



ZBORNIK RADOVA DRUGOG SUSRETA  
HRVATSKOGA DRUŠTVA ZA MEHANIKU

Split \_ 12.-13.09.2008.

**Urednici**

Pavao Marović \_ Mirela Galić \_ Lovre Krstulović-Opara



Zbornik radova Drugog susreta Hrvatskoga društva za mehaniku

Urednici: Pavao Marović  
Mirela Galić  
Lovre Krstulović-Opara

Izdavač: Hrvatsko društvo za mehaniku

Oblikovanje korica: Manu – kreativna radionica d.o.o., Zagreb

Tisak: Kartular d.o.o., Split

Naklada: 100 primjeraka

**CIP - Katalogizacija u publikaciji  
SVEUČILIŠNA KNJIŽNICA  
U SPLITU**

**UDK 531/534(063)**

**HRVATSKO društvo za mehaniku. Susret (2 ;  
2008 ; Split)**

**Zbornik radova Drugog susreta  
Hrvatskoga društva za mehaniku, Split 12.-13.  
rujna 2008. / urednici Pavao Marović, Mirela  
Galić, Lovre Krstulović-Opara ;  
<organizator skupa Hrvatsko društvo za  
mehaniku, podružnica Split>. - Split :  
Hrvatsko društvo za mehaniku, 2008.**

**Bibliografija uz svaki rad. - Kazalo.**

**ISBN 978-953-7539-01-6**

**1. Marović, Pavao 2. Galić, Mirela,  
3. Krstulović-Opara, Lovre  
I. Mehanika -- Zbornik**

**121206070**

**Zbornik radova**

**Drugog susreta**  
**Hrvatskoga društva za mehaniku**

Split

12.-13. rujna 2008.

Urednici:  
Pavao Marović  
Mirela Galić  
Lovre Krstulović-Opara



Split 2008.

**Drugi susret Hrvatskoga društva za mehaniku**

## **ORGANIZACIJSKI ODBOR**

Pavao MAROVIĆ,	Sveučilište u Splitu, Predsjednik
Mirela GALIĆ,	Sveučilište u Splitu
Lovre KRSTULOVIĆ-OPARA,	Sveučilište u Splitu
Želko DOMAZET,	Sveučilište u Splitu
Ivica SMOJVER,	Sveučilište u Zagrebu
Jurica SORIĆ,	Sveučilište u Zagrebu
Marko BERTOLINO	Sveučilište u Splitu

### **Organizator skupa**

## **HRVATSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKU**

Podružnica Split  
Građevinsko-arhitektonski fakultet Sveučilišta u Splitu,  
Matice hrvatske 15, 21000 Split

Sjedište: Fakultet strojarstva i brodogradnje  
Sveučilište u Zagrebu  
Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb  
<http://www.csm.hr>

### **Pokrovitelji:**

Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske  
Građevinsko-arhitektonski fakultet Sveučilišta u Splitu  
Sveučilište u Splitu

### **Sponzori:**

Hrvatski registrar brodova, Split

Drugi susret Hrvatskoga društva za mehaniku

Split



## SADRŽAJ

Čanađija, M., Brnić, J., Brčić, M., Vukelić, G. & Krščanski, S.: DISIPACIJSKI MODELI U TERMOPLASTIČNOSTI .....	1
Drašković, Z.: O APROKSIMACIJAMA KONAČNIM ELEMENTIMA U NEUKLIDSKIM PROSTORIMA .....	7
Galić, I., Tonković, Z. & Vučković, K.: EKSPERIMENTALNA I NUMERIČKA ANALIZA PLASTIČNOG KOLAPSA KUĆIŠTA VENTILA .....	13
Galić, M., Marović, P. & Nikolić, Ž.: PREGLED NEKIH DO SADA RAZVIJENIH MODELA BETONA .....	19
Jarak, T., Sorić, J. & Hoster, J.: MJEŠOVITA MLPG FORMULACIJA ZA ANALIZU LJUSKASTIH KONSTRUKCIJA.....	31
Lozina, Ž., Vučina, D. & Sedlar, D.: PROCJENA FUNKCIJE FREKVENCIJSKOG ODZIVA IZ OPERATIVNIH PODATAKA .....	37
Marendić, P., Veljača, T., Krstulović-Opara, L. & Domazet, Ž.: UVOD U TERMOPLASTIČNU ANALIZU NAPREZANJA .....	43
Marenić, E., Tonković, Z. & Skozrit, I.: PRIMJENA METODE PODMODELIRANJA U ANALIZI GEOMETRIJSKIH DISKONTINUITETA .....	49
Mihanović, A., Nikolić, Ž. & Smoljanović, H.: ELASTIČNI SPEKTAR ODGOVORA ZA POBUDU VJETROM TIPRA BURA .....	55
Nikolić, Ž., Mihanović, A. & Živaljić, N.: REZONANTNI SPEKTRI UBRZANJA POBUDE POTRESOM.....	61
Skoblar, A., Žigulić, R. & Maratović, M.: EKSPERIMENTALNA POTVRDA IZRAČUNA LOKALNIH VIBRACIJA NA ČELIČNOM BRODU .....	67
Skozrit, I. & Tonković, Z.: NUMERIČKO MODELIRANJE VREMENSKI OVISNOG PONAŠANJA POLIETILENA..	73
Šomodi, Ž. & Hursa, A.: PRILAGODBA PARAMETARA MIKROMEHANIČKOG MODELA KRIVULJI RASTEZANJA TKANINE .....	79
Trogrlić, B., Mihanović, A. & Balić, I.: NELINEARNI MODEL ZA ANALIZU DUKTILNOSTI A/B KONSTRUKCIJA.....	85
Turkalj, G. & Lanc, D.: GREDNI ELEMENT ZA NELINEARNU ANALIZU TANKOSTIJENIH OKVIRA S POLUKRUTIM VEZAMA .....	97
INDEKS AUTORA .....	103



## DISIPACIJSKI MODELI U TERMOPLASTIČNOSTI

Čanađija, M., Brnić, J., Brčić, M., Vukelić, G. & Kršćanski, S.

**Sažetak:** Rad razmatra disipacijske modele u termoplastičnosti pri velikim deformacijama. Termoplastični model temelji se na hiperelastičnoj formulaciji koja uključuje multiplikativnu dekompoziciju gradijenta deformacije u tri dijela. Model je pogodan za cikličke procese obzirom da je uključeno nelinearno kinematičko očvršćivanje u kontekstu neasocijacijske plastičnosti. Termodinamički okvir predstavlja detalje iz kinematike, jednadžbi očuvanja i konstitutivnih relacija. Nedostaci često rabljenog disipacijskog modela su istaknuti i alternativni model je predložen.

**Ključne riječi:** Neasocijacijska plastičnost, ciklička plastičnost, nelinearno kinematičko očvršćivanje, disipacija.

### 1 UVOD

Rad je orijentiran na razvoj disipacijskog modela prikladnog za spregnutu termoplastičnost pri velikim deformacijama. Model se temelji na hiperelastičnoj formulaciji i multiplikativnoj dekompoziciji gradijenta deformacije u tri dijela. Kinematičko očvršćivanje modelira se nelinearno, što vodi neasocijacijskoj plastičnosti. Opisivanje nelinearnog kinematičkog očvršćivanja vrši se pomoću dodatnog gradijenta deformacije koji preslikava međukonfiguracije na tzv. središnju konfiguraciju. Ovime se dolazi do Armstrong-Frederickova tipa kinematičkog očvršćivanja. Ovaj se model uspoređuje s jednim popularnim disipacijskim modelom i naglašavaju se nedostaci istoga.

### 2 KINEMATIKA

Osnovna mjera deformacije jest gradijent deformacije:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \partial \varphi(\mathbf{X}, t) / \partial \mathbf{X}. \quad (1)$$

Gradijent deformacije rastavlja se na njegove povrativi dio: elastični  $\mathbf{F}^e$  i termički  $\mathbf{F}^\theta$  te na nepovrativi plastični dio  $\mathbf{F}^p$  [1]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^\theta \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (2)$$

Termički dio opisuje toplinsku ekspanziju volumena:

$$\mathbf{F}^\theta = (J^\theta)^{1/3} \mathbf{1}, \quad J^\theta = \det \mathbf{F}^\theta \quad (3)$$

Opis kinematičkog očvršćivanja temelji se na uvođenju dodatne, tzv. središnje konfiguracije, definirane preslikavanjem pomoću gradijenta kinematičkog očvršćivanja  $\mathbf{F}^k$  [2].

Prostorni gradijent brzine deformacije može se definirati:

$$\mathbf{l} = \text{grad } \dot{\mathbf{x}} \quad \text{ili} \quad \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{lF} \quad (4)$$

Iako je središnja konfiguracija definirana putem  $\mathbf{F}^k$ , pogodnije je uvesti inverzno preslikavanje od središnje ka međukonfiguraciji  $\mathbf{F}^k = \hat{\mathbf{F}}^{-1}$ . Uz jedn. (2) i (4) slijedi:

$$\dot{\mathbf{F}}^e = \mathbf{I}^e \mathbf{F}^e, \quad \dot{\mathbf{F}}^p = \mathbf{I}^p \mathbf{F}^p, \quad \dot{\hat{\mathbf{F}}} = \hat{\mathbf{I}} \hat{\mathbf{F}}, \quad \dot{\mathbf{F}}^\theta = \mathbf{I}^\theta \mathbf{F}^\theta, \quad (5)$$

te:

$$\dot{\mathbf{F}}^k = \mathbf{F}^k (-\mathbf{I}^k) = \mathbf{F}^k \boldsymbol{\beta}. \quad (6)$$

Kinematička razmatranja završavaju uvođenjem tenzora deformacije. Od interesa su desni Cauchy-Green tenzor, elastični desni Cauchy-Green tenzor, te tenzori  $\mathbf{C}^k$  i  $\mathbf{C}^\theta$  koji opisuju kinematičko očvršćivanje i termičku deformaciju:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{C}^e = (\mathbf{F}^e)^T \mathbf{F}^e, \quad \mathbf{C}^k = (\mathbf{F}^k)^T \mathbf{F}^k, \quad \mathbf{C}^\theta = (\mathbf{F}^\theta)^T \mathbf{F}^\theta. \quad (7)$$

Primjenom jedn. (2) i (3) također slijedi:

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^\theta (\mathbf{F}^p)^T \mathbf{C}^e \mathbf{F}^p. \quad (8)$$

Brzine deformacije mogu se računati:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{C}} &= (\mathbf{F}^p)^T \dot{\mathbf{C}}^\theta \mathbf{C}^e \mathbf{F}^p + (\mathbf{F}^p)^T [\mathbf{C}^\theta \dot{\mathbf{C}}^e + 2\mathbf{C}^\theta \text{sym}(\mathbf{C}^e \mathbf{I}^p)] \mathbf{F}^p \\ \dot{\mathbf{C}}^e &= -(\mathbf{C}^\theta)^{-1} \dot{\mathbf{C}}^\theta \mathbf{C}^e - 2\text{sym}(\mathbf{C}^e \mathbf{I}^p) + (\mathbf{F}^p)^{-T} (\mathbf{C}^\theta)^{-1} \dot{\mathbf{C}} (\mathbf{F}^p)^{-1} \\ \dot{\mathbf{C}}^k &= 2\text{sym}[(\dot{\mathbf{F}}^k)^T \mathbf{F}^k] = 2\text{sym}[\boldsymbol{\beta}' \mathbf{C}^k] \end{aligned} \quad (9)$$

### 3 TERMODINAMIKA RAZVOJA MEHANIČKIH VELIČINA

U slučaju termoplastičnosti s nelinearnim izotropnim i kinematičkim očvršćivanjem, a za velike deformacije, unutrašnja energija može se pretpostaviti u obliku:

$$E = E(\mathbf{C}^e, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^\theta, k_\alpha, N - N^p) \quad (10)$$

gdje je  $k_\alpha$  skup parametara izotropnog očvršćivanja,  $\Theta$  je temperatura i  $N$  entropija.

Slobodna energija  $\Psi = \Psi(\mathbf{C}^e, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^\theta, k_\alpha, \Theta)$  može biti uvedena putem Legendrove transformacije:

$$\Psi(\mathbf{C}^e, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^\theta, k_\alpha, \Theta) = E(\mathbf{C}^e, \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^\theta, k_\alpha, N^e) - N^e \Theta. \quad (11)$$

Da bi se došlo do jednadžbi evolucije mehaničkih veličina, polazi se od drugog zakona termodinamike:

$$D = \Theta \gamma = \rho_0 \dot{N} \Theta - \rho_0 \dot{E} + \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \text{GRAD } \Theta \geq 0, \quad (12)$$

gdje je  $D$  disipacija,  $\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$  je toplinski tok i  $\mathbf{S}$  je drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja. Ova se jednadžba može transformirati u:

$$D_{loc} = \Theta \gamma_{loc} = \rho_0 \Theta \dot{N}^p - \rho_0 \dot{\Psi} - \rho_0 \dot{N}^e + \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}} \geq 0, \quad (13)$$

$$D_{con} = \Theta \gamma_{con} = -\frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \text{GRAD } \Theta \geq 0$$

gdje čisto mehaničkoj disipaciji pripada dio:

$$D_{mech} = -\rho_0 \dot{\Psi} - \rho_0 N^e \dot{\Theta} + \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}} \geq 0. \quad (14)$$

Brzina promjene funkcije slobodne energije može se računati:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} = & -\left[ (\mathbf{C}^\theta)^{-1} \partial_{\mathbf{C}^e} \Psi \mathbf{C}^e \right] : \dot{\mathbf{C}}^\theta - 2 \partial_{\mathbf{C}^e} \Psi : \text{sym}(\mathbf{C}^e \mathbf{I}^p) + \\ & + \left[ (\mathbf{C}^\theta)^{-1} (\mathbf{F}^p)^{-1} \partial_{\mathbf{C}^e} \Psi (\mathbf{F}^p)^{-t} \right] : \dot{\mathbf{C}} + \\ & + \partial_{\mathbf{C}^\theta} \Psi : \dot{\mathbf{C}}^\theta + \partial_{\mathbf{C}^k} \Psi : \dot{\mathbf{C}}^k + \partial_{k_\alpha} \Psi \cdot \dot{k}_\alpha + \partial_\Theta \Psi \cdot \dot{\Theta}. \end{aligned} \quad (15)$$

Uvedu li se oznake:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = 2\rho_0 (\mathbf{C}^\theta)^{-1} (\mathbf{F}^p)^{-1} \partial_{\mathbf{C}^e} \Psi (\mathbf{F}^p)^{-t} \quad ; \quad \mathbf{S}^\theta = \partial_{\mathbf{C}^\theta} \Psi = (\mathbf{C}^\theta)^{-1} \partial_{\mathbf{C}^e} \Psi \mathbf{C}^e, \\ N^e = -\partial_\Theta \Psi \end{aligned} \quad (16)$$

i:

$$\mathbf{S}^e = 2\rho_0 \partial_{\mathbf{C}^e} \Psi \quad ; \quad \mathbf{K} = 2\rho_0 \partial_{\mathbf{C}^k} \Psi \quad ; \quad K_\alpha = \rho_0 \partial_{k_\alpha} \Psi. \quad (17)$$

dolazi se do oblika:

$$D_{loc} = \mathbf{C}^e \mathbf{S}^e : \text{sym}(\mathbf{I}^p) - \mathbf{C}^k \mathbf{K} : \text{sym}[\boldsymbol{\beta}^t] - K_\alpha \cdot \dot{k}_\alpha + \rho_0 \Theta \dot{N}^p \geq 0. \quad (18)$$

Uz Mandelov tenzor napreznjanja  $\boldsymbol{\Sigma}$  i odgovarajući tenzor natražnog napreznjanja  $\mathbf{B}$ :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}^e \mathbf{S}^e \quad ; \quad \mathbf{B} = \mathbf{C}^k \mathbf{K} \quad (19)$$

konačno slijedi:

$$D_{loc} = \boldsymbol{\Sigma} : \text{sym}(\mathbf{I}^p) - \mathbf{B} : \text{sym}(\boldsymbol{\beta}) - K_\alpha \dot{k}_\alpha + \rho_0 \Theta \dot{N}^p \geq 0. \quad (20)$$

Antisimetrični dijelovi tenzora  $\mathbf{I}^p$  i  $\boldsymbol{\beta}$  ne utječu na disipaciju.

Jednadžbe evolucije u asocijativnoj plastičnosti mogu se dobiti primjenom principa maksimalne plastične disipacije. Uvedu li se Lagrangian:

$$\mathbf{L} = -D_{loc} + \lambda \cdot f, \quad (21)$$

gdje je  $\lambda$  Lagrangeov multiplikator i  $f$  je funkcija plohe tečenja, tada moraju biti ispunjeni Kuhn-Tuckerovi uvjeti:

$$\lambda \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{B}, K_\alpha, \Theta) \leq 0, \quad f \cdot \lambda = 0. \quad (22)$$

Evolucijske su jednadžbe:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} = 0 & \Rightarrow \text{sym} \mathbf{I}^p = \lambda \partial_{\boldsymbol{\Sigma}} f & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial K_\alpha} = 0 & \Rightarrow \dot{k}_\alpha = -\lambda \partial_{K_\alpha} f \\ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{B}} = 0 & \Rightarrow \text{sym} \boldsymbol{\beta} = -\lambda \partial_{\mathbf{B}} f & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \Theta} = 0 & \Rightarrow \rho_0 \dot{N}^p = \lambda \partial_{\Theta} f \end{aligned} \right\}. \quad (23)$$

Ne-asocijacijska formulacija dobiva se uvođenjem novog plastičnog potencijala  $g$  koji je različit od  $f$ :

$$\text{sym} \mathbf{I}^p = \lambda \partial_{\boldsymbol{\Sigma}} g \quad ; \quad \text{sym} \boldsymbol{\beta} = -\lambda \partial_{\mathbf{B}} g \quad ; \quad \dot{k}_\alpha = -\lambda \partial_{K_\alpha} g \quad ; \quad \rho_0 \dot{N}^p = \lambda \partial_{\Theta} g. \quad (24)$$

Primjenom jedn. (5) i (6) dobivaju se evolucijske jednadžbe:

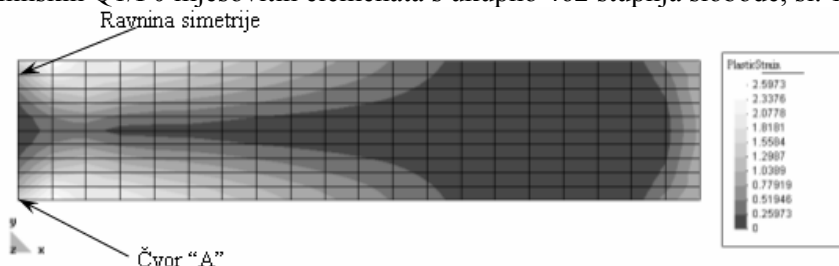
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}^p = (\lambda \partial_{\boldsymbol{\Sigma}} g + \text{asym} \mathbf{I}^p) \mathbf{F}^p \quad ; \quad \dot{\mathbf{F}}^k = (-\lambda \partial_{\mathbf{B}} g + \text{asym} \boldsymbol{\beta}) \mathbf{F}^k \\ \dot{k}_\alpha = -\lambda \partial_{K_\alpha} g \quad ; \quad \rho_0 \dot{N}^p = \lambda \partial_{\Theta} g. \end{aligned} \quad (25)$$

Nasuprot disipaciji koja se ovdje računa putem izraza (14), ističe se da su termoplastičnosti često koristi izraz  $D_{mech} = \chi \mathbf{P}_{mech}^p$ . Ovaj izraz može voditi pojavi narušavanja disipacijske nejednakosti u pojedenim režimima.

## 4 PRIMJER

Primjer je analiziran putem vlastito razvijenog softvera temeljenog na metodi konačnih elemenata. Numerički detalji dani su u [3]. Model je provjeren na cikličkom savijanju ploče debele 5 mm i dugačke 50mm. Analizirano je ponašanje dva disipacijska modela, te linearno i nelinearno očvršćivanje materijala. Vertikalni pomaci krajeva ploče zadani su putem funkcije  $u(t) = 5 \sin(2\pi t)$  mm. Ukupno trajanje procesa iznosi 8 s, što daje 8 punih ciklusa savijanja. Podrazumijeva se da je ploča u ravninskom stanju deformacije. U početnom je trenutku temperaturno polje homogeno i iznosi 293 K. Ploča se smatra toplinski izoliranom te na je taj način spriječena izmjena topline s okolicom. Ova je pretpostavka opravdana zbog kratkog vremena trajanja ciklusa.

Zbog simetrije dovoljno je provesti diskretizaciju polovice ploče. Ovo je učinjeno s 200 ravninskih Q1/P0 mješovitih elemenata s ukupno 462 stupnja slobode, sl. 1.



Sl. 1. Mreža konačnih elemenata i raspodjela ekvivalentne plastične deformacije na kraju procesa

Proračun je proveden u 800 vremenski jednakih koraka. Pretpostavljeno je mješovito izotropno-kinematičko očvršćivanje materijala, Tab. 1. Analizirano je ponašanje dvije vrste materijala: materijal “A” s linearnim kinematičkim očvršćivanjem ( $\Gamma = 0$ ) i disipacijom računatom kao dio plastične snage  $D_{mech} = \chi P_{mech}^p$  s faktorom  $\chi = 0.9$ . Materijal “B” modeliran je nelinearnim kinematičkim očvršćivanjem, dok je disipacija konzistentna s modelom mehanike kontinuuma.

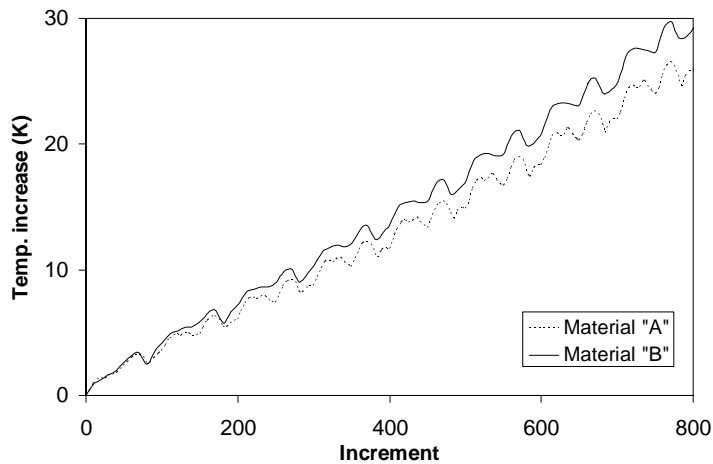
Modul smicanja	$\mu$	26926 MPa
Modul kompresije	$\kappa$	58333 MPa
Naprezanje tečenja	$y_0$	70 MPa
Eksponent očvršćivanja	$\delta$	0
Gustoća	$\rho$	$7.8 \cdot 10^{-9}$ Ns <sup>2</sup> /mm <sup>4</sup>
Koeficijent topl. ekspanzije	$\alpha$	$2.38 \cdot 10^{-5}$ K <sup>-1</sup>
Koef. provođenja topline	$k$	150 N/sK
Toplinski kapacitet, pri konst. deform.	$c_0$	2,43 N/mm <sup>2</sup> K
Omekšanje naprezanja tečenja	$\omega_0$	0.003 K <sup>-1</sup>
Omekšanje očvršćivanja	$\omega_h$	$3 \cdot 10^{-4}$ K <sup>-1</sup>
Linearno izotropsko očvršćivanje	$h$	105 MPa
Kinematičko očvršćivanje	$h_{kin}$	105 MPa
Faktor disipacije (Materijal “A”)	$\chi$	0.9
Parametar zasićenja (Materijal “B”)	$\Gamma$	0.0041

Tab. 1. Materijalne značajke debele ploče

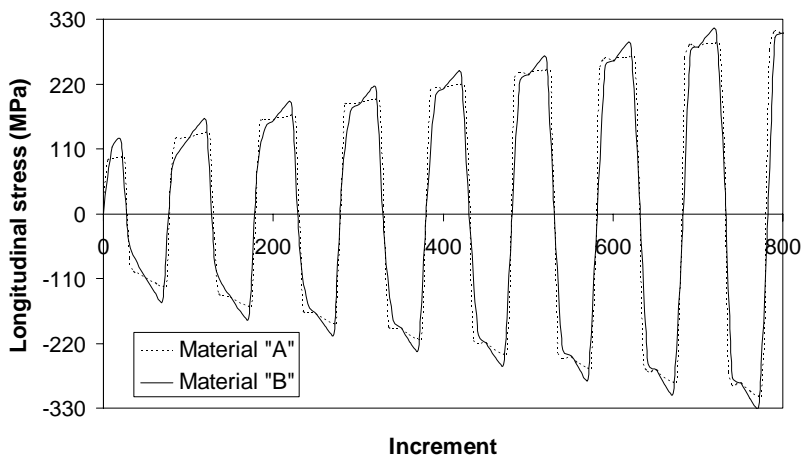
Slika 1 prikazuje raspodjelu ekvivalentne plastične deformacije na kraju procesa. Kao što se to moglo i očekivati, najmanja plastična deformacija nalazi se u središnjoj ravni ploče i raste prema površini.

Slika 2 prikazuje razvoj temperature na površini ploče. Vidljivo je da disipacija koja je konzistentna s modelom mehanike kontinuuma, materijal «B» daje nešto veće zagrijavanje. Nadalje, obzirom da je sustav toplinski izoliran, padovi temperature mogu se dogoditi samo zbog strukturnog zagrijavanja u zoni vlačnih naprezanja. Usprkos tome, kod materijala «A» ovi su padovi prisutni i u području tlačnih naprezanja gdje bi strukturno zagrijavanje trebalo voditi porastu temperature. Ovi su padovi temperature posljedica nepravilnog disipacijskog modela materijala «A». Materijal «B» pokazuje pravilno fizikalno ponašanje.

Slika 3 prikazuje uzdužno naprezanje ( $\sigma_{xx}$ ). Razlike u linearnom i nelinearnom kinematičkom očvršćivanju jasno su vidljive.



Sl. 2. Porast temperature u čvoru «A».



Sl. 3. Razvoj uzdužnih naprezanja u čvoru «A».

## 5 ZAKLJUČAK

Rad je istaknuo nedostatke jednog popularnog disipacijskog modela i predložio alternativni model. Predloženi model pogodan je za primjenu u termoplastičnim problemima koji uključuju velike deformacije i cikličko opterećenje.

### Literatura:

- [1] Wriggers, P., Miehe, C., Kleiber, M., Simo, J.C., "On the coupled thermomechanical treatment of necking problems via finite element method", Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 33, 1992, str. 869-883.
- [2] Wallin, M., Ristinmaa, M., Ottosen, N.S., "Kinematic hardening in large strain plasticity", Eur. J. Mech. A-Solids, Vol. 22, 2003, str. 341-356.
- [3] Čanadija, M., Brnić, J., "Associative coupled thermoplasticity at finite strain with temperature-dependent material parameters", Int. J. Plast., Vol. 20, 2004, str. 1851-1874.

### Autori:

Izv. prof. dr. sc. **Marko Čanadija**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 496, fax 051 651 490 , e-mail: [markoc@riteh.hr](mailto:markoc@riteh.hr), web stranica:

[http://www.riteh.hr/zav\\_katd\\_sluz/zav\\_teh\\_meh/katedre/mt/Canadija.htm](http://www.riteh.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/mt/Canadija.htm)

Prof. dr. sc. **Josip Brnić**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 491, fax 051 651 490, e-mail: [brnic@riteh.hr](mailto:brnic@riteh.hr), web stranica:

[http://www.riteh.hr/zav\\_katd\\_sluz/zav\\_teh\\_meh/katedre/cvr\\_kon/Pages/osoblje\\_files/Brnic/HP\\_Brnic.htm](http://www.riteh.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/cvr_kon/Pages/osoblje_files/Brnic/HP_Brnic.htm)

Asist. **Marino Brčić**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 560, fax 051 651 490, e-mail: [mbrbic@riteh.hr](mailto:mbrbic@riteh.hr) , web stranica:

[http://www.riteh.hr/zav\\_katd\\_sluz/zav\\_teh\\_meh/katedre/mt/Brcic.htm](http://www.riteh.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/mt/Brcic.htm)

Asist. **Goran Vukelić**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 560, fax 051 651 490, e-mail: [gvukelic@riteh.hr](mailto:gvukelic@riteh.hr), web stranica:

[http://www.riteh.hr/zav\\_katd\\_sluz/zav\\_teh\\_meh/katedre/mt/Vukelic.htm](http://www.riteh.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/mt/Vukelic.htm)

Asist. **Sanjin Krščanski**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 503, fax 051 651 490, e-mail: [sanjink@riteh.hr](mailto:sanjink@riteh.hr), web stranica:

## O APROKSIMACIJAMA KONAČNIM ELEMENTIMA U NEEUKLIDSKIM PROSTORIMA

Drašković, Z.

**Sažetak:** Predložen je pristup kojim bi se uobičajeno aproksimiranje samih koordinata vektorskog (i uopće tenzorskog) polja i u neeuclidskim prostorima zamjenilo aproksimiranjem polja kao invarijante (kernela).

**Ključne riječi:** Neeuclidski prostori, konačni elementi, invarijantne aproksimacije polja.

### 1 UVOD

Aproksimiranje, npr. u metodi konačnih elemenata, vektorskih (i uopće tenzorskih) polja može se vršiti na dva načina. Prvi je uobičajeni postupak koji se sastoji u aproksimiranju svake koordinate tog polja posebno (kao skalarne funkcije) i u slučaju vektorskog polja  $\mathbf{v}$  može se izraziti na primjer interpolacijskom formulom oblika<sup>1</sup>:

$$\mathbf{v}^i = \Psi^N \mathbf{v}_N^i \quad (1)$$

(up. npr. s izrazom (7.43) u [4]), gdje su  $\mathbf{v}^i$  kontravarijantne koordinate polja  $\mathbf{v}$  u proizvoljnim krivocrtnim koordinatama  $x^i$  u trodimenzionalnom euklidskom prostoru;  $\Psi^N$  su interpolacijske funkcije, a  $\mathbf{v}_N^i$  su tzv. čvorne vrijednosti tog polja.

