirane i mjerene ulazne impedancije. Međutim, od svih modela s jednom komorom jedino VW3 model ima elemente s jasnim fiziološkim značenjem: otpor R_w u seriji s kondenzatorom kapaciteta C modelira viskoelastičnu stijenku komore (arterijskog stabla), a R otpor strujanju iz komore.

Modeli s više komora

Modeli s koncentriranim parametrima prepostavljaju konstantan tlak unutar komore, tj. beskonačnu brzinu širenja tlačnih poremećaja. U realnom sustavu tlačni poremećaji se šire konačnom brzinom, te se može razlučiti putovanje tlačnog vala od srca prema periferiji i refleksija valova od periferije prema srcu, što također utječe na ulaznu impedanciju. Ako se želi modelirati bilo kakva refleksija u modelu je potrebno imati barem dvije komore. Logično je prepostaviti da su komore povezane pomoću cijevi koja je karakterizirana koeficijentom inercije L . Slika 1a) prikazuje prirodno proširenje VW3 modela na model s dvije komore, pri čemu strelica označuje mjesto ulaska krvi iz srca, pa prva komora modelira dio arterija blizu srca, a druga komora periferne dijelove velikih arterija. Ovakav model može dobro opisati promjene ulazne impedancije uzrokovane starenjem i bolestima krvnih žila, uz fiziološki realnu promjenu parametra. Slika 1b) prikazuje model s tri komore, gdje srednja komora označuje uzlaznu aortu, desna komora donje ekstremitete, a lijeva glavu i gornje ekstremitete.

Slika 1c) prikazuje petoelementni model [3], koji se može shvatiti kao pojednostavljeni slučaj modela s dvije komore na slici 1a). I tako pojednostavljeni model dobro opisuje ulaznu impedanciju zdravih osoba i osoba s oddređenim

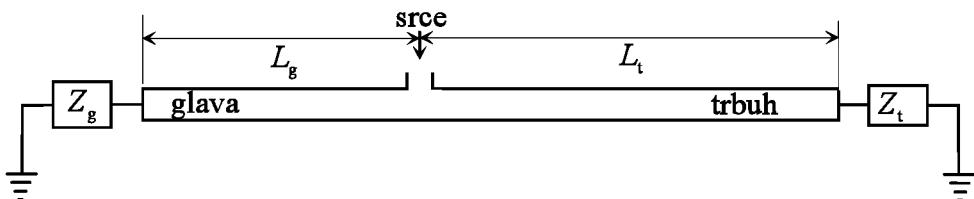
bolestima arterijskog stabla i daje bolje rezultate od drugih petoelementnih modela dobivenih različitim razmještajem elemenata, što ukazuje na njegovu fizikalnost.



Sl. 1. Varijante modela s više komora: a) s dvije komore b) s tri komore
c) petoelementni model iz [3]

Model T-cijevi

U ovim modelima se arterijsko stablo modelira s dvije elastične ili viskoelastične cijevi (jedna za trbuh i donje ekstremitete, a druga za glavu i gornje ekstremitete), kao što prikazuje slika 2. Cijevi idu od srca i završavaju nekim jednokomornim modelom (čija je impedancija na slici označena sa Z_g i Z_t), najčešće W3 ili VW3 modelom. Ako je Z_{0t} karakteristična impedancija cijevi kojom se modelira donji dio tijela, tada je koeficijent refleksije jednak $\Gamma = (Z_t - Z_{0t}) / (Z_t + Z_{0t})$, a impedancija te cijevi koju vidi srce $Z_t = Z_{0t} (1 + \Gamma e^{-2\gamma L_t}) / (1 - \Gamma e^{-2\gamma L_t})$, u kojem je γ konstanta propagacije vala. Analogno vrijedi i za drugu cijev. U [6] su karakteristična impedancija cijevi i konstanta propagacije definirani prema analitičkom rješenju [5], a u [7] je cijev zamijenjena transmisijskom linijom (koja će biti opisan u nastavku), tj. korišteni pripadajući izrazi za karakterističnu impedanciju i konstantu propagacije. Model je korišten u analizi mjesto refleksije valova i pokazuje određenu prednost u smislu interpretativne sposobnosti u odnosu na dvokomorni model [8].



Slika 2. Shematski prikaz modela T-cijevi

2.2 Jednodimenzijski (1D) modeli

Modeli opisani osnovnim zakonima mehanike fluida

U jednodimenzijskim modelima velike arterije se podijele na elemente duljine Δx , a svaki element se modelira s elastičnom ili viskoelastičnom cijevi promjera D (različitog od elementa do elementa), poprečnog presjeka $A = D^2\pi/4$. Tlak p i uzdužni protok kroz velike arterije su funkcije prostorne koordinate x i vremena t . Transverzalni protok Q_T , prema arteriolama i kapilarama, se koncentriра u čvorovima u kojima se spajaju elementi.

U tablici 2 su dane osnovne jednadžbe 1D modela u kojima τ_w označuje sručno naprezanje na stijenci, α koeficijent ispravka kinetičke energije; $E' = dp/dA$ modul elastičnosti, $C' = 1/E'$ podatljivost, a η' viskoznost (faktor viskoznog prigušenja)

arterijske stijenke; μ je viskoznost krvi a c_u i c_v koeficijenti u modelu trenja. Jednadžba količine gibanja je nelinearna, a u lineariziranom obliku se uzima $\alpha = 0$ uz zamjenu vremenski promjenjive površine A s prosječnom vrijednošću A_0 . Ukoliko se u modelu uzima konvektivni član najčešći koeficijent ispravka kinetičke energije je $\alpha = 4/3$, što odgovara slučaju razvijenog stacionarnog laminarnog strujanja u okruglim cijevima. S obzirom da je pad tlaka duž velikih arterija zanemariv u odnosu na pad tlaka kroz arteriole i kapilare smično naprezanje na stijenci bi se moglo sa stajališta ukupnog strujanja i zanemariti, a dovoljno dobar model je prema Poisseuilleovu analitičkom izrazu koji vrijedi za stacionarno izobraženo strujanje. Primjena modela trenja u kojem se uzima i vremenska promjena protoka, neće značajno doprinijeti točnosti opisa putovanja valova tlaka i protoka.

Tablica 2. Osnovne jednadžbe jednodimenzijskih modela

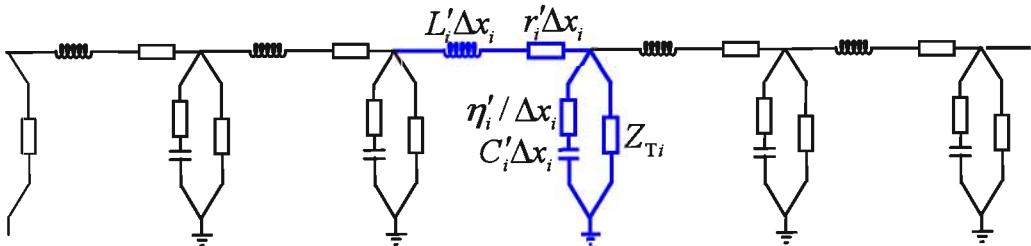
	Jednadžba kontinuiteta	$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$		
	Jednadžba količine gibanja	$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\pi D \tau_w}{\rho} = -\frac{\partial (\alpha Q^2 / A)}{\partial x}$		
	Veza između tlaka i površine poprečnog presjeka	elastično	$\Delta p = E' \Delta A = \Delta A / C'$	
		visko-elastično	$\Delta p = \Delta A / C' + \eta' d(\Delta A) / dt$	
	Model smičnog naprezanja τ_w	0	$-\frac{64\mu}{\pi D^3} Q$	$-\frac{\rho}{\pi D} \left[\frac{8c_u \pi \mu}{\rho A} Q + (c_v - 1) \frac{\partial Q}{\partial t} \right]$
	Impedancija $\hat{Z}_T = \frac{\hat{P}}{\hat{Q}_T}$	R	W2 model	
		W3 model	VW3 model	
				Model stabla [10]

Bitna razlika među 1D modelima je u konstitutivnoj relaciji za tkivo arterija. Velik broj modela prepostavlja elastično ponašanje stijenki iako mjerena potvrđuju viskoelastično ponašanje. Nadalje popustljivost je u nekim modelima konstantna a u nekim zavisna od tlaka (s povećanjem tlaka popustljivost se smanjuje).

Značajna razlika među modelima je u modeliranju impedancije kojom se definira transverzalni protok prema kapilarama. Koristi se: otpor R , neki od Windkessel modela ili se modelira granajuća struktura malih arterija [10]. Primjena samog otpora R ima za posljedicu pojavu nefizikalnih oscilacija u arterijskom stablu, a kao realan se pokazao IVW4 model (električna shema je dana u tablici 2). Razlika je i u raspodjeli transverzalnog protoka kojom se definira koliko krvi ide kojem organu. Problem je da ova raspodjela ovisi o stanju organizma i različita je npr. za stanje mirovanja, ili za vrijeme fizičke aktivnosti, prije ili nakon objeda i sl.

Modeli transmisijske linije

Ovi modeli su poseban slučaj 1D modela, koji se formalno izvode iz analogije s transmisijskom linijom električne mreže, a lako se pokaže da su ti modeli temeljeni na lineariziranim jednadžbama 1D modela danim u tablici 2. Ako se u jednadžbi količine gibanja nelinearni konvekcijski član zanemari, i uzme Poisueilleov model trenja, te površina poprečnog presjeka $A(x, t)$ u koeficijentu uz gradijent tlaka zamijeni s vremenski prosječnom površinom $A_0(x)$, tada se inercijski član u jednadžbi količine gibanja može modelirati zavojnicom induktiviteta L' po jedinci duljine, a trenje otpornikom r' izraženo po jedinici duljine. Slika 3 prikazuje primjer dijela transmisijske linije sastavljen od 5 elemenata.



Slika 3. Dio transmisijske linije (5 elemenata svaki duljine Δx_i)

Konstitutivna relacija za stijenu je prikazana otporom $\eta'_i / \Delta x_i$ i kondenzatorom kapaciteta $C' \Delta x_i$, dok je transverzalni protok definiran impedancijom Z_{T_i} , pri čemu se može koristiti neki od modela iz tablice 2. Uočljiva je sličnost modela za jedan element transmisijske linije s modelom jedne komore u modelu s koncentriranim parametrima, što znači da se model transmisijske linije može prirodno reducirati na model s koncentriranim parametrima. U skupinu transmisijskih modela se može svrstati i metodu prema [14] u kojoj se jednadžba količine gibanja zamjenjuje prije spomenutim analitičkim rješenjem [5] za strujanje u ravnoj elastičnoj cijevi, koje se koristi u modelu T-cijevi. U takav model se može uvesti i viskoznost stijenke, kroz modifikaciju koeficijenta propagacije, ali se na žalost ne može uvesti zavisnost elastičnosti arterijske stijenke od tlaka.

S obzirom da je model transmisijske linije linearan, obično se rješava u frekventnoj domeni (uz pretpostavku da srce kuca stalnim brojem otkucaja u minuti), pri čemu je dovoljno gledati prvi dvadesetak harmonika iz razvoja u Fourierov red. Metoda je jednostavna: izračunavaju se impedancije počevši od periferije prema srcu a zatim se iz protoka ili tlaka na ulazu u arterijsko stablo lako izračunaju protoci i tlakovi u svim čvorovima stabla [11–14]. Na žalost, frekventna metoda nije primjenjiva za slučaj promjenjivog broja otkucaja srca ili nelinearnih jednadžbi (npr. kada je popustljivost funkcija tlaka), pa se u tom slučaju primjenjuju metoda karakteristika [15], metoda konačnih volumena [12,16] ili metoda konačnih elemenata [17] u vremenskoj domeni.

Jednodimenzijski modeli daju kompletan uvid u fiziku širenja valova tlaka i protoka duž velikih arterija i mogu poslužiti za unaprjeđenje dijagnostike, postavljanja i praćenja terapije, te donošenja odluka pri kirurškim zahvatima [16].

2.3 Trodimenijski (3D) modeli

Potpuni trodimenijski model

Potpuni model arterijskog stabla bi zahtjevao modeliranje dvadesetak generacija krvnih žila, od aorte, velikih arterija, preko srednjih do aretriola i kapilara, što je vrlo zahtjevno sa stajališta rješavanja. Model bi se temeljio na 3D Navier Stokesovim jednadžbama u kojima bio trebalo uzeti i tranziciju laminarnog u turbulentno strujanje krvi koje se pojavljuje na pojedinim mjestima u velikim arterijama, a bilo bi potrebno poznavati veliki broj parametra koji se odnose na fiziološka svojstva stijenki krvnih žila. U projektu [18] u kojem je sudjelovalo pet sveučilišta razvijen je 3D model za analizu strujanja samo u velikim arterijama u kojemu je obuhvaćeno 20 bifurkacija na razini velikih arterija. U geometrijskoj mreži je bilo oko 125 milijuna čvorova, a model se rješavao na mreži računala od 1500 procesora. Jasno je da se ovakvi modeli u dogledno vrijeme neće koristiti u kliničkoj praksi.

Značaj 3D modela je da daju kompletну sliku strujanja s realnijim podatkom o smičnim naprezanjima na stijenci, što je važno ako se zna da zone recirkulacijskog strujanja i malog smičnog naprezanja pogoduju nastanku masnih nasлага na stijenci, a previsoka smična naprezanja propadanju krvnih žila. Stoga 3D modeli nalaze primjenu u lokalnoj analizi strujanja, npr. samo u okolišu bifurkacije karotide, ili u aortnom luku, u okolišu suženja, u aneurizmi i sl.

Hibridni modeli

U primjeni 3D modela na ograničeno područje arterijskog stabla postoji problem pouzdanog zadavanja rubnih uvjeta na ulaznoj i izlaznoj granici, jer je strujanje izrazito nestacionarno, a vremenske promjene tlaka i protoka zavise od rubnih uvjeta u čitavom arterijskom stablu. U tom smislu se definiraju hibridni modeli u kojima se kombiniraju jednodimenzijski model za mrežu velikih arterija u kojem se ugrađuje lokalni 3D model za područje u kojem je potrebno točnije odrediti sliku strujanja i smična naprezanja na stijenci. Ovi modeli su dobar kompromis između točnosti rezultata i zahtjevanosti za kapacitetima računala.

3 ZAKLJUČCI

U radu je dan pregled korištenih matematičkih modela za opis strujanja krvi u arterijskom stablu, koji se prema broju dimenzija mogu podijeliti na nul-dimenzijske, jednodimenzijske i trodimenzijske modele. Svaka razina modela ima svoje mjesto u kardiologiji. Jednokomorni modeli s koncentriranim parametrima uglavnom mogu poslužiti za modeliranje opterećenja koje arterijsko stablo predstavlja za srce a promjena parametara takvog modela daje grubu sliku o promjenama arterijskog stabla. Višekomorni modeli i model T-cijevi mogu u određenoj mjeri opisati refleksiju valova u arterijskom stablu, te različita stanja uzrokovana starenjem i pomoći u objašnjenjima promjena arterijskog stabla kod bolesti, npr. hipertenzije. Jednodimenzijski modeli daju kompletan uvid u valne pojave koje se odvijaju u arterijskom stablu, te u kombinaciji s tonometrijskim mjeranjem tlaka i ultrazvučnim mjeranjima protoka, mogu poslužiti za dijagnosticiranje većine arterijskih bolesti, definiranje i praćenje terapije, te predviđanje stanja nakon kirurških zahvata. 3D i hibridni modeli omogućuju i procjenu rizika od pojedinih bolesti, ali će zbog svojih

zahtjeva za računalnim resursima u dogledno vrijeme još uvijek biti korišteni samo u istraživačke svrhe.

Literatura

- [1] Frank O. Die Grundform des arterielen Pulses erste Abhandlung: mathematische Analyse. *Z Biol* 37: 483–526, 1899.
- [2] Westerhof N. Analog studies of Human Systemic Arterial Hemodynamics, *PhD thesis*, University of Pennsylvania, 1968.
- [3] Toy S.M., Melbin J., Noordgraaf A. Reduced Models of Arterial Systems, *IEEE Trans. on Biomed. Eng.*, 32 No 2, 1985.
- [4] Milnor WR. *Hemodynamics*. Baltimore: Williams&Wilkins, 1989, str. 126-128.
- [5] Womersley, J. R. The mathematical analysis of the arterial circulation in a state of oscillatory motion, *Wright Air Dev. Cent. Tech. Rep.* WADC-TR56-614, 1957.
- [6] Liu Z., Shen F., Yin F.C.P. Impedance of arterial system simulated by viscoelastic tubes terminated in windkessels, *Am. J. Physiol.* 256: H1087-H1099, 1989.
- [7] Burattini R., Campbell K.B. Modified asymmetric T-tube model to infer arterial wave reflection at the aortic root, *IEEE Trans. on biomedical engineering*, Vol. 36, No. 8, 1989.
- [8] Berger DS., Sanjeev GS. On descriptive and interpretive abilities of arterial system models, 1995 IEEE-EMBC and CMBEC, Theme 1: Cardiovascular System.
- [9] Burattini R., Natalucci S., Campbell K.B. Viscoelasticity modulates resonance in the terminal aortic circulation, *Medical Engineering & Physics* 21, 175–185, 1999.
- [10] Olufsen M.S, Peskin C.S, et al. Numerical simulation and experimental validation of blood flow in arteries with structured-tree outflow conditions, *Ann. Biomed. Eng.* 28, 2000.
- [11] Snyder M.F., Rideout V.C., Hillestad R.J. Computer modelling of the human systemic arterial tree, *J. Biomechanics*, Vol. 1, 341-353, 1968.
- [12] Segers P., Stergiopoulos N., Verdonck P., Verhoeven R. Assesment of distributed arterial network models, *Med. Biol. Eng. Comput.* Vol. 35, 729-736, 1997.
- [13] John L.R. Forwart electrical transmission line model of the human arterial system, *Med. Biol. Eng. Comput.*, Vol 42, 312-321, 2004.
- [14] Avolio A.P. Multi-branched model of the human arterial system, *Med.&Bio. Eng. &Comput.*, Vol. 18, 709-718, 1980.
- [15] Schaaf B.W., Abbrecht P.H. Digital computer simulation of human systemic arterial pulse wave transmission; a nonlinear model, *J. Biomechanics*, Vol. 5, 345-364, 1972.
- [16] Stergiopoulos N., Young D.F., Rogge T.R. Computer simulation of arterial flow with application to arterial and aortic stenoses, *J. Biomechanics*, Vol. 25, 1477-1488, 1992.
- [17] Matthys K.S., Alatrey J., et. al. Pulse wave propagation in model human arterial network: assessment of 1-D numerical simulation against in vitro measurement, *Journal of Biomechanics*, Vol. 40, 3476-3486, 2007.
- [18] <http://www.cfm.brown.edu/crunch/ATREE/people.html>

Autori:

Zdravko Virag, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 6168137, e-mail: zdravko.virag@fsb.hr,
Fabijan Lulić, Poliklinika Nemetova, Nemetova 2, 10000 Zagreb, tel. 01 4693159, e-mail: fabijan.lulic@poliklinika-nemetova.hr,
Ivo Džijan, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 6168241, e-mail: ivo.dzijan@fsb.hr.