Drugi pristup se sastoji u *aproksimiranju same vektorske funkcije*  $\mathbf{v}$  na primjer interpolacijskom formulom oblika<sup>2</sup>:

$$(\mathbf{g}^i \mathbf{g}_i =) \quad \mathbf{v} = \Psi^N \mathbf{v}_N \quad (= \Psi^N \mathbf{v}_N^i \mathbf{g}_{(N)i}) \quad (2)$$

(up. s izrazom (7.48) u [4]), koja u koordinatnom obliku glasi (v. npr. [9]):

$$\mathbf{v}^i = \Psi^N \mathbf{g}_{(N)j}^i \mathbf{v}_N^j \quad ; \quad (3)$$

$\mathbf{g}_{(N)j}^i$  su operatori paralelnog prijenosa između dviju točaka u euklidskom prostoru:

$$(\mathbf{g}^i(x^m) \cdot \mathbf{g}_{(N)j}(x_N^m) =) \quad \mathbf{g}_{(N)j}^i = \left. \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \right|_{x^m} \left. \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \right|_{x_N^m} \quad (4)$$

(“Euclidean shifters”; v. str. 807 u [3]), a  $z^k$  su Descartesove pravokutne koordinate.

---

<sup>1</sup> Koristi se Einsteinova konvencija o zbrajanju po ponovljenim indeksima. Mali latinski indeksi uzimaju vrijednosti iz skupa {1,2,3}, a indeks  $N$  odnosi se na točke u prostoru (čvorove) u kojima su zadate vrijednosti vektorskog polja; mali grčki indeksi uzimati će vrijednosti iz skupa {1,2}.

<sup>2</sup> Stavljanje indeksa  $N$  u zagradu znači da se konvencija o zbrajanju ne primjenjuje na član s takvim indeksom — pri zbrajanju po indeksu  $N$  taj se član jednostavno pridružuje drugim članovima sa istim indeksom.

Reprezentacija (3) se očito razlikuje od reprezentacije (1) — samo u slučaju Descartesovih koordinata (kada se operatori paralelnog prijenosa (4) svode na Kroneckerove  $\delta$ -simbole!) formula (3) svodi se na oblik (1). Suštinski se ta razlika ogleda u činjenici da reprezentacija (1), za razliku od reprezentacije (3), nema svojstvo *koordinatne invarijantnosti (kovarijantnosti)*.

Iako je — usprkos tvrdnji ([4], str. 191) da “*a less accurate ... form of the equations of motion in general coordinates is obtained if, instead of approximating the components ... , we introduce a vector-valued representation*” — u [9] pokazano da je dosljedan invarijantan pristup u aproksimiranju konačnim elementima i geometrijski korektniji i numerički učinkovitiji od uobičajenog skalarnog pristupa, ipak je takav rezultat prvenstveno teorijskog karaktera, kako zbog složenosti rada sa operatorima paralelnog prijenosa<sup>3</sup> (koji se nužno javljaju pri aproksimiranju vektorskog polja kao invarijante - kernela u proizvoljnim krivocrtnim koordinatama), tako i zbog činjenice da se u euklidskom prostoru uvijek mogu koristiti Descartesove koordinate (kada nema razlike između dva pristupa). Stoga je — budući da se konačni elementi mogu koristiti i u neeuklidskim prostorima<sup>4</sup>, a da u tim prostorima nema Descartesovih koordinata — prirodno zapitati se: što bi se postiglo ako bi se i tada aproksimiranje koordinata vektorskog polja pokušalo zamijeniti aproksimiranjem samog kernela?

## 2 APROKSIMIRANJE U NEEUKLIDSKIM PROSTORIMA

Zadržimo se, radi jednostavnosti i zorne predodžbe, na dvodimenzionalnom prostoru Riemanna, tj. na plohi. Ako bi se i u tom prostoru<sup>5</sup> pošlo od formule oblika (2):

$$(v^\alpha \mathbf{a}_\alpha =) \quad \mathbf{v} = \Psi^N \mathbf{v}_N \quad (= \Psi^N v_N^\alpha \mathbf{a}_{(N)\alpha}) \quad , \quad (5)$$

opet je moguće uspostaviti koordinatnu relaciju oblika (3):

$$v^\alpha = \Psi^N K_{(N)\beta}^\alpha v_N^\beta \quad , \quad (6)$$

gdje sada ulogu operatora paralelnog prijenosa između dviju točaka na plohi imaju koeficijenti  $\mathbf{K}$ . To su zapravo koeficijenti koji se (npr. još u [1]<sup>6</sup>) pojavljuju kao *fundamentalni sustav rješenja* homogenog dijela sustava:

$$\left( \frac{Dv^\alpha}{Ds} \equiv \right) \quad \frac{dv^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha v^\beta \frac{du^\gamma}{ds} = w^\alpha \quad , \quad (7)$$

kojim se (u neeuklidskom prostoru!) određuje vektorsko polje takvo da mu je apsolutni diferencijal duž neke krivulje<sup>7</sup>  $K$  jednak polju  $w^\alpha$  zadanom u točkama te krivulje, ali o

<sup>3</sup> Ovaj postupak, ne tako često korišten u metodi konačnih elemenata, može se vidjeti na primjer u **Dodatku A** u [7].

<sup>4</sup> “... the general concept of finite element is applicable to ... tensor field, defined on Euclidean or non-Euclidean spaces ... . General finite-element representations of covariant and contravariant components of vectors defined on non-Euclidean spaces ... were used ... in the analysis of thin shells.”; [4], str. 46.

<sup>5</sup> Vektorom na plohi *po definiciji* se smatra vektor u tangencijalnoj ravnini te plohe, a kako su bazni vektori  $\mathbf{a}_\alpha$  krivocrtnih koordinata  $u^\alpha$  (Gaussovih parametara) na plohi tangencijalni na plohu, sigurno će i  $\mathbf{v}$  biti vektor u tangencijalnoj ravnini plohe.

<sup>6</sup> U pitanju je priopćenje na jednoj od sjednica Francuske akademije znanosti kojim je zapravo predloženo uvođenje pojma *apsolutnog integrala* sad već daleke 1929. godine!

geometrijskom smislu tih koeficijenata se ne govori. No, u [8] je ukazano da upravo oni predstavljaju operatore paralelnog prijenosa (duž uočene krivulje u prostoru Riemanna), o kojima se govorilo npr. i u [2] — istina kao o *propagatorima* paralelnog prijenosa duž geodetske linije (“*the parallel propagator*”; [2], str. 59) — ali bez njihovog pobližeg određivanja<sup>8</sup>.

Međutim, činjenica da za sustav (7) pod određenim uvjetima postoji fundamentalni sustav rješenja duž zadane krivulje — odnosno da postoje operatori paralelnog prijenosa duž te krivulje — ne znači da ga je i lako naći, osim u nekim jednostavnijim slučajevima; već kad je u pitanju paralelni prijenos duž geodetske linije između dviju proizvoljnih točaka na sfernoj plohi, za te operatore su analitički izrazi (v. dodatak na kraju priopćenja) nađeni u [8] *heurističkim* postupkom, a ne rješavanjem odgovarajućeg homogenog sustava diferencijalnih jednažbi.

Ipak — iako određivanje tih operatora nije jednostavno (a uvijek se može pribjeći i numeričkim metodama rješavanja!) — izgleda kako veću nedoumicu izaziva činjenica da oni zavise od puta (što je samo očekivana posljedica dobro znanog podatka da se paralelni prijenos u prostoru Riemanna uvijek definira duž neke krivulje). No, to onda znači da ni paralelni prijenos čvornih vrijednosti  $\mathbf{v}_N$  vektorskog polja u točku gdje se interpolacijom treba odrediti (približna) vrijednost polja nije jednoznačan, pa rezultat u (6) u općem slučaju zavisi od puta duž kojega se taj prijenos vrši! Čini se kako je jedini način da se situacija koja izmiče iskustvu iz našeg opažajnog prostora (za koji *znamo* da je euklidski!) učini jednoznačnom<sup>9</sup> taj da se paralelni prijenos između dvije točke obavlja *duž geodetske linije* koja ih spaja. Stoga bismo interpolacijsku formulu (6) zamjenili formulom:

$$\mathbf{v}^\alpha = \Psi^N_g K_{(N)\beta}^\alpha \mathbf{v}_N^\beta, \quad (8)$$

gdje indeks  $g$  u kernelu  $K$  upravo sugerira kako je u pitanju operator paralelnog prijenosa duž geodetske linije između odnosnih točaka. Prirodnost te aproksimacije — u onoj mjeri u kojoj nam je uopće moguće rasuđivati o prirodnosti događanja *unutar* nekog neeuklidskog prostora — pokušat ćemo istražiti u slijedećem odjeljku.

### 3 GEOMETRIJSKA USPOREDBA DVA PRISTUPA

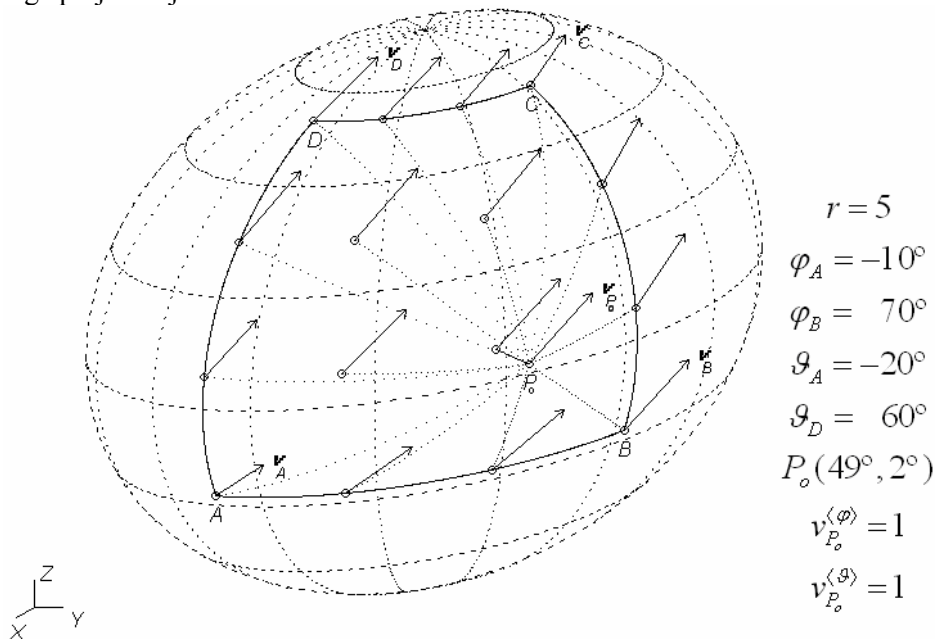
Kao što je moguće, prema (1), izvršiti aproksimiranje *kontravarijantnih* koordinata vektorskog polja zadanog u nekim čvorovima, isto tako je moguće izvršiti i aproksimiranje njegovih *kovarijantnih* koordinata. Činjenica da u općem slučaju postoji razlika već i između takva dva načina skalarnog aproksimiranja vektorskog polja, samo je bila razlog više da se pokuša i sa formulacijom invarijantnog pristupa (8). I gle — u svim analiziranim primjerima pokazalo se kako invarijantni pristup u principu predstavlja “*main stream*” između dviju navedenih mogućnosti u skalarnom pristupu! No, da li je on i najbolji (“*najprirodniji*”), teško je bilo prosuditi samo na prvi pogled. Naime, da je riječ o euklidskom prostoru i da je neko vektorsko polje

<sup>7</sup> Zadane sa  $u^\alpha = u^\alpha(s)$ .

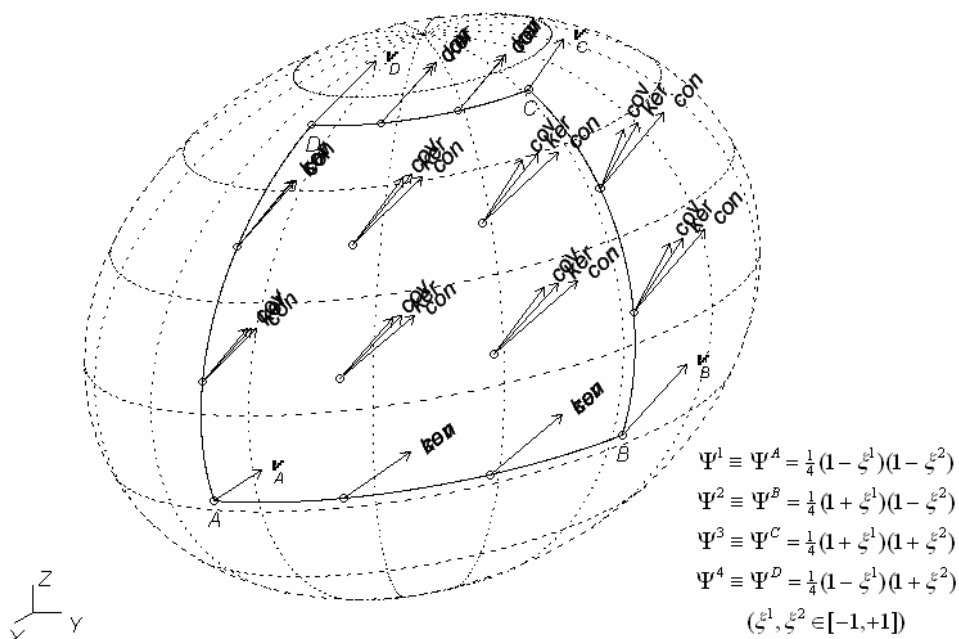
<sup>8</sup> Takvi operatori se pominju i u [6] (str. 58), ali se odmah ističe: “*However, shifters have been used primarily in the  $\mathbb{R}^n$  [Euclidean  $n$ -space] context.*”.

<sup>9</sup> Makar u nekoj dovoljno maloj oblasti u prostoru Riemanna, gdje se može pretpostaviti egzistencija jedinstvene geodetske linije između ma kojih dviju točaka!

zadano *istim* vrijednostima u nekoliko točaka izvjesne oblasti, najprirodnije bi bilo — u nedostatku bilo kakvih drugih podataka — pretpostaviti *konstantnost* (tj. *paralelnost*) cijeloga polja u toj oblasti<sup>10</sup>.



Sl. 1. Generiranje vektorskog polja iz točke  $P_o$



Sl. 2. Tri načina aproksimiranja vektorskog polja zadanog u točkama  $A, B, C$  i  $D$

<sup>10</sup> Značaj takve homogene distribucije polja slijedi npr. iz činjenice da sposobnost KE modela za reproduciranjem homogenog stanja napreznja jeste neophodan uvjet konvergencije!

Međutim, kako se radilo o sfernoj plohi (prostoru Riemanna!) i na njoj uočenoj oblasti krivocrtnog četverokuta  $ABCD$  (omeđenog koordinatnim linijama geografskog sustava), nije bilo moguće govoriti niti o *jednakim* vrijednostima vektorskog polja u točkama  $A, B, C$  i  $D$ , niti o *konstantnoj* vrijednosti tog polja u oblasti  $ABCD$ . Jedino što je preostalo bilo je — rukovodeći se stavom: “*A field of parallel vectors would have to be such that the value of the field at one point ... determine the whole field*” ([5], str. 179) — iz neke točke  $P_o$  (gdje je polje zadano npr. vrijednostima svojih fizikalnih koordinata) paralelnim prijenosom (*duž geodetskih linija*, što osigurava *jednoznačnost* prijenosa) *generirati cijelo polje* u oblasti  $ABCD$  (Sl. 1), pa dakle i u točkama  $A, B, C$  i  $D$ , a potom ga na temelju tih čvornih vrijednosti aproksimirati i skalarnim i kernel pristupom i najzad te aproksimirane vrijednosti u točkama mreže kojom je oblast  $ABCD$  ravnomijerno podijeljena usporediti sa već generiranim vrijednostima polja. Ponovo se kernel aproksimacija pokazala “*srednjim putem*” između skalarnih aproksimacija kovarijantnih i kontravarijantnih koordinata (usp. vektore “*ker*” sa “*cov*” i “*con*” na Sl. 2), ali se ovakvim testom pokazalo i da se ona *gotovo podudara* sa na predloženi način generiranim vrijednostima vektorskog polja prikazanim na Sl. 1!

#### 4 ZAVRŠNE NAPOMENE I BUDUĆE AKTIVNOSTI

Izreći odmah tvrdnju o većoj prirodnosti i superiornosti predloženog kernel pristupa u aproksimiranju vektorskih polja u neeuklidskim prostorima ipak bi bilo i pretenciozno i ishitreno. No, najmanje što takav pristup zaslužuje — utoliko prije što se u svim primjerima pokazalo kako on bolje čuva i osobinu na Sl. 1 generiranog polja da mu je modul konstantan (!) — jeste i numerička provjera na nekom podesnom primjeru KE analize sfere ljske, uz uporabu zakrivljenih konačnih elemenata.

#### Literatura:

- [1] Horák, Z., “Sur le problème fondamental du calcul intégral absolu”, C. R. Ac. Sci., Vol. 189, 1929, str. 19-21.
- [2] Synge, J.L., “Relativity: The General Theory”, North-Holland, Amsterdam, 1960.
- [3] Ericksen, J.L., “Tensor Fields”, Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1960.
- [4] Oden, J.T., “Finite Elements of Nonlinear Continua”, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [5] Golab, S., “Tensor Calculus”, Elsevier, Amsterdam - London - New York, 1974.
- [6] Marsden, J.E., Hughes, T.J.R., “Mathematical Foundations of Elasticity”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [7] Berković, M., Drašković, Z., “On the essential mechanical boundary conditions in two-field finite element approximations”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 91, 1991, str. 1339-1355.
- [8] Drašković, Z., “Numerical Contribution to the discussion on absolute integration of differential equations of geodesics in non-Euclidean space”, Facta Universitatis, Series “Mechanics, Automatic Control and Robotics”, Vol. 3, No. 11, 2001, str. 55-70.
- [9] Drašković, Z., “Numerical comparison of the scalar, pseudo-invariant and invariant approach in the derivation of finite element equations of motion in curvilinear coordinates”, Facta Universitatis, Series “Mechanics, Automatic Control and Robotics”, Vol. 3, No. 12, 2002, str. 351-357.

#### Autor:

**Zoran Drašković**, Bubnjaračka 28, Zagreb, e-mail: [zoran\\_draskovic\\_643@yahoo.com](mailto:zoran_draskovic_643@yahoo.com)

## Dodatak

U [8] su dobijeni eksplicitni izrazi za operatore paralelnog prijenosa po sfernoj plohi duž geodetske linije (glavne kružnice) između točaka  $P_o(\varphi_o, \mathcal{G}_o)$  i  $P(\varphi_p, \mathcal{G}_p)$  zadatih svojim geografskim koordinatama:

$$\begin{aligned}
 {}_g K_1^1(P_o, P) &= \frac{\cos \mathcal{G}_o}{\cos \mathcal{G}_p} \{ [\sin \bar{\varphi}_p \sin(\varphi_p - \psi_{Eu}) + \cos \bar{\varphi}_p \cos(\varphi_p - \psi_{Eu}) \cos \mathcal{G}_{Eu}] \times \\
 &\quad \times [\sin \bar{\varphi}_o \sin(\varphi_o - \psi_{Eu}) + \cos \bar{\varphi}_o \cos(\varphi_o - \psi_{Eu}) \cos \mathcal{G}_{Eu}] + \\
 &\quad + \cos(\varphi_p - \psi_{Eu}) \cos(\varphi_o - \psi_{Eu}) \sin^2 \mathcal{G}_{Eu} \} \\
 {}_g K_2^1(P_o, P) &= \frac{1}{\cos \mathcal{G}_p} \{ [\sin \bar{\varphi}_p \sin(\varphi_p - \psi_{Eu}) + \cos \bar{\varphi}_p \cos(\varphi_p - \psi_{Eu}) \cos \mathcal{G}_{Eu}] \times \\
 &\quad \times \{ \sin \mathcal{G}_o [\sin \bar{\varphi}_o \cos(\varphi_o - \psi_{Eu}) - \cos \bar{\varphi}_o \sin(\varphi_o - \psi_{Eu}) \cos \mathcal{G}_{Eu}] + \\
 &\quad + \cos \mathcal{G}_o \sin \mathcal{G}_{Eu} \cos \bar{\varphi}_o \} - \\
 &\quad - \cos(\varphi_p - \psi_{Eu}) \sin \mathcal{G}_{Eu} [\sin \mathcal{G}_o \sin(\varphi_o - \psi_{Eu}) \sin \mathcal{G}_{Eu} + \cos \mathcal{G}_o \cos \mathcal{G}_{Eu}] \} \\
 {}_g K_1^2(P_o, P) &= \cos \mathcal{G}_o \{ \{ \sin \mathcal{G}_p [\sin \bar{\varphi}_p \cos(\varphi_p - \psi_{Eu}) - \cos \bar{\varphi}_p \sin(\varphi_p - \psi_{Eu}) \cos \mathcal{G}_{Eu}] + \\
 &\quad + \cos \mathcal{G}_p \sin \mathcal{G}_{Eu} \cos \bar{\varphi}_p \} \times \\
 &\quad \times [\sin \bar{\varphi}_o \sin(\varphi_o - \psi_{Eu}) + \cos \bar{\varphi}_o \cos(\varphi_o - \psi_{Eu}) \cos \mathcal{G}_{Eu}] - \\
 &\quad - \cos(\varphi_o - \psi_{Eu}) \sin \mathcal{G}_{Eu} [\sin \mathcal{G}_p \sin(\varphi_p - \psi_{Eu}) \sin \mathcal{G}_{Eu} + \cos \mathcal{G}_p \cos \mathcal{G}_{Eu}] \} \\
 {}_g K_2^2(P_o, P) &= \{ \sin \mathcal{G}_p [\sin \bar{\varphi}_p \cos(\varphi_p - \psi_{Eu}) - \cos \bar{\varphi}_p \sin(\varphi_p - \psi_{Eu}) \cos \mathcal{G}_{Eu}] + \\
 &\quad + \cos \mathcal{G}_p \sin \mathcal{G}_{Eu} \cos \bar{\varphi}_p \} \times \\
 &\quad \times \{ \sin \mathcal{G}_o [\sin \bar{\varphi}_o \cos(\varphi_o - \psi_{Eu}) - \cos \bar{\varphi}_o \sin(\varphi_o - \psi_{Eu}) \cos \mathcal{G}_{Eu}] + \\
 &\quad + \cos \mathcal{G}_o \sin \mathcal{G}_{Eu} \cos \bar{\varphi}_o \} + \\
 &\quad + [\sin \mathcal{G}_p \sin(\varphi_p - \psi_{Eu}) \sin \mathcal{G}_{Eu} + \cos \mathcal{G}_p \cos \mathcal{G}_{Eu}] \times \\
 &\quad \times [\sin \mathcal{G}_o \sin(\varphi_o - \psi_{Eu}) \sin \mathcal{G}_{Eu} + \cos \mathcal{G}_o \cos \mathcal{G}_{Eu}] \quad ,
 \end{aligned}$$

gdje je:

$$\begin{aligned}
 \cos \bar{\varphi}_o &= \cos \mathcal{G}_o \cos(\varphi_o - \psi_{Eu}) \quad , \quad \cos \bar{\varphi}_p = \cos \mathcal{G}_p \cos(\varphi_p - \psi_{Eu}) \quad , \\
 \operatorname{tg} \psi_{Eu} &= \frac{\sin \varphi_o \cos \mathcal{G}_o \sin \mathcal{G}_p - \sin \mathcal{G}_o \sin \varphi_p \cos \mathcal{G}_p}{\cos \varphi_o \cos \mathcal{G}_o \sin \mathcal{G}_p - \sin \mathcal{G}_o \cos \varphi_p \cos \mathcal{G}_p} \quad , \\
 \cos \mathcal{G}_{Eu} &= \frac{\cos \varphi_o \cos \mathcal{G}_o \sin \varphi_p \cos \mathcal{G}_p - \sin \varphi_o \cos \mathcal{G}_o \cos \varphi_p \cos \mathcal{G}_p}{\sqrt{(\sin \varphi_o \cos \mathcal{G}_o \sin \mathcal{G}_p - \sin \mathcal{G}_o \sin \varphi_p \cos \mathcal{G}_p)^2 + \\
 &\quad + (\sin \mathcal{G}_o \cos \varphi_p \cos \mathcal{G}_p - \cos \varphi_o \cos \mathcal{G}_o \sin \mathcal{G}_p)^2 + \\
 &\quad + (\cos \varphi_o \cos \mathcal{G}_o \sin \varphi_p \cos \mathcal{G}_p - \sin \varphi_o \cos \mathcal{G}_o \cos \varphi_p \cos \mathcal{G}_p)^2}} \quad .
 \end{aligned}$$

Ti operatori uspostavljaju vezu između koordinata vektora paralelno transportiranog po plohi:

$$v^\alpha(P) = {}_g K_\beta^\alpha(P_o, P) v^\beta(P_o) \quad ,$$

pri čemu se prvi indeks u njima, bilo da je gornji ili donji, odnosi na točku određenu prvim argumentom, dok se drugi indeks odnosi na točku određenu drugim argumentom.

## EKSPERIMENTALNA I NUMERIČKA ANALIZA PLASTIČNOG KOLAPSA KUĆIŠTA VENTILA

Galić, I., Tonković, Z. & Vučković, K.

**Sažetak:** Provedene su opsežne eksperimentalne i numeričke analize za dobivanje dopuštenog opterećenja i opterećenja plastičnog kolapsa kućišta ventila oznake DN100 PN40. Nelinearnom numeričkom analizom određeno je opterećenje plastičnog tečenja, plastičnog kolapsa te plastične nestabilnosti kućišta uslijed unutarnjeg tlaka. Pokazano je da se numerički rezultati dobiveni realnim materijalnim modelom dobro poklapaju s eksperimentalnim. Za određivanje tlaka plastičnog kolapsa primijenjena je metoda dvostrukog elastičnog nagiba i metoda sjecišta tangenti, dok je definiranje dopuštenog tlaka provedeno pomoću metode graničnog projektiranja. Osim toga, primjenom norme EN12516-dobiven je dopušteni tlak koji se dobro podudara s numeričkim rješenjem.

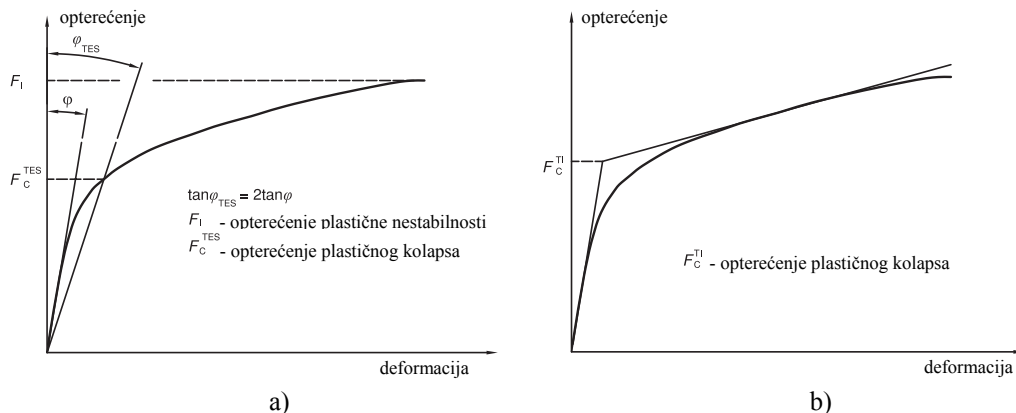
**Ključne riječi:** kućište ventila, eksperiment, metoda konačnih elemenata, plastični kolaps

### 1 UVOD

Kao važni elementi upravljanja u procesno industriji koriste se ventili čija je funkcija da utječu na parametre procesa na način da povećavaju ili smanjuju protok, tlak ili posredno temperaturu medija koji prolazi kroz njih. Glavni element ventila je njegovo kućište. U literaturi [3] prikazan je postupak analize cjelovitosti kućišta ventila oznake DN200 PN25. U inženjerskoj praksi proračun debljine stjenke ventila provodi se u skladu s normama prema kojima se složena trodimenzionalna geometrija ventila aproksimira s dvodimenzionalnom te se vrši izjednačavanje površina pod tlakom i nosivih površina [2].

Za definiranje dopuštenog opterećenja komponenata tlačnih posuda prema metodi graničnog projektiranja (*limit design method*) [1] potrebno je odrediti opterećenje plastičnog kolapsa uslijed statičkog opterećenja. Pri tome se provodi granična analiza gdje se osim opterećenja plastičnog kolapsa definiraju dva dodatna karakteristična opterećenja: opterećenje plastičnog tečenja i opterećenje plastične nestabilnosti. Opterećenje plastičnog tečenja određuje se na osnovi granične analize primjenom teorije malih deformacija i uz pretpostavku elastično-idealno plastičnog ponašanja materijala [8]. Za razliku od opterećenja plastičnog tečenja, određivanje opterećenja plastičnog kolapsa i plastične nestabilnosti zasniva se na teoriji velikih deformacija i modeliranju očvršćenja materijala u plastičnom području [4, 5, 7, 8, 10]. Ovdje opterećenje plastičnog kolapsa nije opterećenje potrebno da izazove fizikalni kolaps konstrukcije već je to opterećenje kod kojeg se javljaju značajne plastične deformacije. U literaturi najčešće primjenjivane metode za određivanje opterećenja plastičnog kolapsa su metoda dvostrukog elastičnog nagiba (*twice-elastic-slope* ili TES) [1] i metoda sjecišta tangenti (*tangent intersection* ili TI) [9] koje se zasnivaju na grafičkoj

konstrukciji karakterističnih krivulja opterećenje-deformacija. Za razliku od TES metode (slika 1a) koja daje konzistentne rezultate, TI metoda (slika 1b) je osjetljiva na odabir točke iz koje se na nelinearnom dijelu krivulje ucrtava tangenta. Nadalje, u skladu sa slikom 1a, opterećenje plastične nestabilnosti može se definirati kao maksimalno opterećenje koje konstrukcijski element može nositi [10].

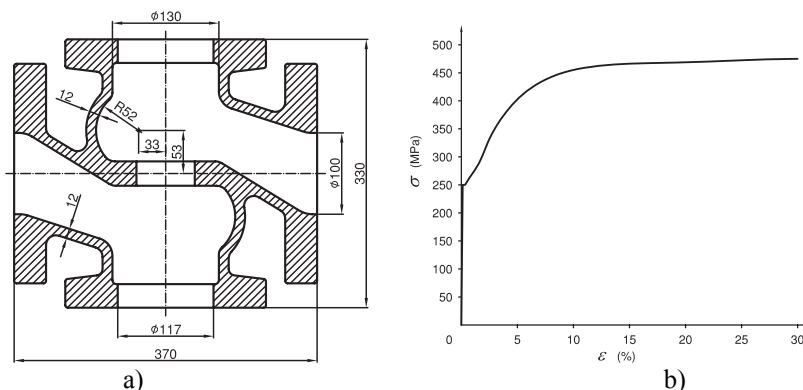


Sl. 1 Definiranje opterećenja plastičnog kolapsa: a) metoda dvostrukog elastičnog nagiba (TES), b) metoda sjecišta tangenti (TI)

Cilj rada je odrediti dopušteni tlak i tlak sloma kućišta ventila oznake DN100 PN40. Pri tome je eksperimentalno i primjenom metode konačnih elemenata (MKE) analiziran slučaj statičkog opterećivanja kućišta unutarnjim tlakom čija stjenka ne sadrži značajnije defekte.

## 2 EKSPERIMENT

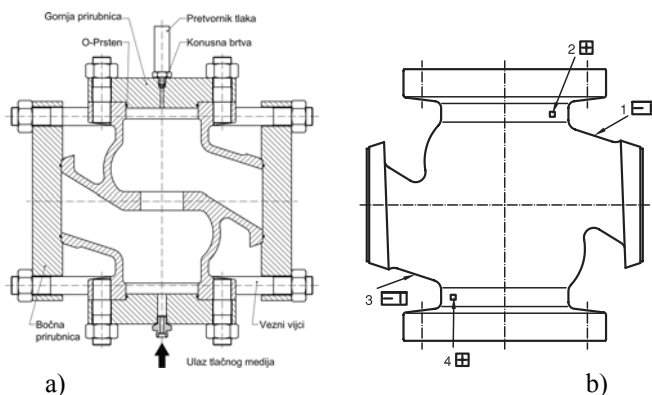
Kućište na kojem je izveden eksperiment izrađeno je postupkom lijevanja u pijesku. Na slici 2a prikazan je njegov složeni oblik s osnovnim dimenzijama. Kućište se sastoji od dvije bočne te gornje i donje prirubnice. U praksi se na gornju i donju prirubnicu spajaju poklopci, dok se preko bočnih prirubnica ventil spaja na cjevovod.



Sl. 2. Kućište ventila oznake DN100 PN40: a) izgled i dimenzije kućišta ventila, b) dijagram naprezanje-deformacija materijala kućišta GS-C25

Materijal kućišta ventila je GS-C25. Ispitivanje materijala provedeno je na sobnoj temperaturi te je dobiven inženjerski dijagram naprezanje-deformacija ( $\sigma_e, \epsilon_e$ ) prikazan na slici 2b. Vrijednosti stvarnih naprezanja i deformacija primijenjenih u numeričkoj analizi određene su na način prikazan u [4, 10] te je nakon deformacije u iznosu od 30% koja odgovara naprezanju vlačne čvrstoće pretpostavljeno idealno plastično ponašanje materijala.

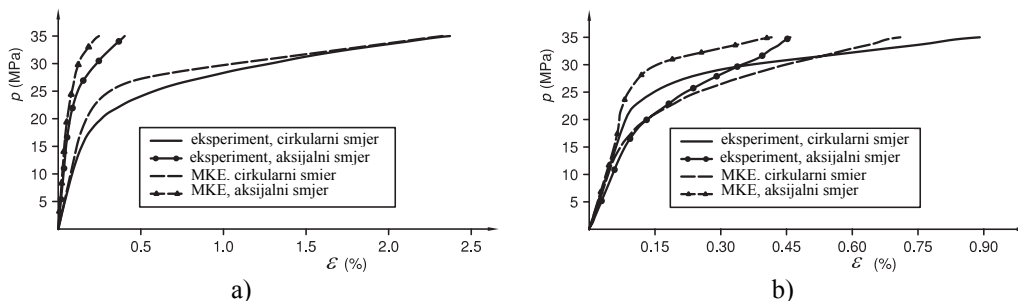
Na slici 3a prikazano je kućište pripremljeno za eksperiment dok je pozicija i orijentacija tenzometara dana na slici 3b. Za potrebe eksperimenta korištene su dvije vrste dvoosnih tenzometara koji su lijepljeni aksijalno i cirkularno, u skladu s geometrijom promatranog dijela kućišta. Za kontrolu eksperimenta, parovi tenzometara 1 i 3 te 2 i 4 postavljani su tako da daju jednake podatke. Svi korišteni tenzometri kalibrirani su na otpor od  $120 \pm 0,1 \Omega$ . Kućište ventila je tlačeno pomoću pumpe, a tlačni medij je voda temperature  $15^\circ\text{C}$ . Za mjerenje tlaka korišten je umjereni pretvornik tlaka područja mjerenja do 100 MPa, a kao kontrola su služila dva umjerena manometra područja mjerenja do 100 MPa. Eksperimenti su provedeni na tri kućišta te su rezultati prikazani do tlaka od 35 MPa budući da se kod ovog tlaka na površinama kućišta javljaju velike deformacije te dolazi do klizanja tenzometara u odnosu na stjenku kućišta. Slika 4a prikazuje rezultate eksperimenta u obliku dijagrama unutarnji tlak-deformacija za tenzometre 1 i 3, a slika 4b rezultate za tenzometre 2 i 4. Rezultati za parove tenzometara 1 i 3 te 2 i 4 neznatno odstupaju te su na slikama 4a i b radi preglednosti prikazani rezultati samo za tenzometre 1 i 2. Razlog tim odstupanjima leži u nesavršenosti pozicije i orijentacije prilikom lijepljenja tenzometara na kućište.



Sl. 3. Kućište pripremljeno za eksperiment: a) brtvljenje kućišta, b) pozicija i orijentacija tenzometara

Na osnovi prikazanih eksperimentalnih rezultata i primjenom TES i TI metoda opisanih u uvodu rada, određen je tlak plastičnog kolapsa kućišta zasebno za mjesto tenzometara 1 i 3 kao i za 2 i 4. Pri tome je u dijagramima unutarnji tlak-deformacija za deformaciju uzeta veća odnosno cirkularna komponenta. U tablici 1 prikazane su vrijednosti za tlak plastičnog kolapsa na osnovu eksperimentalnih rezultata.

Do konačnog sloma kućišta dolazi pri tlaku od 69,5 MPa (slika 5).



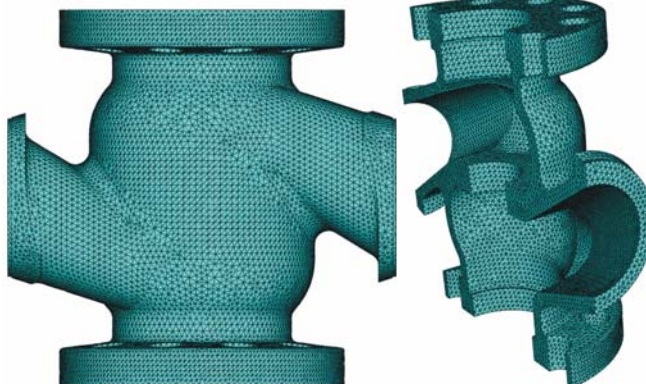
Sl. 4. Usporedba eksperimentalnih i numeričkih rezultata za tenzometre: a) 1 i 3, b) 2 i 4

Tablica 1: Tlak plastičnog kolapsa  $p_c$  (MPa)

Metoda	Tenzometri 1 i 3		Tenzometri 2 i 4	
	Eksperiment	MKE	Eksperiment	MKE
TES	22,0	29,4	23,2	27,7
TI	26,7	27,4	23,5	27,7



Sl. 5. Prikaz sloma kućišta



Sl. 6. Tipična mreža konačnih elemenata prikazana u dva različita pogleda

### 3 NUMERIČKA ANALIZA

Numeričke analize prikazanog proračunskog modela provedene su primjenom programskog paketa ABAQUS [6]. U skladu sa simetrijom modelirana je polovina kućišta. Za diskretizaciju modela primijenjen je modificirani tetraedarski element drugog reda C3D10M. Analizirano je više različitih mreža, a tipična mreža za koju su u daljnjem tekstu dana rješenja prikazana je na slici 6 u dva različita pogleda. Mreža sadrži 168879 tetraedarskih elemenata i 425440 čvorova. Rubni uvjeti definirani su na način da je svim čvorovima u ravnini simetrije spriječen pomak u smjeru okomito na tu ravninu. Osim toga, čvorovima koji se naslanjaju na bočne prirubnice onemogućen je pomak u cirkularnom smjeru. Opterećenje kućišta je unutarnji tlak  $p$  koji je dodijeljen kao distribuirano opterećenje na unutarnjim plohama modela konačnih elemenata. Nelinearno ponašanje materijala modelirano je primjenom inkrementalne plastičnosti s Von Misesovim kriterijem tečenja, asocijativnim zakonom tečenja i izotropnim očvršćenjem. Analiza velikih deformacija u paketu ABAQUS provedena je opcijom NLGEOM.

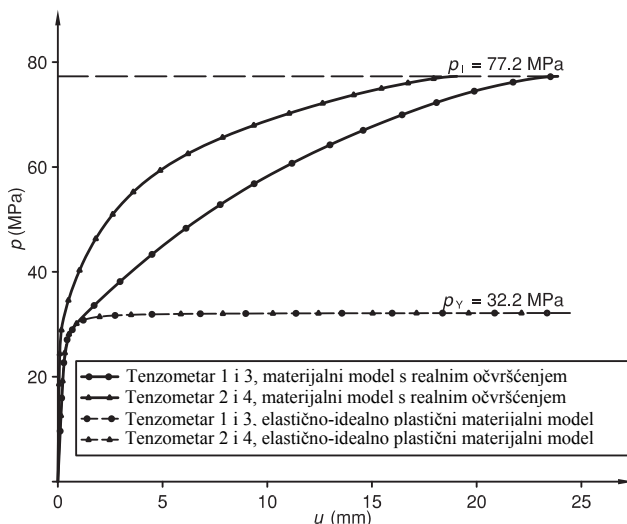
Za usporedbu eksperimentalnih i numeričkih rezultata, na mjestima na kojima su na realnom modelu lijepljeni tenzometri, u čvorovima konačnih elemenata numeričkog modela očitavane su vrijednosti pripadnih deformacija te su crtani dijagrami unutarnji tlak-deformacija. Iz slike 4 je vidljivo da razlike postoje jedino na mjestima naglih promjena geometrije gdje je prilikom lijepljenja tenzometara unijeto malo odstupanje od idealno cirkularnog i aksijalnog smjera tog dijela geometrije kućišta. Usporedbom rezultata za tlak plastičnog kolapsa (tablica 1) uočeno je da su vrijednosti određene eksperimentom manje od onih dobivenih numeričkom analizom te da se bolja poklapanja rezultata dobivaju primjenom TI metode u odnosu na TES metodu.

U skladu s [1], dopušteni tlak  $p_{dop}$  određujemo iz tlaka plastičnog kolapsa  $p_C$  prema izrazu:

$$p_{dop} = 2/3 p_C. \quad (1)$$

Uvrstimo li u prethodni izraz srednju vrijednost tlaka plastičnog kolapsa određenog eksperimentom ( $p_{C,exp} = 23,9$  MPa) slijedi da je dopušteni tlak kućišta ventila 15,9 MPa, odnosno ako primijenimo rezultate MKE ( $p_{C,MKE} = 28,0$  MPa) dopušteni tlak je 18,7 MPa. Osim toga, primjenom norme EN12516-2 [2] dobiva se dopušteni tlak u iznosu od 18.3 MPa što se dobro podudara s numeričkim rješenjem.

U numeričkoj analizi je pretpostavljeno da do sloma kućišta dolazi uslijed plastičnog kolapsa. U skladu s tim, iz dijagrama opterećenje-pomak dobivenog numeričkom analizom sa slike 7 određen je tlak plastične nestabilnosti kao najviša točka na krivulji. Numerički dobiven tlak plastične nestabilnosti u iznosu od 77,2 MPa dosta se dobro poklapa s eksperimentalno određenim tlakom sloma kućišta čiji je iznos 69,5 MPa.



Sl. 7. Ovisnost radialnog pomaka točke na mjestu tenzometara 1 i 3 te 2 i 4 o unutarnjem tlaku

Osim toga, u [4] i [10] je pokazano da se do rezultata za tlak plastične nestabilnosti može doći i jednostavnijom MKE analizom, a da se ne razmatra realno očvršćenje materijala i geometrijska nelinearnost.

## 4 ZAKLJUČAK

Provedene su opsežne eksperimentalne i nelinearne numeričke analize za dobivanje dopuštenog tlaka i tlaka sloma kućišta ventila. Analiziran je slučaj statičkog opterećivanja kućišta unutarnjim tlakom čija stjenka ne sadrži značajnije defekte. Pri tome je u analizama konačnim elementima modelirano realno očvršćenje materijala kao i geometrijska nelinearnost te je određeno opterećenje plastičnog tečenja, plastičnog kolapsa te plastične nestabilnosti kućišta uslijed unutarnjeg tlaka. Zaključeno je da se eksperimentalni i numerički rezultati dosta dobro poklapaju. Za određivanje tlaka plastičnog kolapsa primijenjena je metoda dvostrukog elastičnog nagiba i metoda sjecišta tangenti dok je definiranje dopuštenog opterećenja provedeno pomoću metode graničnog projektiranja. Osim toga, primjenom norme EN12516-dobiven je dopušteni tlak koji se dobro podudara s numeričkim rješenjem.

### Literatura:

- [1] ASME “Boiler and pressure vessel code section III and VIII”, New York: American Society for Mechanical Engineers, 1995.
- [2] EN 12516-2 “Industrial valves – Shell design strength – Part 2: Calculation method for steel valve shells”, ICS 23.060.01, 2004.
- [3] FKM Guideline “Fracture Mechanics Proof of Strength for Engineering Components”, Editor: Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM), VDMA Verlag GmbH, 2005.
- [4] Galić, I., Tonković, Z., Vučković, K., “Experimental and numerical investigation of failure pressure of valve housing”, članak predložen za objavljivanje u časopisu Strain.
- [5] Gerdeen, J.C., “A critical evaluation of plastic behaviour data and a united definition of plastic loads for pressure components”, WRC Bull, Vol. 254, 1979, str. 1-64.
- [6] Hibbitt, Karlsson & Serensen, Inc., ABAQUS/Standard. User's guide and theoretical manual, Version 6.7, 2007.
- [7] Li, H., Mackenzie, D., “Characterizing gross plastic deformation in design by analysis”, Int. J. Pressure Vessels Piping, Vol. 82, 2005, str. 777-786.
- [8] Milne, I., Ainsworth, R.A., Dowling, A.R., Stewart, A.T., “Assessment of the integrity of structures containing defects”, Int. J. Pressure Vessels Piping, Vol. 32, 1988, str. 3-104.
- [9] Save, M., “Experimental verification of plastic limit analysis of torispherical and toriconical heads”, In: (4th edn ed.), G.J. Bohm et al. Pressure Vessel and Piping: Design and Analysis Vol. 1, ASME, 1972, str. 382–416.
- [10] Tonković, Z., Skozrit, I., Alfirević, I., “Influence of flow stress choice on the plastic collapse estimation of axially cracked steam generator tubes”, Nuclear Engineering and Design, Vol. 238, 2008, str. 1762-1770.

### Autori:

**Ivica Galić**, ATM d.o.o., Žitnjak bb, 10000 Zagreb, tel. 01/2499-421, fax. 01/2499-420, e-mail: [ivica.galic@atm.hr](mailto:ivica.galic@atm.hr), web stranica: [www.atm.hr](http://www.atm.hr)

**Zdenko Tonković**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168-450, fax. 01/6168-187, e-mail: [ztonkov@fsb.hr](mailto:ztonkov@fsb.hr), web stranica: [www.fsb.hr/lnm](http://www.fsb.hr/lnm)

**Krešimir Vučković**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za mehaničke konstrukcije, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01/6168-165, fax 01/6168-940, e-mail: [kresimir.vuckovic@fsb.hr](mailto:kresimir.vuckovic@fsb.hr), web stranica: [www.fsb.hr/](http://www.fsb.hr/)

## **PREGLED NEKIH DO SADA RAZVIJENIH MODELA BETONA**

**Galić, M., Marović, P. & Nikolić, Ž.**

**Sažetak:** Na osnovu eksperimentalnih ispitivanja ponašanja betonskih, armiranobetonskih i prednapetih konstrukcija zapaženo je izrazito nelinearno i neelastično ponašanje betona. Kako je teško obuhvatiti sve promjene koje se javljaju u betonu, razvio se veliki broj modela betona za opisivanje različitih problema, s težnjom da se u tim analizama uključe promjene koje su dominantne u promatranom problemu. U ovom radu dat će se kratki pregled nekih značajnijih do sada razvijenih modela betona s kratkim osvrtom na njihove prednosti i nedostatke. Izvršena je podjela tih modela ovisno o načinu formuliranja zakona ponašanja. Modeli su odabrani tako da pokažu raznolikost načina modeliranja te specifičnosti njihove primjene.

**Ključne riječi:** *modeli betona, plastičnost, mikromodeli.*

### **1 UVOD**

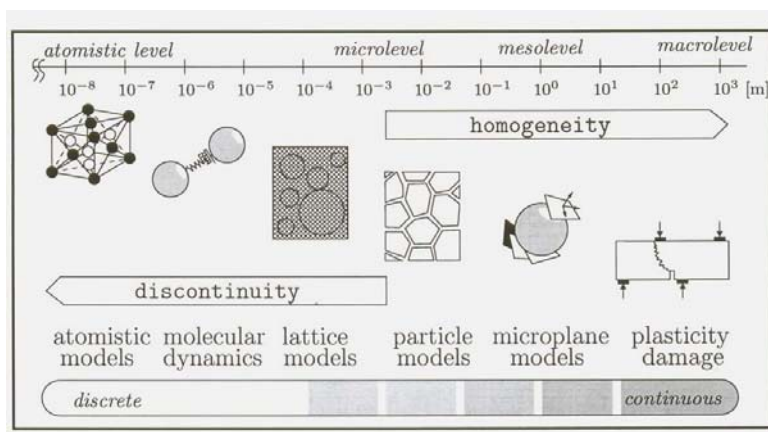
Na osnovu eksperimentalnih ispitivanja ponašanja betonskih, armiranobetonskih i prednapetih konstrukcija zapaženo je: nelinearno i neelastično ponašanje; oštećenja koja prouzrokuju degradaciju linearno-elastičnih konstanti u matrici materijala; nelinearno ponašanje nakon graničnog naprežanja; višeosna i nejednolika raspodjela deformacija koja potiče razvoj pukotina; međudjelovanje betona i armature; očvršćivanje neraspucanog betona između dvije pukotine uslijed vlačnog naprežanja; različita granica tečenja pri analizi armature ukomponirane u beton u odnosu na onu kada se armatura analizira zasebno. Pri izradi računalnih programa kojim se žele proračunavati i analizirati armiranobetonske i prednapete konstrukcije potrebno je osmisliti matematički model koji će uključiti što veći broj ovih utjecaja te ga implementirati u računalni program da bi dobili što vjerniji odgovor konstrukcije na promatrano opterećenje. Kako je teško obuhvatiti sve promjene koje se javljaju u betonu, razvio se veliki broj modela betona za opisivanje različitih problema, s težnjom da se u tim analizama uključe promjene koje su dominantne u promatranom problemu.

### **2 PODJELA MODELA BETONA**

Ovisno o tome na kojoj razini se promatra, beton pokazuje veoma različite fizikalne i geometrijske osobine. Promatrane razine "hijerarhijski" se mogu podijeliti na atomske, mikro, mezo i makro razine. Osnovno je pitanje osmisliti model koji će ga dovoljno dobro opisati na promatranoj (zahtijevanoj) razini, slika 1.

S gledišta modeliranja na mikro i makro razini, modeli se mogu podijeliti u dvije velike skupine:

1. modeli betona koji su matematički formulirani pomoću invarijanti napreznja i deformacija uspostavljajući konstitutivni zakon veze tenzora deformacija i tenzora napreznja na makro razini. Ovisno o tipu ovih odnosa oni se mogu podijeliti na nekoliko velikih skupina modela koje u sebi sadrže preciznije podjele. To su:
  - modeli zasnovani na teoriji elastičnosti,
  - modeli zasnovani na teoriji elasto-plastičnosti i plastičnosti, (jednoplodne (single-surface) i višeplošne ili višeravninske (multi-surface) modele),
  - endokroni modeli,
  - modeli stupnja oštećenja (damage model),
  - modeli zasnovani na teoriji mehanike loma.
2. modeli betona kod kojih se odnos komponenti napreznja i komponenti deformacija promatra na mikro razini nakon čega se povezuju na makro razini u tenzor napreznja koristeći načelo virtualnog rada.



Sl. 1 Razine promatranja konstitutivnih modela betona [1]

## 2.1 Plošni plastični modeli

Potreba za što realističnijim opisom betona dovela je do razvoja velikog broja modela koji daju širok spektar odgovora ovog heterogenog materijala kada je izložen različitim napreznjima i opterećenjima koje je bilo zgodno pratiti u karakterističnoj ravnini ili ravninama (zbog čega su i dobili naziv plošni modeli). U ovom radu će se prikazati neki od njih.

### 2.1.1 Jednoplodni plastični modeli

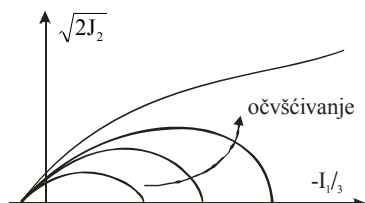
**Model Etse - William** [4] razvijen 1994. godine je osnovni jednoplodni plastični model betona. Kriterij tečenja je opisan funkcijom:

$$f_{EW} = (p, r, \theta, k, c) = \left\{ (1 - k) \left[ \frac{p}{f_{cu}} + \frac{rg(\theta)}{\sqrt{6} f_{cu}} \right]^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{rg(\theta)^2}{f_{cu}} \right\} + \frac{k^2 m}{f_{cu}} \left[ p + \frac{rg(\theta)}{\sqrt{6}} \right] - k^2 c = 0 \quad (1)$$

gdje su  $p$ ,  $r$  i  $\theta$  invarijante tenzora napreznja, a  $f_{cu}$  jednoosna tlačna čvrstoća.

Varijabla  $k$  kontrolira prije-vršno (pre-peak) ponašanje dok kohezijski parametar  $c$  kontrolira poslije-vršno (post-peak) ponašanje. Parametar  $m$  je koeficijent trenja i definira oblik površine tečenja u meridijanskoj ravnini u periodu omekšivanja. Ovisno

o graničnom naprezanju razvijeni su parametri koji definiraju očvršćivanje i omekšivanje. Razvoj ploha tečenja je prikazan na slici 2.



Sl. 2 Etse - Wiliam model

**Extended Leon model** (ELM) [3, 4] je prošireni Etse - Williamov model. Pripada skupini jednoplošnih plastičnih modela. Kriterij tečenja je opisan funkcijom:

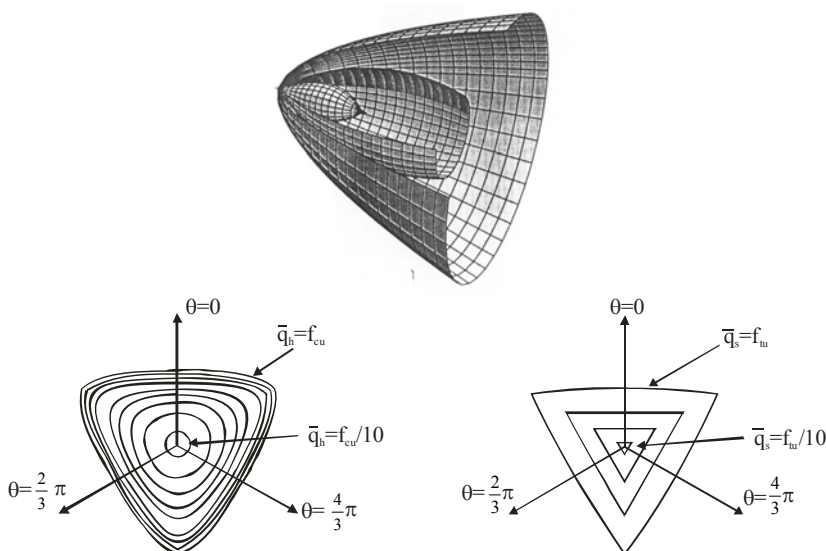
$$f_{EW} = (p, r, \theta, q_h, q_s) = \left\{ \left( 1 - \frac{\bar{q}_h}{f_{cu}} \right) \left[ \frac{p}{f_{cu}} + \frac{rg(\theta, e)}{\sqrt{6}f_{cu}} \right]^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{rg(\theta, e)^2}{f_{cu}} \right\}^2 \quad (2)$$

$$+ \left( \frac{\bar{q}_h}{f_{cu}} \right)^2 m(q_s) \left[ \frac{p}{f_{cu}} + \frac{rg(\theta, e)}{\sqrt{6}f_{cu}} \right] - \left( \frac{\bar{q}_h}{f_{cu}} \right)^2 \frac{\bar{q}_s}{f_{tu}} = 0$$

uz napomenu da je  $\bar{q}_h = f_{cy} - q_h$  i  $\bar{q}_s = f_{tu} - q_s$ .

U jednadžbi (2) p je hidrostatski pritisak, r je radijus devijatorske ravnine,  $\theta$  je kut opterećivanja,  $f_{cy}$  je granica do koje se beton ponaša linearno elastično,  $f_{cu}$  i  $f_{tu}$  su jednoosna tlačna odnosno vlačna čvrstoća betona.

Plohe popuštanja su prikazane na slici 3 u prostoru glavnih naprezanja te u devijatorskoj ravnini. U devijatorskoj ravnini ploha tečenja je opisana eliptičkom funkcijom  $g(\theta, e)$  [11] gdje je e parametar ekscentriciteta kojim se opisuje prijelaz plohe tečenja iz kružnog ( $e=1.0$ ) do gotovo trokutastog ( $e=0.5$ ) oblika.



Sl. 3 Extended Leon model [10]

U Extended Leon modelu su uključeni i parametri očvršćivanja i omekšivanja  $q_h$  i  $q_s$  betona (slika 3). U funkciju su uključene dvije interne varijable  $\alpha_h$  i  $\alpha_s$  pomoću kojih se prate promjene ponašanja materijala.

### 2.1.2 Višeplošni plastični modeli (multi-surface plastic models)

U ovim modelima [6] se definiraju najmanje dvije ravnine popuštanja i to za opis kriterija tečenja kada je beton izložen tlačnom naprezanju te kriterija za opis razvoja pukotina.

**Model opisan Druker-Pragerovim i Rankinovim kriterijima** je jedan od višeravninskih plastičnih modela opisan kombinacijom Drucker-Pragerovog (DP) i Rankinovog zakona (RK) ponašanja betona. Drucker-Pragerov zakon je rabljen kao kriterij za analizu betona pri dominantnim tlačnim naprezanjima, te Rankinov zakon ponašanja za dominantna vlačna naprezanja. U Westergardovom prostoru kriterij popuštanja u području razvoja pukotina koje su ovdje opisane modelom raspodijeljenih pukotina je opisan Rankinovom funkcijom:

$$f_{RK,A}(\sigma_A, q_{RK}) = \sigma_A - \overline{q_{RK}} \quad (3)$$

Indeks A=1,2,3 označava osi glavnih naprezanja, a  $\overline{q_{RK}}$  je jednoosno vlačno naprezanje. Duktilnost betona izloženog troosnom tlaku je opisana Druker-Pragerovom funkcijom predstavljenom invarijantnom formulacijom:

$$f_{DP}(\sigma, q_{DP}) = \sqrt{J_2} - k_{DP} I_1 - \frac{q_{DP}}{\beta_{DP}}, \quad (4)$$

gdje je  $q_{DP} = f_{cy} - q_{DP}$ .

U navedenom izrazu  $f_{cy}$  predstavlja granicu do koje se beton ponaša linearno elastično, a parametri  $k_{DP}$  i  $\beta_{DP}$  se dobiju izračunavanjem iz odnosa čvrstoće betona izloženog jednoosnom ( $f_{cu}$ ) i dvoosnom naprezanju ( $f_{cb}$ ), za odnos  $f_{cb} / f_{cu} = 1.16$ ,  $k_{DP} = -0.07$  i  $\beta_{DP} = 1.97$  [7]. Za opis mikrostrukturnih promjena betona definirane su varijable  $\alpha_{DP}$  te  $\alpha_{RK}$  koje određuju zakon očvršćivanja odnosno omekšivanja betona i glase:

$$\alpha_{DP} = \gamma_{DP} \frac{\partial f_{DP}}{\partial q_{DP}}, \quad \alpha_{RK} = \gamma_{RK,A} \frac{\partial f_{RK,A}}{\partial q_{RK}} \quad (5)$$

Razvoj plastične deformacije je definiran izrazom:

$$\varepsilon^p = \gamma_{DP} \frac{\partial f_{dp}}{\partial \sigma} + \sum_{A=1}^3 \gamma_{RK,A} \frac{f_{RK,A}}{\sigma_A} \quad (6)$$

Smanjenje vlačne čvrstoće je opisano eksponencijalnom funkcijom:

$$q_{RK} = f_{tu} e^{\alpha_{rk} / \alpha_{rk,u}} \quad (7)$$

**Model opisan Druker-Pragerovim (DP) i "Tension Cut- of "(TC) kriterijima** je analogan prethodnom modelu s jedinom razlikom što je umjesto Rankinovog kriterija izabran "Tension Cut-of " kriterij čija je funkcija popuštanja definirana izrazom:

$$f_{TC}(\sigma, q_{TC}) = \sigma_A - q_{TC}, \quad q_{RK} = \frac{f_{tu}}{3} - q_{TC} \quad (8)$$

Parametar  $\alpha_{TC} = \gamma_{TC} \frac{\partial f_{TC}}{\partial q_{TC}}$ , a razvoj plastičnih deformacija za ovaj model je definiran izrazom:

$$\varepsilon^p = \gamma_{DP} \frac{\partial f_{dp}}{\partial \sigma} + \sum_{A=1}^3 \gamma_{TC} \frac{f_{TC}}{\sigma} \quad (9)$$

Kao što se može zaključiti iz do sada navedenoga za definiranje kriterija ponašanja u pojedinim ravninama ovi modeli zahtijevaju neke materijalne te modelirane parametre koji su dobiveni određenim eksperimentalnim ispitivanjima. Ti parametri su prikazani u tablici 1.

Parametri materijala	Parametri modela
Youngov modul elastičnosti E	granica do koje se beton ponaša elastično $f_{cy}=0.4 f_{cu}$
Poissonov koeficijent, $\nu$	čvrstoća betona pri dvoosnom tlačnom naprezanju $f_{cb}=1.15 f_{cu}$
jednoosna vlačna čvrstoća $f_{tu}$	$G_r^{II}=50 G_r^I$
jednoosna tlačna čvrstoća,	deformacija pri maksimalnom jedoosnom naprezanju $\varepsilon_m=0.0022$ , rabljena za $\alpha_{DP}=\varepsilon_m \cdot f_{cu}/E$
modul posmika $\underline{G}$	

Tablica 1. Osnovni parametri za definiranje ponašanja betona kod plastičnih modela

Ovakvi modeli su dobri za opisivanje armiranih betonskih presjeka osobito kada se prekoračenje dopuštenih naprezanja, odnosno otkazivanje nosivosti (popuštanje presjeka) javlja u armaturi presjeka.