UTJECAJ ZIDOVA ZRAČNOG TUNELA NA STACIONARNO TRANSONIČNO STRUJANJE

Zmaić, Ž., Majić, F. & Voss, R.

Sažetak: Ovim radom je primjenom numeričkih simulacija istražen utjecaj zidova zračnog tunela na stacionarno transonično opstrujavanje avionskog krila u zatvorenoj testnoj sekciji transoničnog zračnog tunela. Ovo istraživanje je provedeno na 3D modelu avionskog krila sa superkritičnim aeroprofilom tipičnim za moderne civilne zrakoplove tzv. aerostabilno krilo. Proračunska domena se proteže po 20 dužina najduže srednje linije aeroprofila uzvodno, nizvodno, iznad i ispod aerostabilnog krila. Rješenja ovih numeričkih simulacija su rješenja osrednjениh Navier-Stokesovih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i Spalart-Almarasovog jednojednadžbenog modela turbulencije. Usporedbom numeričkih rezultata za aerostabilno krilo u sekciji zračnog tunela i u otvorenoj struji zraka je jasno pokazan utjecaj graničnog sloja zidova zračnog tunela na strujanje oko aerostabilnog krila. Glavni pokazatelj utjecaja zidova zračnog tunela na strujanje oko aerostabilnog krila je lokalno odvajanje struje u kutu u kojem se sastaju zid zračnog tunela i površina aerostabilnog krila. Ovaj rad je izrađen u DLR-ovom (Njemački nacionalni centar za zrakoplovstvo i svemirska istraživanja) Institutu za Aeroelasticitet u Göttingenu. Pri izradi ove simulacije su korišteni nekomercijalni generator mreže CENTAUR i interni DLR-ov nekomercijalni RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) CFD kôd TAU-Code.

Ključne riječi: Aerostabilno krilo, Zračni tunel.

1 UVOD

Avionski flater kao aeroelastični fenomen, koji treba biti istražen u okviru razvoja dizajna novih aviona ili pri struktturnom modificiranju već postojećeg aviona, je još trenutno jedan od najvažnijih zadataka na području aeroelasticiteta. To se posebno odnosi na avione čija je brzina leta u području transoničnih brzina. Precizno predviđanje flatera zahtjeva visoko sofisticirane CFD simulacije strujanja oko dinamički oscilirajuće avionske strukture. Provjera CFD metoda se uglavnom provodi usporedbom numerički dobivenih rezultata sa experimentalnim rezultatima dobivenim testovima, na pojednostavljenim 2D modelima avionskih profila i 3D modelima avionskih krila, u zračnom tunelu. Dok pojednostavljenje geometrije modela smanjuje napore pri provjeri CFD metode, testne sekcije zračnog tunela donose dodatne probleme.

U nekim zračnim tunelima kao što je TWG u Göttingenu ovi problemi su djelomično izbjegnuti korištenjem, sa gornje i donje strane testne sekcije, krutih zidova kojima je oblik prilagođen obliku strujnica. Na bočnim zidovima zračnog tunela to nije moguće učiniti zato što je na njih ugrađen sam model i zato što granični sloj struje zraka na bočnim zidovima međudjeluje sa strujom zraka neposredno uz površinu modela. Osim toga ovo prilagođavanje gornjih i donjih zidova testne sekcije zračnog tunela je zadovoljavajuće za stacionarno, ali ne i za nestacionarno strujanje.

Prethodno navedeni razlozi ukazuju na važnost te nameću potrebu preliminarnog (prije provedbe samih testova u zračnom tunelu) predviđanja, a time i istraživanja utjecaja zidova zračnih tunela na stacionarno transonično strujanje oko avionskih profila ili krila u testnim sekcijama zračnog tunela.

2 MATEMATIČKI MODEL

2.1 Općeniti pristup

Sve simulacije u ovome radu su odradene sa RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) DLR-ovim TAU-Cod-om [3]. DLR-ov rješavač TAU-Code [3] je 3D, paralelni, hibridni, višemrežni kôd koji primjenom metode konačnih volumena (MKV) diskretizira, a potom rješava (RANS) osrednjene Navier-Stokesove jednadžbe i jednadžbe modela turbulencije. Za ubrzanje konvergencije je primjenjena višemrežna metoda sa 3v tipom mreže. Fluksevi su izračunati primjenom upwind sheme diskretizacije. Konzervativni oblik Navier-Stokesovih jednadžbi za 3D slučaj strujanja je prikazan slijedećom jednadžbom:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \vec{W} dV = - \iint_{\partial V} \bar{\bar{F}} \cdot \vec{n} dS \quad (1)$$

gdje je \vec{W} vektor konzervativnih veličina. V je proizvoljni kontrolni volumen sa granicom ∂V i vektorom normale \vec{n} . Tenzor fluksa $\bar{\bar{F}}$ se sastoji od 3 vektora fluksa u smjeru svake od koordinatnih osi

$$\bar{\bar{F}} = (\vec{F}_i^c + \vec{F}_v^c) \cdot \vec{e}_x + (\vec{G}_i^c + \vec{G}_v^c) \cdot \vec{e}_y + (\vec{H}_i^c + \vec{H}_v^c) \cdot \vec{e}_z \quad (2)$$

gdje su \vec{e}_x , \vec{e}_y i \vec{e}_z jedinični vektori u smjeru pojedinih koordinatnih osi. Indeksi i i v predstavljaju neviskozne i viskozne komponente vektora fluksa.

2.2 Model turbulencije

Model turbulencije primjenjen u ovome radu je orginalni jednojednadžbeni Spalart Allmaras (SA) model turbulencije. Viskozni fluksevi u SA modelu turbulencije su izračunati primjenom centralne sheme diskretizacije. Tenzor Reynoldsovog naprezanja je određen primjenom Boussinesqove hipoteze:

$$-\overline{\rho \dot{u}_i \dot{u}_j} = \mu_t \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho k} \quad (3)$$

gdje je dio tensora Reynoldsovog naprezanja koji sadrži turbulentnu kinetičku energiju zanemaren tj. $k=0$. Uključivanjem Boussinesqove hipoteze u osrednjene Navier-Stokesove jednadžbe one poprimaju slijedeći oblik:

$$\frac{\partial \tilde{\rho v}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho u}_i \tilde{v}}{\partial x_i} = P + \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\mu_l + \tilde{\mu}}{\sigma} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \right) + \rho \frac{c_{b2}}{\sigma} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \right)^2 \right) - D \quad (4)$$

Članovi na desnoj strani ove jednadžbe predstavlja produkcijsku pomoćnu funkciju $P = c_{b1} \tilde{\rho S v}$, gradijent difuzije i destruktivnu funkciju $D = c_{w1} f_w \rho (\tilde{v}/d)^2$ turbulentne kinematičke viskoznosti.

3 ANALIZA REZULTATA

3.1 Numeričke simulacije

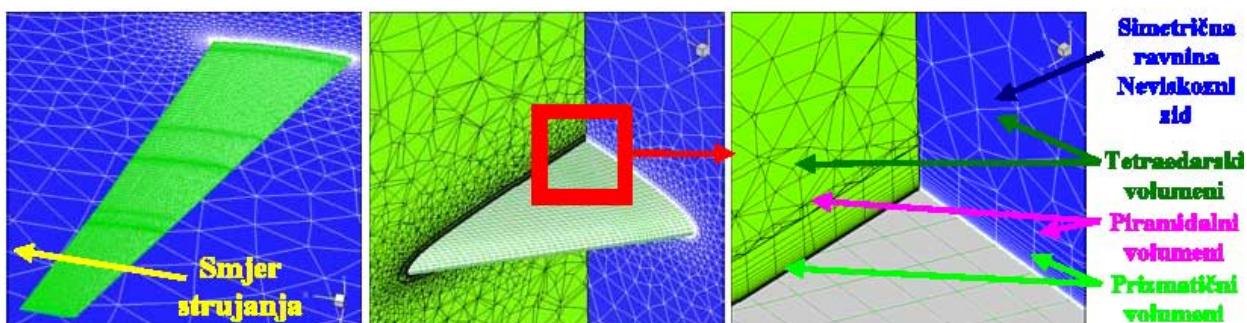
3.1.1 Rješavač strujanja

Za stacionarni proračun strujanja oko aerostabilnog krila je korištena hibridna mreža konačnih volumena (KV) oko WIONA geometrije modela aerostabilnog krila i interni DLR-ov RANS rješavač TAU kod [3]. Model aerostabilnog krila je postavljen između krutih bočnih zidova zračnog tunela koji su također uključeni u CFD proračun i čiji se utjecaj na strujanje u ovom radu i istražuje.

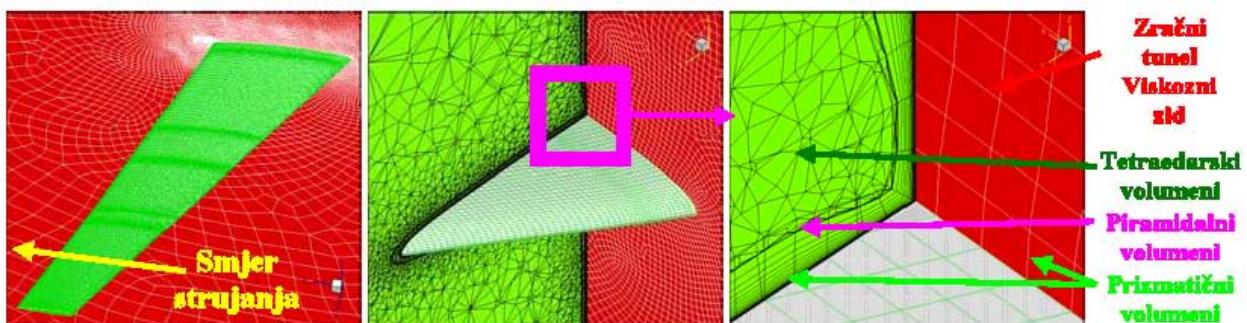
3.1.2 Mreža i generator mreže kontrolnih volumena i numerički parametri

Mreža KV-a je generirana generatorom mreže Centaur [2]. Iznad i ispod modela aerostabilnog krila na udaljenosti od 10 duljina osnovne tetine su definirani i primjenjeni nereflektirajući rubni uvjeti koji potpuno korespondiraju sa, strui zraka prilagođenim, uvjetima na gornjem i donjem zidu zračnog tunela.

Za provedbu stacionarnih numeričkih simuacija su korištene 2 mreže KV-a od kojih je prvom diskretiziran prostor oko krutog aerostabilnog krila sa simetričnim neviskoznim bočnim zidom na korjenu krila u uvjetima otvorene struje zraka sa 2.831 miliona čvorova i 5.597 miliona KV-a Slika 1, a drugom oko krutog aerostabilnog krila u testnoj sekciji zračnog tunela sa viskoznim zidovima, sa 3.884 miliona čvorova i 8.168 miliona KV-a Slika 2. Obadvije mreže su hibridne i to strukturirane sa prizmatičnim KV-ima u graničnom sloju na viskoznoj površini krila, sa piridalnim KV-ima smještenim u paralelne redove neposredno iznad strukturiranog graničnog sloja i nestrukturirane sa tetrahedarskim KV-im u preostalom dijelu proračunske domene. Prvi red mreže KV-a neposredno uz površinu krila i zidova zračnog tunela je dovoljno mali da granični sloj razbija na dijelove koji svo vrijeme u svim KV-ima osiguravaju vrijednost y^+ manju od 1.



Slika 1. Mreža konačnih volumena aerostabilnog krila sa simetričnim neviskoznim zidom.



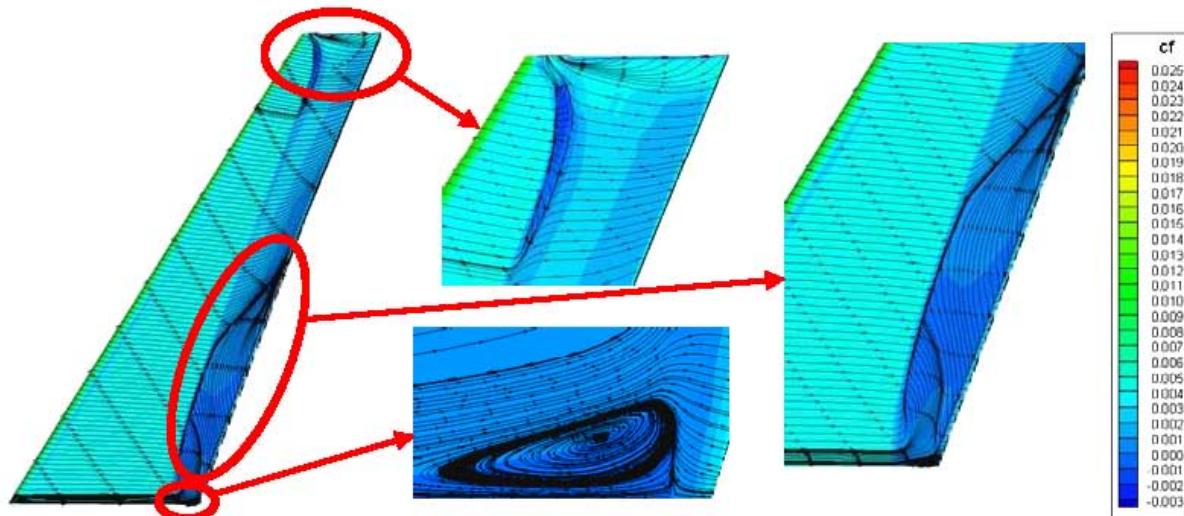
Slika 2. Mreža konačnih volumena aerostabilnog krila sa viskoznim zidom zračnog tunela.

3.2 Zračni tunel

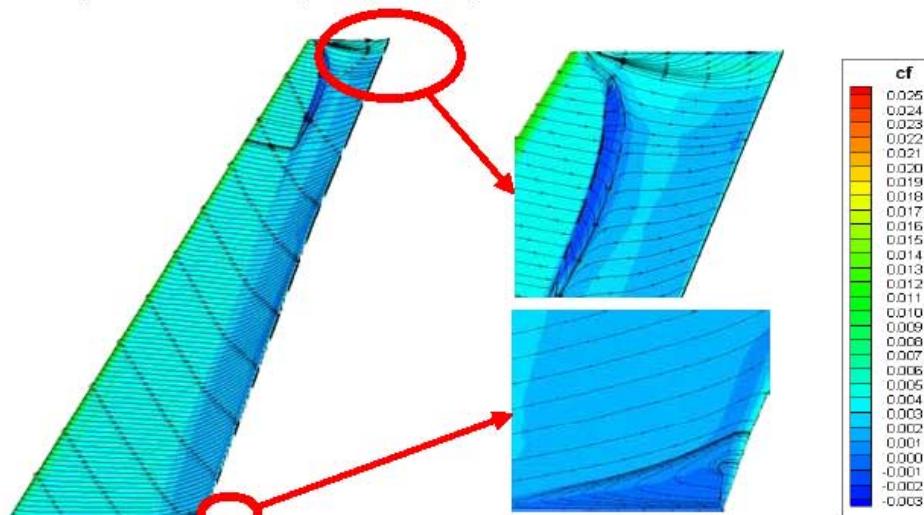
Experimenti, s ciljem istraživanja ponašanja LCO (Limit Cycle Oscillatory) na krilu transportnog aviona pri transoničnim brzinama zraka, su provedeni u DLR-ovom TWG transoničnom zračnom tunelu, sa podesivim gornjim i donjim zidovima, u Göttingenu. Statičke i dinamičke karakteristike i aerodinamički oblik modela ovog krila su detaljno opisani u [1].

3.3 Analiza rezultata stacionarnog strujanja

Utjecaj zidova zračnog tunela na stacionarno transonično strujanje je istražen usporedbom aerodinamičkih strujnih karakteristika za 2 različita slučaja opstrujavanja aerostabilnog krila i to 1. slučaj za opstrujavanje krila u otvorenoj struji zraka i 2. slučaj za opstrujavanje krila u zračnom tunelu sa viskoznim zidovima.