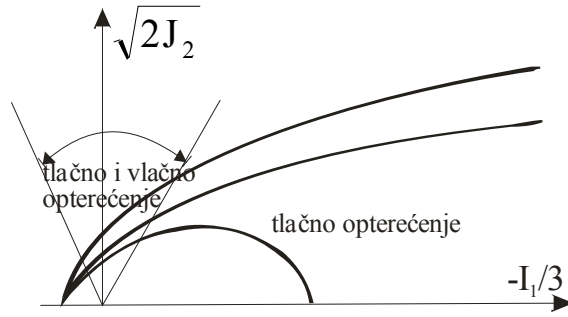
## 2.2 Modeli stupnja oštećenja

**Model Voyiadjis i Abu-Lebdch** (slika 4) uvodi dva kriterija: formira granična plohu  $F_{VA}$  i plohu tečenja  $f_{VA}$ , koji su definirani funkcijama:

$$F_{VA}(\sigma, \bar{D}) = aJ_2 + \lambda\sqrt{J_2} + bI_1 - g(\bar{D}) = 0 \quad \text{- granična ploha}$$

$$f_{VA}(\sigma, \bar{D}) = aJ_2 + \lambda k\sqrt{J_2} + k^2 bI_1 - k^2 g(\bar{D}) = 0 \quad \text{- ploha tečenja} \quad (10)$$

gdje je  $\bar{D}$  parametar oštećenja,  $g(\bar{D})$  funkcija akumuliranih oštećenja,  $J_2$  invarijanta devijatorskog dijela tenzora naprezanja,  $I_1$  invarijanta tenzora naprezanja, parametri  $a$ ,  $b$  i  $\lambda$  su konstante [11], a  $k$  je faktor oblika. Akumulirana oštećenja su opisana vlačnim ( $D_t$ ) i tlačnim ( $D_c$ ) parametrima s dvije različite površine opterećivanja do potpunog uništenja. Ovaj model je pogodan kod opisa ponašanja konstrukcije izložene cikličnom opterećenju.

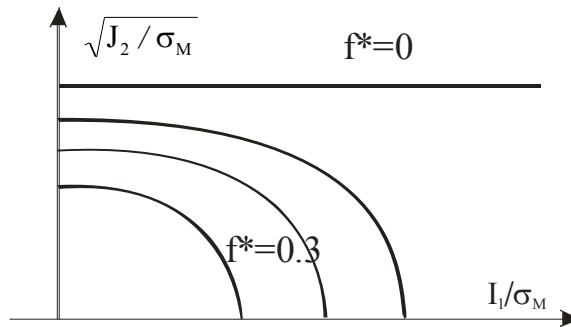


Sl. 4 Voyiadjisov i Abu-Lebdchov model [11]

**Burlionov model** (slika 5) koristi funkciju tečenja prema Needleman i Tvergaardu [8] modificiranu funkcijom tečenja koju je predložio Gurson [5]. Kriterij tečenja je definiran izrazom:

$$f_{NT}(\sigma, \sigma_M, f^*) = \frac{3I_2}{\sigma_M^2} + 2g_1 f^* \cosh\left(g_2 \frac{I_1}{2\sigma_M}\right) - (1 + (g_3 f^*)^2) \quad (11)$$

gdje su:  $I_1$  i  $I_2$  invarijante tenzora naprezanja,  $\sigma_M$  je ekvivalentno naprezanje pri granici tečenja i  $f^*$  volumen šupljina između frakcija, a  $g_1, g_2, g_3$  su dobiveni parametri modela. U modelu se promjena  $f^*$  kontrolira porastom plastičnih deformacija. Broj  $f^*$  se povećava pri vlačnom naprezanju, dok se taj broj smanjuje kada je uzorak izložen tlačnom naprezanju. U opisanom modelu oštećenje se povećava porastom poroznosti i razvojem mikro-pukotina (plastic-damage coupling). Za rješavanje navedenih nelinearnih jednadžbi rabljena je Forward Euler-ova integracija, i to u malim iteracijskim koracima zbog izražene nelinearnosti sustava.

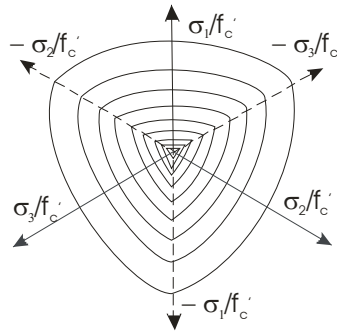


Sl. 5 Burlionov model [10]

**Kangov model** [2] za definiranje ponašanja betona obuhvaća tri funkcije koje definiraju: očvršćivanje, omekšivanje i razvoj pukotina. Matematički se može zapisati kao:

$$F(\xi, \rho, \theta) = F(\xi, \rho, \theta)_{\text{puk}} + F(\xi, \rho, k(qh))_{\text{očvr.}} + F(\xi, \rho, c(qs))_{\text{omekš.}} \quad (12)$$

Na slici 6 je prikazan razvoj ploha tečenja u devijatorskoj ravnini na nekoliko razina duž hidrostatske osi.



Sl. 6 Kangov model

Prikazani model je pogodan za opis i analizu visokih armiranobetonskih stupova izloženih kombiniranom uzdužnom i poprečnom opterećenju.

### 2.3 Parametarski modeli

**Ottosenov parametarski model** definira kriterij popuštanja pomoću tri invarijante i četiri parametra. Matematički se može zapisati kao:

$$f(I_1, J_2, \theta) = aJ_2 + \lambda\sqrt{J_2} + bI_1 - 1 = 0 \quad (13)$$

gdje je  $\lambda$  funkcija  $\cos \theta$  definirana kao:

$$\lambda \begin{cases} k_1 \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1}(k_2 \cos 3\theta) \right] & \text{za } \cos 3\theta \geq 0 \\ k_1 \cos \left[ \frac{\pi}{3} \cos^{-1}(-k_2 \cos 3\theta) \right] & \text{za } \cos 3\theta \leq 0 \end{cases} \quad (14)$$

Parametri  $a$ ,  $b$ ,  $k_1$  i  $k_2$  su konstante dobivene pomoću uobičajenog jednoosnog testa za određivanje vlačne  $f_t'(\theta=0^\circ)$  i tlačne čvrstoće  $f_c'(\theta=60^\circ)$ , te međusobnih odnosa za element izložen dvoosnom i troosnom stanju naprezanja.

Plohe pukotina u meridijanskoj ravnini su opisane kao kvadratne parabole koje su konveksne, ako je  $a > 0$  te  $b > 0$ . Krivulja tečenja, u devijatorskoj ravnini, ispunjava uvjete simetričnosti i konveksnosti te mijenja oblik od približno trokutastog do približno kružnog, ovisno o povećanju hidrostatskog tlaka. model sadrži u sebi nekoliko poznatih kriterija tečenja za određene vrijednosti parametara  $a$ ,  $b$  i  $\lambda$ . Za slučaj da je  $a=b=0$  i  $\lambda=\text{konst}$  poistovjećuje se s von-Misesovim kriterijem, odnosno za  $a=0$  i  $\lambda=\text{konst}$  s Drucker Pragerovim kriterijem, kod kojih je ploha popuštanja kružnog oblika.

Ovaj model je dobro matematički definiran i pogodan je za implementaciju u računalne programe, ali zahtijeva veliki broj parametara materijala koji se mogu dobiti jedino eksperimentalnim ispitivanjem.

**Hsieh-Ting-Chen model** je nastao (slika 7) nakon Ottosenovog modela a prednost u odnosu na Ottosenov model je pojednostavljenje funkcije  $\lambda$ , koja u ovom modelu glasi:

$$\lambda(\theta) = b \cos \theta + c \text{ za } |\theta| \leq 60^\circ \quad (15)$$

gdje su  $b$  i  $c$  konstante.

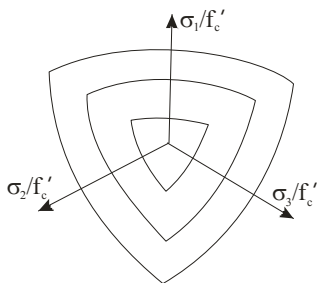
Ako se zamijeni  $\lambda$  u kriteriju tečenja Ottosenovog modela izražavajući ga u koordinatama Haigh-Westergardovog prostora funkcija će glasniti:

$$f(\xi, \rho, \theta) = a\rho^2 + (b \cos \theta + c)\rho + d\xi - 1 = 0 \quad (16)$$

gdje su  $a, b, c$  i  $d$  materijalne konstante. Kako je u Haigh-Westergardovom prostoru  $\rho \cos \theta = (\sqrt{3/2}\sigma_1 - I_1 / \sqrt{6})$  prethodna funkcija se može definirati kao funkcija invarijanti napreznja  $I_1, J_2$  i  $J_3$  s četiri nove materijalne konstante  $A, B, C$  i  $D$ :

$$AJ_2 + B\sqrt{J_2} + C\sigma_1 + DI_1 - 1 = 0 \quad (17)$$

Ovdje je zanimljivo primijetiti da je prikazani kriterij linearna kombinacija poznatih kriterija poput von-Misesovog, Druker-Pragerovog i Rankinovog kriterija. Parametri materijala  $A, B, C$  i  $D$  su definirani pomoću dvoosnog Kupferovog eksperimenta i troosnog testa Milsa i Zimmermana. Definirani su za element izložen jednoosnom tlačnom napreznju  $f'_c$ , jednoosnom vlačnom napreznju  $f'_t = 0.1f'_c$  jednolikom dvoosnom napreznju te stanju napreznja definiranom kao  $(\sigma_{oct}/f'_c, \tau_{oct}/f'_c) = (-1.95, 1.6)$  na tlačnom meridijanu ( $\theta = 60^\circ$ ).



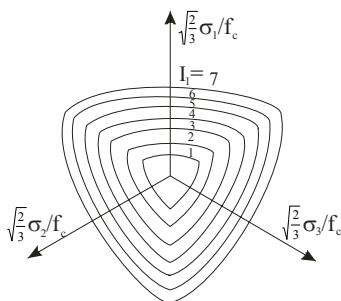
Sl. 7 Hsieh-Ting –Chen četveroparametarski model

**Wiliam Warnke pet parametarski model** je definiran kao kvadratna parabola izrazima:

$$\sigma_m = a_0 + a_1\rho_t + a_2\rho_t^2, \sigma_m = b_0 + b_1\rho_t + b_2\rho_t^2 \quad (18)$$

gdje je:  $\sigma_m$  – napreznje određeno izrazom  $\sigma_m = I_1/3$ ,  
 $\rho_t$  i  $\rho_c$  – su komponente napreznja okomite na hidrostatsku os u ravnini pod kutom  $\theta = 0^\circ$  za vlačna napreznja te  $\theta = 60^\circ$  za tlačna napreznja,  
 $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  – su materijalne konstante dobivene pomoću pet testova uobičajenih za ovakvu analizu

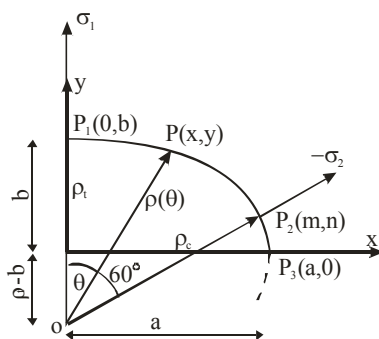
Napreznja  $\sigma_m, \rho_t$  i  $\rho_c$  su normirana jednoosnim tlačnim napreznjem  $f'_c$  i prikazana u koordinatnom sustavu  $\sigma_m/f'_c, \rho_t/f'_c, \rho_c/f'_c$ .



Sl. 8 Willam-Warnke petparametarski model betona

Ploha popuštanja kod ovog modela je konveksna i glatka po svim svojim dijelovima (slike 8 i 9). Kako je ova krivulja potpuno simetrična dovoljno je promatrati interval  $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ . Uvjet simetričnosti za kutove  $\theta=0^\circ$  i  $\theta=60^\circ$  zahtijeva da su vektori  $\rho_t$  i  $\rho_c$  okomiti na elipsu u točkama  $P_1(0,b)$  te  $P_2(m,n)$  (slika 9). Da bi uvjet okomitosti u točki  $P_1$  bio uvijek zadovoljen os y se poklapa s položajem vektora  $\rho_t$ . Jedinični vektor vanjske normale u točki elipse  $P_2(m,n)$  formira s osi x kut od  $30^\circ$ . Koristeći sve navedene uvjete može se definirati polovina osi a i polovina osi b kao funkcija vektora  $\rho_t$  i  $\rho_c$ , koja se može izraziti u polarnim koordinatama kao:

$$\rho(\theta) = \frac{2\rho_c(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos\theta + \rho_c(2\rho_t - \rho_c)\left[4(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos^2\theta + 5\rho_t^2 - 4\rho_t\rho_c\right]^{1/2}}{4(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos^2\theta + (\rho_c - 2\rho_t)^2}$$



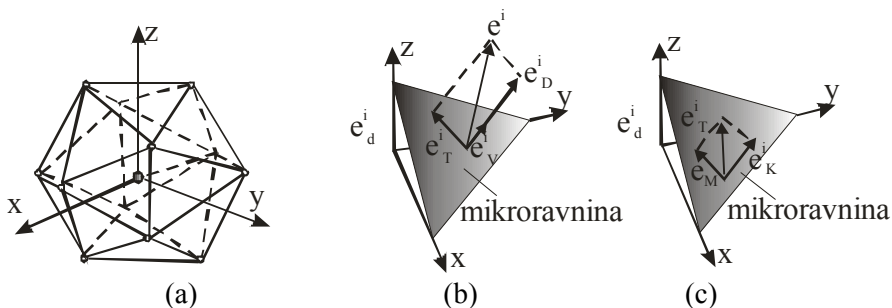
Sl. 9 Trag plohe tečenja u devijatorskoj ravnini za interval  $0 \leq \theta \leq 60$  (Willam-Warnke model)

U prethodnoj jednadžbi se prepoznaju dva granična slučaja. Za vrijednost  $\rho_t/\rho_c=1$  odnosno  $a=b$  elipsa prelazi u kružnicu (što je krivulja u devijatorskoj ravnini za von-Misesov i Druker-Pragerov model) dok za vrijednost  $\rho_t/\rho_c=1/2$  odnosno  $a/b$  teži beskonačnosti elipsa prelazi u približno trokutasti oblik (što podsjeća na krivulju kriterija pri maksimalnom vlačnom naprezanju). Konveksnost i neprekidnost (glatkoća) funkcije je osigurana u intervalu  $1/2 \leq \rho_t/\rho_c \leq 1$ . Funkcija je definirana s 5 materijalnih konstanti dobivenih navedenim testovima:

- izmjerenim jednoosnim tlačnim naprezanjem  $f_c'$
- jednoosnim vlačnim naprezanjem koje ima vrijednost  $f_t' = 0.1 f_c'$
- dvoosnim tlačnim naprezanjem  $f_{bc}' = 1.15 f_c'$
- limitiranim dvoosnim naprezanjem ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ) gdje je  
( $\sigma_{mt}, \rho_t$ ) =  $(-1.95f_c', 2.77f_c')$

## 2.4 Mikroravninski modeli (micro-plane models)

Kod mikroravninskih modela (slika 10) ponašanje betona se definira kao odnos komponenti naprezanja i odgovarajućih deformacija u mikroravnini strukture betona. Svaka ravnina je predstavljena svojim jediničnim vektorom normale, tj. i-tim jediničnim vektorom za i-tu mikroravninu  $\mathbf{n}^i = [n_x^i \ n_y^i \ n_z^i]^T$ . Model se zasniva na uvjetima kinematskih ograničenja. Ovi uvjeti dopuštaju određivanje vektora deformacija  $\mathbf{e}^i$  na i-toj mikroravnini iz makroskopskog tenzora deformacija kao  $\mathbf{e}^i = \mathbf{n}^i \boldsymbol{\varepsilon}$ .



Sl. 10 Mikroravninski model: (a) Diskretizacija s 21 mikroravninom; (b) normalna i posmična komponenta deformacije na i-toj mikroravnini; (c) komponente posmične deformacije na i-toj mikroravnini [12]

Mikroravninskim modelima se sasvim sigurno najdetaljnije i najbolje opisuje ponašanje betona odnosno betonske konstrukcije, jer se tim modelima ovaj izrazito heterogen materijal analizira na mikro razini povezujući ta ponašanja na makro razini. Međutim, zbog složenosti svog opisa, velikog broja ravnina u kojima se analizira ponašanje, te velikog broja potrebnih parametara, nisu pogodni za implementaciju u modele koji konstrukciju diskretiziraju kompozitnim konačnim elementima, odnosno nisu pogodni za opisivanje armirano betonskih i prednapetih presjeka.

### 3 USPOREDBA PRIKAZANIH MODELA

Konstitutivni model	Parametri materijala	Parametri modela	Ukupni broj potrebnih parametara
ELM	5	11	16
DP-TC	5	4	9
DP-RK	5	4	9
Otossen	5	4	9
Willam-Warnke	5	5	10
Mikroravninski	9	13	22

Tablica 2. Ukupan broj potrebnih parametara za različite modele betona

Primjećujemo da svi prikazani modeli, tablica 2, imaju veliki broj parametara (materijalnih i modelskih) koji zahtijevaju skupa eksperimentalna istraživanja.

### 4 ZAKLJUČAK

Potreba za što realističnijim opisom betona dovela je do razvoja velikog broja modela koji daju širok spektar odgovora ovog heterogenog materijala kada je izložen različitim naprezanjima i opterećenjima.

Ovaj kratki pregled samo nekih modela betona pokazao je koliko je teško formirati model koji će dobro opisati nelinearno ponašanje, uključiti što veći broj utjecaja koji proizlaze iz tog ponašanja, precizno ih matematički definirati, a pri tome koristiti parametre materijala koji ne zahtijevaju dodatne eksperimentalne analize.

Pokazano je da modeliranje ovisi o tome koje promjene i kakav problem se želi pratiti i analizirati i na kojoj razini (makro ili mikro). Neovisno o tome koliko je model točan i precizan, može se dogoditi da nije dobar odabir za problem koji se želi opisati. Pri pogrešnom odabiru modela mogu se javiti različiti problemi: matematički (konvergencija postupka), fizikalni (model ne uključuje dominantni utjecaj koji se želi analizirati), ili pak tehnički kada nas ograničava kapacitet računala (još uvijek) koji ne dopušta mikro analize u kombinaciji s različitim materijalima i kompozitnim konačnim elementima. U tablici 3 dat je kratki pregled modela te preporuke koje modele je dobro koristiti za analizu određenih problema, a kod kojih će se može naići na određene poteškoće.

<b>Modelom se želi opisati</b>	<b>Modeli zasnovani na teoriji elastičnosti</b>	<b>Modeli zasnovani na teoriji elasto-plastičnosti</b>	<b>Modeli stupnja oštećenja</b>	<b>Modeli zasnovani na teoriji mehanike loma</b>
povijesti deformacija	moguće ako se koristi hipoelastični model	potrebno je definirati plohe tečenja, funkciju očvršćivanja/omekšivanja te vektor tečenja	moguće je koristiti u kombinaciji s nekim plastičnim modelom	moguće je ako se uključe određeni materijalni parametri modela
anizotropno ponašanje; obuhvatiti hidrostatske i devijatorske odgovore	moguće ako se koristi hipoelastični model	potrebno je definirati anizotropnu plohu opterećivanja	primjenljiv je za raspodijeljene pukotine	nije testirano
ponašanje nakon graničnog naprezanja	moguće ako se koristi sekantni modul krutosti	moguće ako su deformacije definirane funkcijama na plohi opterećivanja te krivulji očvršćivanja/omekšivanja.	nije dovoljno razvijeno	dobro opisuje promjene pri dominantnim vlačnim naprezanjima
oštećenja (promjena elastičnih konstanti u matrici krutosti)	moguće je koristiti model bez značajnijih ograničenja	nije moguće koristiti model zasnovan na klasičnoj teoriji plastičnosti	dobar opis za raspodijeljene pukotine	nije formuliran za područje vlak-tlak
ponašanje pri cikličnom opterećenju	moguće je koristiti model bez ograničenja	moguće ako se podrazumijeva elastično ponašanje pri rasterećenju	do sada nije primijenjen za opisivanje ovakvog ponašanja	moguće ako se podrazumijeva elastično ponašanje pri rasterećenju
razvoj pukotina	moguće ako se koristi hipoelastični model	moguće ako se pukotine opisuje prema pretpostavkama anizotropne ili ortotropne plastičnosti	moguće ako su pukotine dobro raspodijeljene	koristi se uglavnom za opis diskretnih pukotina

Tablica 3. Pregled modela

## Literatura

- [1] D'Addeta G., Kun F., Ramm E. and Hermann H., "From solids to granulates-discrete element simulations of fracture and fragmentation processes in geomaterials", Continuous and discontinuous modelling of cohesive – frictional materials, Lecture Notes in Physics, Vol. 568, Springer, Berlin, pp. 231-258, 2001.
- [2] Kang H.D., Willam K., Shing B. and Spacone E., "Failure analysis of R/C columns using a triaxial concrete model", Computers & Structures, Vol. 5, No. 77, 2000, str. 423-440.
- [3] Etse G., "Theoretische und numerische Untersuchung zum diffusen und lokalisierten Versagen in Beton", Ph.D. Thesis, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 1992.
- [4] Etse G. and Willam K., "Fracture energy formulation for inelastic behaviour of plain concrete", ASCE-EM, 1994, str. 1983-2011.
- [5] Mezaini N.E. and Citipitioglu E., "Finite element analysis of prestressed and reinforced concrete structures", Structural Engineering, Vol. 117, 1991, str. 2851-2864.
- [6] Menrath H., Haufe A. and Ramm E., "A model for composite steel-concrete structures", Proc. EURO-C 1998 Conf. on Computational Modelling of Concrete Structures, Eds. de Borst R., Bićanić N., Mang H.A. and Meschke G., Balkema A.A., Rotterdam, Vol. 1, Badgastein, 1998, March/April 1998, str. 33-42.
- [7] Meschke G., Lackner R. and Mang H.A., "An isotropic elastoplastic-damage model for plain concrete", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 4, No. 42, 1998, str. 703-727.
- [8] Needleman A. and Tvergaard V., "An analysis of ductile rupture in notched bars", Mechanics and Physics of Solids, No. 32, 1984.
- [9] Ottosen N.S., "A failure criterion for concrete", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, No. 103, 1977, str. 527-533.
- [10] Pivonka P., "Constitutive modelling of triaxially loaded concrete considering large compressive stresses: application to pull-out test of anchor bolts", Ph.D. Thesis, Vienna University of Technology, Wien, 2001.
- [11] Voyadjis G. and Abu-Lebdeh T., "Damage model for concrete using bounding surface concept", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 119, 1993, str. 1865-1885.
- [12] Ožbolt J., Li Y.-J., Kožar I., "Microplane model for concrete with relaxed kinematic constraint", Journal of Solids and Structures, No. 38, 2001, str. 2683-2771.

## Autori:

**Mirela Galić**, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Katedra za otpornost materijala i ispitivanje konstrukcija, Matice hrvatske 15, 21000 Split, Hrvatska, tel.: (021) 303 334, fax: (021) 465 117, e-mail: [mirela.galic@gradst.hr](mailto:mirela.galic@gradst.hr).

**Pavao Marović**, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Katedra za otpornost materijala i ispitivanje konstrukcije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, Hrvatska, tel.: (021) 303 380, fax: (021) 465 117, e-mail: [pavao.marovic@gradst.hr](mailto:pavao.marovic@gradst.hr).

**Željana Nikolić**, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Katedra za otpornost materijala i ispitivanje konstrukcije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, Hrvatska, tel.: (021) 303 334, fax: (021) 465 117, e-mail: [zeljana.nikolic@gradst.hr](mailto:zeljana.nikolic@gradst.hr)

## MJEŠOVITA MLPG FORMULACIJA ZA ANALIZU LJUSKASTIH KONSTRUKCIJA

Jarak, T., Sorić, J. & Hoster, J.

**Sažetak:** Predložen je novi bezmrežni numerički postupak za analizu ljuskastih konstrukcija koji se temelji na mješovitoj MLPG (Meshless Local Petrov-Galerkin) metodi, gdje su uz polje pomaka neovisno aproksimirane i određene komponente tenzora deformacija i naprezanja. Sve veličine polja aproksimirane su pomoću MLS (Moving Least Square) funkcija u ravnini srednje plohe, dok su za interpolaciju po debljini ljuske primijenjeni jednostavni interpolacijski polinomi. Izveden je diskretizirani globalni sustav jednačbi u kojem su nepoznate vrijednosti samo čvorni pomaci. Predložena formulacija mnogo je učinkovitija od klasične metode pomaka. Nepoželjni tzv. „locking“ efekti u potpunosti su eliminirani.

**Ključne riječi:** MLPG , mješovita formulacija, ljuske, locking.

### 1 UVOD

Većina do sada razvijenih bezmrežnih formulacija za analizu ploča i ljusaka, kao npr. [3, 4], temelji se na nekoj od klasičnih teorija ljusaka te ne sadrži sve komponente tenzora naprezanja. Nadalje, te su formulacije temeljene na metodi pomaka što uzrokuje nepoželjne numeričke „locking“ efekte pri analizi tankostjenih konstrukcija koji uvelike smanjuju numeričku učinkovitost.

U ovom radu razvijena je nova bezmrežna metoda za analizu ljuskastih konstrukcija, temeljena na mješovitom MLPG (Meshless Local Petrov-Galerkin) principu [2]. Za razliku od do sada objavljenih bezmrežnih formulacija, u predloženom algoritmu su uz polje pomaka aproksimirane i pojedine komponente polja deformacija i naprezanja. Osim toga, usvojen je tzv. „solid-shell“ princip koji omogućava ugradnju kompletnih trodimenzijskih materijalnih modela.

Diskretizacija je provedena pomoću parova čvorova koji se nalaze na gornjoj i donjoj plohi ljuske. U skladu s MLPG numeričkom strategijom, oko svakog para čvorova definirano je cilindrično lokalno potpodručje za koje su pomoću Petrov-Galerkinova postupka izvedene tzv. simetrične slabe forme uvjeta ravnoteže (LSWF) [1]. Pri tome su korištene test funkcije koje su linearne u smjeru normale na srednju plohu ljuske. U tako dobivenim integralnim jednačbama, uz komponente pomaka, aproksimirane su i komponente tenzora deformacija i naprezanja da bi se nakon toga čvorne vrijednosti deformacija i naprezanja prikazale pomoću čvornih pomaka. Na taj način izveden je zatvoreni globalni sustav jednačbi u kojem su neovisne varijable samo čvorni pomaci. Sve nepoznate veličine aproksimirane su jednakim MLS (Moving Least Square) funkcijama [1] u ravnini srednje plohe, dok su u smjeru normale primijenjeni jednostavni interpolacijski polinomi.

Pojava „thickness locking“ efekta eliminirana je aproksimacijom normalne poprečne komponente naprezanja, a „shear locking“ je na vrlo učinkovit način potpuno

odstranjen aproksimacijom komponentata deformacije. Učinkovitost predložene metode pokazana je u numeričkim primjerima.

## 2 MLPG MJEŠOVITA FORMULACIJA

### 2.1 Osnovne jednačbe u MLPG formulaciji

Geometrija ljuske opisana je pomoću vektora položaja na srednjoj plohi  $\mathbf{X}^{(0)}$  i direktora  $\mathbf{X}^{(1)}$  u pravcu debljine ljuske:

$$\mathbf{X}(\theta^j) = \mathbf{X}^{(0)}(\theta^\alpha) + \theta^3 \mathbf{X}^{(1)}(\theta^\alpha). \quad (1)$$

Pri tome je  $\mathbf{X}^{(0)}$  opisan matematički egzaktno i parametriziran pomoću konvektivnih koordinata  $\theta^k; k=1,2,3$ , gdje su  $\theta^1$  i  $\theta^2$  koordinate u ravnini srednje plohe, a  $\theta^3$  koordinata u smjeru normale na srednju plohu. Polje deformacije definirano je u konvektivnom koordinatnom sustavu kao:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(h)} = \varepsilon_{ij}^{(h)} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{2} (\mathbf{G}_i \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{G}_j \mathbf{u}_{,i}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, \quad (2)$$

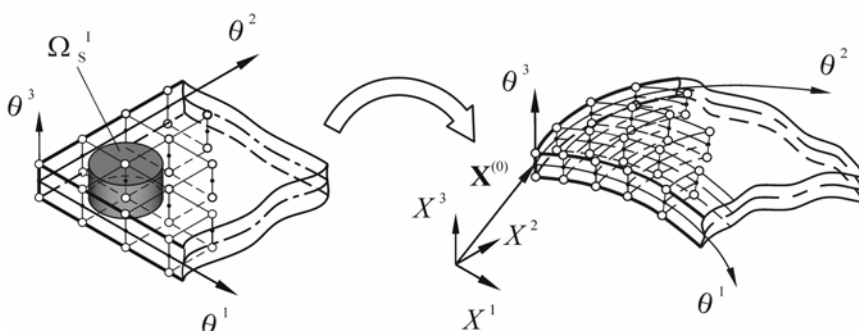
gdje je  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(h)}$  interpolirano polje deformacija, a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  je tenzor deformacija izračunat pomoću pomaka. Derivacija po krivocrtnim koordinatama označena je s  $(\ )_{,j}$ .

$\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_{,j}$  su osnovni koordinatni vektori, a  $\mathbf{G}^i$  njihove su recipročne veličine. Tenzor naprezanja izračunava se primjenom poznatih konstitutivnih relacija:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3)$$

$$\mathbf{C} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l.$$

U skladu s tzv. „solid-shell“ pristupom, ljuskasta konstrukcija diskretizirana je pomoću parova čvorova koji se nalaze na gornjoj i donjoj plohi ljuske. U skladu s MLPG numeričkom strategijom [1], oko svakog para čvorova definirana su u parametarskom sustavu cilindrična lokalna potpodručja  $\Omega'_s$ ;  $I=1,2,\dots,N$ , prema slici 1.



Sl. 1. Diskretizacijska shema

Za svako područje  $\Omega'_s$  postavljena je slaba forma jednačbi ravnoteže za trodimenzijsko stanje naprezanja u smjerovima globalnih koordinatnih osi:

$$\int_{\Omega'_s} v_{ki} \left( \sigma_{ij}^{(g)} \nu_{X^j} + b_i \right) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma'_{su}} v_{ki} (u_i^{(h)} - \bar{u}_i) d\Gamma = 0 = 0; \quad I=1,2,\dots,N. \quad (4)$$

U gornjoj relaciji  $\sigma_{ij}^{(g)}$  označava komponente tenzora naprezanja u globalnom Kartezijevom koordinatnom sustavu,  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}^{(g)} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j$ .  $b_i$  su komponente vektora volumnih sila,  $\mathbf{b} = b_i \mathbf{i}_i$ , a  $u_i^{(h)}$  predstavlja aproksimaciju polja pomaka,  $\mathbf{u} = u_i^{(h)} \mathbf{i}_i$ . Lako je zaključiti da su  $\mathbf{i}_i$  osnovni koordinatni vektori u globalnom Kartezijevom koordinatnom sustavu. Testne funkcije opisane su relacijom  $v_{ki} = \delta_{ki} v(\theta^j)$ ;  $k=1,2,3$ , gdje je  $\delta_{ki}$  Kroneckerov delta simbol. Ukoliko MLS funkcija ne posjeduje interpolacijsko svojstvo u čvorovima, geometrijski rubni uvjeti a priori se mogu zadovoljiti primjenom kaznene (penalty) metode, pri čemu je kazneni faktor  $\alpha \gg 1$ , a  $\Gamma_{su}^I$  dio je plohe  $\Gamma_s^I$  koja omeđuje  $\Omega_s^I$  sa zadanim rubnim uvjetima pomaka  $\bar{u}_i$ . Ako se kao testna funkcija odabere:

$$v(\theta^j) = c_0 + c_1 \theta^3, \quad (5)$$

gdje su  $c_0$  i  $c_1$  proizvoljno odabrane realne konstantne veličine, moguće je nakon primjene Gaussova teorema te uz pomoć dobro poznatih izraza za vektor naprezanja  $t_i = n_j \sigma_{ij}$  izraz (4) napisati u obliku tzv. lokalne simetrične slabe forme (LSWF):

$$\begin{aligned} & - \int_{L_s^I} n_j \sigma_{ij}^{(g)} d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}^I} n_j \sigma_{ij}^{(g)} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}^I} u_i^{(h)} d\Gamma = \int_{\Omega_s^I} b_i d\Omega + \int_{\Gamma_{st}^I} \bar{t}_i d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}^I} \bar{u}_i d\Gamma; \\ & \int_{\Omega_s^I} \theta^3 n_j \sigma_{ij}^{(g)} d\Omega - \int_{L_s^I} \theta^3 n_j \sigma_{ij}^{(g)} d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}^I} \theta^3 n_j \sigma_{ij}^{(g)} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}^I} \theta^3 u_i^{(h)} d\Gamma = \\ & = \int_{\Omega_s^I} \theta^3 b_i d\Omega + \int_{\Gamma_{st}^I} \theta^3 \bar{t}_i d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{su}^I} \theta^3 \bar{u}_i d\Gamma; \\ & I = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (6)$$

U ovom izrazu ploha  $\Gamma_s^I$  je podijeljena na tri dijela tako da vrijedi  $\Gamma_s^I = L_s^I \cup \Gamma_{su}^I \cup \Gamma_{st}^I$ , gdje je  $L_s^I$  dio od  $\Gamma_s^I$  koji se nalazi unutar kontinuuma ploče, a  $\Gamma_{st}^I$  je dio na kojem su zadani prirodni rubni uvjeti  $\bar{t}_i$ .  $n_j$  predstavlja jedinični vektor vanjske normale na  $\Gamma_s^I$ .

Kako bi se otklonio Poissonov “thickness locking“ efekt, normalna poprečna komponenta tenzora naprezanja  $\varepsilon_{33}$  zamijenjena je s  $\sigma^{33}$  primjenom dobro poznatih konstitutivnih relacija. Nakon toga, za komponente naprezanja  $\sigma^{ij}$  vrijedi izraz:

$$\sigma^{ij} = \left( C^{ij\alpha\beta} - C^{ij33} \frac{C^{33\alpha\beta}}{C^{3333}} \right) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(h)} + \left( C^{ij\alpha 3} - C^{ij33} \frac{C^{33\alpha 3}}{C^{3333}} \right) 2\varepsilon_{\alpha 3}^{(h)} + \frac{C^{ij33}}{C^{3333}} \sigma^{33(h)}. \quad (7)$$

Komponente tenzora naprezanja u globalnom koordinatnom sustavu izračunavaju se transformacijom pomoću slijedeće relacije:

$$\sigma_{ij}^{(g)} = (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{G}_k) \sigma^{kl} (\mathbf{G}_l \cdot \mathbf{i}_j). \quad (8)$$

Kako bi se izveo zatvoreni sustav jednažbi samo s nepoznatim pomacima, potrebno je u čvorovima postaviti sljedeće dodatne relacije u težinskom integralnom obliku:

$$\int_{\Omega'_s} v_\varepsilon \left( \varepsilon_{\alpha\beta}^{(h)} - \varepsilon_{\alpha\beta} \right) d\Omega = 0; \int_{\Omega'_s} v_\varepsilon \left( \varepsilon_{\alpha 3}^{(h)} - \varepsilon_{\alpha 3} \right) d\Omega = 0; \int_{\Omega'_s} v_\sigma \left( \sigma^{33(h)} - \sigma^{33} \right) d\Omega = 0, \quad (9)$$

gdje su  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\varepsilon_{\alpha 3}$  i  $\sigma^{33}$  vrijednosti izračunate pomoću aproksimiranih pomaka  $u_i^{(h)}$ , a  $v_\varepsilon$  i  $v_\sigma$  su Dirac delta težinske, odnosno testne funkcije.

## 2.2 Numerička implementacija

Aproksimirane veličine polja moguće je zapisati u sljedećem diskretiziranom obliku:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\theta^i) &= \sum_{J=1}^n \boldsymbol{\Phi}_J^\omega(\theta^i) \hat{\boldsymbol{\omega}}_J; & \mathbf{u}(\theta^i) &= \sum_{K=1}^n \boldsymbol{\Phi}_K^u(\theta^i) \hat{\mathbf{u}}_K; \\ \boldsymbol{\omega} &= \left[ \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13} \quad \sigma^{33} \right]^T; \\ \boldsymbol{\Phi}_J^\omega &= \phi_J(\theta^\delta) \begin{bmatrix} \alpha(\theta^3) \mathbf{I}_3 & \beta(\theta^3) \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}; \\ \boldsymbol{\Phi}_K^u(\theta^i) &= \phi_K(\theta^\delta) \left[ \alpha(\theta^3) \mathbf{I}_3 \quad \beta(\theta^3) \mathbf{I}_3 \right]; & (10) \\ \alpha(\theta^3) &= \frac{1}{2} \left( 1 + 2 \frac{\theta^3}{h} \right); & \beta(\theta^3) &= \frac{1}{2} \left( 1 - 2 \frac{\theta^3}{h} \right); \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_J^T &= \left[ \hat{\varepsilon}_{11(u)} \quad \hat{\varepsilon}_{22(u)} \quad 2\hat{\varepsilon}_{12(u)} \quad \hat{\varepsilon}_{11(l)} \quad \hat{\varepsilon}_{22(l)} \quad 2\hat{\varepsilon}_{12(l)} \quad 2\hat{\varepsilon}_{23} \quad 2\hat{\varepsilon}_{13} \quad \hat{\sigma}_{33} \right]_J; \\ \hat{\mathbf{v}}_J &= \left[ \hat{v}_{1(u)} \quad \hat{v}_{2(u)} \quad \hat{v}_{3(u)} \quad \hat{v}_{1(l)} \quad \hat{v}_{2(l)} \quad \hat{v}_{3(l)} \right]_J. \end{aligned}$$

U gornjim izrazima  $\boldsymbol{\omega}(\theta^i)$  je vektor koji sadržava aproksimirane komponente deformacije i naprezanja,  $\mathbf{u}(\theta^i) = u_i \mathbf{i}_i$  je interpolirani vektor pomaka u globalnom Kartezijevom koordinatnom sustavu, a  $\hat{\boldsymbol{\omega}}_J$  i  $\hat{\mathbf{v}}_J$  su odgovarajući vektori nepoznatih čvornih veličina. Nadalje,  $\phi_J(\theta^\delta)$  je MLS čvorna funkcija oblika za čvor  $J$ ,  $\alpha(\theta^3)$  i  $\beta(\theta^3)$  opisuju linearnu raspodjelu po debljini ljuske, a  $\mathbf{I}_3$  je jedinična matrica (3x3).

Ako MLS funkcija posjeduje interpolacijska svojstva u čvorovima, nije potrebno koristiti kaznenu metodu za zadovoljavanje rubnih uvjeta pomaka u (6), pa se rubni uvjeti zadovoljavaju slično kao i u metodi konačnih elemenata. Više informacija o svojstvima i izračunavanju primijenjenih MLS funkcija može se pronaći u [1 i 5].

Pomoću izraza (10), jednadžbe (6) mogu se napisati u diskretiziranom obliku:

$$\begin{aligned} \sum_{J=1}^N \left[ - \int_{L'_s} \mathbf{N} \mathbf{T}^\sigma \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Phi}_J^\omega d\Gamma - \int_{\Gamma'_{Su}} \mathbf{N} \mathbf{T}^\sigma \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Phi}_J^\omega d\Gamma \right] \hat{\boldsymbol{\omega}}_J &= \int_{L'_{St}} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega'_s} \mathbf{b} d\Omega; \\ \sum_{J=1}^N \left[ \int_{\Omega'_s} (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{T}^\sigma \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Phi}_J^\omega d\Omega - \int_{L'_s} \theta^3 \mathbf{N} \mathbf{T}^\sigma \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Phi}_J^\omega d\Gamma - \int_{\Gamma'_{Su}} \theta^3 \mathbf{N} \mathbf{T}^\sigma \tilde{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Phi}_J^\omega d\Gamma \right] \hat{\boldsymbol{\omega}}_J &= \\ = \int_{L'_{St}} \theta^3 \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega'_s} \theta^3 \mathbf{b} d\Omega. & (11) \end{aligned}$$

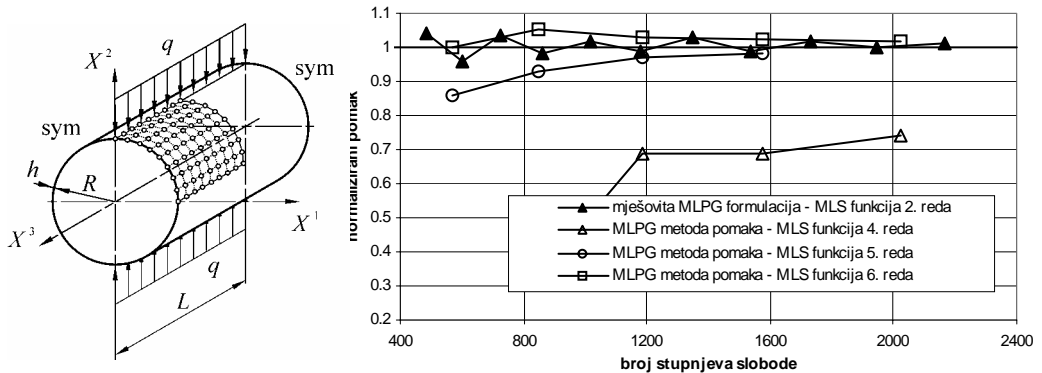
U (11)  $\mathbf{N}$  sadržava komponente vanjskog jediničnog vektora normale na  $\Omega'_s$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$  je materijalna matrica definirana prema izrazu (7),  $\mathbf{T}^\sigma$  je transformacijska matrica za tenzor naprezanja definirana na temelju izrazu (8),  $\mathbf{b}$  je vektor volumnih sila, a  $\nabla \mathbf{v}_1$  predstavlja gradijent linearnog dijela test funkcija.  $\bar{\mathbf{t}}$  je vektor zadanih površinskih sila, a  $\bar{\mathbf{u}}$  opisuje zadane pomake.

Pomoću relacija (9) i primjenom aproksimacija prema (10), nepoznate čvorne veličine deformacije i naprezanja mogu se prikazati ovisno o čvorovima na sljedeći način:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_J = \sum_{K=1}^{N_J} \tilde{\mathbf{B}}_{KJ} \hat{\mathbf{v}}_K. \quad (12)$$

Pri tome je  $N_J$  broj čvorova u području interpolacije za čvor  $J$ , a  $\tilde{\mathbf{B}}_{KJ}$  je matrica koja opisuje navedenu transformaciju. Uvrštavanjem izraza (12) u diskretiziranu slabu formu (11), dobiva se globalni diskretizirani sustav jednačbi u kojem su nepoznanice samo čvorne vrijednosti pomaka  $\hat{\mathbf{v}}_K$ .

### 3 NUMERIČKI PRIMJER



Sl. 2. Numerički primjer: diskretizacija (lijevo) i brzina konvergencije (desno)

Analizirana je dugačka cilindrična ljuska, opterećena linijskim kontinuiranim opterećenjem iznosa  $q=1$  duž gornje, odnosno donje izvodnice. Duljina ljuske je  $L=300$ , polumjer je  $R=90$ , a debljina stjenke ljuske je  $h=0,9$ . Materijal je linearno elastičan s modulom elastičnosti  $E=210000$  i Poissonovim koeficijentom  $\nu=0,3$ . Zbog simetrije, samo je jedna osmina ljuske diskretizirana pomoću jednoliko raspoređenih čvorova prema slici 2.

Provedena je analiza konvergencije rješenja za pomak duž izvodnice po kojoj djeluje opterećenje, a rezultati su prikazani na slici 2. Dobiveni rezultati uspoređeni su sa vrijednostima dobivenima pomoću MLPG algoritma koji se temelji samo na aproksimaciji pomaka [3]. Sve vrijednosti normalizirane su pomoću analitičkog rješenja. Vidljivo je da je korištenjem predložene mješovite formulacije moguće postići konvergenciju rješenja primjenom MLS funkcija nižeg reda nego kod formulacija

temeljenih na metodi pomaka, što značajno pridonosi numeričkoj učinkovitosti metode.

## 5 ZAKLJUČAK

Izvedena je nova mješovita MLPG formulacija za analizu ljuskastih konstrukcija temeljena na neovisno aproksimiranim komponentama pomaka, deformacija i naprezanja. Diskretizacija je provedena pomoću čvorova koji se nalaze na gornjoj i donjoj plohi ljuske. Pomoću lokalnog Petrov-Galerkinova postupka izvedene su diskretizirane slabe forme uvjeta ravnoteže. Pri tome su čvorne vrijednosti deformacije i naprezanja zamijenjene s pomacima nakon čega je dobiven zatvoreni globalni sustav jednadžbi u kojem su neovisne varijable samo čvorni pomaci. Sve nepoznate veličine polja aproksimirane su pomoću jednakih MLS funkcija u ravnini srednje plohe, dok su za interpolaciju po debljini stijenke primijenjeni jednostavni linearni polinomi. "Thickness locking" efekt eliminiran je aproksimiranjem normalne poprečne komponente naprezanja. Numerička učinkovitost i stabilnost predloženog algoritma značajno je veća u usporedbi s formulacijama temeljenima na klasičnoj metodi pomaka. „Shear locking“ efekt za slučaj tankih ljusaka u potpunosti je eliminiran. Primjenom predložene mješovite formulacije moguće je postići konvergenciju rješenja pomoću MLS funkcija nižeg reda. Osim toga, derivacije MLS funkcija potrebno je izračunavati samo u čvorovima, a ne u svim točkama integracije, što dodatno pridonosi numeričkoj učinkovitosti.

### Literatura:

- [1] Atluri, S.N., "The Meshless Method (MLPG) for Domain & BIE Discretization", Tech Science Press Forsyth USA, 2004.
- [2] Atluri, S. N., "A New Implementation of the Meshless Finite Volume Method, Through the MLPG "Mixed" Approach", CMES: Comput. Model. Eng. Sci, Vol. 6, No. 6, 2004, str. 491-513.
- [3] Jarak, T., Sorić, J., Hoster, J., "Analysis of shell deformation responses by the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach", CMES: Comput. Model. Eng. Sci, Vol. 18, No. 3, 2007, str. 235-246.
- [4]Noguchi H., Kawashima T., Miyamura T., "Element free analyses of shell and spatial structures", Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 47, 2000, str. 1215-1240.
- [5]Most, T. (2007): "A natural neighbour-based moving least-squares approach for the element-free Galerkin method", Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 71, str. 224-252.

### Autori:

**Tomislav Jarak, Jurica Sorić, Josip Hoster**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje Zagreb, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, tel. 01 6168 514, fax 01 6168 187, e-mails: [tomislav.jarak](mailto:tomislav.jarak@fsb.hr), [jurica.soric](mailto:jurica.soric@fsb.hr), [josip.hoster](mailto:josip.hoster@fsb.hr)}@fsb.hr, web stranica: <http://www.fsb.hr/lnm/>

## PROCJENA FUNKCIJE FREKVENCIJSKOG ODZIVA IZ OPERATIVNIH PODATAKA

Lozina, Ž., Vučina, D. & Sedlar, D.

**Sažetak:** Funkcija frekvencijskog odziva (FRF) je procijenjena na temelju operativnih podataka centrifugalne pobude i pripadnog odziva. Pobuda je definirana na temelju tahometarskog signala i geometrije ekscentra a odziv izmjeren akcelerometrima i pripadnom opremom. Funkcija frekvencijskog odziva je procijenjena metodom najmanjeg kvadrata odstupanja. Rezultati procjene funkcije frekvencijskog odziva na temelju operativnih podataka centrifugalne uzbude su uspoređeni s rezultatima direktnih mjerenja i izlučivanjem modalnih parametara metodama vrhova i upisivanja kružnice.

**Ključne riječi:** vibracije, centrifugalna pobuda, FRF, funkcija frekvencijskog odziva, operativni podaci.

### 1 UVOD

Model na kojem se provode pokusi izrađen je u edukativne svrhe za laboratorijske vježbe iz kolegija Dinamika i Vibracije na dodiplomskom studiju a sada se planira koristiti na preddiplomskom i diplomskom studiju u okviru odgovarajućih kolegija. Na ovom modelu se izvodi niz vježbi na teme slobodnih i prisilnih vibracija te kontrole vibracija i srodne teme. Model je prilagodljiv te se može koristiti za demonstraciju sustava s 1 i s 2 stupnja slobode.

Ovdje opisan postupak razvijen je u okviru laboratorijskih vježbi iz prisilnih vibracija s edukativnim ciljem dubljeg razumijevanja vibracija izazvanih centrifugalnom pobudom i funkcije frekvencijskog odziva.

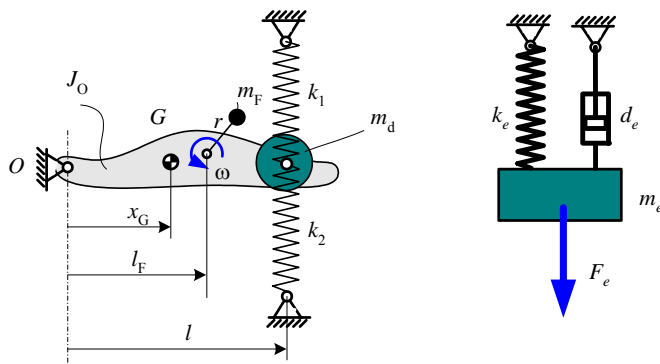
### 2 MATEMATIČKI MODEL I DEFINICIJA PROBLEMA

Postupak procjene funkcije frekvencijskog odziva temelji se na prikupljanju operativnih podataka za vrijeme različitih režima rada. Pod režimima rada se podrazumijevaju različite mase debalansa i različiti brojevi okretaja.

#### 2.1 Matematički model

Skica modela-uređaja je prikazana na slici 1. Uređaj se sastoji od poluge oslonjene na jednom kraju na nepomični zglobovi oslonac  $O$  na krutoj podlozi a na drugom kraju na elastičnu oprugu. Na poluzi se nalazi elektromotor s upravljivom brzinom vrtnje  $\omega$  koji pokreće ekscentar polumjera  $r$  promjenljive mase  $m_F$  koji se nalazi na  $l_F$  od nepomičnog oslonca. Poluga ima momenta tromosti  $J_O$  za nepomični oslonac, položaj centra mase poluge je  $x_G$  a razmakom među osloncima  $l$ .

Momentnu jednadžbu gibanja možemo postaviti za oslonac  $O$  a zatim dijeljenjem s razmakom  $l$  možemo je prevesti u ekvivalentnu linijsku jednadžbu.



Sl. 1. Skica uređaja

Jednadžba gibanja za ekvivalentan sustav je:

$$m_e \ddot{x}_e + d \dot{x}_e + k x_e = F_e \quad (1)$$

gdje su za promatrani sustav vrijedi:

$$k_e = 40333 \text{ N/m}$$

$$m_e = 4.8402 \text{ kg}$$

$$F_e = m_F r \omega^2 \frac{l_F}{l} \sin \omega t \quad (2)$$

i gdje su:

$$r = 44 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$l_F = 0.44 \text{ m}$$

$$l = 0.57 \text{ m}$$

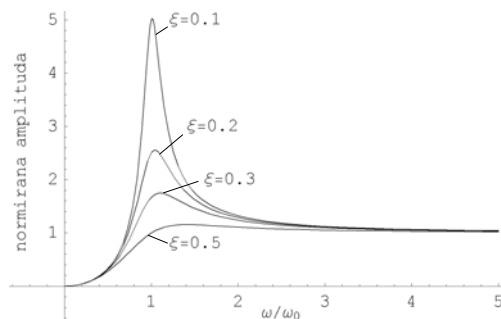
U kanonskom obliku je:

$$\ddot{x} + 2\xi \omega \dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} m_F r \omega^2 \frac{l_F}{l} \sin \omega t \quad (3)$$

gdje su:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad d_{kr} = 2\sqrt{km}, \quad \xi = \frac{d}{k_{kr}}$$

Normirana rješenja jednadžbi gibanja dana su u dobro poznatom grafičkom obliku na slici 2.

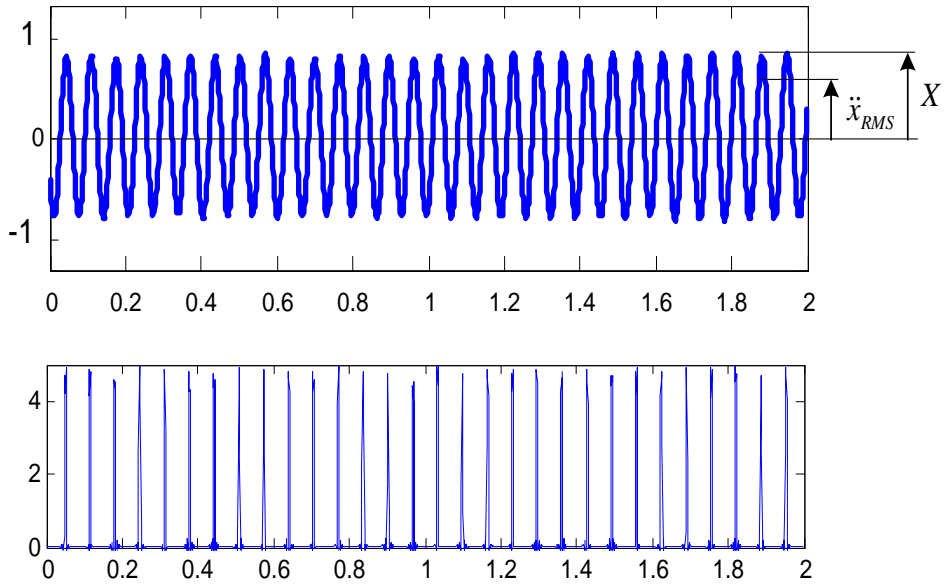


Sl. 2. Grafički prikaz rješenja u normiranom obliku

Mjerenja su provedena za tri različite mase  $m_F$  i niz brzina vrtnje.

## 2.2 Rezultati mjerenja

Na slici 3 je prikaz mjerenja za odabranu brzinu vrtnje  $f$  i masu ekscentra  $m_F$ , ( $n = 9480/\text{min}$ ,  $f = 15.8\text{Hz}$ ,  $m_F = 4\text{g}$ ).



Sl. 3. Grafički prikaz mjerenja u vremenu za  $f = 15.8\text{Hz}$ ,  $m_F = 4\text{g}$

Mjerenje se provodi za različite mase debalansa ( $m_{F1}=69\text{g}$ ,  $m_{F2}=22\text{g}$ ,  $m_{F3}=4\text{g}$ ) i niz brzina vrtnje. Bilježe se frekvencije s tahometra i pripadna vrijednost ubrzanja  $\ddot{x}_{RMS}$ . Rezultati mjerenja prikazani su tablično u tablicama 1, 2 i 3. U tablici 1 podaci su djelomično obrađeni dok su u ostalim tablicama dani sirovi podaci.

Frekvencija		Amplituda pomaka	
$f$ [Hz]	$\omega = 2\pi f$ [-]	$\ddot{x}_{RMS}$ [ms <sup>-2</sup> ]	$X = \sqrt{2} \frac{\ddot{x}_{RMS}}{\omega^2}$ 10 <sup>-3</sup> [m]
7	44	0.33	0.2413
8	50.3	0.90	0.5038
10	62.8	3.03	1.0854
12			
14	80.0	7.73	1.4128
16	100.5	5.55	1.4128
18	113.1	6.55	0.7242
20	125.6	7.83	0.7012
25	158.1	10.64	0.6098

Tablica 1. Prikaz rezultata mjerenja za  $m_F = 69\text{g}$

Frekvencija	RMS ubrzanje
$f$ [Hz]	$\ddot{x}_{RMS}$ [ms <sup>-2</sup> ]
10	1.20
12	12.9
14	3.38
16	2.78
18	2.40
20	3.43

Tablica 2. Prikaz rezultata mjerenja za  $m_F = 22g$

Frekvencija	RMS ubrzanje
$f$ [Hz]	$\ddot{x}_{RMS}$ [ms <sup>-2</sup> ]
	NI/ONO-SOKKI
11.90	4.30/ ----
11.67	2.60/ 2.20
10.16	0.43/ 0.28
12.91	0.80/ 0.63
13.60	0.60/ 0.52
15.80	0.70/ 0.58
23.10	1.00/ 1.00
29.20	1.30/ 1.25
11.68	2.33/ 2.00
12.80	0.83/ 0.69
11.65	1.80/ 1.60
12.08	2.11/ 1.72
11.79	6.80/ 5.70
13.00	0.80/ 0.63
13.28	0.69/ 0.60
15.78	0.70/ 0.60
17.10	0.70/ 0.66
20.26	0.87/ 0.78
31.50	1.73/ 1.80
40.00	2.00/ 1.94
28.74	1.40/ 1.30
24.15	1.08/ 1.00

Tablica 3. Prikaz rezultata mjerenja za  $m_F = 4g$

Masa ekscentra se određuje računski i mjerenjem.

### 3 ANALIZA I OBRADA PODATAKA

Mjerenjem su zabilježeni RMS ubrzanja ( $\ddot{x}_{RMS}$ ) za pojedine mase debalansa i brzine vrtnje. Brzina vrtnja se mjeri preko tahometarskog signala (impuls po okretu) pa se kutna brzina određuje na temelju izraza  $\omega = 2\pi f$ . Amplitudu pomak određujemo na temelju izraza:

$$X = \sqrt{2} \frac{\ddot{x}_{RMS}}{\omega^2} \quad (4)$$

kako je to naznačeno u tablici 1. Amplitudu pobudne sile računamo na temelju izraza (2), pa je:

$$F = m_F r \omega^2 \frac{l_F}{l} \quad (5)$$

gdje su sve veličine:  $r$ ,  $l_F$  i  $l$  dane uz pripadni izraz (2) a  $m_F$  i  $\omega$  se uzimaju prema vrijednostima u tablicama i gornjim izrazima. Sada se točke funkcije Frekvencijskog odziva određuju na temelju izraza:

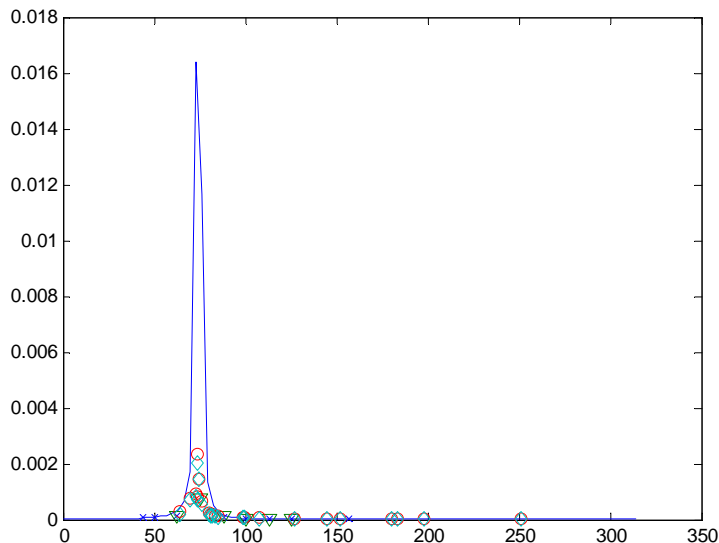
$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (6)$$

Ovako dobiven niz točaka se aproksimira generaliziranom funkcijom frekvencijskog odziva tako da zbroj:

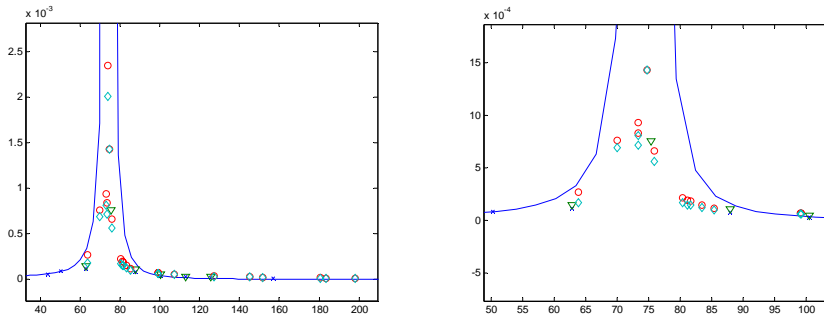
$$\varepsilon_2(\omega_0, \xi, A) = \sum_i \left[ \frac{X(\omega_i)}{F(\omega_i)} - h(\omega_i, \omega_0, \xi, A) \right]^2 \quad (7)$$

bude minimalan s obzirom na parametre  $\omega_0$ ,  $\xi$ ,  $A$ .