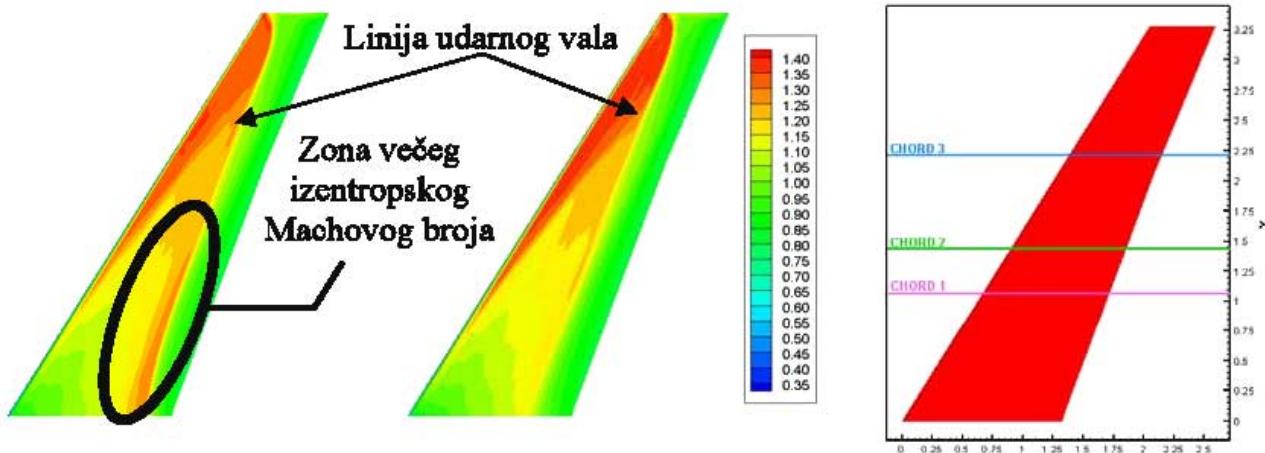
Slika 3. Distribucija strujica i C_f površinskog koeficijenta trenja za strujanje oko krutog aerostabilnog krila u otvorenoj struji zraka pri: $Ma=0.819$, $\alpha=0.97^\circ$ i $Re=1.32$ miliona.



Slika 4. Distribucija strujica i C_f površinskog koeficijenta trenja za strujanje oko krutog aerostabilnog krila u testnoj sekciji zračnog tunela pri: $Ma=0.819$, $\alpha=0.97^\circ$ i $Re=1.32$ miliona.

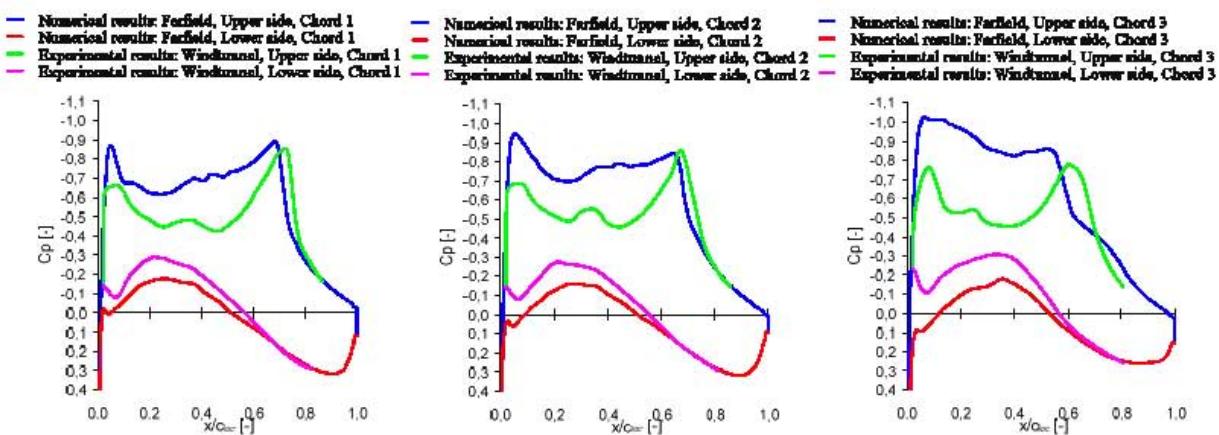
Usporedbom strujnica i vrijednosti površinskog koeficijenta trenja C_f na površini krutog aerostabilnog krila za uvjete strujanja u otvorenoj struji zraka i u zračnom tunelu pri $Ma=0.819$, $\alpha=0.97^\circ$ i $Re=1.32$ miliona se može vidjeti pojačana vrtložnost i

proširenje zona odvajanja struje zraka pri opstrujavanju krila u otvorenoj struci zraka Slika 3 u odnosu na opstrujavanje krila u zračnom tunelu Slika 4. Slika 3 prikazuje 3 zone intenzivne vrtložnosti i odvajanja struje pri opstrujavanju krila u otvorenoj struci zraka, a Slika 4 prikazuje 2 zone blage vrtložnosti i odvajanja struje pri opstrujavanju krila u zračnom tunelu. U zoni neposredno uz rub krila je stručna slika za obadva slučaja strujanja ista tj. nepromijenjena pri promjeni uvjeta strujanja.



Slika 5. Usporedba polja izentropskih Machovih brojeva pri stacionarnom strujanju oko krutog aerostabilnog krila u otvorenoj struci zraka (lijevo) i u testnoj sekciji zračnog tunela (sredina) pri: $Ma=0.819$, $\alpha=0.97^\circ$ i $Re=1.32$ miliona. Na desnoj strani slike su pozicije presjeka aerostabilnog krila ravninama 1, 2 i 3.

Na prvi pogled to izgleda čudno i paradoksalno, ali osnovni razloga za to možemo vidjeti u distribuciji izentropskog Machovog broja na površini aerostabilnog krila Slika 5. Slika 5 (lijevo) pokazuje znatno veće vrijednosti izentropskog Machovog broja za strujanje u otvorenoj struci zraka nego pri strujanju u zračnom tunelu Slika 5 (sredina) u zoni duž cijele linije udarnog vala. S obzirom na to potupno je realno očekivati veću vrtložnost i veće odvajanje struje u zonama iza udarnog vala za slučaj opstrujavanja krila u slobodnoj struci zraka nego u zračnom tunelu.



Slika 6. Usporedba polja statičkog tlaka pri stacionarnom strujanju oko krutog aerostabilnog krila u otvorenoj struci zraka izračunatih numerički i oko elastičnog aerostabilnog krila mjerenih eksperimentalno u testnoj sekciji zračnog tunela pri: $Ma=0.819$, $\alpha=0.97^\circ$ i $Re=1.32$ miliona na presjecima aerostabilnog krila ravninama 1, 2 i 3.

Za 3 različita presjeka aerostabilnog krila 1, 2 i 3 sa pozicijama prikazanim na **Slika 5** (desno) $Y_1=1.0655289$, $Y_2=1.4425637$ i $Y_3=2.2130366$ su uspoređeni koeficijenti tlaka C_p **Slika 6** dobiveni numerički za uvjete strujanja oko krutog krila u otvorenoj struji zraka i experimentalno za uvjete strujanja oko elastičnog krila u DLR-ovom transoničnom tunelu.

Očito je da je površina između C_p krivulja **Slika 6** za gornju i donju stranu krila za svaki od presjeka, a time i koeficijent uzgona Cl kao integralna veličina za svaki napadni kut uvijek veća za strujanje u otvorenoj struji nego u zračnom tunelu.

4 ZAKLJUČAK

Viskoznost zidova zračnog tunela pri stacionarnom opstrujavanju aerostabilnog krila:

- dovodi do pada vrijednosti izentropskog Machovog broja u zoni duž linije udarnog vala te tako smanjuje intenzitet odvajanja struje zraka u zoni neposredno uz sam viskozni zid zračnog tunela i u zoni uz trailing edge što je prikazano slikama **Slika 3**, **Slika 4** i **Slika 5**,
- nema velikog utjecaja na strujanje oko presjeka krila koji su bliže rubu aerostabilnog krila tj. utjecaj zida zračnog tunela koji je na strani korjena krila je vrlo velik, a zida na suprotnoj strani je zanemariv,
- smanjuje površinu između C_p krivulja gornje i donje strane krila, a time i koeficijent uzgona Cl u svim presjecima krila u odnosu na strujanje u slobodnoj struji zraka što je prikazano **Slika 6**.

Viskoznost zidova zračnog tunela pri stacionarnom opstrujavanju aerostabilnog krila znatno smiruje strujnu sliku oko aerostabilnog krila, što obavezno treba uzeti u obzir prilikom pripreme testova u zračnom tunelu i analize rezultata dobivenih tim testovima.

Literatura:

- [1] G. Dietz, G. Schewe, F. Kießling, M. Sinapius, Limit-Cycle-Oscillation Experiments at a Transport Aircraft Wing Model. *International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics – IFASD 2003, Amsterdam, The Netherlands, 2003.*, Available at: <http://www.ae.go.dlr.de/exp/pub/Ge-17.pdf>
- [2] Centaur Grid Generation Manual, CentaurSoft, 2008. Available at: <http://www.centaursoft.com>.
- [3] Tau Code Manual, DLR – Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt, 2008.

Autori:

Željko Zmaić, Sveučilište Josip Juraj Strossmayer u Osijeku, Strojarski fakultet u Slavonskom Brodu, Trg I. B. Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, Republika Hrvatska, e-mail: Zeljko.Zmaic@sfsb.hr, web stranica: www.sfsb.hr.

Frane Majić, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet Strojarstva i Brodogradnje Zagreb, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, Republika Hrvatska, e-mail: Frane.Majic@fsb.hr, web stranica: www.fsb.hr.

Ralph Voss, Njemački nacionalni centar za zrakoplovstvo i svemirska istraživanja, Institut za aeroelasticitet, Bunsenstrasse 10, 37073 Göttingen, Savezna Republika Njemačka, e-mail: Ralph.Voss@dlr.de, web stranica: www.dlr.de.

EKSPERIMENTALNO ISPITIVANJE AB OKVIRA S ISPUNOM

Zovkić, J., Sigmund, V.

Sažetak:

Ponašanje armiranobetonskih okvira s ispunom na djelovanje horizontalnih sila s gledišta propisa, starih a i novih je još uvijek nepoznanica. Kod nas ne postoji propisi koji uzimaju u obzir sudjelovanje ispune u armiranobetonskim okvirima kod djelovanja horizontalnih sila. U svijetu je napravljeno nekoliko ispitivanja armiranobetonskih okvira s ispunom čiji se rezultati zadržavaju na znanstvenoj razini. Također, postoje razni matematički modeli koji pokušavaju opisati doprinos ispune u armiranobetonskim okvirima pri horizontalnom djelovanju.

U radu će se prikazati kvazidinamičko ispitivanje modela armiranobetonskih okvira s tri različite ispune. Model armiranobetonskog okvira predstavlja izdvojeni konstrukcijski element stvarne zgrade. Stvarna zgrada je okvirnog sistema koja se sastoji od prizemlja i šest katova tlocrtnih dimenzija 17,50x16,00 m.

Izdvojeni konstrukcijski element odnosno naši modeli napravljeni su u mjerilu 1:2,5. Dimenzije modela su 2,0x1,50 m, gdje su stupovi poprečnog presjeka 20x20 cm i greda 12x20 cm izvedeni od betona klase C30/37 i armirani rebrastom i glatkom armaturom.

Napravljeno je ukupno devet modela koji su zidani s tri različite ispune od zidnih elemenata marke $2,5 \text{ N/mm}^2$, $5,0 \text{ N/mm}^2$ i $10,0 \text{ N/mm}^2$. Svi modeli su ispitivani nakon 28 dana od dana zidanja ispune.

Ispitivanja modela (armiranobetonskih okvira) su pokazala da ispuna sudjeluje u nosivosti na horizontalno djelovanje. Rezultati će pokazati koliki je doprinos zidane ispune na djelovanje horizontalne sile kod armiranobetonskih okvira.

Ključne riječi: Ab okvir, Ab okvir s ispunom, zidna ispuna, eksperimentalno ispitivanje.

1 UVOD

U mnogim zemljama smještenim u seizmičkim područjima, armiranobetonski okviri ispunjeni su opekarskim blokovima. Iako paneli ispune bitno poboljšavaju i krutost i čvrstoću okvira, njihov doprinos često ostaje nerazmotren uglavnom zbog nedostatnog znanja kompozitnog ponašanja okvira i ispune.

Konstruktivni okviri često su ispunjeni zidem koje služi kao pregrada ili kao ispuna. U postupku statičkog proračuna zidovi ispuna uzimaju se kao nekonstruktivni elementi. Za konstrukciju se pretpostavlja da preuzima poprečne sile okvirkim elementima koji nose primarno momentima savijanja. Sudjelovanje ispune u odgovoru konstrukcije se najčešće zanemaruje mada njihov efekt nije zanemariv naročito kada je ispuna masivna. Okviri s ispunom su kompozitne konstrukcije koje se sastoje od okvira i ispune (koja se može grubo podijeliti na meku, srednju i krutu) za koju se u Hrvatskoj uobičajeno rabe blok opeke ili čak i betonski blokovi. Ispuna bitno mijenja odgovor konstrukcije na potres i njen se utjecaj mora na odgovarajući način uzeti u proračun.

Očito je kroz geometrijsko razmatranje da će razumno tjesno umetnuti zid s konačnom krutosti spriječiti deformacije kompatibilne okvirnom djelovanju. Okvir sa ispunom je bitno jači i krući nego okvir sam za sebe. Zanemarivanje interakcije između okvira i ispune je presudan korak u odbacivanju bitnog konstrukcijskog doprinosa.

Također, kritična područja u kompozitu zid-ispuna ne moraju biti ista kao kod samostalnog okvira. Mogući slučajevi integracije ispune i okvira su:

Duktilni okvir s nearmiranom ispunom: pri dosezanju maksimalne nosivosti ispune ona puca i ispada (eksplozija);

Neduktilni okvir s nearmiranom ispunom: eksplozivni gubitak nosivosti ispune rezultira u nastanku meke etaže i u konačnici do gubitka stabilnosti okvira;

Duktilni okvir s armiranom ispunom: ispuna se armira mrežama položenim u cementni malter s obje strane, a veza između armature ispune i elemenata okvira se ostvaruje sidrenom armaturom.

Neduktilni okvir s armiranom ispunom: uslijed koncentracije deformacija u 1-2 etaže zahtjevi za duktilitetom elemenata okvira su veliki.

Efekti koje zidana ispuna ima na odgovor armirano-betonskih okvira su: (a) Skraćenje prirodnog perioda osciliranja građevine, (b) Izmjena raspodjele katne poprečne sile u konstrukcijama s i bez ispune, (c) tendencija koncentracije oštećenja na nivou jednog kata, (d) dodatna torzija u sistemu uslijed nesimetričnog rasporeda ispune u tlocrtu, (e) koncentracija deformacija u pojedinim etažama uslijed nejednolike raspodjele ispune po visini te (f) povećanje koeficijenta prigušenja

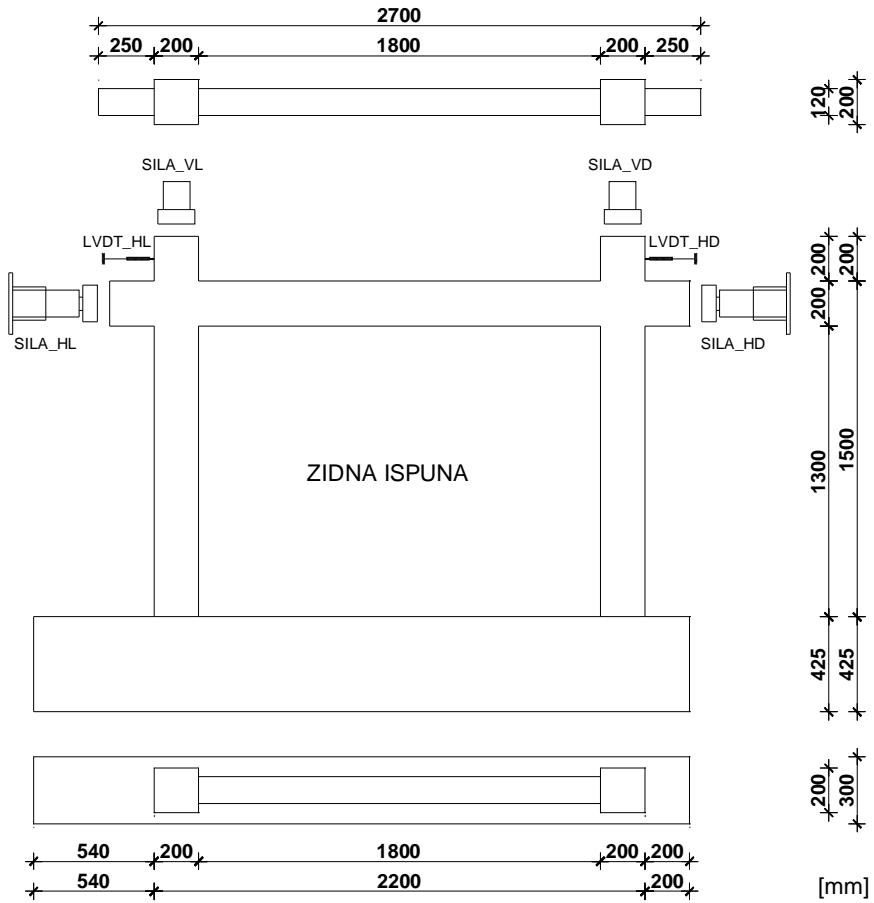
Ponašanje okvira s ispunom pod potresnim (horizontalnim) opterećenjem je vrlo složeno. Budući da je ponašanje nelinearno i u bliskoj vezi sa spojem između okvira i ispune, vrlo ga je teško predvidjeti analitičkim metodama ukoliko analitički modeli nisu poduprti i revidirani kroz eksperimentalne podatke. Eksperimentalno istraživanje je od velike važnosti za određivanje čvrstoće, krutosti i sposobnosti deformiranja.