Optimizacija je provedena matlab kodom zasnovanim na funkciji **fminunc()**. Rezultat minimizacije je grafički vidljiv na slikama 4a i 4b.



Sl. 4a. Grafički prikaz rezultata minimizacije



Sl. 4b. Grafički prikaz rezultata minimizacije

- $x - m_e = 69\text{g}$
- $v - m_e = 22\text{g}$
- $o - m_e = 4\text{g}$  (Veski, LabVIEW, NI-4472)
- $d - m_e = 4\text{g}$  (RION, ONO SOKKI)
- *plava linija* – FRF - rezultat optimizacije:  
 $k = 40000$ ,  $\omega = 11.85$ ,  $\xi = 0.02$

Usporedbom modalnih parametara dobivenih minimizacijom s vrijednostima dobivenim klasičnim postupcima [logaritamski dekrement, metoda vrhova (peak picking) i upisivanje kružnice (circle fitting)] uočava se dobro poklapanje: frekvencije se poklapaju u okviru točnosti mjerenja a prigušenje se kreće od 0.016 do 0.02.

## 4 ZAKLJUČAK

U radu je procijenjena funkcija frekvencijskog odziva (FRF) na temelju operativnih podataka centrifugalne pobude i pripadnog odziva. Pobuda je definirana na temelju izmjenjenog tahometarskog signala i geometrije ekscentra a odziv izmjenjen. Procijenjena je napravljena metodom najmanjeg kvadrata odstupanja rezultata mjerenja od tražene funkcije frekvencijskog odziva. Rezultati procjene operativnih podataka centrifugalne uzbude su uspoređeni s rezultatima direktnih mjerenja i izlučivanjem modalnih parametara metodama vrhova i upisivanja kružnice i daju točne vrijednosti.

### Literatura:

- [1] Inman, J.I., “Vibration with control”, John Wiley & Sons, 2007.
- [2] Lozina, Ž., “Dinamika”, Sveučilište u Splitu, 2005.
- [3] Vučina, D., “Metode inženjerske numeričke optimizacije”, Sveučilište u Splitu, 2005.

### Autori:

**Željko Lozina**, Sveučilište u Splitu, FESB - Fakultet elektrotehnike strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, R. Boškovića bb, 21000 Split, tel. 021/305-968, fax. 021/463-877, e-mail: [zeljan.lozina@fesb.hr](mailto:zeljan.lozina@fesb.hr)

**Damir Vučina**, Sveučilište u Splitu, FESB - Fakultet elektrotehnike strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, R. Boškovića bb, 21000 Split, tel. 021/305-969, fax. 021/463-877, e-mail: [damir.vucina@fesb.hr](mailto:damir.vucina@fesb.hr)

**Damir Sedlar**, Sveučilište u Splitu, FESB - Fakultet elektrotehnike strojarstva i brodogradnje, Zavod za strojarstvo i brodogradnju, R. Boškovića bb, 21000 Split, tel. 021/305-967, fax. 021/463-877, e-mail: [damir.sedlar@fesb.hr](mailto:damir.sedlar@fesb.hr)

## UVOD U TERMOELASTIČNU ANALIZU NAPREZANJA

Marendić, P., Veljača, T., Krstulović-Opara, L. & Domazet Ž.

**Sažetak:** U ovom je radu ukratko prezentirana eksperimentalna metoda analize naprezanja temeljena na uzorkovanju (akviziciji) infracrvene toplinske snimke objekta i termoelastičnom efektu. Tehnološki napredak termalnih kamera u posljednjih petnaestak godina, omogućio je praktičnu primjenu ove metode u inženjerskim problemima. Metodom se dobiva raspodjela prve invarijante naprezanja na površini tijela u realnom vremenu, što ovu metodu punog polja (full field) čini naročito primjenljivom za usporedbu modela dobivenih metodom konačnih elemenata s naprezanjima na realnoj konstrukciji. Na promjerima elastičnog opterećenja trake s rupom, te udara i delaminacije materijala boce iz PET ambalaže, demonstrirana je metoda u elastičnom i plastičnom području naprezanja.

**Cljučne riječi:** termoelastična analiza naprezanja

### 1 UVOD

Termoelastična analiza naprezanja je metoda bazirana na promjeni temperature dinamički opterećenog uzorka. Prilikom tlačnog ili vlačnog opterećenja uzorka dolazi do promjene njegove temperature koja je proporcionalna iznosu naprezanja (prvoj invarijanti naprezanja). Na taj se način mjerenjem promjene temperature može na dinamički opterećenom uzorku ili konstrukciji odrediti količina naprezanja, kao i mjesta povišene koncentracije naprezanja.

Začeci termoelastične analize naprezanja datiraju iz 1830. godine kad je W. Weber vršio istraživanja na željeznim žicama opterećenim tlačnim i vlačnim silama. Prilikom istraživanja otkrio je termoelastični efekt proporcionalan naprezanju. Njegovo je otkriće bila osnova za daljnja istraživanja.

Dvadesetak godina kasnije lord Kelvin nastavio rad na Weberovim otkrićima kako bi pronašao teoretsko objašnjenje efekta koji je otkrio Weber. U svom radu 'Dinamička teorija topline' izdanom 1853. naglašava da je rad, potreban da se izvrši određeni mehanički efekt, proporcionalan količini topline koja se pri tom radu oslobađa. Također zaključuje da je toplina koju neko tijelo emitira ili absorbira ekvivalentna radu koji vanjske sile vrše na tijelo, odnosno radu koji tijelo vrši na vanjske sile. Konačni rezultat njegovih istraživanja je klasična jednadžba termoelastičnosti. Daljnjim izvodom ove jednadžbe dobila se današnja osnovna jednadžba termoelastičnosti.

Prva eksperimentalna ispitivanja, čiji je cilj potvrda Kelvinove jednadžbe, proveli su J.P. Joule 1857. (3% do 15% odstupanje od teoretskih rezultata), te Compton i Webster 1915. godine. Compton i Webster su prvi ispitivali promjenu temperature na dinamički opterećenom uzorku uz 1,5% odstupanje rezultata od teoretskih. Razlog odstupanja bila je kontaktna metoda mjerenja. Naime kod ove metode mjerni instrument se nalazio na površini uzorka te je često davao netočne rezultate. Ovaj problem je inicirao je razvoj bezkontaktne metode mjerenja. Razvoj infracrvene tehnologije omogućio je praktičnu primjenu metode bez izravnog kontakta s površinom.

Prvi ozbiljniji pokušaj korištenja infracrvene tehnologije u termoelastičnoj analizi dinamički opterećenog uzorka proveo je 1967. M.H. Belgen. Rezultati su bili obećavajući, ali ne i zadovoljavajući zbog ograničenja mjernog sustava.

Razvojem tehnologije, u ranim osamdesetima dolazi do razvoja prvog komercijalnog sustava za mjerenje, zvanog SPATE (Stress Pattern Analysis by Thermal Emission). To je prvi računalno kontrolirani sustav za bezkontaktno mjerenje. SPATE omogućava tzv. 'full field' analizu (analiza punog polja) gdje su naprezanja, za razliku od drugih metoda, prikazana na cijeloj površini uzorka. Glavna komponenta cijelog sustava je infracrveni detektor koji mjeri male temperaturne promjene uzrokovane promjenom naprezanja. Uređaj SPATE je mogao skenirati područje uzorka od 256×256 piksela, ali porastom broja piksela, odnosno skeniranog područja, vrijeme potrebno za termoelastičnu analizu naprezanja raste i do 10 sati.

Nakon SPATE-a dolazi do razvoja novih sustava za mjerenje kao što su sustavi FAST (Focal Plane Array for Synchronous Thermography) i Delta Therm 1000 (razvijen 1994.) koji koriste osnovne principe uređaja SPATE, ali kao osnovno sredstvo mjerenja koriste infracrvenu (IC) kameru. Dok uređaj SPATE vrši obradu podataka piksel po piksel, ova dva sustava analiziraju cijelo skenirano područje, te im za termoelastičnu analizu naprezanja treba svega nekoliko minuta.

Osnovne karakteristike infracrvene kamere CEDIP INFRARED – SILVER 420M su:

- radna temperatura osjetnika: -200°C
- frekvencija uzorkovanja pri maksimalnoj prostornoj razlučivosti: do 150 Hz
- temperaturna razlučivost: 0.02 K
- prostorna rezolucija osjetnika 320×240 piksela
- spektralni raspon: 3÷5 μm

## 2 METODA I PROVEDBA ISPITIVANJA

Prilikom analize termoelastičnog odziva materijala na podvrgnuto opterećenje temperaturna promjena koja se opaža veoma je malena: reda 0.2°C za konstrukcijski čelik neposredno prije točke tečenja. Iz tog je razloga neophodno koristiti dovoljno precizan instrument i prilagođenu metodologiju čime se maksimizirao signal-šum omjer. Posljedica toga je da se ispitivanja provode pri dinamičkim, vremenski harmoničnim opterećenjima dovoljno visoke frekvencije (10 do 20 Hz). Obzirom da pri ovim cikličkim frekvencijama materijal ne stigne izmijeniti toplinu s okolnim materijalom, očuvano je adiabatsko stanje materijala. Osim uzbude materijala dinamičkim cikličkim opterećenjem, moguće je postići sličan efekt na osnovi uzbude promjenljivog magnetnog polja ili ultrazvučnom uzbudom.

Prilikom tlačenja uzorka dolazi do porasta temperature promatranog uzorka, dok prilikom razvlačenja uzorka dolazi do hlađenja. Kvantitativna ovisnost promjene temperature u ovisnosti o promjeni naprezanja opisana je jednadžbom termoelastičnosti:

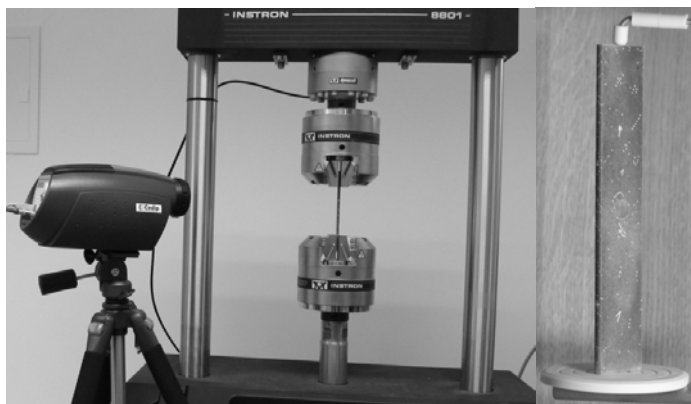
$$\Delta T = \frac{-\alpha T}{\rho C_p} (\sigma_1 + \sigma_2), \quad (1)$$

gdje  $\alpha$  predstavlja koeficijent temperaturne ekspanzije,  $T$  sobnu temperaturu uzorka,  $\rho$  gustoću materijala,  $C_p$  toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  su glavna

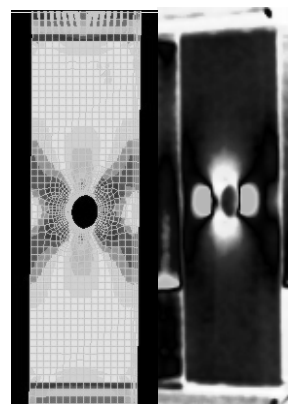
naprezanja. Suma ( $\sigma_1 + \sigma_2$ ) predstavljaju prvu invarijantu naprezanja, gdje je treća komponenta prve invarijante (glavno naprezanje  $\sigma_3$ ) nula na površini tijela. Potrebno je napomenuti da ova jednadžba vrijedi samo za adiabatsko stanje (stanje u kojem nema dovođenja ili odvođenja topline) te za elastično područje naprezanja. Za plastično područje ova jednadžba više ne vrijedi!

### 3 PRIMJER ANALIZE NAPREZANJA TRAKE S PROVRTOM

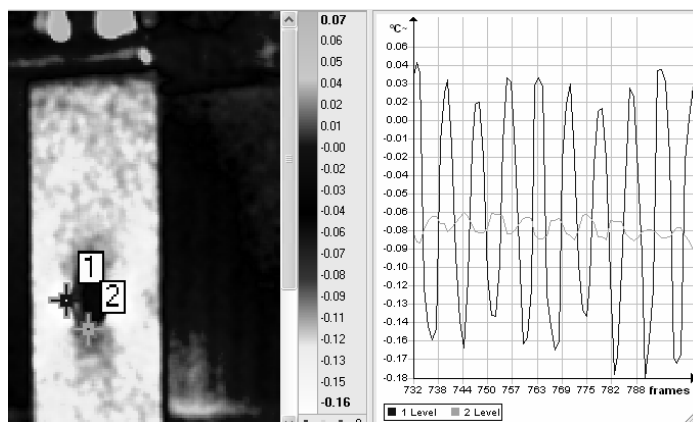
Kao demonstracija metode mjerenja i vizualizacije naprezanja odabran je klasičan primjer čelične trake (Fe360B) 30×5 mm, s provrtom Ø10 mm u sredini. Traka je opterećena sinusoidnim istosmjernim vlačnim opterećenjem od 20 kN, frekvencije 10 Hz, uz frekvenciju uzorkovanja termo-kamere od 100 Hz (slika 1). Zbog usporedbe naprezanje ista traka modelirana je u elastičnom području metodom konačnih elemenata. Slika 2 prikazuje raspodjelu efektivnih naprezanja (po HMH teoriji) i toplinsku sliku koja predstavlja prvu invarijantu naprezanja. Horizontalna zona (točka 1 na slici 3 i linija 2 na slici 4) u blizini provrta predstavlja zonu sa sniženim temperaturama (vlačno naprezanje), a vertikalna zona (točka 2 na slici 3) u blizini provrta zonu s povišenim temperaturama (tlačno naprezanje).



Slika 1. Čelična traka u kralnici

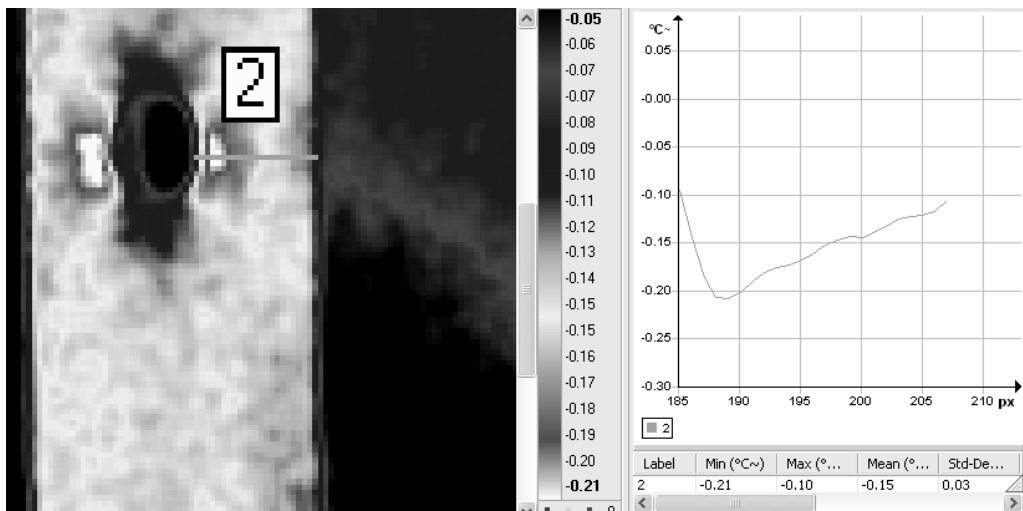


Slika 2. MKE model i slika RMS šuma<sup>1</sup>



Slika 3. Vremenski prikaz temperaturne raspodjele u blizini provrta

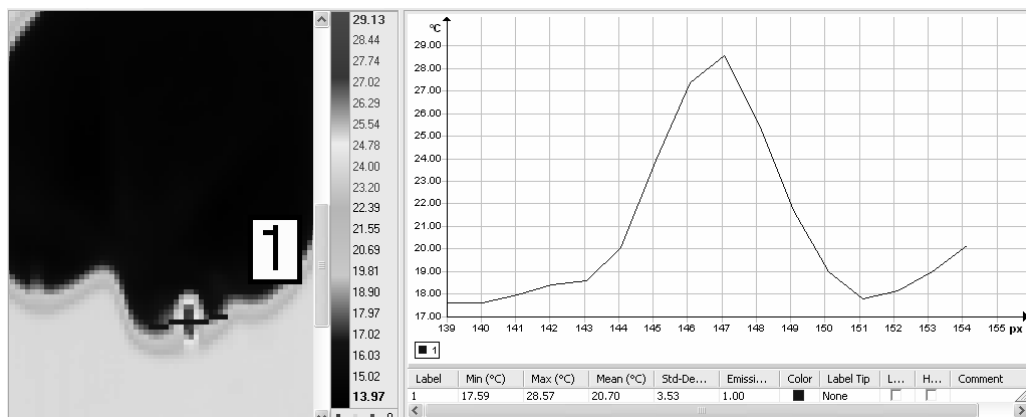
<sup>1</sup> RMS šum u ovom kontekstu stoji za standardnu devijaciju vrijednosti pojedinog piksela duž čitavog video zapisa



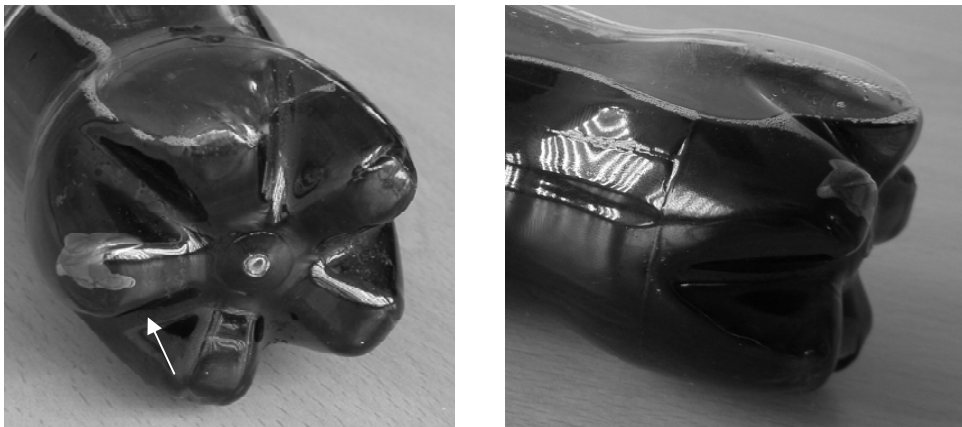
Slika 4. Temperaturni skok (pad) u zoni povišenih vlačnih naprezanja

#### 4 PRIMJER POST-UDARNOG EFEKTA KOD DELAMINACIJE PET AMBALAŽE

Za razliku od elastičnih naprezanja, gdje po rasterećenju nestaju i temperaturne promjene, prilikom plastičnih deformacija dolazi do disipacije energije i generiranja topline. Na primjeru boce iz PET (polietilen-tereftalat) ambalaže, koja je ispunjena gaziranim pićem pothlađenim u frižideru i ispuštena s visine od 80 cm (visina stola), vidljiv je visok porast temperature (oko 11°C) u zoni udara u pod, slika 5. Slika 5 prikazuje trenutak neposredno nakon udara, pri čemu još nije došlo do rashlađivanja zone povišene temperature. Slike 6 prikazuju delaminaciju u materijalu boce na istom ovom mjestu.



Slika 5. Temperaturna raspodjela na mjestu udara



Slika 6. Delaminacija na mjestu udara u pod

## 5 ZAKLJUČAK

Tijekom vršenja eksperimentalne analize naprezanja došlo se do slijedećih saznanja. Metali, čelik i aluminij, koji su najčešće predmet istraživanja u tehnici (strojarstvo, građevina) imaju naglašenu površinsku reflektivnost elektromagnetskog zračenja u IC spektru, što nepovoljno utječe na rezultate snimanja. Kako je kamera optimalno podešena da površine interpretira kao crna tijela (tijela koja apsorbiraju svu svjetlost koja pada na njih i koja su potpuno crna kada su hladna, dok zagrijana predstavljaju idealne izvore toplinskog zračenja), to će rezultati biti povoljniji ako se uzorci oboje crnom mat bojom koja će ih približiti odzivu crnog tijela. Nadalje, kako bi se smanjio utjecaj okolnog toplinskog zračenja, nužno je paravanom zakloniti što veći prostorni kut oko uzorka koji se analizira. U ovim ispitivanjima je u tu svrhu korištena kutija iz ambalaže od kartonskog mikrovala (obična kartonska ambalaža). Dodatan problem s metalima predstavlja njihova visoka toplinska vodljivost. Kako nije uvijek moguće postići adiabatno stanje na uzorku čiji se toplinski odziv na naprezanja želi zabilježiti, nanošenjem sloja plastike, zbog sporijeg odvođenja topline, omogućava se postizanje i do tri puta boljih rezultata.

Postupak na koji se je u ovdje opisanom ispitivanju trake s rupom došlo do relativnih temperaturnih promjena uslijed promjena u naprezanju je:

- KORAK 1: sniman je neopterećeni uzorak za duljinu uzorkovanja od 10 sekundi
- KORAK 2: sniman je opterećeni uzorak u istom vremenskom prozoru od 10 sekundi
- KORAK 3: od snimka opterećenog uzorka je oduzet snimak neopterećenog, čime su se eliminirali svi parazitski utjecaji poput provođenja topline uslijed temperaturne razlike u čeljustima.

S ovako obrađenim toplinskim snimcima, korištenjem jednadžbe (1), izračunata su naprezanje po volji odabrane površinske točke uzorka.

Provedena metoda, poznata kao metoda punog polja (full field method), primjerena je za usporedbu eksperimentalnih rezultata s numeričkim modelima (npr. metoda konačnih elemenata) za razliku od drugih metoda eksperimentalne analize naprezanja poput tenzometrije gdje se dobije rezultat samo na mjestu apliciranja tenzometra. Na primjeru trake s rupom demonstrirana je primjenljivost ove bezkontaktne nerazarajuće metode u tipičnim inženjerskim problemima. Metoda je slična jednoj već pomalo

napuštenoj eksperimentalnoj metodi analize naprezanja, fotoelasticimetriji, no za razliku od fotoelasticimetrije, nije moguće dobiti raspodjelu naprezanja u tijelu, dok s druge strane, ne zahtijeva izradu prozirnih fotoelastičnih modela već se analiza provodi na realnom objektu.

Primjer PET ambalaže ukazuje na primjenljivost termoelastične analize naprezanja za proučavanje problema udara kod kojih je akvizicija podataka (npr. putem tenzometara) znatno otežana zbog vrlo kratkog vremena u kojem se udar dešava, dok toplina generirana plastičnom deformacijom ostaje zarobljena jedno kratko vrijeme, koje je dovoljno da kamera prikupi podatke o temperaturama. Ovime se pokazuje jedan veliki potencijal razvoja metode u smjeru plastičnosti ili ispitivanja kontaktnih problema.

## Literatura

- [1] Boyce, B.R., Steps to modern thermoelastic stress analysis, ATEM Conference, Ube, Japan, July 1999.
- [2] Boyce, B. R., Lesniak, J.R., "Unique Applications of Thermoelastic Stress Analysis," Proc. SEM Annual Conf on Theoretical, and Experimental and Computational Mechanics, June 7-9, 1999, str. 853-855.
- [3] Haldorsen, L.M., Thermoelastic stress analysis system developed for industrial applications, Ph.D. thesis, Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, 1998.
- [4] Lesniak, J.R., Boyce, B.R., Howenwater, G., "Thermoelastic Measurement Under Random Loading", Proceedings of the 1998 SEM Spring Conference on Experimental Mechanics, Houston, TX, June 1-3, 1998.
- [5] Lesniak, J.R., Bazile, D.J., Boyce, B.R., Zickel, M.J., Cramer K.E., Welch, C.S., Stress intensity measurement via infrared focal plane array. U Lucas, G.F. i Stubbs, D.A., Editors, *Nontraditional methods of sensing stress, strain, and damage in materials and structures*, ASTM STP 1318, ASTM, Philadelphia, 1997.

## Autori:

**Petar Marendić**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Katedra za konstrukcije, tel: 021/305986, [petar.marendic@fesb.hr](mailto:petar.marendic@fesb.hr), [www.fesb.hr/kk](http://www.fesb.hr/kk)

**Tonči Veljača**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, [tonci.veljaca@adria.fesb.hr](mailto:tonci.veljaca@adria.fesb.hr)

**Lovre Krstulović-Opara**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Katedra za konstrukcije, tel: 021/305981, [lovre.krstulovic-opara@fesb.hr](mailto:lovre.krstulovic-opara@fesb.hr), [www.fesb.hr/kk](http://www.fesb.hr/kk)

**Željko Domazet**, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Katedra za konstrukcije, tel: 021/305983, [zeljko.domazet@fesb.hr](mailto:zeljko.domazet@fesb.hr), [www.fesb.hr/kk](http://www.fesb.hr/kk)

**Zahvala:** Autori se zahvaljuju financijskoj potpori Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske projektu "**Pogonska čvrstoća materijala i konstrukcija**".

## PRIMJENA METODE PODMODELIRANJA U ANALIZI GEOMETRIJSKIH DISKONTINUITETA

Marenić, E., Tonković, Z. & Skozrit, I.

**Sažetak:** Metoda podmodeliranja temelji se na prijelazu s globalnog modela na lokalni podmodel koji je diskretiziran gušćom mrežom trodimenzionalnih (3D) konačnih elemenata, a obuhvaća područje od posebnog interesa. Takav pristup vrlo je učinkovit kada je područje interesa mjesto koncentracije naprezanja odnosno geometrijskog diskontinuiteta. Na primjeru spoja cilindrične ljuske sa cilindričnim priključkom u radu je prikazana primjena metode podmodeliranja za numeričko određivanje faktora koncentracije naprezanja i faktora intenzivnosti naprezanja.

**Ključne riječi:** metoda podmodeliranja, faktor koncentracije naprezanja, faktor intenzivnosti naprezanja.

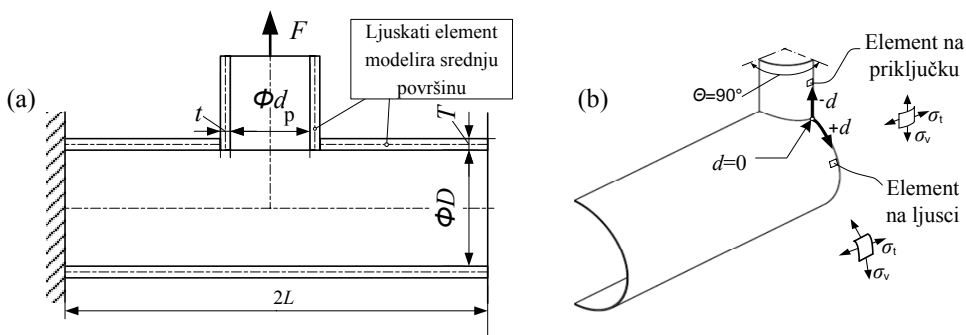
### 1 UVOD

Za analizu naprezanja i deformacija cijevnih spojeva najčešće se primjenjuje metoda konačnih elemenata MKE. Spoj posude pod tlakom i priključka u načelu je presjek dviju ljusaka koji se uobičajeno modelira pomoću ljuskastih konačnih elemenata na način da se diskretizira samo srednja ploha geometrije. Međutim, na taj način nije moguće obuhvatiti utjecaj zavara na faktor koncentracije naprezanja  $K$  izazvan efektom oslabljenja posude zbog priključka [3, 9]. Osim toga, uz cijevne priključke odnosno u zoni koncentracije naprezanja često se pojavljuju oštećenja i pukotine kako u proizvodnji tako i tijekom procesa uporabe [1]. Za opisivanje prirode procesa loma često se koristi faktor intenzivnosti naprezanja  $K_I$  za čije određivanje također nije dovoljna mreža ljuskastih elemenata [2, 4, 6, 7]. U tu svrhu se na razini podmodela za određivanje faktora intenzivnosti naprezanja  $K_I$  koriste trodimenzionalni singularni konačni elementi. Metoda podmodeliranja, koja se temelji na prijelazu s globalnog ljuskastog modela na trodimenzionalni podmodel diskretiziran gustom mrežom elemenata, za ovu je primjenu vrlo učinkovita [4].

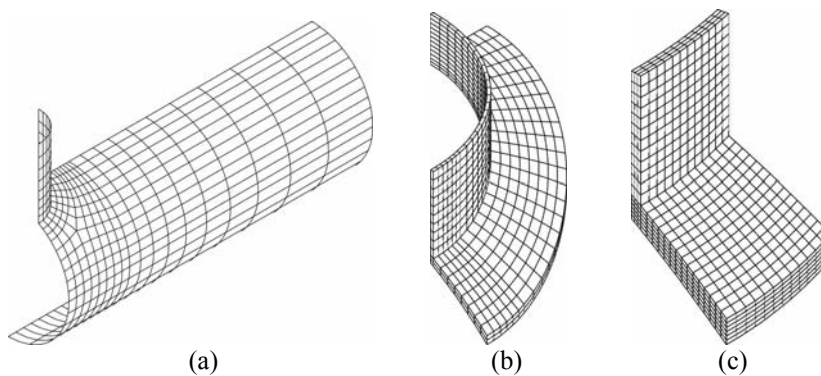
### 2 ODREĐIVANJE FAKTORA KONCENTRACIJE NAPREZANJA

Proračunski model spoja cilindrične ljuske sa cilindričnim priključkom opterećenim vanjskom silom  $F$  prikazan je na slici 1a. Numeričke analize prikazanog proračunskog modela provedene su primjenom programskog paketa ABAQUS [5]. U skladu sa simetrijom modelirana je četvrtina ljuske i priključka. Numerički rezultati verificirani su pomoću teorijskih rješenja iz [9] te su iz tog razloga svedeni na usmjerene faktore koncentracije naprezanja  $K_v = \sigma_v / \sigma_0$  i  $K_t = \sigma_t / \sigma_0$  (prema slici 1b) gdje je  $\sigma_0 = F / (d_p \pi t)$  membransko naprezanje. Mjerna linija  $d$  je presjek ravnine sa priključkom i ljuskom. Presječna ravnina koincidira s osi priključka, a određena je kutom  $\theta$ .

Najprije je provedena analiza globalnog ljuskastog modela (slika 2a) te su rezultati za pomake u čvorovima interpolirani na rub podmodela 1. razine (pm1) (slika 2b). Promjena faktora koncentracije naprezanja  $K$  duž mjerne linije  $d$  prikazana je usporedno s teorijskim rezultatima ( $K_v$  i  $K_t$ ) na slici 3. U sljedećem koraku kreiran je podmodel 2. razine (pm2) koji je diskretiziran još gušćom mrežom i obuhvaća područje još bliže području interesa, te je na posljepku analizom pm2 dobiven porast faktora koncentracije naprezanja koji je također istaknut na slici 3. Globalni model sastoji se od 750 S8R ljuskastih elemenata, a pm1 od 730, odnosno pm2 od 1700 C3D20R 3D elemenata.