2 ISPITNI UZORCI

U okviru znanstvenog projekta napravljeno je i ispitano ukupno 9 uzoraka a-b okvira s ispunom. Korištene su tri vrste ispune, veće čvrstoće (blok opeka MO10), srednje čvrstoće (euroterm MO5) i male čvrstoće (ytong MO2,5). Od svake ispune ispitana su po tri uzorka.

U radu će se prikazati usporedba rezultata dobivenih ispitivanjem a-b okvira s tri različite ispune kao i praznog a-b okvira. A-b okvir napravljen je u mjerilu 1:2,5 u svemu prema slici 1. od betona klase C30/37 i armiran je rebrastom armaturom RA400/500.

Postotak armiranja armiranobetonskih stupova iznosi 2,36%, dok je postotak armiranja grede u polju 1,31 % a na ležajevima 3,27 %. A-b okvir nalazi se u prizemlju šesterokatne okvirne konstrukcije tlocrtne površine 16x17,50m. Tijekom izvedbe ispitnih uzoraka zidanje zida je izvršeno naknadno, tj. nakon izvedbe okvira. Zidanje se izvodilo u produžnom vapnenom mortu. Čvrstoća morta na dan ispitivanja uzorka od blok opeke bila je $2,92 \text{ N/mm}^2$, uzorka od euroterma $2,86 \text{ N/mm}^2$ i uzorka od ytonga $13,89 \text{ N/mm}^2$. Modeli su projektirani sukladno s EC2 i EC8 normama i njihovi eksperimentalni rezultati su uspoređeni kao slučajevi koji se najčešće susreću u praksi.

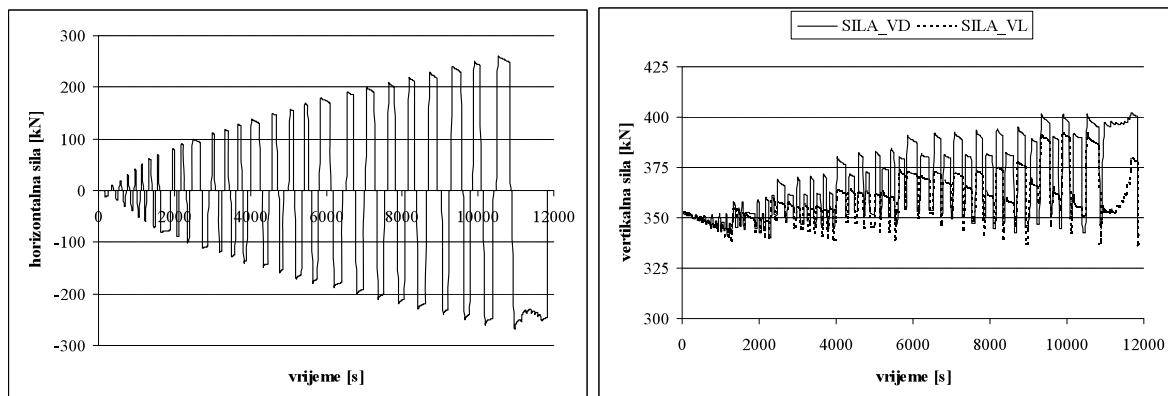


Sl. 1. Model armiranobetonskog okvira s ispunom

3 ISPITIVANJE UZORAKA

Ispitivanje uzorka je rađeno tako što smo prvo unijeli vertikalne sile u stupove koje zamjenjuje nedostajuće vertikalno opterećenje (cca. 350 kN u svakom stupu).

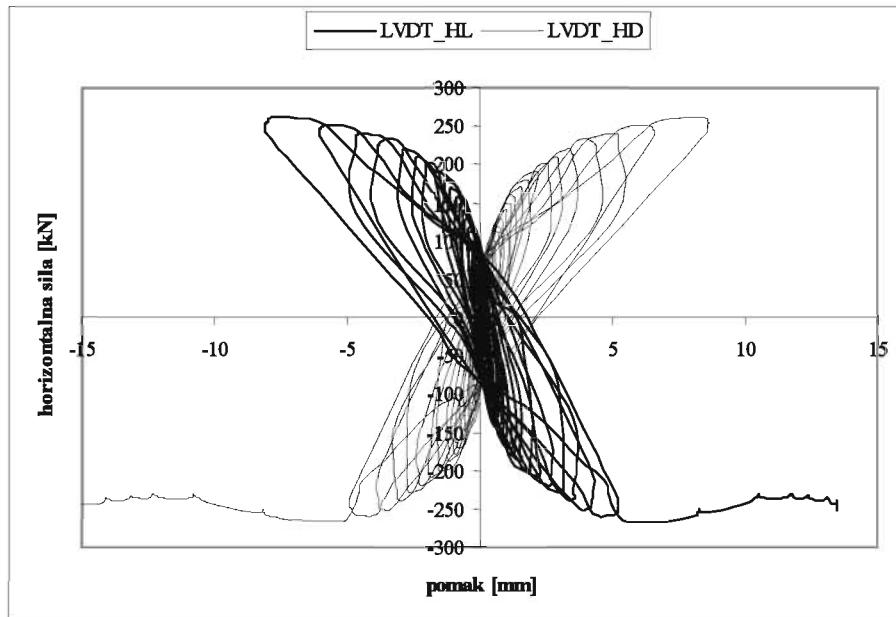
Veličina vertikalnih sila nije mijenjana tijekom ispitivanja, ali je do njene oscilacije dolazilo uslijed zakretanja pri unosu horizontalne sile. Veličina vertikalnih sila ovisno o vremenu i unosu horizontalnih sila prikazan je na slici 2. Horizontalna sila se unosila ciklički s korakom od 10 kN. Promjena vertikalne i horizontalne sile tijekom vremena na uzorcima prikazana je na slici 2.



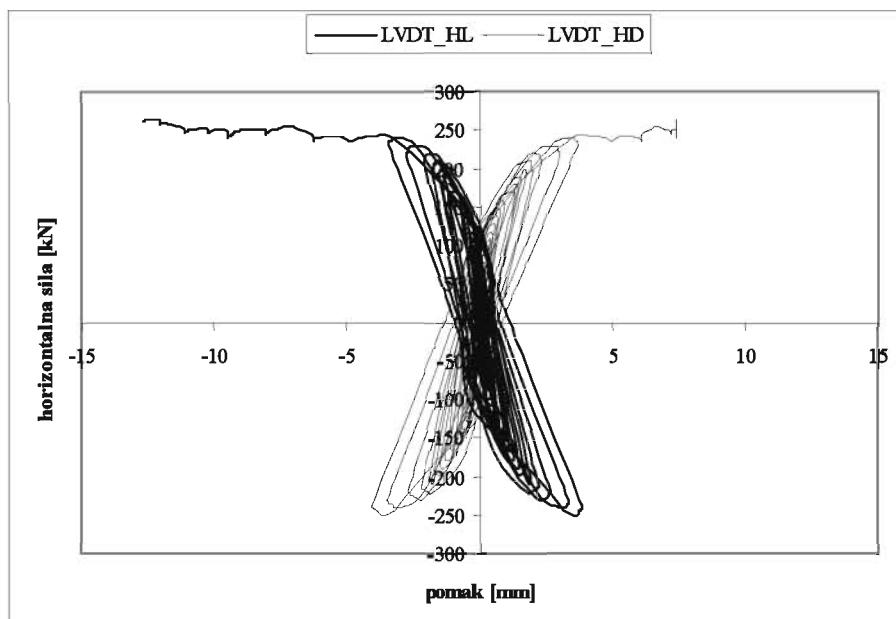
Sl. 2. Promjena horizontalne i vertikalne sile tijekom vremena

4 REZULTATI ISPITIVANJA

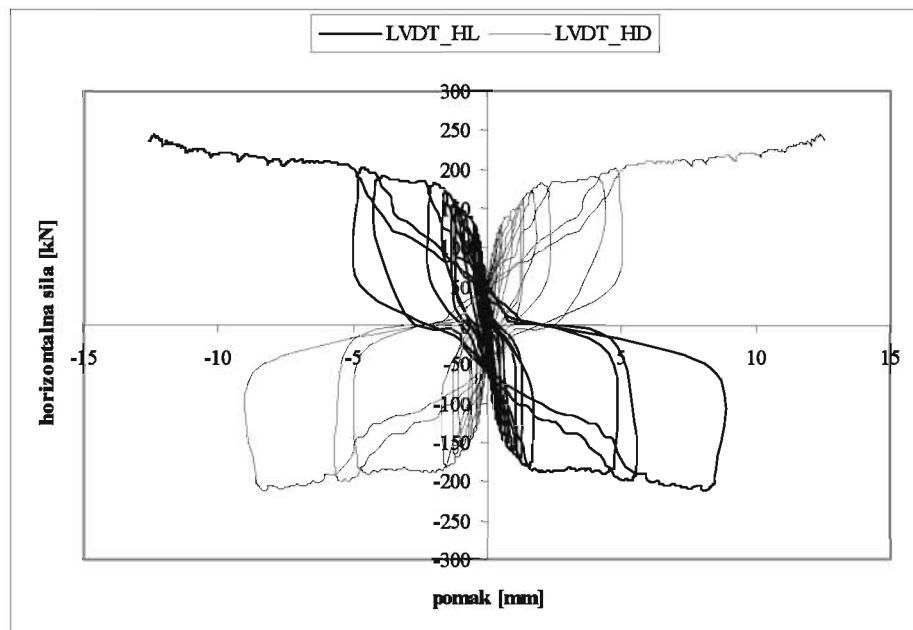
Od rezultata ispitivanja u ovom radu dat je prikaz horizontalnog pomaka jednog i drugog kraja a-b okvira s tri različite ispune u ovisnosti o veličini horizontalne sile kao i samog a-b okvira (slučaj kada je a-b okvir prazan). U Tablici 4.1. prikazane su vrijednosti horizontalne sile kod pojave prvih pukotina na ispunu kao i horizontalni pomak jednog i drugog kraja.



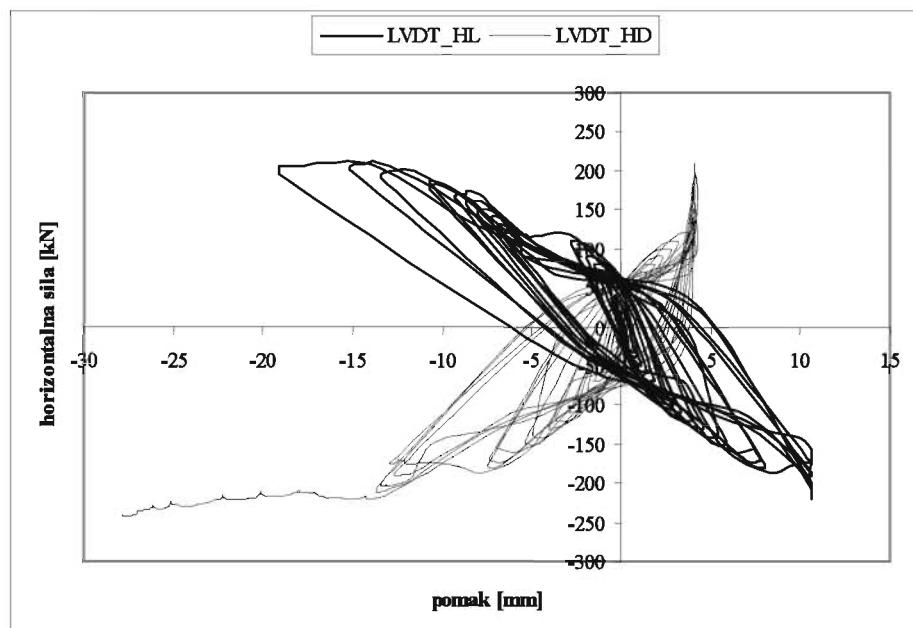
Sl. 3. Histerezna petlja ispitivanog a-b okvira s ispunom od blok opeke



Sl. 4. Histerezna petlja ispitivanog a-b okvira s ispunom od euroterma



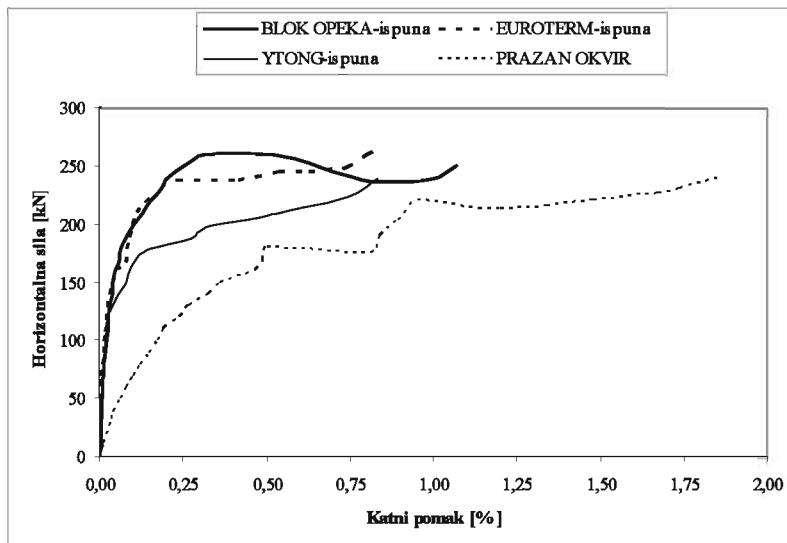
Sl. 5. Histerezna petlja ispitivanog a-b okvira s ispunom od ytonga



Sl. 6. Histerezna petlja ispitivanog a-b okvira bez ispune

Tablica 4.1. Vrijednosti horizontalnih sila kod pojava prvi pukotina kod ispune

AB okvir s ispunom	Pukotina Br.	H_{cr} [kN]	δ_{cr} [mm]	DR %	H_y [kN]	δ_y [mm]	DR %
Prazan okvir		70	1,38(-1,02)	0,09(-0,07)	220	14,28	0,95
		100	2,80(-2,50)	0,19(-0,17)			
		137	(-5,72)	(-0,38)			
Opeka	1	100	0,58(-0,31)	0,04(-0,02)	220	2,30	0,15
Euroterm	1	70	-0,26(0,25)	-0,02(0,02)	218	2,28	0,15
Ytong	1	137	0,87(-0,80)	0,06(-0,05)	207	8,49	0,57



Sl. 7. Primarne krivulje ispitivanog a-b okvira s tri različite ispune i bez ispune

5 ZAKLJUČAK

U radu je dat usporedan prikaz eksperimentalnih rezultata ispitivanja modela a-b okvira s tri različite zidne ispune kao i praznog a-b okvira pri djelovanju horizontalnih sila. Vidimo da u sva tri slučaja a-b okvira s ispunom trenutak nastajanja prvih pukotina se događa pri katnom pomaku od 0.05%, a nosivost imaju i pri katnom pomaku od približno 0.5%. Nakon ovog pomaka okvir s ispunom i pri pomaku od 1.0% katnog pomaka zadržava nosivost. A-b okvir bez ispune je znatno fleksibilniji i bez gubitka nosivosti trpi pomake i do 2% katne visine. Iz prikazanih eksperimentalnih rezultata može se vidjeti doprinos ispune na nosivost a-b okvira s ispunom u odnosu na prazan a-b okvir.

Istraživanje je urađeno u okviru znanstveno-istraživačkog projekta pod nazivom Seizmički proračun okvirnih konstrukcija s ispunom, broj (149-1492966-1536) kojeg je voditelj prof.dr.sc. Vladimir Sigmund.

Literatura:

- [1] CEN. Eurocode 2: Design of concrete structures, EN1992, Brussels; 2004.
- [2] CEN. Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance, EN 1998, Brussels; 2005.
- [3] T. Kalman, V. Sigmund. (2009). Seismic capacity of infilled frames using neural networks. 6th ICCSM Proceedings, Zagreb, Croatian Society of Mechanics.
- [4] Đ. Matošević, V. Sigmund, J. Zovkić. (2009). Experimental Testing of Masonry and Masonry Piers. 6th ICCSM Proceedings, Zagreb : Croatian Society of Mechanics.
- [5] V. Sigmund, T. Kalman. (2007). Dimenzioniranje armirano-betonskih okvira sa zidanom ispunom : usporedba Pravilnik i EC8. HKAIG, razred inženjera građevinarstva (ur.), Zagreb : HKAIG, Opatija.

Autori:

Prof.dr.sc. Vladimir Sigmund, Sveučilište u Osijeku, Građevinski Fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Crkvena 21, tel. 031540070, fax 031540071, e-mail: sigmund@gfos.hr, www.gfos.hr

Mr.sc. Jurko Zovkić, Sveučilište u Osijeku, Građevinski Fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Drinska 16a, tel. 031274377, fax 031274444, e-mail: jzovkic@gfos.hr, www.gfos.hr

SIMULACIJA LETA HELIKOPTERA U STVARNOM VREMENU MODELOM PRVE RAZINE

Zastavnik, F., Vrdoljak, M.