Sl. 1. Spoj cilindrične ljuske sa cilindričnim priključkom: (a) proračunski model, (b) mjerna linija s diferencijalnim elementima priključka i ljuske s ucrtanim komponentama naprezanja

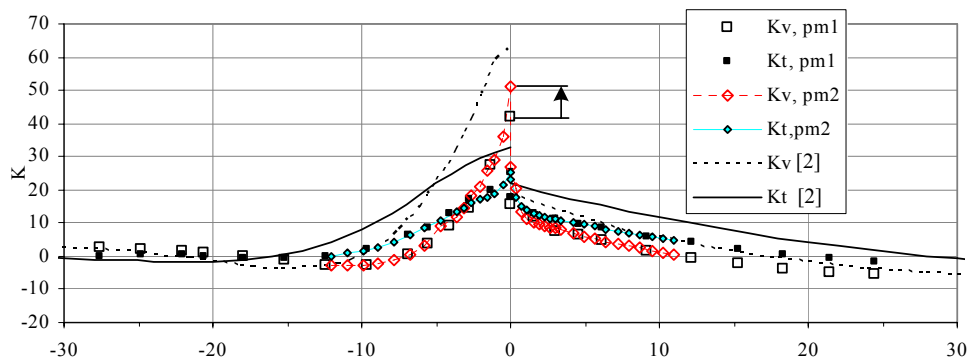


Sl. 2. Mreže konačnih elemenata: (a) globalni ljuskasti model, (b) 3D podmodel 1. razine (pm1) i (c) 3D podmodel 2. razine (pm2)

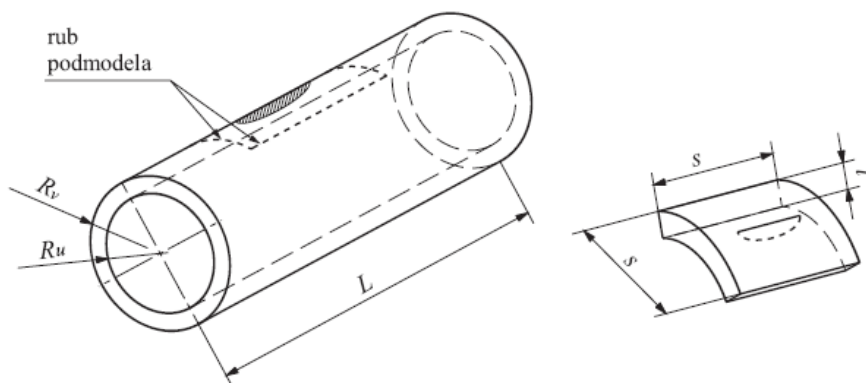
### 3 ODREĐIVANJE FAKTORA INTENZIVNOSTI NAPREZANJA ( $K_I$ )

#### 3.1 Cijev opterećena unutarnjim tlakom s polueliptičkom uzdužnom pukotinom

Provjera učinkovitosti metode podmodeliranja pri određivanju parametara mehanike loma vršena je usporedbom numeričkih rezultata dobivenih analizom proračunskog modela prema slici 4 i rezultata iz [8]. Prvo je provedena analiza globalnog modela bez vanjske površinske polueliptičke uzdužne pukotine. Zatim su uzeti rezultati za pomake globalnog modela dovoljno daleko od pukotine (dimenzija  $s$  na slici 4b) koji nadalje predstavljaju rubne uvjete za podmodel s gustom mrežom 3D elemenata zajedno sa singularnim elementima duž vrška pukotine.

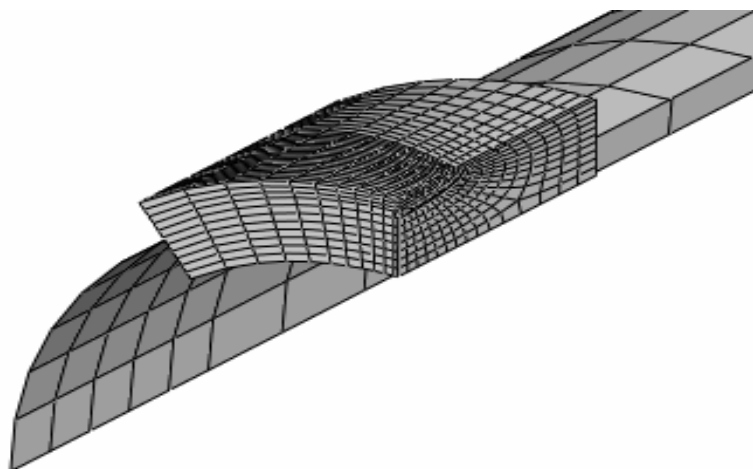


Sl. 3. Usporedba rezultata za faktor koncentracije naprezanja duž mjerne linije  $\theta=90^\circ$  na vanjskoj površini ljske i priključka s teorijskim rješenjima iz [2]



Sl. 4. Analiza vanjske površinske polueliptičke uzdužne pukotine na cijevi: (a) proračunski model cijevi sa polueliptičkom uzdužnom pukotinom, (b) geometrija podmodela

Globalni model sastoji se od 230 S8R ljuskastih elemenata, a podmodel od 2800 C3D20R 3D elemenata.



Sl. 5. Prikaz mreže globalnog modela i podmodela s površinskom uzdužnom pukotinom

Prema [8], faktor intenzivnosti naprezanja  $K_I$  za vanjsku površinsku polueliptičku pukotinu u cijevi opterećenu unutarnjim tlakom  $p$  određuje se prema izrazu:

$$K_I = \frac{pR}{t} \sqrt{\pi \frac{a}{Q}} F_e \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{t}{R}, \varphi \right), \quad (1)$$

gdje je  $F_e$  korekcijski faktor:

$$F_e = \frac{t}{R} \left( \frac{R^2}{R_0^2 - R^2} \right) \left[ 2G_0 + 2 \left( \frac{a}{R_0} \right) G_1 + 3 \left( \frac{a}{R_0} \right)^2 G_2 + 4 \left( \frac{a}{R_0} \right)^3 G_3 \right]. \quad (2)$$

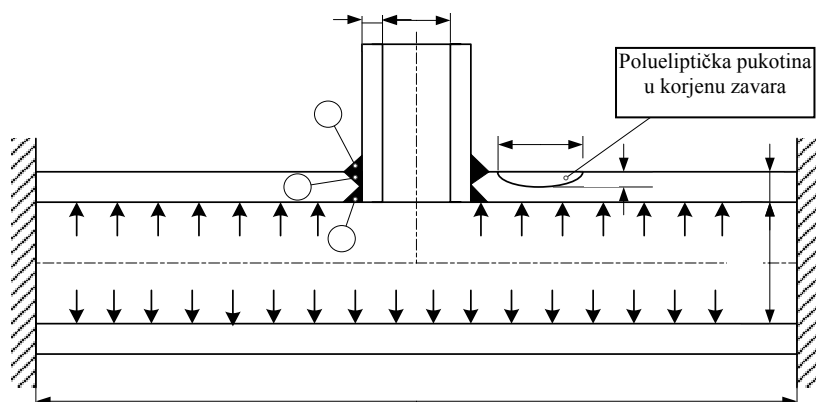
Parametrom  $\varphi$  određuje se mjesto na fronti pukotine, a  $\varphi = 90^\circ$  određuje najdublju točku pukotine. Kao što je vidljivo iz tablice 1 rezultati dobiveni metodom podmodeliranja vrlo dobro se podudaraju s rezultatima iz literature [8].

Tablica. 1. Usporedba numeričkih rezultata s rezultatima iz literature za  $\varphi = 90^\circ$

	$K_I$ (MPa $\sqrt{\text{mm}}$ )
Raju i Newman [8]	407,44
MKE, podmodeliranje	397,2

### 3.2 Zavareni spoj posude pod tlakom i cilindričnog priključka s polueliptičkom površinskom pukotinom u korijenu zavora

Nakon provedene verifikacije podmodeliranja kao učinkovite tehnike pri određivanju faktora intenzivnosti naprezanja  $K_I$ , pristupilo se analizi realnog inženjerskog problema. Modeliran je zavareni spoj posude pod tlakom i cilindričnog priključka s polueliptičkom površinskom pukotinom u korijenu zavora prema slici 6.



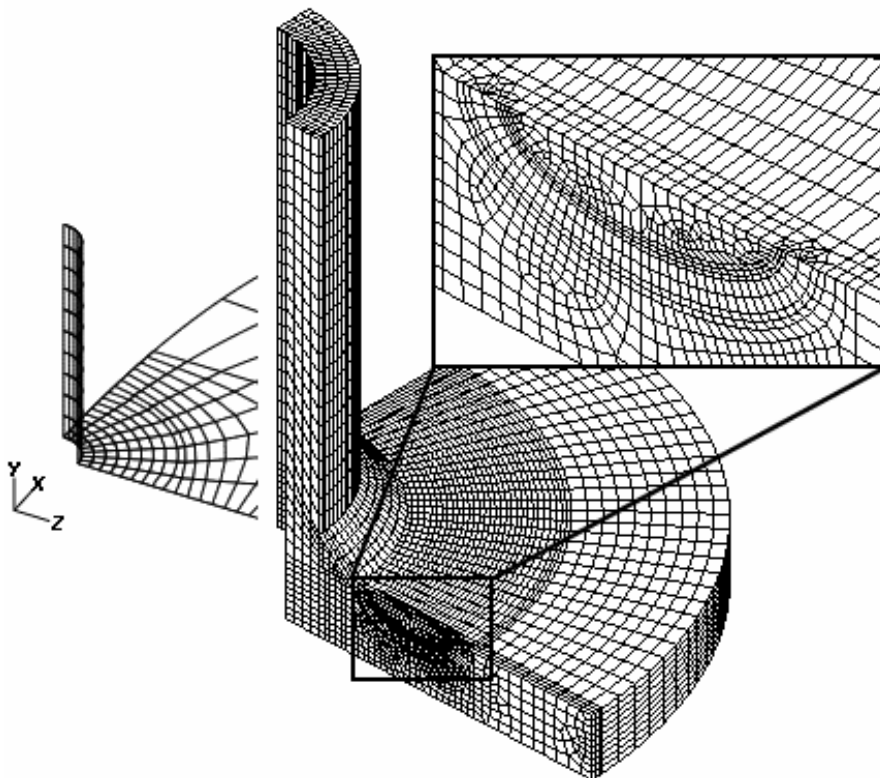
Sl. 6. Proračunski model zavarenog spoja posude pod tlakom i cilindričnog priključka s polueliptičkom površinskom pukotinom u korijenu zavora

Pristup je ponovo isti, a svodi se na dva koraka. Prvi je globalna analiza ljuskastog modela bez pukotine koja u drugom koraku služi za dodjeljivanje rubnih uvjeta pomaka na realnom podmodelu s pukotinom. Na slici 7 prikazana je mreža konačnih

elemenata s detaljom spoja jedne četvrtine globalnog ljuskastog modela te podmodela s polueliptičkom pukotinom u korijenu zavora. Faktor intenzivnosti napreznja za razmatranu pukotinu prema API standardu [9] računa se prema izrazu:

$$K_I = \int_0^a h(x, a) \sigma(x) dx \quad (3)$$

gdje je  $h(x, a)$  težinska funkcija, a  $\sigma(x)$  napreznje u pravcu normale na ravninu pukotine gdje je  $x$  koordinata koja opisuje debljinu posude od vanjske površine. Napreznje  $\sigma(x)$  dobiveno je numerički, analizom podmodela bez pukotine.



Sl. 7. Mreže konačnih elemenata: (a) detalj spoja jedne četvrtine globalnog ljuskastog modela, (b) podmodel s polueliptičkom pukotinom u korijenu zavora.

Usporedni prikaz rezultata dan tablicom 2 ponovno prikazuje vrlo dobro podudaranje s literaturom.

Tablica. 2. Usporedba numeričkih rezultata s rezultatima iz literature [9]

	$K_I$ [MPA $\sqrt{\text{mm}}$ ]		
	$\varphi = 0^\circ$	$\varphi = 90^\circ$	$\varphi = 180^\circ$
API [9]	270.193	365.641	-
MKE, podmodel	268.8	354.2	256.6

## 4 ZAKLJUČAK

Podmodeliranje u smislu prijelaza globalno-lokalno pruža mogućnost provođenja računalno efikasne i učinkovite analize proračunskog modela s potpuno proizvoljnom geometrijom. Lokalno prognošćenje mreže 3D konačnih elemenata i mogućnost uključivanja pukotine, odnosno singularnih elemenata rezultira dovoljno točnim i numerički stabilnim rezultatima i na taj način opravdava primjenu tehnike podmodeliranja kako za određivanje faktora koncentracije naprezanja tako i za određivanje faktora intenzivnosti naprezanja odnosno općenito parametara mehanike loma.

### Literatura:

- [1] API 579: Recommended practice for fitness-for-service, American Petroleum Institute, Issue 6, 2000.
- [2] Chiew, S.P., Lie, S.T., Lee, C.K., Huang, Z.W., “Stress intensity factors for a surface crack in a tubular T-joint”, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 78, 2001, str. 677–85.
- [3] Dekker, C.J., Stikvoort, W.J., “Pressure stress intensity at nozzles on cylindrical vessels: a comparison of calculation methods”, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 74, 1997, str. 121-128.
- [4] Diamantoudis, A.Th, Labeas, G.N., “Stress intensity factors of semi-elliptical surface cracks in pressure vessels by global-local finite element methodology”, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 72, 2005, str. 1299–1312.
- [5] Hibbitt, Karlsson & Serensen, Inc., ABAQUS/Standard. User's guide and theoretical manual, Version 6.7, 2007.
- [6] Lie, S.T., Lee, C.K., Chiew, S.P., Shao, Y.B., “Mesh modelling and analysis of cracked uni-planar tubular K-joints”, Journal of Constructional Steel Research, Vol. 61, 2005, str. 235–264.
- [7] Lie, S.T., Lee, C.K., Wong, S.M., “Model and mesh generation of cracked tubular Y-joints”, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 70, 2003, str. 161–84.
- [8] Raju, I.S., Newman, J.C., “Stress-intensity factors for internal and external surface cracks in cylindrical vessels”, Transactions of the ASME, Vol. 104, 1982, str. 293-298.
- [9] Xue, M.D., Li, D.F., Hwang, K.C., “Theoretical stress analysis of intersecting cylindrical shells subjected to external loads transmitted through branch pipes”, International Journal of Solids and Structures, Vol. 42, 2005, str. 3299-3319.

### Autori:

**Eduard Marenić**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 616 8115, fax. 01 616 8187, e-mail: [eduard.marenic@fsb.hr](mailto:eduard.marenic@fsb.hr), web stranica: <http://www.fsb.hr/lnm/staff/>

**Zdenko Tonković**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 616 8450, fax. 01 616 8187, e-mail: [ztonkov@fsb.hr](mailto:ztonkov@fsb.hr), web stranica: <http://www.fsb.hr/lnm/staff/>

**Ivica Skozrit**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 616 8115, fax. 01 616 8187, e-mail: [ivica.skozrit@fsb.hr](mailto:ivica.skozrit@fsb.hr), web stranica: <http://www.fsb.hr/lnm/staff/>

## ELASTIČNI SPEKTAR ODGOVORA ZA POBUDU VJETROM TIP A BURA

Mihanović, A., Nikolić, Ž. & Smoljanović, H.

**Sažetak:** U ovom radu su prikazani elastični spektri odgovora JS dobiveni iz rezultata mjerenja sile vjetra poznatog pod imenom Bura. Svi podaci o veličini sile vjetra dobiveni su pokusnim mjerenjima na JS oscilatoru. Gustoća zapisa je varirala od 0.01 do 0.00001 sekunde. Spektri su konstruirani za različite intenzitete dinamičke sile vjetra tj. za vjetar različitih srednjih brzina. Svođenjem spektara na bezdimenzionalni oblik pokazuje se njihova velika sličnost neovisno o intenzitetu sile vjetra. Iz tih podataka konstruiran je bezdimenzionalni elastični spektar po načelu anvelope srednjih vrijednosti. Temeljem izloženih rezultata vidljivo je da smanjivanjem vlastitog perioda promatranog JS rastu ordinate elastičnog spektra odgovora. U radu se predlaže približan način određivanja funkcije elastičnog spektra za konkretnu lokaciju i konkretan JS temeljenu na poznatim podacima o srednjoj brzini vjetra.

**Cljučne riječi:** *Elastični spektar odgovora; Sila vjetra; Vlastiti period; Brzina vjetra.*

### 1 UVOD

U ovom radu prikazana je primjena kratkotrajno-kratkovalne Fourierove transformacije [1] za analizu valnih svojstava vjetra te za određivanje spektra odgovora vjetra.

Valna svojstva vjetra na konstrukcije analizirana su na jednostupnjevnom dinamičkom sustavu. Valni karakter djelovanja istražen je pomoću kratkotrajno-kratkovalne analize na nekoliko različitih pobuda vjetra [2]. Kratkotrajnom transformacijom analizirana je konstantna, a potom i fluktuirajuća komponenta izlučena iz sile pobude. Konstantna komponenta sile predstavljena je pravokutnim impulsom, a fluktuirajuća harmonijskom funkcijom [3]. Kada se u kratkotrajno-kratkovalnoj transformaciji odabere funkcija u obliku pravokutnog impulsa, iz ukupne pobude izlučuje se komponenta koja ima značenje prosječne odnosno stalne komponente sile vjetra s prosječnim intervalom koji je jednak trajanju impulsa. Kada se odabere harmonijska funkcija, npr. sinusoidalnog oblika, kratkotrajno-kratkovalna transformacija iz ukupne pobude izlučuje fluktuirajuću komponentu koja pokazuje mogući rezonantni efekt na jednostupnjevni dinamički sustav s periodom koji je jednak periodu odabrane sinusne funkcije.

Kratkotrajno-kratkovalna transformacija dana je izrazom:

$$a_{\alpha}(\alpha, T)_{\max} = \int_{-\infty}^{\infty} F_w(\tau) I(\tau-t) d\tau, \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

gdje je  $F_w(\tau)$  izmjerena sila vjetra, a:

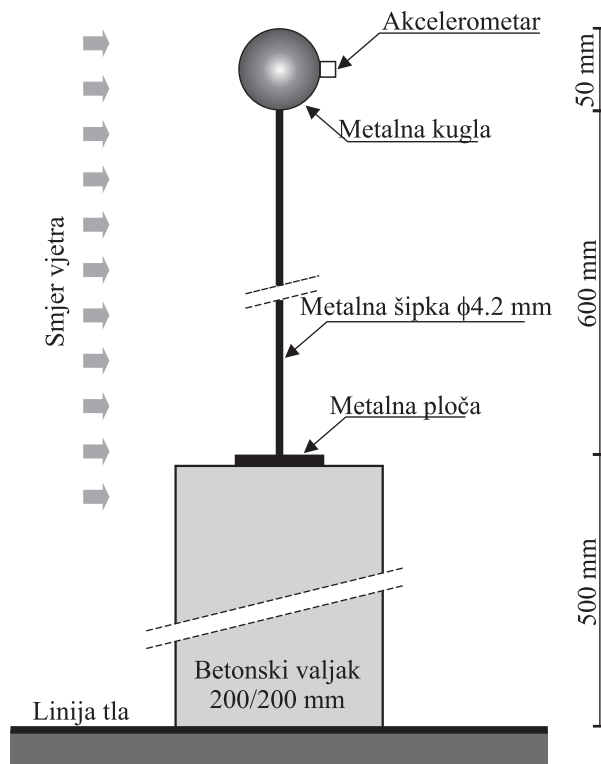
$$I(\tau-t) = N(\alpha T, \tau-t) \sin \frac{2\pi}{T}(\tau-t) \quad (2)$$

je sinusni impuls trajanja  $t = \alpha T$ , gdje je  $N$  funkcija dana izrazom:

$$N(\alpha T, t) = \begin{cases} 1/\alpha T & 0 < t < \alpha T \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (3)$$

Kombinacijom učinka stalne i fluktuirajuće komponente mogu se dobiti rezonantni spektri koji predstavljaju odgovor jednostupnjevnog sustava za izmjereni zapis sile vjetra. Ako pretpostavimo da sve komponente imaju ekstrem u istom vremenskom trenutku, dobiva se najnepovoljniji odgovor jednostupnjevnog sustava za zadanu pobudu.

Na temelju analize većeg broja zapisa vjetra na konkretnoj lokaciji, moguće je konstruirati spektre odgovora koji bi mogli poslužiti za proračun učinka vjetra na konstrukciju metodom spektralne analize. U literaturi je do sada razrađena ideja umjetno konstruiranih spektara odgovora [4].



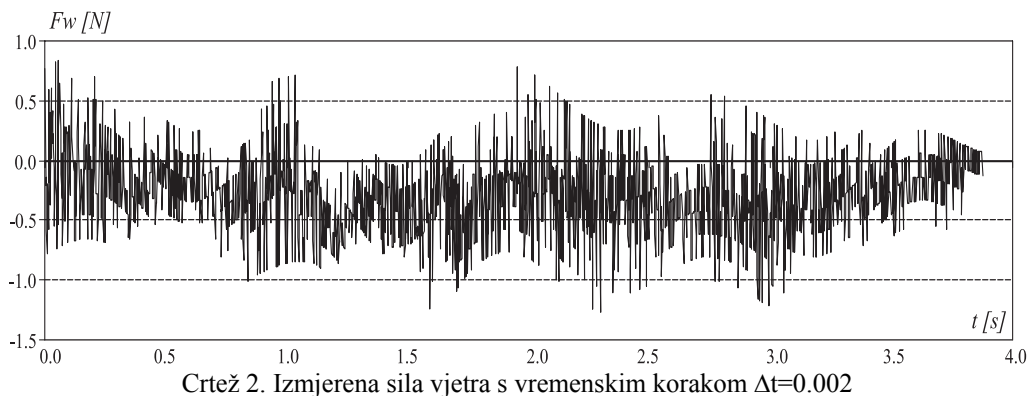
Crtež 1. Eksperimentalni JS

Pokusna mjerenja sile vjetra izvedena su na jednostupnjevnom dinamičkom oscilatoru (JS) prikazanom na crtežu 1. Promatrani JS je izrađen od glatke čelične šipke duljine 60 cm, promjera 4.2 mm, ukliještene u metalnu nepomičnu podlogu. Na vrhu šipke postavljena je čelična kugla promjera 50 mm. Ekvivalentna masa JS iznosila je 0.80 [kg], a krutost na savijanje  $k=44$  [N/m]. Izmjereno ekvivalentno viskozno prigušenje sustava iznosilo je  $\xi=0.55\%$ . U zavjetrini metalne kugle pričvršćen je mjerač ubrzanja s rezolucijom od  $10^{-5}$  sekunde. Pokusi su izvršeni tako da je mjereno horizontalno ubrzanje središta čelične kugle u smjeru djelovanja vjetra. Podaci na

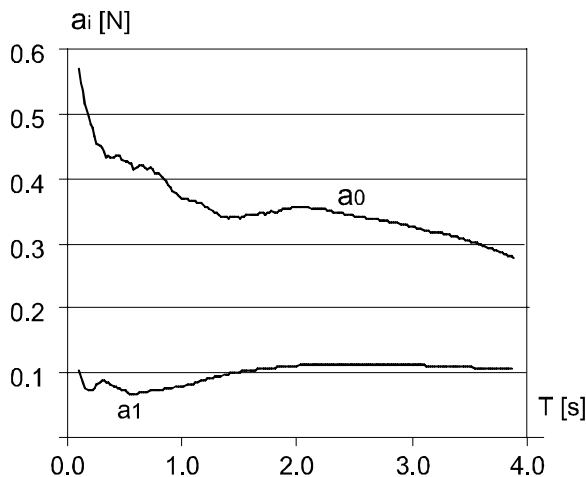
kojima se temelji ovaj rad odnose se na vjetar tipa Bura izmjeren u više navrata krajem 2005. godine. Ukupno je registrirano 30 zapisa. Rezultati mjerenja ubrzanja JS standardnim su metodama [5] preslikani u dinamičku silu vjetra.

## 2 IZMJERENA I ANALIZIRANA SILA VJETRA NA JS

Analiza je provedena za niz zapisa sile vjetra s vremenskim intervalima zapisa od  $\Delta t=0.002$  s,  $\Delta t=0.01$  s i  $\Delta t=0.00001$  s [2]. Ovdje je prikazana analiza vjetra s vremenskim intervalom zapisa  $\Delta t=0.002$  s. Dijagram sile vjetra - vrijeme prikazan je na crtežu 2.



Impulsna analiza ove dinamičke pobude prikazana je na crtežu 3. Komponenta  $a_0$  prikazuje intenzitet stalne komponente sile kao funkcije vremena osrednjavanja. Samo vrijeme osrednjavanja uzeto je kao funkcija vlastitog perioda  $T$  danog JS. Komponenta  $a_1$  prikazuje prosječni intenzitet prve fluktuirajuće komponente sile jednog punog sinusnog vala u trajanju vlastitog perioda  $T$ .

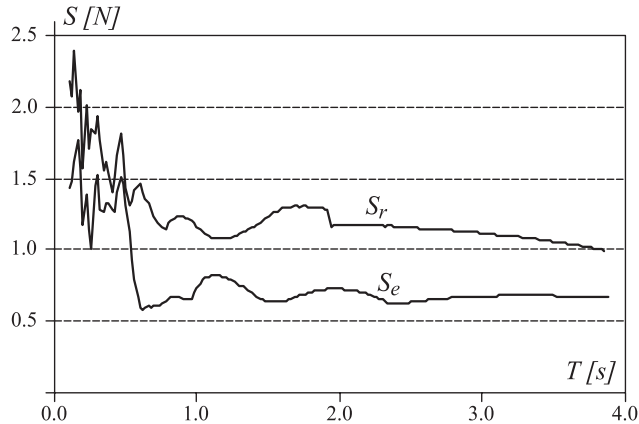


Crtež 3. Impulsna analiza sile vjetra s vremenskim korakom  $\Delta t=0.002$

Spektar elastičnog odgovora  $S_e$  za silu vjetra prikazan je na crtežu 4. Na istom crtežu prikazan je rezonantni spektar  $S_r$  koji se prema [2] dobije prema izrazu:

$$S_r = 2.0 a_0 + \pi a_{1\max} \quad (4)$$

Prethodni izraz podrazumijeva istovremenu pojavu najveće stalne i fluktuirajuće komponente.



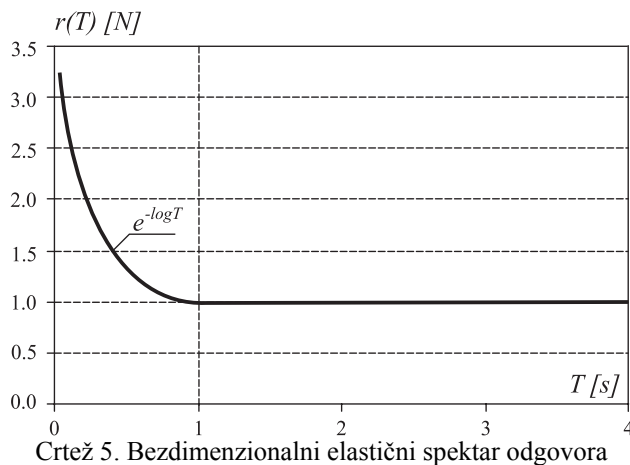
Sl. 4. Elastični i rezonantni spektar odgovora sile vjeta s vremenskim korakom  $\Delta t=0.002$

### 3 BEZDIMENZIONALNI ELASTIČNI SPEKTAR ODGOVORA

Izmjereni podaci s pokusnog uzorka poslužili su za konstruiranje bezdimenzionalnog spektra odgovora  $r(T)$ . Mjerilo spektra usvojeno je tako da je jedinična sila spektra iznosa 1(N) pridružena periodu  $T=1(s)$ . U tom relativnom odnosu konstruirane su ostale ordinate po zakonu srednjih vrijednosti temeljem analize niza različitih spektara [2]. Konačni dijagram je pojednostavljena anelopa srednjih vrijednosti, a prikazan je na crtežu 5. Vrlo dobro ga aproksimiraju funkcije:

$$r(T) = e^{-\log T}, \quad 0 < T < 1s \quad (5)$$

$$r(T) = 1, \quad 1s \leq T < 4s \quad (6)$$



Crtež 5. Bezdimezionalni elastični spektar odgovora

#### 4 SPEKTAR ODGOVORA ZA KONKRETNI VJETAR I LOKACIJU

Za konkretnu lokaciju moguće je preslikavanjem konstruirati odgovarajući spektar odgovora na temelju izmjerenih podataka o srednjoj brzini vjetra  $V(T_w)$  (km/h), gdje je  $T_w$ (s) period osrednjavanja. Iz ova dva podatka može se konstruirati mjerilo bezdimenzionalnog spektra prema izrazu:

$$m(T_w) = \left[ \frac{V_{(T_w)}^2}{95^2} \right] \frac{1}{F_0(T_w)}, \quad [m^0] \quad (7)$$

gdje je  $F_0(T_w)$  stalna komponenta sile vjetra koja je prema [2] opisana približnim analitičkim izrazom:

$$F_0(T_w) = \left[ \frac{20}{413} (\ln T_w)^2 - \frac{10}{51} \ln T_w + 1 \right] e^{-0.20 \ln T_w} \quad (8)$$

Ordinate spektra odgovora za konkretnu lokaciju mogu se dobiti kao produkt ordinate bezdimenzionalnog spektra odgovora  $r(T)$  i odgovarajućeg mjerila  $m(T_w)$  prema izrazu:

$$R(T) = r(T) m(T_w) \quad (9)$$

Ordinate spektra odgovora prikazane izrazom (9) predstavljaju veličinu sile koja bi se za zadane uvjete djelovanja vjetra na lokaciji pojavila na JS s geometrijom pokusnog uzorka upotrijebljenog u ovome radu.