Sažetak: U ovom radu prezentiran je simulacijski model leta helikoptera. Za dinamiku leta primjenjen je 6DOF model, dok je rotor opisan modelom prve razine, analitičkim modelom rotora koji je primjenjen na glavni rotor, a uz određene preinake i na repni. Trup letjelice, horizontalni i vertikalni stabilizator su također modelirani pri čemu nije razmatrano međudjelovanje glavnog rotora na repni kao ni na preostale elemente konfiguracije helikoptera. Simulacija u stvarnom vremenu realizirana je u MATLAB/Simulink okružju te je napravljeno povezivanje sa FlightGear aplikacijom za vizualizaciju leta. Rezultati modela leta helikoptera su po komponentama uspoređeni s podatcima dostupnim iz literature. Rezultati analize i usporedbe pokazuju dobro poklapanje, a uočena odstupanja su objašnjena i svojstvena su primjeni modela rotora prve razine.

Ključne riječi: *simulacija u stvarnom vremenu, helikopter, 6DOF model; model rotora prve razine.*

1 UVOD

Namjena razvijenog modela je da bude upotrebljiv i upravljiv kao simulator u stvarnom vremenu. Zadatak je podijeljen u razvoj algoritma za proračun aerodinamičkih karakteristika rotora, razvoj 6DOF-a (model dinamike leta sa 6 stupnjeva slobode) te slanje izračunatih podataka leta helikoptera u vizualizacijsku aplikaciju FlightGear. Izrađeni su i moduli za očitavanje komandi pilota sa igraće palice (joysticka) i praćenje stanja okoline, bitnih za izračun aerodinamičkih sila. Važna karakteristika je modularnost modela te mogućnost da se koristi kao platforma za budući razvoj i istraživanje.

Ovaj model ograničio se na modeliranje leta helikoptera prve razine. U skladu s Padfieldom [3] modeli leta helikoptera prema razini matematičkog modela rotora svrstavaju se u tri razine sa svojstvenim ograničenjima i primjenom. Za simulatore letenja koristi se prva i druga razina dok se treća razina koristi za zadaće projektiranja helikoptera.

Prva razina, prema [3], koristi linearni model protoka i analitički izračunate sile. Lopatice su krute i modelirano je mahanje diferencijalnim jednadžbama. Zabacivanje se ne razmatra. Modeliran je samo let u slobodnoj struji zraka, utjecaj tla nije razmatran. Ovakav model rotora predstavlja model najniže razine vjernosti ponašanju stvarnog rotora helikoptera, ali ima primjenu za režime leta koji su duboko unutar ovojnica leta helikoptera i za ulazne komande ograničenog intenziteta i dinamike. Za režime leta koji su bliže granici uporabe letjelice, zahtjevniji manevri ili veće brzine leta nužno je primijeniti model rotora druge razine.

Osnovna namjena ovog modela je simulacija u stvarnom vremenu s pilotom u petlji iako je moguće definirati ulaz komandi pilota iz datoteke, što je primijenjeno kod off-line usporedbe s rezultatima drugih modela.

2 MODEL LETA HELIKOPTERA

Najkompleksniji dio modela leta helikoptera je svakako rotor. Velike brzine vrtnje uzrokuju nelinearne efekte. Krakovi rotora su vezani zglobnim vezama (ili ekvivalentnim konstrukcijskim rješenjima) te svaki krak ima u općem slučaju tri stupnja slobode gibanja - mahanje, zabacivanje i uvijanje. Zbog dužine i vitkosti krakova izraženo je savijanje i aeroelastični efekti.

Matematički analitički model, koji se ovdje koristi, diferencijalne jednadžbe aerodinamičkih opterećenja na krakovima integrira po dužini kraka. Tako dobivene analitičke funkcije mogu u jednom proračunu izračunati sile i momente na jednom kraku. Za to je potrebno poznavati komande pilota, dinamiku rotacije, dinamiku mahanja i dinamiku gibanja samog rotora, odnosno letjelice u prostoru. Pretpostavke analitičkog modela rotora su:

- linearni gradijent uzgona profila napadnog kuta,
- otpor profila je funkcija samo kvadrata potisne sile,
- utjecaj stlačivosti nije razmatran,
- prestrujavanje po rasponu lopatice nije razmatrano,
- nije moguće modelirati geometrijske specifičnosti krakova rotora.

Dinamika rotacije modelirana je konstantnom brzinom vrtnje što odgovara stvarnoj eksploataciji i najčešćem režimu rada rotora helikoptera, ali je u svakom trenutku simulacije poznat položaj svakog kraka rotora. U ovom radu nije razmatrana dinamika motora, kao ni potrošnja goriva, pa su masa i tenzor inercije konstantni iako se model može proširiti s tim elementima, kao i npr. sustavom upravljanja. Komande pilota za glavni rotor očituju se kroz kolektivnu te cikličnu uzdužu i bočnu komandu razmatranjem samo harmonika prvog reda.

Mahanje je modelirano diferencijalnom jednadžbom momenata oko zgloba mahanja, za koji je pretpostavljeno da se nalazi u centru rotacije. U diferencijalnoj jednadžbi za svaki krak razmatraju se doprinosi aerodinamičnih, centrifugalnih, žiroskopskih, intercijskih i eleastičnih momenata. Protok definira raspored induciranih brzina po površini rotora i iznimno je bitan kod određivanja karakteristika rotora. Inducirana brzina po disku linearno opada u smjeru brzine klizanja, tako da je naprijed najveća, a na izlaznoj strani rotora najmanja. Brzine i kutne brzine helikoptera također utječu na sliku strujanja na kraku što se uzima u obzir.

Modul 6DOF služi za prenošenje aerodinamičkih sila i momenata na kruti model helikoptera, te prevođenjem u brzine i pomake letjelice, a definiran je prema [2].

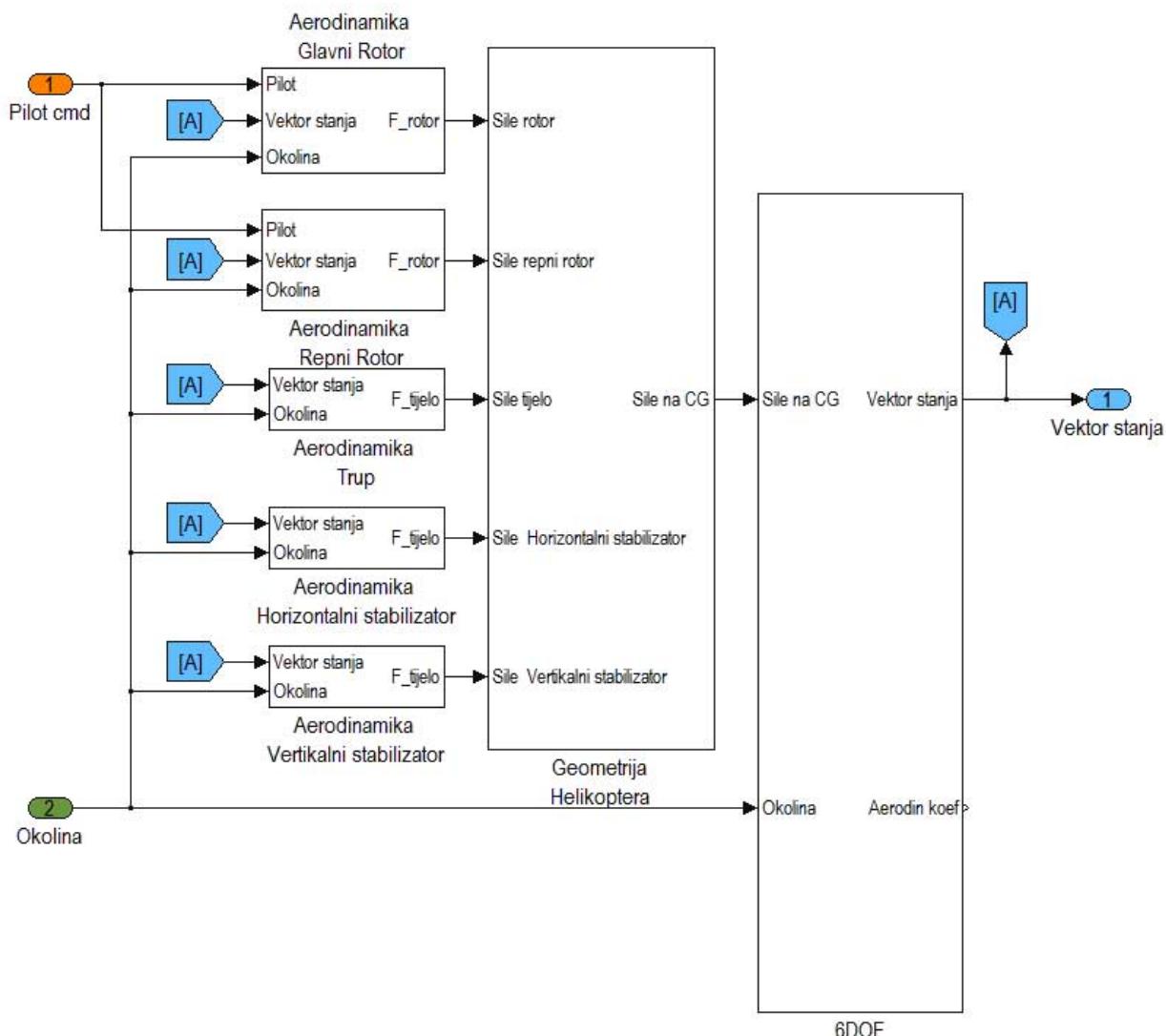
Za repni rotor primjenjen je isti model rotora uz pojednostavljenja zbog spregnutog uvijanja i mahanja, dok komandu repnog rotora predstavlja kolektivna komanda.

Komponente koje generiraju aerodinamičke sile - glavni rotor, repni rotor, trup, horizontalni i vertikalni stablizator imaju zasebne module. Primijenjeni analitički model rotora i cijele letjelice detaljno je opisan u [5].

3 SIMULINK MODEL

Osnovna shema Simulink modela prikazana na slici 1. Komande pilota kao i stanje okoline su već pripremljeni. Komande pilota ulazni su podaci za glavni i repni rotor, uz vektor stanja i stanje okoline koji su potrebni i drugim aerodinamičkim modulima. Rezultati svih modula su komponente sile i momenata koje se u modulu „Geometrija helikoptera“ svode na centar mase letjelice. 6DOF model za dane sile i momente, uz gravitacijsku akceleraciju, određuje brzine i pomake, odnosno kutne brzine i stav te položaj letjelice.

Blokovi „Aerodinamika glavni rotor“ i „Aerodinamika repni rotor“ predstavljaju modele glavnog, odnosno repnog rotora opisane u prethodnom poglavlju. Izlazi blokova trupa, horizontalnog i vertikalnog stabilizatora predstavljaju aerodinamičke sile i momente promatrane letjelice, a u općem slučaju to su funkcije dinamičkog tlaka, napadnog kuta i kuta klizanja.



S1. 1. Simulink model aerodinamičkih i dinamičkih modula

FlightGear je *open source* simulator letenja dok je u ovom radu korišten samo za grafički prikaz leta. U njega se putem mrežnog protokola šalju rezultati simulacije - vektor stanja.

4 REZULTATI

Namjena modela leta izrađenog u ovom radu je simuliranje dinamike helikoptera u stvarnom vremenu. Kao takvog teško ga je u cijelosti uspoređivati i verificirati jer ni jedan drugi model leta helikoptera nije bio dostupan za analizu, a svi podaci u literaturi bili su nepotpuni za postavljanje cijelog scenarija. Model je zato testiran i rezultati su uspoređeni s rezultatima drugih modela samo po modulima.

Za primjer u ovom radu korišten je generički primjer helikoptera prema primjerima proračuna iz [4]. Za navedeni primjer helikoptera bili su dostupni svi podaci potrebni za proračun te je bilo moguće direktno uspoređivati rezultate analiza za BET model primjenjen u [4]. Model po teoriji elementarnog kraka (BET, engl. *blade element theory*) diskretizira krak po dužini, u svakom vremenskom koraku za svaku krišku kraka određuje aerodinamičku silu te ih zbraja i svodi na centar mase letjelice. Pored navedenih rezultata BET modela za analizu rezultata primjenjen je model BET model rotora prema [6].

Primjenjeni 6DOF model, kao zasebna komponenta, je uspoređen s postojećim modelom i rezultati se potpuno poklapaju [5]. Model glavnog rotora je uspoređen s rezultatima modela po teoriji elementarnog kraka u lebdenju i horizontalnom letu. Model repnog rotora uspoređen je u lebdenju te su rezultati i zaključci slični onima glavnog rotora [5].

4.1 Usporedba glavnog rotora u lebdenju

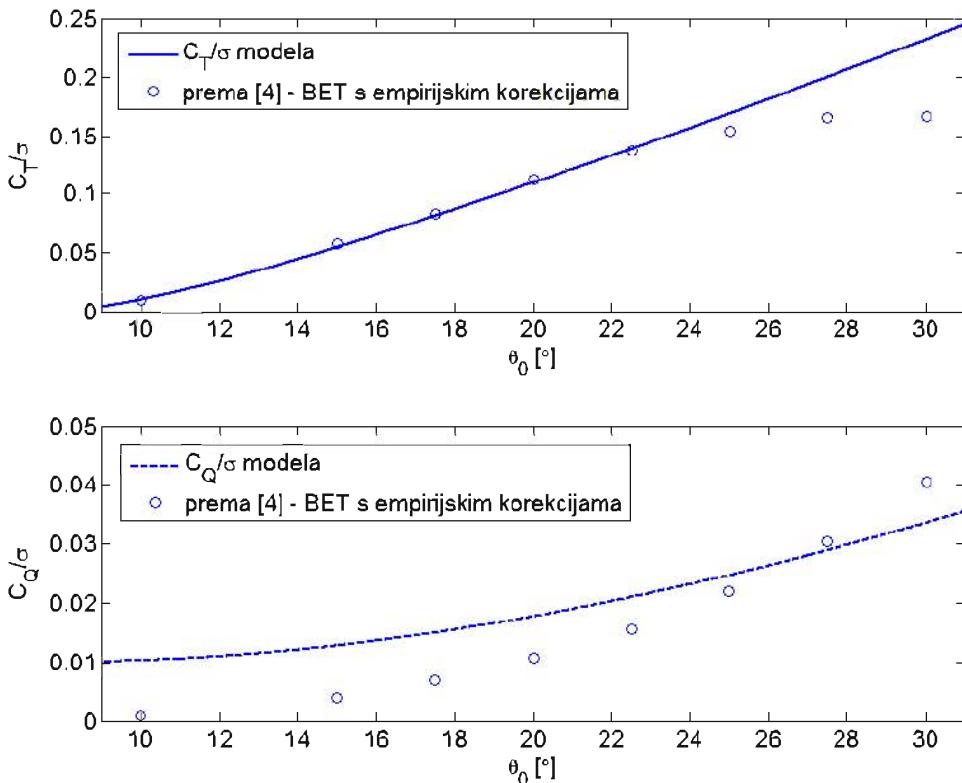
Na slici 2 vidi se dobro slaganje koeficijenta potisne sile C_T/σ s rezultatima BET modela prema [4] za manje vrijednosti postavnih kutova (kolektivne komande) θ_0 . Kod većih kutova dolazi do utjecaja nelinearnosti koeficijenta uzgona, odnosno pretpostavke analitičkog modela o koeficijentu uzgona su manje prihvatljive. Zato BET model koji uzima u obzir te nelinearnosti ima manji koeficijent u tom području.

Slično vrijedi i za koeficijenta okretnog momenta C_Q/σ , slika 2, dolje. Kod njega dominira koeficijent otpora, za veće postavne kuteve analitički model očekivano ima veća odstupanja. Nešto lošije slaganje koeficijenta okretnog momenta objašnjava se kompleksnom krivuljom koeficijenta otpora koju BET model potpuno slijedi, a analitički model aproksimira parabolom.

4.2 Usporedba glavnog rotora u horizontalnom letu

Za horizontalni let je komplikiranije uspoređivati rezultate jer je sam let definiran velikim brojem parametara. Rezultati modela rotora prema literaturi [3,4] nisu bili dovoljno detaljni da se postavi cijeli scenarij horizontalnog leta. Stoga je kod ove usporedbe korišten BET model rotora helikoptera iz [6].

Komande pilota za horizontalni let preuzete su iz [4] za modelirani helikopter. Pri horizontalnom letu helikopter i disk rotora se naginje prema naprijed - izračunati su podaci za naklon prema [4]. Razvijeni model nema implementiranu mogućnost određivanja uvjeta rada rotora za ravnotežni let, kao ni BET model [6]. Kako bi se



Sl. 2. Potisak i okretni moment glavnog rotora u lebdenju, usporedba s podacima iz [4]

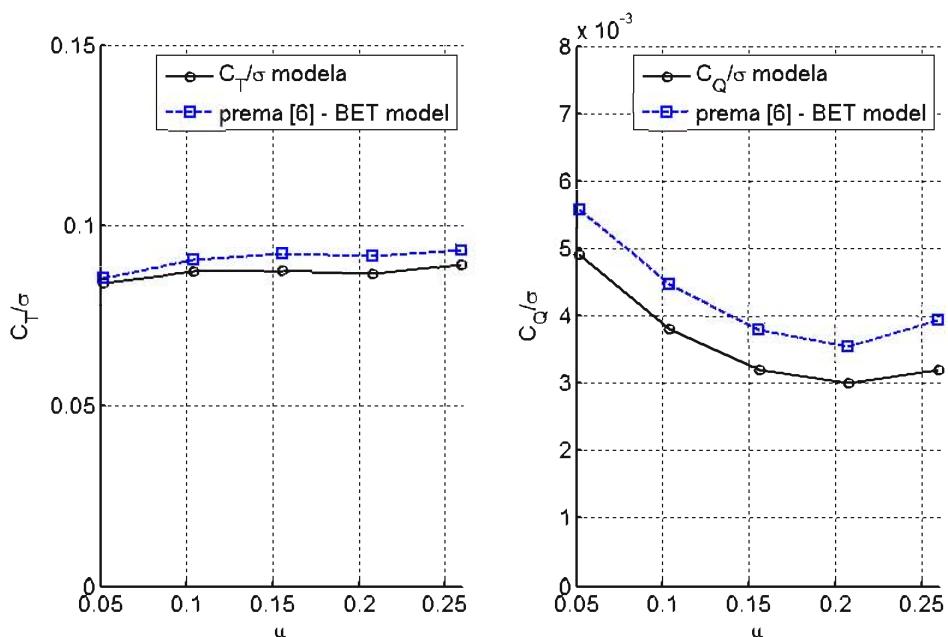
provela usporedba rezultata za kut mahanja je pretpostavljeno da su ciklične komponente jednake nuli, odnosno kut mahanja je sveden na konstantni kut konusa.

Na slici 3, vidi se dobro podudaranje i trend rezultata za koeficijent potiska C_T/σ u ovisnosti o koeficijentu napredovanja $\mu = \frac{V}{\Omega R}$. Okretni moment je veći kod BET modela. Prema literaturi [1] analitički modeli za rotor nisu upotrebljivi za koeficijent napredovanja iznad $\mu > 0.3$. To je za promatrani primjer (tangencijalna brzina na vrhu kraka $\Omega R = 198$ m/s) brzina leta od 60 m/s pri čemu na napredujućoj lopatici brzine dostižu Machove brojove od 0.75. Kao i pri lebdenju, koeficijent okretnog momenta pokazuje nešto lošije slaganje s BET modelom.

5 ZAKLJUČAK

Matematički model leta helikoptera s modelom rotora prve razine uspješno je implementiran u simulaciju u stvarnom vremenu s pilotom u petlji koja je realizirana u MATLAB/Simulink okružju s vizualizacijom primjenom FlightGear programa. Rezultati modela glavnog rotora uspoređeni su s rezultatima BET modela na odabranom primjeru helikoptera za lebdenje i horizontalni let.

Rezultati opisanog modela pokazuju dobro poklapanje s dostupnim rezultatima prema literaturi. Uočena odstupanja su objašnjena primjenom analitičkog modela rotora za koji su očekivana veća odstupanja za simulacije leta bliže ovojnici leta helikoptera.



Sl. 3. Potisak i okretni moment glavnog rotora u horizontalnom letu, usporedba s modelom prema [6]

Simulacija realizirana na opisan način provodi se na granici mogućnosti stolnog računala. S obzirom na primjenu MATLAB/Simulink okružja simulacija bi se mogla značajno ubrzati realizacijom u nekom drugom programskom jeziku (npr. C/C++) no time bi se izgubilo na fleksibilnosti, modularnosti i preglednosti modela. Upravo ta modularnost omogućiće primjenu opisanog simulacijskog modela u stvarnom vremenu za daljnji razvoj i istraživanja.

Literatura:

- [1] Chen, R.T.N., "A simplified rotor system mathematical model for piloted flight dynamics simulation", Technical report, NASA, 1979.
- [2] Janković, S., "Mehanika leta zrakoplova", Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2002.
- [3] Padfield, G.D., "Helicopter Flight dynamics: The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Models", Blackwell Publishing, Oxford, UK, 2nd edition, 2007.
- [4] Prouty, R.W., "Helicopter performance, stability and control", Krieger Publishing Company, Malabar, SAD, 2003.
- [5] Zastavnik, F., "Model leta helikoptera", Diplomski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2010.
- [6] Župan, J., "Model rotora helikoptera", Diplomski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2009.

Autori:

Filip Zastavnik, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za zrakoplovstvo, Ivana Lučića 5, e-mail: [fилip.zastavnik@gmail.com](mailto:fيلip.zastavnik@gmail.com)
 Milan Vrdoljak, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za zrakoplovstvo, Ivana Lučića 5, tel. +385 1 6168 530, e-mail: milan.vrdoljak@fsb.hr

PARAMETARSKA UZBUDA DISKRETNOG SUSTAVA SA KUBIČNIM NELINEARNOSTIMA ¶

Žigulić, R., Braut, S., Skoblar, A. & Štimac, G. ¶

Sažetak: U radu je obrađen problem parametarske uzbude sustava sa više stupnjeva slobode gibanja i sa slabim kubičnim nelinearnostima. U model su uključeni efekti unutarnje i parametarske rezonancije. Primjenjena je metoda višestrukih skala te su određena stacionarna rješenja kao i njihova stabilnost.

Ključne riječi: Parametarska uzbuda, slabe kubične nelinearnosti, metoda višestrukih skala.

1 UVOD¶

Parametarska uzbuda spada u teoriju prisilnih vibracija dinamičkih sustava gdje se za razliku od klasičnih primjera uzbudne sile, uzbuda uvodi kroz vremenski promjenljive koeficijente diferencijalne jednadžbe [1]. Za razliku od slučaja vanjske uzbude gdje mala uzbudna sila ne može prouzročiti veće odzive dok god uzbudna sila nije u blizine neke od vlastitih frekvencija sustava (primarna rezonancija), u slučaju parametarske uzbude mogući su ti fenomeni kada je uzbudna frekvencija blizu dvostrukog iznosa vlastite frekvencije sustava. Taj se fenomen naziva glavna parametarska rezonancija i rezultira podharmonijskim oscilacijama [2]. Parametarska uzbuda ima široku primjenu u tehniči a naročito kod proučavanja dinamike rotora u magnetskim ležajevima [3].

U radu će biti analizirane podharmonijske vibracije diskretnog sustava sa više stupnjeva slobode gibanja. Slaba će nelinearnost sustava biti uvedena kroz kombinacije kubičnih članova stupnjeva slobode gibanja [4]. Modulacijske jednadžbe promjene amplituda i faza za ovaj slučaj bit će dobivene korištenjem metode višestrukih skala [5] te će biti dobiveno stacionarno rješenje za takav sustav. Rezultati numeričkog proračuna bit će prezentirani u grafičkom obliku a u vezi sa dobivenim rezultatima bit će iznešena i teorija stabilnosti netrivijalnih rješenja.

2 DEFINICIJA PROBLEMA ¶

Diferencijalne jednadžbe gibanja sustava sa dva stupnja slobode gibanja sa kubičnim nelinearnostima te sa višefrekvencijskom parametarskom uzbudom su oblika

$$\ddot{u}_1 + \omega_1^2 u_1 + \varepsilon \left(2\mu_1 \dot{u}_1 + \alpha_1 u_1^3 + 3\alpha_2 u_1^2 u_2 + 3\alpha_3 u_1 u_2^2 + \alpha_4 u_2^3 + 2 \sum_{m=1}^M (u_1 f_{1m} + u_2 f_{2m}) \cos(\Omega_m t + \tau_{1m}) \right) = 0 , \quad (1)$$

$$\ddot{u}_2 + \omega_2^2 u_2 + \varepsilon \left(2\mu_2 \dot{u}_2 + \alpha_5 u_1^3 + 3\alpha_6 u_1^2 u_2 + 3\alpha_7 u_1 u_2^2 + \alpha_8 u_2^3 + 2 \sum_{n=1}^N (u_1 g_{1n} + u_2 g_{2n}) \cos(\Omega_n t + v_{1n}) \right) = 0 \quad , \quad (2)$$

gdje su ω_n , μ_n , α_n , f_{mn} , g_{mn} , Ω_m , Ω_n , τ_{1m} , v_{1m} i γ_{1n} konstante dok je ε mali bezdimenzijski parametar. Budući se radi o problemu sa slabim prigušenjem i slabim nelinearnostima, problem će biti dalje tretiran primjenom metode višestrukih skala (MMS), koja je dokazano jedna od najboljih metoda za rješavanje sličnih problema. U tom smislu bit će iznešena teorija ove metode te dobivene modulacijske jednadžbe amplituda i faza.

2.1 Primjena metode višestrukih skala¶

Temelj primjene metode višestrukih skala leži u razvoju rješenja u red oblika

$$u(t, \varepsilon) = u_{n0}(T_0, T_1) + \varepsilon u_{n1}(T_0, T_1) + \dots, \quad (3)$$

pri čemu je $T_0=t$ tzv. brza skala povezana sa promjenama koje su povezane sa vlastitim i uzbudnim frekvencijama, a $T_1=\varepsilon t$ tzv. spora skala povezana sa modulacijama amplituda i faznih kutova koje su uzrokovane nelinearnostima i parametarskim rezonancijama.

Koeficijent koji povezuje vlastite frekvencije prvog i drugog stupnja slobode gibanja naziva se destabilizirajući parametar za unutarnju rezonanciju σ_1 , te spomenuta veza za slučaj kubičnih nelinearnosti glasi

$$\omega_2 = 3\omega_1 + \varepsilon\sigma_1, \quad (4)$$

Veza je uzbudne frekvencije i vlastitih frekvencija prvog i drugog stupnja slobode gibanja definirana preko destabilizirajućeg parametra za parametarsku rezonanciju σ_2 , i zavisno od vrijednosti ovoga parametra, dobivaju se različiti efekti povezani sa različitim vrijednostima modulacijskih amplituda a_1 i a_2 . Ta je veza za parametarskom rezonancijom prvog stupnja slobode gibanja definirana izrazom

$$\Omega = 2\omega_1 + \varepsilon\sigma_2, \quad (5)$$

Razvojem funkcija pomaka u_1 i u_2 u red vezano uz vremenske skale T_0 i T_1 , izvođenjem derivacija funkcije (3) po vremenskim skalamama a sa ciljem uvrštavanja u (1), te uvrštavanjem rješenja homogenih jednadžbi vezanih uz brzu skalu $T_0=t$ u jednadžbe vezane uz sporu skalu $T_1=\varepsilon t$, dobivaju se izrazi

$$\begin{aligned} D_0^2 X_{11} + \omega_1^2 X_{11} = & -2i\omega_1 \left(\mu_1 A_1[T_1] + A_1'[T_1] \right) - 3\alpha_1 A_1^2[T_1] \overline{A}_1[T_1] - \\ & - 6\alpha_3 A_1[T_1] A_2[T_1] \overline{A}_2[T_1] - 3\alpha_2 A_2[T_1] \overline{A}_1^2[T_1] e^{i\sigma_1 T_1} - , \\ & - f_{11} \overline{A}_1[T_1] e^{i(\sigma_2 T_1 + \tau_{11})} + KKC + NSC \end{aligned} \quad (6)$$

i

$$D_0^2 X_{21} + \omega_2^2 X_{21} = -2i\omega_2 \left(\mu_2 A_2 [T_1] + A_2' [T_1] \right) - 3\alpha_8 A_2^2 [T_1] \overline{A_2} [T_1] - \\ - 6\alpha_6 A_1 [T_1] A_2 [T_1] \overline{A_1} [T_1] - \alpha_5 A_1^3 [T_1] e^{-i\sigma_1 T_1} + KKC + NSC \quad , \quad (7)$$

gdje su sa KKC označeni konjugirano kompleksni članovi, dok se oznaka NSC odnosi na članove koji nisu sekularni. Uvrštavanjem supstitucija

$$A_n = \frac{1}{2} a_n e^{i\beta_n}, \overline{A}_n = \frac{1}{2} a_n e^{-i\beta_n}, \quad (8)$$

te separiranjem realnih i imaginarnih dijelova jednadžbi (6) i (7), dobivaju se tzv. modulacijske jednadžbe

$$\begin{aligned} a_1' &= -\mu_1 a_1 - \frac{1}{2\omega_1} a_1 f_{11} \sin \gamma_2 - \frac{3}{8\omega_1} \alpha_2 a_1^2 a_2 \sin \gamma_1 \\ a_1 \beta_1' &= \frac{3}{8\omega_1} \alpha_1 a_1^3 + \frac{3}{8\omega_1} \alpha_2 a_1^2 a_2 \cos \gamma_1 + \frac{3}{4\omega_1} \alpha_3 a_1 a_2^2 + \frac{1}{2\omega_1} f_{11} a_1 \cos \gamma_2 \\ a_2' &= -\mu_2 a_2 + \frac{1}{8\omega_2} \alpha_5 a_1^3 \sin \gamma_1 \\ a_2 \beta_2' &= \frac{1}{8\omega_2} \alpha_5 a_1^3 \cos \gamma_1 + \frac{3}{4\omega_1} \alpha_6 a_1^2 a_2 + \frac{3}{8\omega_2} \alpha_8 a_2^3 \end{aligned} \quad , \quad (9)$$

pri čemu je

$$\gamma_1 = T_1 \sigma_1 + \beta_2 - 3\beta_1, \quad \gamma_2 = T_1 \sigma_2 - 2\beta_1 + \tau_{11}, \quad (10)$$

Uzimanjem u obzir relacije (10), dobiva se sustav nelinearnih jednadžbi stacionarnih vibracija diskretnog sustava sa kubičnim nelinearnostima

$$\begin{aligned} \mu_1 + \frac{3}{8\omega_1} \alpha_2 a_1 a_2 \sin \gamma_1 + \frac{1}{2\omega_1} f_{11} \sin \gamma_2 &= 0 \\ \frac{\sigma_2}{2} - \frac{3}{8\omega_1} \alpha_1 a_1^2 - \frac{3}{8\omega_1} \alpha_2 a_1 a_2 \cos \gamma_1 - \frac{3}{4\omega_1} \alpha_3 a_2^2 - \frac{1}{2\omega_1} f_{11} \cos \gamma_2 &= 0 \\ \mu_2 a_2 - \frac{1}{8\omega_2} \alpha_5 a_1^3 \sin \gamma_1 &= 0 \\ a_2 \left(\frac{3\sigma_2}{2} - \sigma_1 \right) - \frac{1}{8\omega_2} \alpha_5 a_1^3 \cos \gamma_1 - \frac{3}{4\omega_1} \alpha_6 a_1^2 a_2 - \frac{3}{8\omega_2} \alpha_8 a_2^3 &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (11)$$

Rješavanjem sustava nelinearnih algebarskih jednadžbi (11) dobivaju se modulacije amplituda i faznih kutova ($\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$), prikazane na sl. 1 – 4, za različite vrijednosti destabilizirajućeg parametra za parametarsku rezonanciju σ_2 . Za rješavanje tog sustava jednadžbi uobičajeno se koriste različite modifikacije Newton – Raphsonove metode, a u ovom je radu korištena tzv. Broydenova poboljšana metoda [6]. Kako konvergencija ka rješenju svih tih metoda u velikoj mjeri ovisi o odabiru početnih uvjeta tj. domene u kojoj će se tražiti rješenje, to je od velike pomoći ukoliko se sustav (11) može reducirati na manji broj jednadžbi (modulacije amplituda α_1 i α_2).

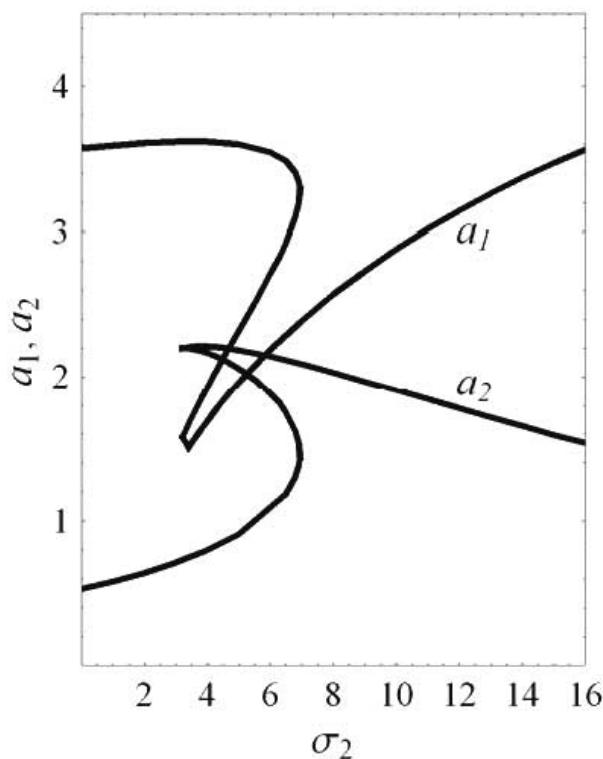
2.2 Stabilnost netrivijalnih rješenja

Stabilnost je netrivijalnih rješenja moguće odrediti korištenjem modulacijskih jednadžbi, uzimajući u obzir jednadžbe (10). Ukoliko se u te jednadžbe uvrsti perturbacija rješenja oko stacionarnog rješenja

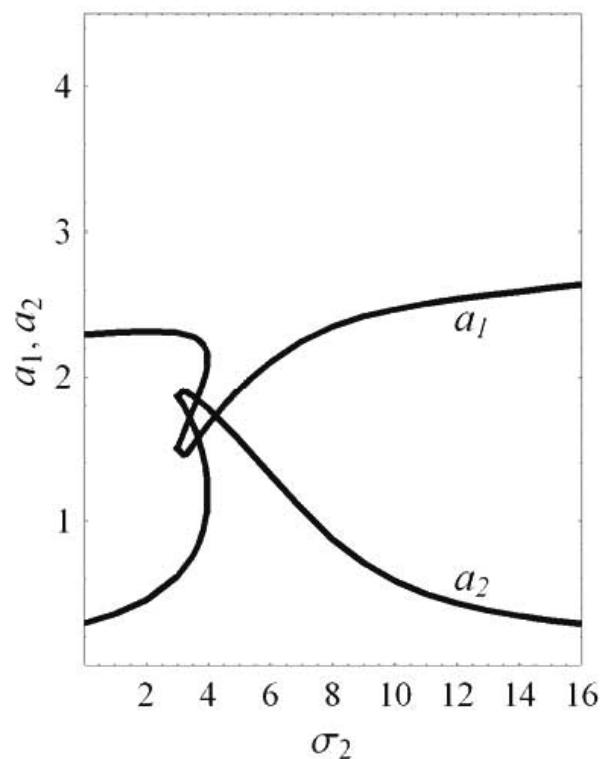
$$\alpha_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}, \quad \gamma_{i0} + \gamma_{i1} \quad (i=1,2), \quad (12)$$

pri čemu su α_{i1} i γ_{i1} infinitezimalno male, vremenski zavisne perturbacije, moguće je linearizacijom doći do sljedećeg sustava diferencijalnih jednadžbi prvog reda

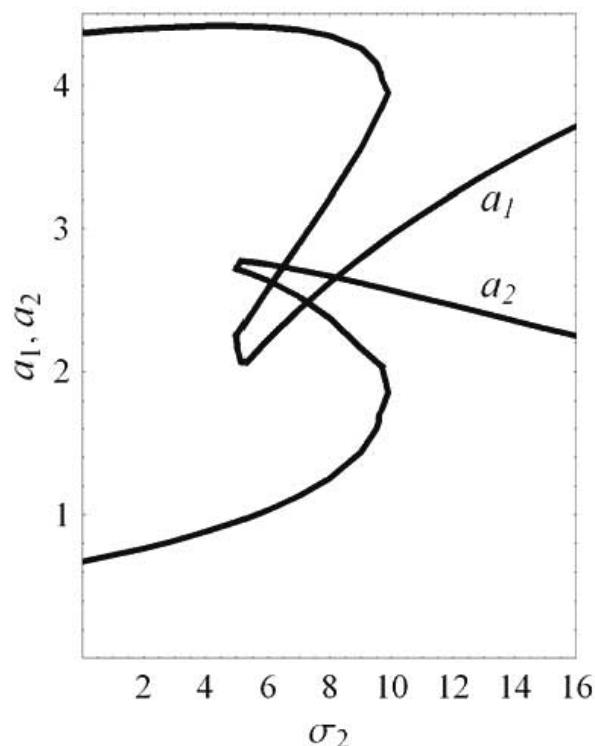
$$\begin{aligned} \alpha'_{11} &= \left(\mu_1 + \frac{3\alpha_2}{4\omega_1} \alpha_{10} \alpha_{20} \sin \theta_{10} + \frac{1}{2\omega_1} f_{11} \sin \theta_{20} \right) \alpha_{11} - \left(\frac{3\alpha_2}{8\omega_1} \alpha_{10}^2 \sin \theta_{10} \right) \alpha_{21} - \\ &\quad - \left(\frac{3\alpha_2}{8\omega_1} \alpha_{10}^3 \cos \theta_{10} \right) \theta_{11} - \left(\frac{1}{2\omega_1} f_{11} \alpha_{10} \cos \theta_{20} \right) \theta_{21} \\ \alpha'_{21} &= \left(\frac{3\alpha_2}{8\omega_2} \alpha_{10}^2 \sin \theta_{10} \right) \alpha_{11} - \mu_2 \alpha_{21} + \left(\frac{3\alpha_2}{8\omega_2} \alpha_{10}^3 \cos \theta_{10} \right) \theta_{11} \\ \theta'_{11} &= \left(\frac{\sigma_1}{\alpha_{10}} + \left(\frac{3\alpha_3}{2\omega_2} - \frac{9\alpha_1}{4\omega_1} \right) \alpha_{10} - \frac{9\alpha_3 \alpha_{20}^2}{4\omega_2 \alpha_{10}} - \frac{1}{\omega_1 \alpha_{10}} f_{11} \cos \theta_{20} \right) \alpha_{11} \\ &\quad + \left(\frac{3\alpha_3 \alpha_{10}}{4\omega_2 \alpha_{20}} + \frac{9\alpha_5}{8\omega_2} \alpha_{20}^2 - \frac{9\alpha_3}{2\omega_1} \alpha_{20} + \frac{9\alpha_2}{8\omega_1} \alpha_{10}^2 \cos \theta_{10} \right) \alpha_{21} + \\ &\quad + \left(\frac{3\alpha_2}{4\omega_1} \alpha_{10}^2 \alpha_{20} \sin \theta_{10} + \frac{3\alpha_2}{8\omega_1} \alpha_{10} \alpha_{20} \sin \theta_{10} \right) \theta_{21} - \left(\frac{1}{2\omega_1} f_{11} \sin \theta_{20} \right) \theta_{21} \\ \theta'_{21} &= \left(\frac{9\alpha_1}{4\omega_1} \alpha_{10} + \frac{3\alpha_3 \alpha_{20}^2}{2\omega_1 \alpha_{10}} + \frac{1}{\omega_1 \alpha_{10}} f_{11} \cos \theta_{20} + \frac{3\alpha_2}{2\omega_1} \alpha_{10} \alpha_{20} \cos \theta_{10} \right) \alpha_{11} \\ &\quad + \left(\frac{\sigma_1}{\alpha_{10}} + \frac{3\alpha_2}{\omega_1} \alpha_{20} - \frac{3\alpha_2}{4\omega_1} \alpha_{10}^2 \cos \theta_{10} \right) \alpha_{21} + \\ &\quad + \left(\frac{3\alpha_2}{4\omega_1} \alpha_{10}^2 \alpha_{20} \sin \theta_{10} \right) \theta_{11} + \left(\frac{1}{2\omega_1} f_{11} \sin \theta_{20} \right) \theta_{21} \end{aligned} \quad (13)$$



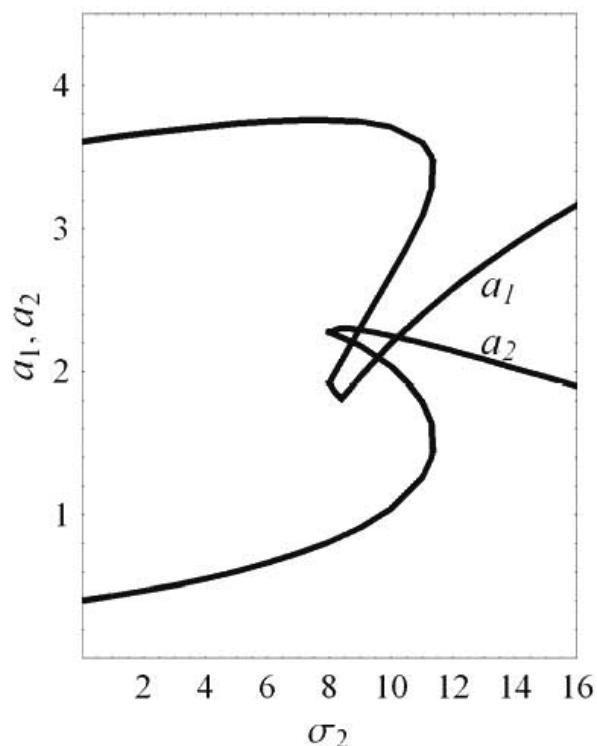
Slika 1. Promjena modulacije amplituda kao funkcija destabilizirajućeg parametra σ_2 ($\mu_1=0.1$, $\mu_2=0.2$, $a_1=a_2=a_3=a_5=a_6=1.0$, $a_4=a_7=a_8=0$, $\sigma_1=2.0$, $\omega_1=0.2$, $\omega_2=0.6$, $f_{11}=10$.).



Slika 2. Promjena modulacije amplituda kao funkcija $a_1=2.5$.



Slika 3. Promjena modulacije amplituda kao funkcija $f_{11}=15.0$



Slika 4. Promjena modulacije amplituda kao funkcija $\sigma_1=8.0$

Za određivanje netrivijalnih rješenja, potrebno je nad sustavom (13) provesti proceduru rješavanja problema vlastitih vrijednosti. Rješenje će biti stabilno onda i samo onda ako je realni dio svake vlastite vrijednosti koeficijenata matrice, manji od nule.

3 ZAKLJUČAK

U radu je prikazan postupak određivanja vibracijskih karakteristika sustava sa dva stupnja slobode gibanja, sa slabim kubičnim nelinearnostima, koji se nalazi u stanju prisilnih vibracija pod djelovanjem parametarske uzbude. Primjenjena je metoda višestrukih skala te su uočeni interesantni fenomeni kao što su opadanje amplituda te pomicanje rezonantnih krivulja ka nižim frekvencijama kod povećanja parametra α_1 , povećanje amplituda i pomicanje ka višim frekvencijama pri povećanju f_{11} i σ_1 , itd.

Literatura

- [1] Nayfeh, A.H., Mook, D.T., "Nonlinear Oscillations", Willey Classics Library Edition, New York, 1995.
- [2] Elnagar, A.M., Alhanadwah, A.A. "Parametric Excitation of Subharmonic Oscillations", International Journal of Theoretical Physics, Vol. 36, No. 8, 1997., 1921 – 1940.
- [3] Ji, J., Hansen, C.H., "Non-Linear Oscillations of the Rotor in Active Magnetic Bearings", Journal of Sound and Vibrations, Vol.240, No.4., 2001, str. 599 - 512.
- [4] Manevich, A.I, Manevitch, L.I., "The Mechanics of nonlinear systems with internal resonances", Imperial College Press, London, 2005
- [5] Nayfeh, A.H. "Perturbation methods", Wiley Classics Library Edition, New York, 1979.
- [6] Broyden, C.G. "A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations", Mathematics of Computation, Vol. 19, No. 92, 1965., 577 – 593.

Autori:

Roberto Žigulić, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051651492, fax: 051651416, e-mail: zigulic@riteh.hr, web stranica:

http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/roberto_eng.htm

Sanjin Braut, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051651502, fax: 051651416, e-mail: sbraut@riteh.hr, web stranica:

http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/sanjin_eng.htm

Ante Skoblar, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051651498, fax: 051651490, e-mail: askoblar@riteh.hr, web stranica:

http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/ante_eng.htm

Goranka Štimac, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051651498, fax: 051651416, e-mail: gstimac@riteh.hr, web stranica:

http://www.riteh.uniri.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/goranka_eng.htm

NUMERIČKA ANALIZA SPOJA GREDNE KONSTRUKCIJE OPTEREĆENOGL NA SAVIJANJE I AKSIJALNO OPTEREĆENJE

Turkalj, G., Merdanović, E. & Munjas, N.

Sažetak: U ovom radu prikazan je konačnoelementni model za analizu mehaničkog ponašanja polukrutihih spojeva grednih konstrukcija. Opterećenje spoja sastojat će se od monotono promjenjivog momenta savijanja i konstantne aksijalne sile, dok će deformacija spoja biti izražena preko rotacije spoja/priklučka. Ponašanje spoja bit će izraženo krivuljama rotacijske krutosti za različite vrijednosti aksijalne sile. Cilj je ove analize dobiti matematičke funkcije koje opisuju međusobnu ovisnost momenta savijanja, rotacije spoja i aksijalne sile, a koje će se potom rabiti za opisivanje krutosti spojeva okvirnih konstrukcija u numeričkom modelu temeljenom na grednom konačnom elementu.

Ključne riječi: Gredne konstrukcije, Polukruti spojevi, Metoda konačnih elemenat.

1 UVOD ¶

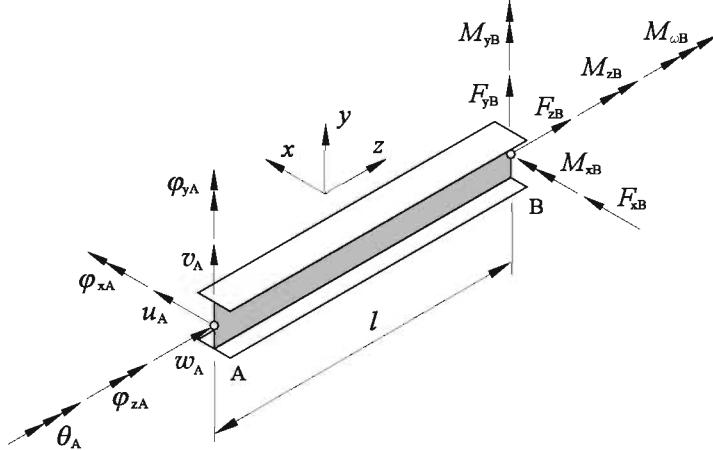
Ponašanje spojeva i priključaka pojedinih dijelova elemenata čeličnih grednih i okvirnih konstrukcija predmetom je intenzivnog istraživanja unazad zadnjih desetak godina [1-5]. S obzirom na rotacijsku krutost, spojeve/priklučke djelimo na krute, polukrute i zglobne priključke [6, 7]. Pošto su priključci *greda – stup – greda* grednih konstrukcija dominantno opterećeni na savijanje, ponašanje je priključaka u pravilu opisivano krivuljama $M-\varphi$ dobivenim eksperimentalno ili numerički bez utjecaja aksijalne (normalne) sile. Eurokod norma svojim aneksom J određuje da se taj utjecaj može zanemariti sa vrijednosti aksijalne sile manje od 10 % vrijednosti N_{pl} [8]. Međutim, postoje gredne i okvirne konstrukcije kod kojih se utjecaj aksijalne sile na ponašanje priključka [9, 10].

U ovom radu prikazan je numerički model za analizu mehaničkog ponašanja spoja *stup-greda*. Diskretizacija spoja i njegovih sastavnih dijelova izvedena je primjenom 3D konačnih elemenata. Materijal spoja bit će modeliran kao elastoplastičan. Opterećenje spoja sastojat će se od monotono promjenjivog momenta savijanja i konstantne aksijalne sile, dok će deformacija spoja biti izražena preko rotacije spoja. Ponašanje spoja bit će izraženo krivuljama ovisnosti momenta savijanja i rotacije spoja za različite vrijednosti aksijalne sile. Ove bi se krivulje prikazane u obliku matematičkih funkcija rabile za opisivanje krutosti spojeva okvirnih konstrukcija u numeričkom modelu temeljenom na grednom konačnom elementu, a kojeg je razvio prvi autor ovoga rada [11] primjenom principa virtualnih radova temeljenog na *updated Lagrangian* (UL) inkrementalnoj formulaciji. Za opisivanje elastoplastičnih deformacija primijenjena je metoda plastičnih zglobova.

2 GREDNI KONAČNI ELEMENTA

2.1 Ravnotežne jednadžbe konvencionalog elementa

Na Sl. 1 prikazan je pravocrtni tankostijeni gredni konačni element s 14 stupnjeva slobode gibanja (7 po čvoru elementa). Pri tome su s A i B označeni čvorovi konačnog elementa, z je uzdužna os konačnog elementa koja spaja težišta čvornih presjeka, dok su x i y glavne centralne osi poprečnog presjeka.



Sl. 1. Tankostijeni gredni konačni element: cvorni pomaci i čvorne sile

Vektori čvornih pomaka i čvornih sila e-tog elementa jesu:

$$\mathbf{u}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A^e \\ \mathbf{u}_B^e \end{Bmatrix}; \quad (\mathbf{u}_i^e)^T = \{w_i \quad u_i \quad v_i \quad \varphi_{zi} \quad \varphi_{xi} \quad \varphi_{yi} \quad \theta_i\}, \quad i = A, B, \quad (1)$$

$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_A^e \\ \mathbf{f}_B^e \end{Bmatrix}; \quad (\mathbf{f}_i^e)^T = \{F_{zi} \quad F_{xi} \quad F_{yi} \quad M_{zi} \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{\omega i}\}, \quad i = A, B. \quad (2)$$

Ravnotežne jednadžbe grednom elementu dobivene su primjenom lineariziranog principa virtualnih pomaka, UL inkrementalne formulacije i nelinearnog polja pomaka nesimetričnog poprečnog presjeka, a koje uključuje efekt velikih rotacija i utjecaj ograničenog vitopererenja. Sukladno UL formulaciji te uz pretpostavku da vrijedi Hookeov zakon, princip virtualnih radova za konačni element u nepoznatoj konfiguraciji C₂, izražen u odnosu na zadnju poznatu konfiguraciju C₁, glasi [12]:

$$\delta \mathcal{U}_E + \delta \mathcal{U}_G = \delta^2 \mathcal{W} - \delta^1 \mathcal{W}, \quad (3)$$

gdje prvi član s lijeve strane znaka jednakosti predstavlja virtualnu inkrementalnu potencijalnu energiju deformiranja:

$$\delta \mathcal{U}_E = \int_V \mathcal{C}_{ijkl} e_{kl} \delta_1 e_{ij}^{-1} dV = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_E^e \mathbf{u}^e, \quad (4)$$

drugi član virtualni inkrementalni geometrijski potencijal:

$$\delta \mathcal{U}_G = \int_V \mathcal{S}_{ij} \delta_1 \eta_{ij}^{-1} dV + \int_V \mathcal{S}_{ij} \delta_1 \tilde{e}_{ij}^{-1} dV - \int_{A_\sigma} t_i \delta \tilde{u}_i^{-1} dA_\sigma = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_G^e \mathbf{u}^e, \quad (5)$$

dok članovi s desne strane znaka jednakosti predstavljaju virtualne radove vanjskih sila na kraju i početku inkrementa, tj.

$$\begin{aligned}\delta^2\mathcal{W} &= \int_{A_\sigma}^2 t_i \delta u_i^{-1} dA_\sigma, \quad \delta^1\mathcal{W} = \int_V^1 \mathcal{S}_{ij} \delta_1 e_{ij}^{-1} dV = \int_{A_\sigma}^1 t_i \delta u_i^{-1} dA_\sigma \\ \delta^2\mathcal{W} - \delta^1\mathcal{W} &= (\delta \mathbf{u}^e)^T (\mathbf{f}^e + \mathbf{f}_{ekv}^e); \quad \mathbf{f}^e = {}^2\mathbf{f}^e - {}^1\mathbf{f}^e; \quad \mathbf{f}_{ekv}^e = {}^2\mathbf{f}_{ekv}^e - {}^1\mathbf{f}_{ekv}^e\end{aligned}\quad (6)$$

U gornjim izrazima \mathcal{C}_{ijkl} predstavlja tenzor elastičnih konstanti, \mathcal{S}_{ij} drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja, t_i površinske ili kontaktne sile, e_{ij} Green-Lagrangeov tenzor deformacija, u_i i \tilde{u}_i primarne i sekundarne komponente nelinearnog polja pomaka poprečnog presjeka, dok \mathbf{k}_E^e i \mathbf{k}_G^e predstavljaju elastičnu (linearnu) i geometrijsku (nelinearnu) matricu krutosti konačnog elementa. Lijevi donji indeks predstavlja konfiguraciju u odnosu na koju je fizikalna veličina definirana. Vektor \mathbf{f}_{ekv}^e sadrži komponentne dobivene iz uvjeta o ekvivalentnosti virtualnih radova kontinuiranog i ekvivalentnog čvornog opterećenja.

Povratom se izraza (4)-(6) u izraz (3) dobivaju inkrementalne ravnotežne jednadžbe konačnog elementa:

$$\mathbf{f}^e + \mathbf{f}_{ekv}^e = \mathbf{k}_T^e \mathbf{u}^e; \quad \mathbf{k}_T^e = \mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e, \quad (7)$$

pri čemu, sada, \mathbf{f}^e predstavlja vektor inkrementalnih čvornih sila, dok je \mathbf{k}_T^e elastična tangentna matrica krutosti za elastični slučaj. Ukoliko se, pak, kod konačnog elementa pojavljuju i plastične deformacije, tada je vektor inkrementalnih čvornih sila konačnog elementa:

$$\mathbf{f}^e + \mathbf{f}_{ekv}^e = \mathbf{k}_{T,EP}^e \mathbf{u}^e; \quad \mathbf{k}_{T,EP}^e = \mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e - \mathbf{k}_P^e, \quad (8)$$

gdje je $\mathbf{k}_{T,EP}^e$ elastoplastična tangentna matrica krutosti konačnog elementa, dok \mathbf{k}_P^e predstavlja tzv. plastičnu redukcijsku matricu konačnog elementa [13].

Sukladno izrazu (8), čvorne sile na kraju inkrementalnog koraka iznose:

$${}^2\mathbf{f}^e = {}^1\mathbf{f}^e + \mathbf{f}^e = {}^1\mathbf{f}^e + \mathbf{k}_{T,EP}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{f}_{ekv}^e. \quad (9)$$

Jasno, vektor ${}^2\mathbf{f}^e$ sadrži komponente čvornih sila konačnog elementa u konfiguraciji C_2 , ali pravci kojih su paralelni s pravcima osi konačnog elementa u konfiguraciji C_1 . Stoga komponente tog vektora ne možemo smatrati generaliziranim silama. Za određivanje vektora ${}^2\mathbf{f}^e$ čije komponente djeluju na pravcima osi konačnog elementa u konfiguraciji C_2 , u ovoj će se analizi koristiti EA (elementary approach) pristup [14]:

$${}^2\mathbf{f}^e = \mathbf{t}_{12}^e \left({}^1\mathbf{f}^e + \mathbf{k}_{T,EP}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{f}_{ekv}^e \right). \quad (10)$$

gdje je \mathbf{t}_{12}^e matrica koja konačni element transformira iz konfiguracije C_1 u C_2 .

Ovdje je potrebno napomenuti da primjena matrice \mathbf{k}_P^e u ravnotežnim jednadžbama pretpostavlja da se materijal konstrukcije u području elastoplastičnih deformacija ponaša kao idealno plastičan, da su sve plastične deformacije koncentrirane u plastičnim zglobovima nulte duljine te da postoji kontinuirana i konveksna funkcija tečenja [15]:

$$\Phi = \Phi({}^2\mathbf{f}^e) = 1. \quad (11)$$

Iz ove se funkcije, potom, dobiva gradijentna matrica:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_B \end{bmatrix}, \quad (12)$$

gdje je:

$$\mathbf{G}_i^T = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_{zi}} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial F_{xi}} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial F_{yi}} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial M_{zi}} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial M_{xi}} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial M_{yi}} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial M_{oi}} \right\}; \quad i = A \text{ ili } B. \quad (13)$$

Plastičnu redukcijsku matricu sada iznosi:

$$\mathbf{k}_P^e = \mathbf{k}_T^e \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{k}_T^e \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{k}_T^e \quad (14)$$

2.2 Ravnotežne jednadžbe hibridnog elementa

Da bi u prethodno prikazani konačnoelementni model bilo moguće uključiti polukruto ponašanje spojeva, eksperimentalno ili numerički određene zavisnosti između opterećenja i deformacije razmatranog spoja moraju biti prikazane u sljedećem obliku:

$${}^2\mathbf{f}^e = f({}^2\mathbf{u}_{cd}^e) \quad (15)$$

gdje je f poznata matematička funkcija, u pravilu nelineara, dok vektor ${}^2\mathbf{u}_{cd}^e$ sadrži dodatne čvorne pomake uzrokovane deformacijom spojeva. Inkrementalni je oblik izraza (15):

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{S}_T^e \mathbf{u}_{cd}^e \quad (16)$$

gdje

$$\mathbf{S}_T^e = \frac{\partial {}^1\mathbf{f}^e}{\partial {}^1\mathbf{u}_{cd}^e} \quad (17)$$

predstavlja matricu koja za svaki stupanj slobode gibanja čvornog spoja sadrži odgovarajuću tangentnu krutost spoja. Ukoliko su karakteristike čvornih spojeva nelinearne, matricu \mathbf{S}_T^e potrebno je izračunati na početku svakog pojedinog inkrementalnog koraka. Početna je krutost spojeva:

$$\mathbf{S}_0^e = \left. \frac{\partial {}^1\mathbf{f}^e}{\partial {}^1\mathbf{u}_{cd}^e} \right|_{{}^1\mathbf{f}^e=0} \quad (18)$$

Vektor inkrementalnih čvornih pomaka konvencionalnog konačnog elementa jednak je razlici inkrementalnih pomaka SR elementa i pomaka uzrokovanih inkrementalnim deformacijama spojeva, tj.

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}_{SR}^e - \mathbf{u}_{cd}^e = \mathbf{u}_{SR}^e - (\mathbf{S}_T^e)^{-1} \mathbf{f}^e \quad (19)$$

a što povratom u izraz (8), za inkrementalno čvorno opterećenje SR elementa daje:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_{SR}^e = \mathbf{k}_{T,EP}^e \left[\mathbf{u}_{SR}^e - (\mathbf{S}^e)^{-1} \mathbf{f}^e \right] - \mathbf{f}_{ekv}^e, \quad (20)$$

odnosno:

$$\mathbf{f}_{SR}^e = \mathbf{k}_{T,EP, SR}^e \mathbf{u}_{SR}^e - \mathbf{f}_{ekv, SR}^e; \quad \mathbf{f}_{SR}^e = \mathbf{f}^e, \quad (21)$$

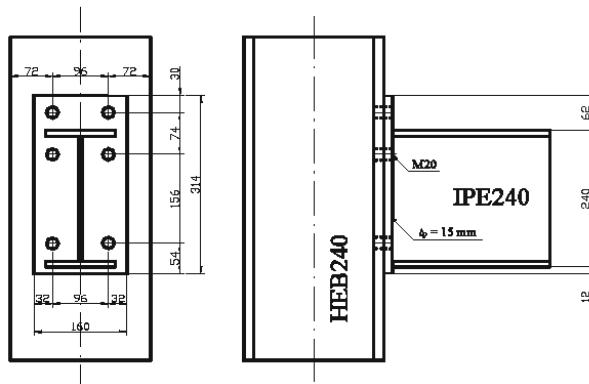
gdje je:

$$\mathbf{k}_{T,EP, SR}^e = (\mathbf{T}_{SR}^e)^{-1} \mathbf{k}_{T,EP}^e; \quad \mathbf{f}_{ekv, SR}^e = (\mathbf{T}_{SR}^e)^{-1} \mathbf{f}_{ekv}^e; \quad \mathbf{T}_{SR}^e = \mathbf{I} + \mathbf{k}_{T,EP}^e (\mathbf{S}^e)^{-1}. \quad (22)$$

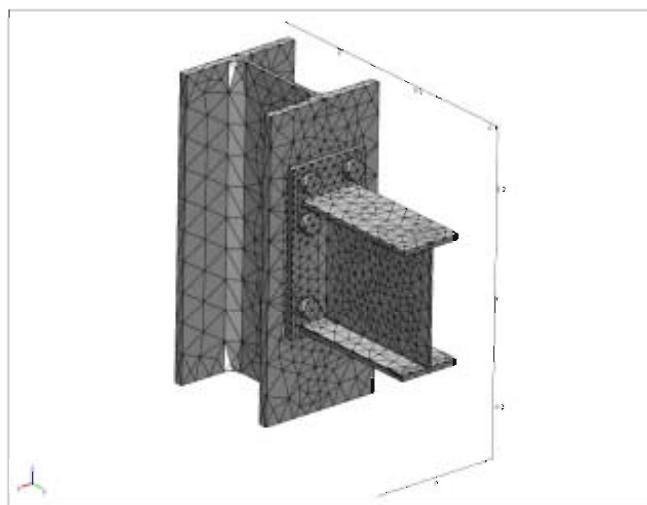
U izrazu (22) T_{SR}^e predstavlja inkrementalnu transformacijsku matricu koja konvencionalni konačni element transformira u SR element. I predstavlja jediničnu matricu dimenzija 14×14 . Matricu T_{SR}^e potrebno odrediti na početku svakog inkrementalnog koraka sukladno karakteristikama spoja.

3 MODEL SPOJA

Kao što je već rečeno, za opisivanje ponašanja polukrutog spoja potrebno je poznavati karakteristiku spoja definiranu izrazom (15). Ovaj izraz predstavlja aproksimaciju eksperimentalno ili numerički dobivenih podataka određenom matematičkom funkcijom koja najbolje opisuje karakteristiku spoja. U ovoj će se analizi karakteristike razmatranog spoja određivati primjenom konačnoelementnog modela dobivenog diskretizacijom razmatranog spoja 3D konačnim elementima iz programa COMSOL Multiphysics 3.5a [16]. Jedan takav diskretiziran model spoja grede IPE 240 i stupa HEB 240 sa Sl. 2 prikazan je na Sl. 3. prikazan je numerički model spoja dobiven diskretizacijom spoja 3D konačnim elementima.

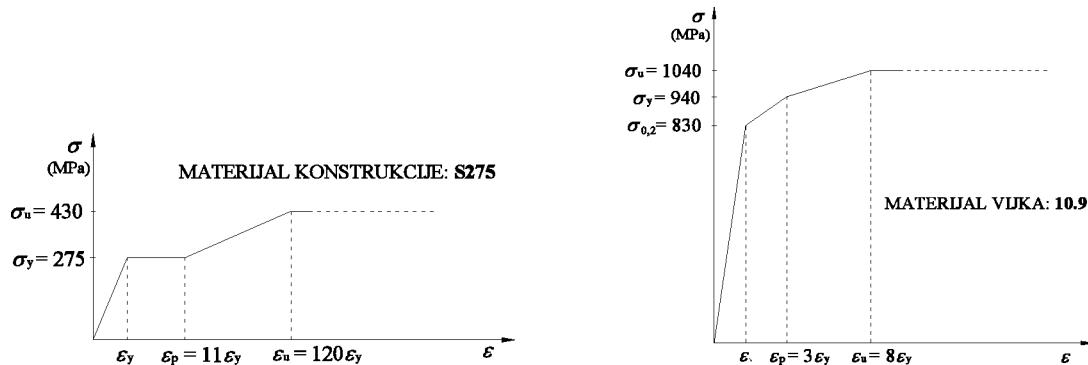


Sl. 2. Dimenzije spoja grede IPE 240 i stupa HEB 240



Sl. 3. Diskretizirani model spoja grede IPE 240 i stupa HEB 240

Greda i stup izrađeni su od konstrukcijskog čelika S275, dok je materijal vijaka klas 10.9. Karakteristike oba materijala prikazane su na Sl. 4.



Sl. 4. Dijagrami $\sigma - \varepsilon$

Opterećenje spoja sastojat će se od monotono promjenjivog momenta savijanja M i konstantne aksijalne sile N , dok će deformacija spoja biti izražena preko rotacije priključka φ . Ponašanje spoja bit će izraženo krivuljama $M-\varphi$ za različite vrijednosti sile N , a cilj je ove analize dobiti matematičke funkcije $f(M, N, \varphi)$. Ove bi se funkcije rabile za opisivanje krutosti spojeva okvirnih konstrukcija u numeričkom modelu temeljenom na grednom konačnom elementu, prikazanom u prethodnom poglavlju.

4 ZAKLJUČAK¶

U radu je prikazana UL inkrementalna formulacija inkrementalnih ravnotežnih jednadžbi tankostijenog grednog konačnog elementa s polukrutim čvornim vezama. U okviru toga, izvedena je tangentna matrica krutosti konvencionalnog i hibridnog (SR) elementa za elastični i elastoplastični slučaj. Plastične deformacije modelirane su primjenom metode plastičnih zglobova, dok su polukruti spojevi modelirani sustavom opruga pridodanih u čvorovima elementa. Hibridni element dobiven je transformacijom konvencionalnog elementa, a u tu je svrhu izvedena posebna inkrementalna transformacijska matrica.

Za određivanje karakteristika spojeva u izradi je numerički model temeljen na 3D konačnim elementima a iz kojeg će biti moguće odrediti karakteristike spoja opterećenog istovremeno momentom savijanja i aksijalnom silom.

Literatura: ¶

- [1] Silva, L. S., Coelho, A. M., "An Analytical Evaluation of the Response of Steel Joints under Bending and Axial Force", Computers and Structures, Vol. 79, 2001, str. 873-881.
- [2] Abolmaali, A., Kukreti, A. R., Razavi, H., "Hysteresis behavior of semi-rigid double web angle steel connections", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 59, 2003, str. 1057–1082.
- [3] Van Keulen, D. C., Nethercot, D. A., Snijder, H. H., Bakker, M. C. M., "Frame Analysis Incorporating Semi-rigid Joint Action: Applicability of the Half Initial Secant Stiffness Approach", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 59, 2003, str. 1083–1100.
- [4] López, A., Puente, I., Serna, M. A., "Direct evaluation of the buckling loads of semi-rigidly jointed single-layer latticed domes under symmetric loading", Engineering Structures, Vol. 29, No. 1, 2007, str. 101-109.

- [5] Turkalj, G., Brnić, J., Vizentin, G., Lanc, D., "Numerical simulation of instability behaviour of thin-walled frames with flexible connections", Materials Science and Engineering: A, Vol. 499, No. 1-2, 2009, str. 74-77.
- [6] Chen, W. F., Lui, E. M., "Practical Analysis for Semi-Rigid Frame Design", World Scientific Publishing Company, Singapore, 2000.
- [7] Chan, S. L., Chui, P. P. T., "Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-rigid Connections", Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [8] European Committee for Standardization (CEN): ENV 1993-1-1:1992/A2, Eurocode 3: "Design of Steel Structures", Annex J, 1998.
- [9] Daniūnas, A., Urbonas, K., "Analysis of the Steel Frame with the Semi-rigid Beam-to-beam and Beam-to-column Knee Joints under Bending and Axial Force", Engineering Structures, Vol. 30, 2008, str. 3114-3118.
- [10] Del Savio, A. A., Nethercot, D. A., Vellasco, P. C. G. S., Andrade, S. A. L., Martha, L. F. "Generalised Component-based Model for Beam-to-column Connections including Axial versus Moment Interaction", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 65, 2009, str. 1876-1895.
- [11] Turkalj, G., Brnić, J., Vizentin, G., Lanc, D., "Numerical Simulation of Instability Behaviour of Thin-walled Frames with Flexible Connections", Materials Science and Engineering: A, 499 (1-2): 74-77, 2009.
- [12] Turkalj, G., Brnic, J., Prpic Orsic, J., "Large Rotation Analysis of Elastic Thin-walled Beam-types Structures using ESA Approach", Computers & Structures, Vol. 81, 2003, str. 1851-1864.
- [13] Turkalj, G., Brnić, J., Prpić-Oršić, J., "ESA Formulation for Large Displacement Analysis of Framed Structures with Elastic-plasticity", Computers & Structures, Vol. 82, 2004, str. 2001-2034.
- [14] McGuire, W., Gallagher, R. H., Ziemian, R. D., "Matrix Structural Analysis", John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [15] Turkalj, G., Brnic, J., "Nonlinear Stability Analysis of Thin-walled Frames", International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 4, No. 1., 2004, str. 45-67.
- [16] Comsol Multiphysics 3.5a, "Structural Mechanics Module User's Guide", COMSOL AB, 2008.

Autori: ¶

Goran Turkalj, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 499, fax 051 651 490, e-mail: goran.turkalj@riteh.hr, web stranica: www.riteh.hr/ustroj/ztm/

Edin Merdanović, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051 651503, fax 051 651490, e-mail: medin@riteh.hr, web stranica: www.riteh.hr/ustroj/ztm/

Neven Munjas, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051 651503, fax 051 651490, e-mail: nmunjas@riteh.hr, web stranica: www.riteh.hr/ustroj/ztm/