#### 5 SPEKTAR ODGOVORA ZA KONKRETNI JS

Pokusni uzorak koji je opisan u poglavlju 1, sukladno uvjetima iz EC 1 dio 2-4 [6] je imao sumarni rezultat produkata svih koeficijenata  $c$  i referentne površine izložene vjetru iznosa:

$$\sum (c_T A_{ref}) = 0.20 [dm^2] \quad (10)$$

Proizvoljni JS ima pripadni period oscilacija  $T$  i geometriju elemenata od kojih je sastavljen, kao položaj u odnosu na tlo, površinu dijelova itd. Ako se uključe svi geometrijski uvjeti JS koji su potrebni za izračun sile vjetra, može se dobiti pripadni koeficijent sile  $\sum (c_T A_{ref})$  te uspostaviti omjer geometrijskih odnosa proizvoljnog JS i pokusnog JS prema izrazu:

$$a = \frac{\sum (c_T A_{ref})}{0.20} [dm^0] \quad (11)$$

Spektar odgovora za konkretni odabrani JS s prethodno definiranom geometrijom i pripadnim vjetrom, koji je definiran sa srednjom brzinom, može se prikazati u obliku:

$$R_e(T) = a r(T) m(T_w) \quad (12)$$

U specijalnom slučaju za JS sustav s periodom  $T=1$ (s) pri srednjoj desetominutnoj brzini vjetra od 95 km/h te ukupnom iznosu produkta koeficijenata oblika i referentne površine iznosa  $0.20 \text{ dm}^2$ , sila vjetra jednaka je 1 (N).

## 6 ZAKLJUČAK

Izmjereni rezultati su omogućili konstrukciju elastičnog spektra odgovora neprigušenog JS za svaki pojedinačni slučaj pobude. Bezdimenzionalnom usporedbom na temelju približne anvelope srednjih vrijednosti konstruiran je bezdimenzionalni oblik spektra odgovora promatranog vjetra bura. Pokazan je praktični način utvrđivanja mjerila bezdimenzionalnog spektra na temelju podataka o vjetru na novoj traženoj lokaciji.

Rabeći analogiju EC1 dio 2-4 [6], prikazana je praktična mogućnost konstruiranja spektra odgovora za JS drukčijih geometrijskih svojstava od baznog iz ovog rada.

### Literatura:

- [1] Gurley K., Kareem A., Applications of Wavelet Transforms in Earthquake, Wind and Ocean Engineering, *Engineering Structures*, No. 21, 1999, str. 149-167.
- [2] Mihanović, A., Nikolić, Ž., Marović, P. Waves properties of wind actions on structure, *Int. J. Engineering Modelling*, in press.
- [3] Mihanović, A., Nikolić, Ž., Živaljić, N., Resonant spectrum analysis of seismic loading of structures, COMPDYN 2007 - ECCOMAS, Eds. Papadrakakis, M., Charnpiss, D. C., and Lagaros, N. D., Rethymno, Crete, Greece, 2007.
- [4] Solari, G. Wind response spectrum, *Journal Engineering Mechanics*, Vol. 115, No. 9, 1989, str. 2057-2073.
- [5] Newmark, N.M., Rosenblueth, E., *Fundamentals of Earthquake Engineering*. Prentice Hall, 1971.
- [6] European Committee for Standardization. *Eurocode 1. Basis of design and actions on structures – Part 2-4: Actions on structures – Wind actions*. ENV 1991-2-4, Brussels, 1995.

### Autori:

prof. dr. sc. **Ante Mihanović**, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Matice hrvatske 15, 21000 Split, Hrvatska, tel.: (021) 303 357, fax: (021) 465 117, e-mail: [ante.mihanovic@gradst.hr](mailto:ante.mihanovic@gradst.hr)

prof. dr. sc. **Željana Nikolić**, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Matice hrvatske 15, 21000 Split, Hrvatska, tel.: (021) 303 332, fax: (021) 465 117, e-mail: [zeljana.nikolic@gradst.hr](mailto:zeljana.nikolic@gradst.hr)

**Hrvoje Smoljanović**, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Matice hrvatske 15, 21000 Split, Hrvatska, tel.: (021) 303 332, fax: (021) 465 117, e-mail: [hrvoje.smoljanovic@gradst.hr](mailto:hrvoje.smoljanovic@gradst.hr)

## REZONANTNI SPEKTRI UBRZANJA POBUDE POTRESOM

Nikolić, Ž., Mihanović, A. & Živaljić, N.

**Sažetak:** U ovom radu prikazana je primjena kratkotrajno-kratkovalne transformacije u određivanju spektra ubrzanja potresa. Primijenjena metoda funkciju ubrzanja razlučuje na harmonijske valove različitih perioda te prikazuje intenzitet svakog vala u danom akcelelogramu. Funkcija koja prikazuje najveći intenzitet ubrzanja za uočeni val u danom akcelelogramu naziva se ulazni rezonantni spektar. Odgovor sustava s jednim stupnjem slobode podvrgnut ulaznom rezonantnom spektru daje rezonantni spektar odgovora ubrzanja. Rezonantni spektar odgovora prikazuje ponašanje jednako klasičnom spektru ubrzanja, ali s pojedinim specifičnostima, ovisno o broju upotrijebljenih članova fluktuirajuće komponente. U slučaju da se odabere veliki broj fluktuirajućih članova rezonantni spektar ubrzanja daje najnepovoljniji odgovor sustava s jednim stupnjem slobode za odgovarajući potresni akcelelogram.

**Ključne riječi:** *Potresno opterećenje, kratkotrajno-kratkovalna transformacija, Ulazni rezonantni spektar, Rezonantni spektar odgovora.*

### 1 UVOD

Kratkovalna transformacija je metoda signalne analize s vrlo rasprostranjenom primjenom, posebno u analizi signala s naglim promjenama [1]. Primjena kratkotrajno-kratkovalne transformacije česta je u području elektroničkih i glasovnih signala, a u novije vrijeme primjenjuje se i u analizi potresnih opterećenja [2-4].

U ovom radu prikazana je primjena kratkotrajno-kratkovalne Fourierove transformacije za analizu potresnog opterećenja koje djeluje na konstrukcije [5]. Kratkotrajno-kratkovalna transformacija rastavlja funkciju ubrzanja na pravilne harmonijske valove različitih perioda i prikazuje intenzitet svakog vala u akcelelogramu. Ukoliko se za valnu transformaciju odabere impuls u obliku funkcije pravokutnog tipa, tada transformacija danog ubrzanja ima značenje ustaljene vrijednosti s prosječnim intervalom jednakim vremenu trajanja impulsa. Ukoliko se za valnu transformaciju odabere harmonijska funkcija, na primjer sinusoidnog oblika, tada valna transformacija ubrzanja izdvaja harmonijsko djelovanje koje prikazuje mogućnost pojave rezonantnog efekta kod sustava s jednim stupnjem slobode (JS) s periodom jednakim periodu odabrane funkcije sinusoidnog oblika.

### 2 STALNA I FLUKTUIRAJUĆA KOMPONENTA UBRZANJA

Dinamičko djelovanje potresa prikazano ubrzanjem može se razlučiti na stalnu i fluktuirajuću komponentu. Stalna komponenta u određenom vremenu ima konstantnu vrijednost i predstavlja Heavisideov tip opterećenja u dinamičkom smislu.

Fluktuirajuća komponenta u nekom određenom vremenu ima oblik harmonijske funkcije.

Stalna komponenta akceleracije može se izlučiti iz prikazanog potresnog akcelelograma pomoću kratkotrajno-kratkovalne pravokutne Fourierove transformacije [1] u obliku:

$$a_0(T)_{max} = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)I(\tau-t)d\tau, \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

gdje je:

$$I(\tau-t) = N(T, \tau-t) \quad (2)$$

a T je period osrednjavanja.

Iz konkretnog potresnog akcelelograma, fluktuirajuća komponenta može se izdvojiti pomoću kratkotrajno-kratkovalne Fourierove transformacije [1] prikazane relacijom:

$$a_\alpha(\alpha, T)_{max} = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)I(\tau-t)d\tau, \quad \alpha > 0 \quad (3)$$

gdje je:

$$I(\tau-t) = N(\alpha T, \tau-t) \sin \frac{2\pi}{T}(\tau-t) \quad (4)$$

sinusni impuls trajanja  $t = \alpha T$ , dok je N funkcija normalizacije impulsa prikazana izrazom:

$$N(\alpha T, t) = \begin{cases} 1/\alpha T & 0 < t < \alpha T \\ 0 & other \end{cases} \quad (5)$$

Ukoliko izraz (1) primijenimo na prikazani potresni akcelelogram, dobije se prostorna funkcija  $a_\alpha(\alpha, T)$  koja predstavlja maksimalnu vrijednost akceleracije za odabrani val u akcelelogramu i naziva se ulazni rezonantni spektar.

### 3 ODGOVOR JS NA STALNU I FLUKTUIRAJUĆU KOMPONENTU UBRZANJA

Sustav s jednim stupnjem slobode izložen konstantnoj komponenti i svakoj harmonijskoj komponenti potresnog djelovanja prikazan je ulaznim rezonantnim spektrom  $a_\alpha(\alpha, T)$ . Odgovor sustava s jednim stupnjem slobode daje ubrzanje koje nazivamo rezonantni spektar odgovora [6].

#### 3.1 Odgovor JS na stalnu komponentu ubrzanja

Dinamički odgovor JS pri djelovanju stalne komponente ubrzanja (1) s homogenim početnim uvjetima i viskoznom prigušenjem ima oblik:

$$u = \frac{F_0(T)}{k} \left[ 1 - e^{-\zeta\omega t} (\cos\omega t + \zeta\sin\omega t) \right] = \frac{F_0(T)}{k} A(\zeta, t) \quad (6)$$

gdje je A dinamički faktor, čija maksimalna vrijednost iznosi 2.

### 3.2 Odgovor JS na fluktuirajuću komponentu ubrzanja

Ako JS podvrgnemo harmonijskoj potresnoj pobudi  $a_a(\alpha, T)$ , dinamička pobuda opisana izrazom (3) poprima oblik:

$$F(t) = -m a_a(\alpha, T) \sin \omega t \quad 0 \leq t < \alpha T \quad (7)$$

a ubrzanje koje se dobiva iz potresnog opterećenja, sa homogenim početnim uvjetima, može se prikazati kao:

$$\ddot{u} = -a_a(\alpha, T) \left[ \left( 1 - e^{-\zeta \omega t} \right) \frac{\cos \omega t}{2 \zeta} - \sin \omega t \right] \quad (8)$$

gdje su male amplitude koje proizlaze iz niskog viskozno prigušenja  $\xi$  zanemarive.

Najveća amplituda ubrzanja dobije se za vrijednost:

$$\omega t = \frac{2\pi}{T} \alpha T = 2\pi\alpha = i\pi \quad , \quad \alpha = \frac{i}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

i može se prikazati kao:

$$R_\alpha = \ddot{u}_{max} = a_a(\alpha, T) \left( 1 - e^{-\xi 2\pi\alpha} \right) \frac{1}{2\xi} \quad (10)$$

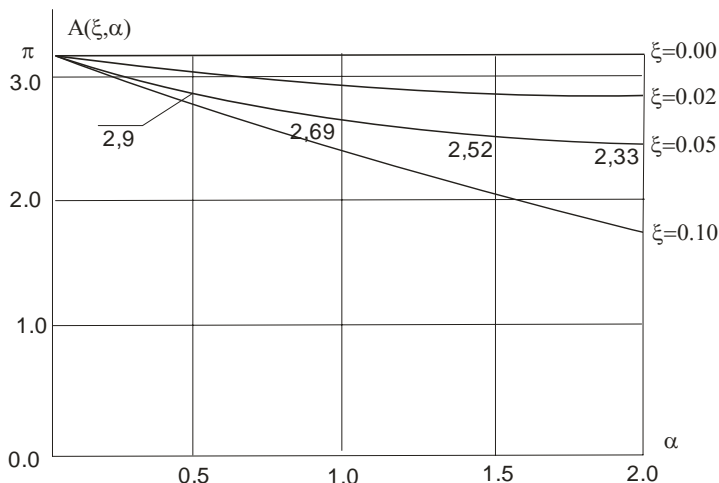
Maksimalna vrijednost odgovora dobivena iz izraza (10):

$$R_{\alpha r} = a_a(\alpha, T) \left( 1 - e^{-\xi 2\pi\alpha} \right) / 2\xi \Big|_{max} \quad (11)$$

prikazuje vrijednost ordinate  $R_{\alpha r}$  rezonantnog spektra ubrzanja masa za odgovarajući JS.

### 3.3 Približno rješenje rezonantnog spektra odgovora

Interesantno je razmotriti odnos odgovora na prvu fluktuirajuću komponentu i odgovora na preostale harmonijske komponente.



Crtež 1. Ekstremi funkcije  $A(\xi, \alpha)$

Za period T za koji ne postoji rezonantno ponašanje, funkcija  $a_\alpha(\alpha, T)$  može se jednostavno dovoljno dobro aproksimirati prema [6] izrazom:

$$a_\alpha(\alpha, T) = a_{\alpha=1} \frac{1}{\alpha} \quad (12)$$

gdje  $a_{\alpha=1}$  predstavlja funkciju spektra ulaza za period jednog vala. Ukoliko izraz (12) uvrstimo u (11), funkcija spektra ubrzanja može se prikazati kao:

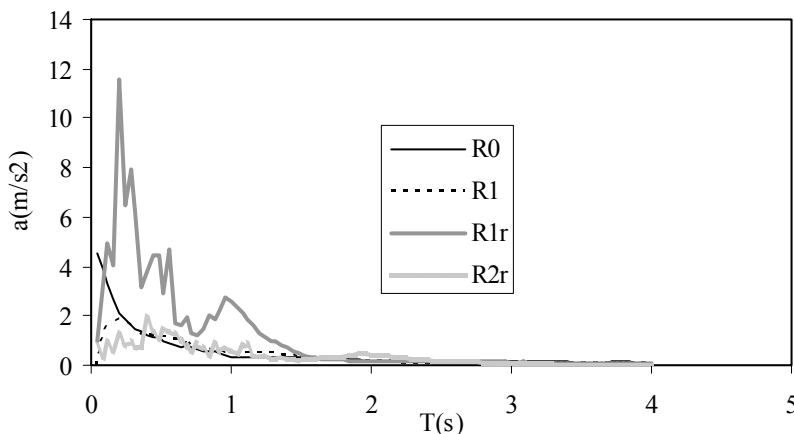
$$R_{\alpha r} = a_{\alpha=1} \frac{1}{\alpha} \left( 1 - e^{-\xi 2\pi\alpha} \right) / 2\xi \Big|_{max} = a_{\alpha=1} A(\xi, \alpha) \Big|_{max} \quad (13)$$

Funkcija  $A(\xi, \alpha)$  je dinamički faktor za danu harmonijsku komponentu. Na crtežu 1 prikazane su ekstremne vrijednosti funkcije  $A(\xi, \alpha)$  za različite vrijednosti koeficijenta prigušenja  $\xi$ . Prateći ekstremne vrijednosti dinamičkog faktora kao funkcije trajanja impulsa, za dani period T, može se uočiti da vrijednost dinamičkog faktora za niz poluperioda i perioda impulsa opada kao što je prikazano na crtežu 1. Najveća vrijednost dinamičkog faktora iznosi  $\pi$  i dobiva se za  $\alpha=0$ , neovisno o vrijednosti prigušenja  $\xi$ .

## 4 PRIMJERI

### 4.1 Potres Santa Cruz, Capitol Fire Station, 1989.

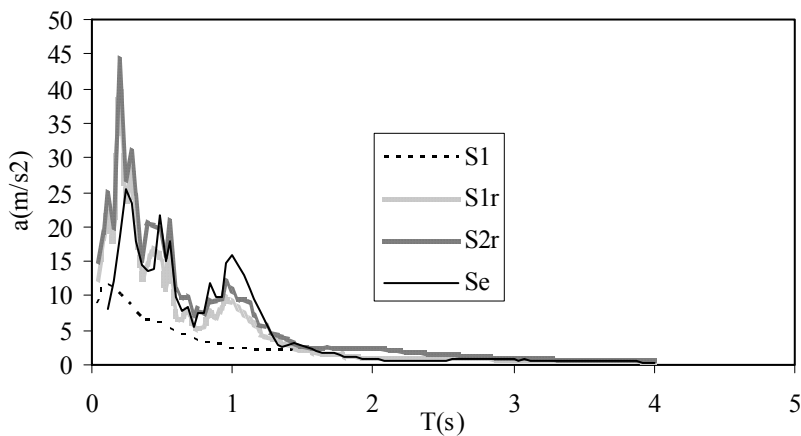
Akcelelogram potresa Santa Cruz, Capitol Fire Station, October 17th 1989, SN komponenta [7], analiziran je kratkotrajno-kratkovalnom Fourierovom transformacijom. Na crtežu 2 prikazan je odgovor JS na stalnu komponentu ubrzanja R0, na prvu fluktuirajuću komponentu R1 te prvu i drugu fluktuirajuću komponentu s najvećim vrijednostima odgovora R1r i R2r. Iz primjene analize slijedi da su vrijednosti stalne i prve fluktuirajuće komponente ubrzanja približno jednake, osim za vrlo niske periode. Ordinate rezonantnog spektra odgovora za pojedinu fluktuirajuću komponentu s najvećim vrijednostima odgovora su znatno više.



Crtež 2. Spektar odgovora na ubrzanje potresa Santa Cruz

Ukupan spektar odgovora sastoji se od stalne i svih fluktuirajućih komponenti. Ako pretpostavimo da sve komponente imaju ekstrem u istom vremenskom trenutku dobiveni spektar odgovora JS na ubrzanje podloge predstavlja anvelopu utjecaja stalne i svih fluktuirajućih komponenti ograničenih s gornje strane.

Crtež 3 prikazuje klasični elastični spektar ubrzanja  $S_e$  [8], spektar ubrzanja  $S_1$  dobiven linearnom kombinacijom stalne i prve fluktuirajuće komponente pomnožene s dinamičkim faktorima, spektri ubrzanja  $S_{1r}$  i  $S_{2r}$  dobiveni kao linearna kombinacija stalne te prve i druge fluktuirajuće komponente koje su pomnožene s dinamičkim faktorom. Provedena analiza pokazuje da stalna te prva i druga rezonantna fluktuirajuća komponenta čine osnovni dio elastičnog akcelelograma za JS.



Crtež 3. Ukupni odgovor na ubrzanje potresa Santa Cruz

## 5 ZAKLJUČAK

Kratkotrajno-kratkovalna transformacija razlučuje funkciju ubrzanja na pravilne harmonijske valove različitih perioda i daje intenzitet svakog vala u akcelelogramu. Funkcija ubrzanja raščlanjena je na stalnu i fluktuirajuću komponentu. Stalna komponenta je izlučena iz akcelelograma kratkotrajno-kratkovalnom transformacijom pravokutnog tipa. Fluktuirajuća komponenta izlučena je iz akcelelograma kratkotrajno-kratkovalnom transformacijom harmonijskog tipa.

Stalna komponenta ima znatan intenzitet posebno za niske periode. Intenzitet stalne komponente i prve fluktuirajuće komponente ubrzanja je približno jednak onim za vrlo niske periode.

Rezonantni spektar ubrzanja prikazuje jednako ponašanje kao i klasični elastični spektar ubrzanja, ali s nekim specifičnostima ovisno o broju upotrijebljenih članova fluktuirajuće komponente.

Rezonantni spektar ubrzanja dobiven kombinacijom stalne i dvije rezonantne fluktuirajuće komponente čini glavni dio klasičnog elastičnog spektra ubrzanja te se u potresnoj analizi konstrukcija može koristiti umjesto klasičnog elastičnog spektra.

## Literatura:

- [1] Newland, D.E., "Random vibrations, spectral and wavelet analysis", Long-man Scientific and Technical, Harlow, Essex, England; and Wiley, New York, 1993.
- [2] Basu, B. and Gupta, V. K., "Seismic response of SDOF systems by wavelet modelling of non-stationary processes", ASCE J. of Engineering Mechanics, 124(10), 1998, str. 1142-1150.
- [3] Rezai, M. and Ventura, C.E., "Analysis of strong and weak ground motions recorded at two sites during Loma Prieta earthquake by wavelet transform", Canadian J. of Civil Engineering, Vol. 29, 2002, str. 157-170.
- [4] Zandieh, A. and Vaezi, R., "Analysis of earthquake ground motion records at liquefied sites using wavelet transform", COMPDYN 2007 - ECCOMAS, Eds. Papadrakakis, M., Charmpis, D. C., and Lagaros, N. D. Rethymno, Crete, Greece, 2007.
- [5] Gurley K. and Kareem A., "Applications of Wavelet Transforms in Earthquake, Wind and Ocean Engineering", Engineering Structures, No. 21, 1999, str. 149-167.
- [6] Mihanović, A., Nikolić, Ž., Živaljić, N., "Resonant spectrum analysis of seismic loading of structures", COMPDYN 2007 - ECCOMAS, Eds. Papadrakakis, M., Charmpis, D. C., and Lagaros, N. D., Rethymno, Crete, Greece, 2007.
- [7] <http://training.fema.gov/EMIWeb-EMI Nonlinear Dynamics Time History Analysis>.
- [8] Newmark, N.M., Rosenblueth, E., "Fundamentals of Earthquake Engineering", Prentice Hall, 1971.

## Autori:

prof. dr. sc. **Željana Nikolić**, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, 21000 Split, Hrvatska, tel. (021) 303-332, fax. (021) 465 117, e-mail: [zeljana.nikolic@gradst.hr](mailto:zeljana.nikolic@gradst.hr),

prof. dr. sc. **Ante Mihanović**, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, 21000 Split, Hrvatska, tel. (021) 303-357, fax. (021) 465 117, e-mail: [ante.mihanovic@gradst.hr](mailto:ante.mihanovic@gradst.hr),

mr. sc. **Nikolina Živaljić**, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Katedra za teoriju konstrukcija, Matice hrvatske 15, 21000 Split, Hrvatska, tel. (021) 303-323, fax. (021) 465 117, e-mail: [nikolina.zivaljic@gradst.hr](mailto:nikolina.zivaljic@gradst.hr)

## EKSPERIMENTALNA POTVRDA IZRAČUNA LOKALNIH VIBRACIJA NA ČELIČNOM BRODU

Skoblar, A., Žigulić, R. & Maratović, M.

**Sažetak:** Izračun lokalnih vibracija na čeličnom brodu za prijevoz automobila i putnika, gradnja 10552 "Brodogradilište Kraljevica" d.d., na krovu palubne kućice R.46-R.52 i stijenama ispod, u prostoru nastambe posade broda izvršen je pomoću izraza iz pravila Rules for the construction and clasification of steel ships, Det Norske Veritas [1] te pomoću metode konačnih elemenata. Rezultati su uspoređeni s mjerenjima na istoj i sestrijskoj gradnji te su doneseni zaključci.

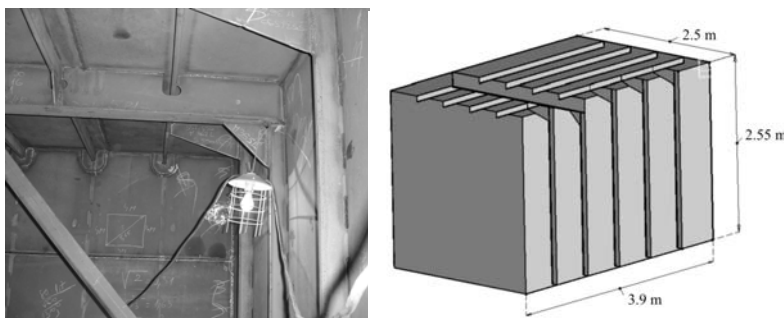
**Ključne riječi:** vlastite frekvencije, rubni uvjeti, mjerenja.

### 1 UVOD

Cilj ovog rada je usporediti rezultate izračuna vlastitih frekvencija panela palube i pregrade u nadgrađu broda po navedenim pravilima sa rezultatima modela konačnih elemenata i mjerenjima, zbog mogućih razlika koje najčešće nastaju pri nepravilnom definiranju rubnih uvjeta. Pod panelom se smatra čelična ploča pojačana s ukrepama.

### 2 PANELI SA UKREPAMA U JEDNOM SMJERU

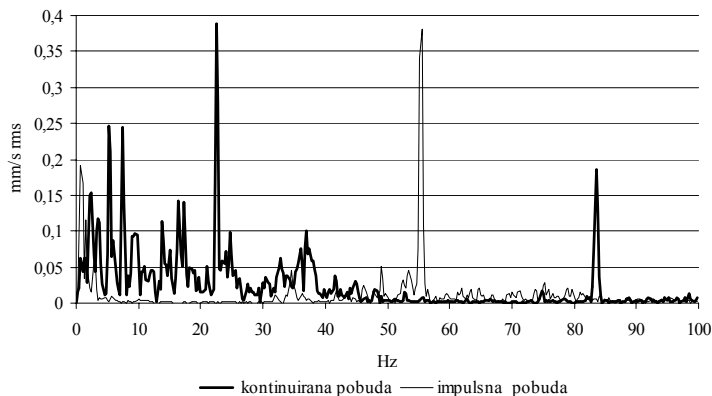
Izračun prve vlastite frekvencije za panel sa ukrepama u jednom smjeru izvršiti će se za vertikalni panel sa pet jednoliko raspoređenih vertikalnih ukrepa koji je bočna stjenka prostorije nastambe posade broda (Slika 1.).



Sl. 1. Fotografija i model referentnih panela sa broda

Po pravilima paneli moraju imati prvu vlastitu frekvenciju minimalno 10% višu od najviše naglašene pobuđujuće frekvencije. Brod je pogonjen s dva četverotaktna šest-cilindarska motora Volvo Penta D16 MH koji spadaju pod potpuno uravnotežene motore [2] pa ne mogu biti uzrok naglašanih frekvencija pobude pa iz mjerenja FFT frekventnog spektra pri kontinuiranoj pobudi (tzv. jedna milja na probnoj vožnji) (Slika 2.) u kojem je najviša naglašena frekvencija 22.5 Hz i činjenice da Voith-Schnaider-ov

propeler ima pet krila slijedi da je frekvencija osovine jednaka 4.5 Hz (= 22.5/5) i da prva vlastita frekvencija stijenke broda mora biti viša od referentne veličine pobudne frekvencije  $F = 22.75 \text{ Hz} (= 1.1 \cdot 22.5)$ .

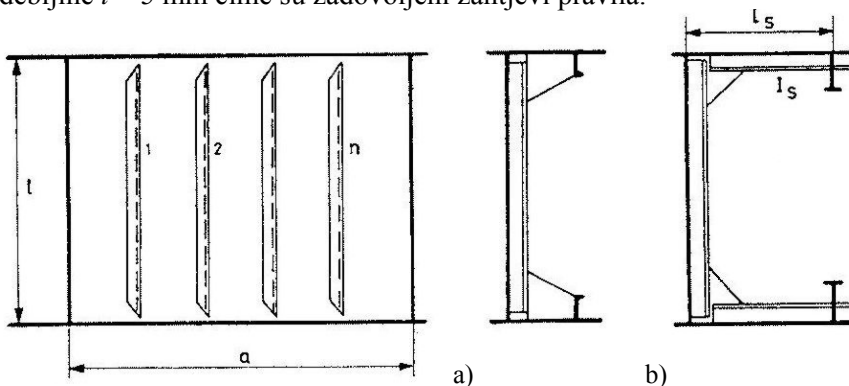


Sl. 2. Usporedni prikaz dijagrama mjerenja FFT frekventnog spektra odziva pri vožnji broda (kontinuirana pobuda) te na navozu (impulsna pobuda) za vertikalni panel

Minimalna debljina ploče panela koji vibrira u zraku i ima ukrepe u jednom smjeru izračunava se po izrazu iz pravila:

$$t = \frac{s_x^2 F}{2.4 \left[ 1 + \left( \frac{s_x}{l} \right)^2 \right]}, \quad \text{mm} \quad (1)$$

gdje je za zadani panel  $s_x = 0.65 \text{ m}$  udaljenost između ukrepa i  $l = 2.55 \text{ m}$  visina panela iz čega slijedi minimalna debljina ploče panela 4.1 mm. Na brodu se koristi ploča panela debljine  $t = 5 \text{ mm}$  čime su zadovoljeni zahtjevi pravila.



Sl. 3. Skica ukleštenih rubnih uvjeta iz pravila

Tip ukrepe se odabire na temelju minimalnog potrebnog ekvivalentnog momenta inercije poprečnog presjeka ukrepe koji se izračunava po izrazu iz pravila:

$$I = \frac{10ta + An + c_2 a^2 k_3}{k_1 n} k_2 l^4 \left( \frac{F}{25} \right)^2 10^{-2}, \quad \text{cm}^4 \quad (2)$$

gdje je za zadani panel pregrade  $a = 3.9$  m širina panela,  $A = 7$  cm<sup>2</sup> površina poprečnog presjeka ukrepe,  $n = 5$  broj vertikalnih ukrepa,  $c_2 = 0$  koeficijent pri vibriranju panela u zraku ( $k_3$  u ovom slučaju nema utjecaja),  $k_1 = 1,0$  koeficijent za simetrično raspoređene ukrepe (za nesimetrične ukrepe  $k_1 = 0.85$ ) i  $k_2 = 5$  koeficijent koji slijedi iz rubnih uvjeta ploče (uklještenje na gornjem rubu panela te jednostavno oslonjeni ostali rubovi, Slike 1. i 3a.). U pravilima koeficijent  $k_2$  ima vrijednosti od 3.5 do 9.5 iz čega se vidi veliki utjecaj rubnih uvjeta na veličinu izračunatog potrebnog ekvivalentnog (uključuje i dio ploče) moment inercije poprečnog presjeka. Dobivena je vrijednost  $I = 95,3$  cm<sup>4</sup>.

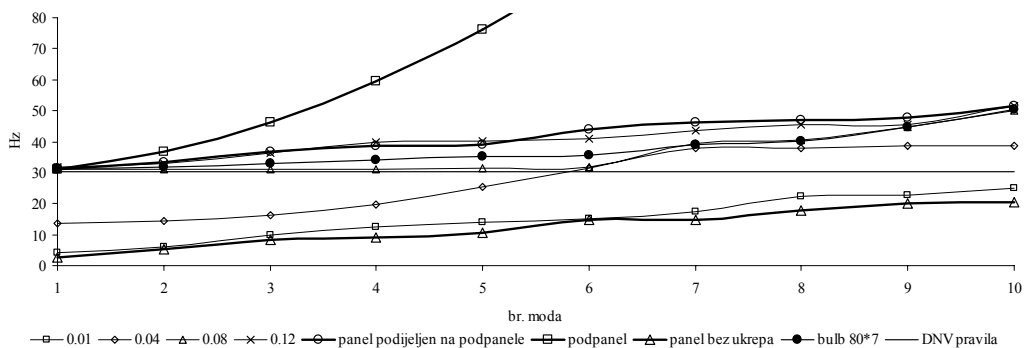
Na temelju veličine poprečnog presjeka ukrepe i potrebnog momenta inercije odabire se odgovarajući profil, u ovom slučaju bulb, te se izračunava ekvivalentni moment inercije po pravilima (efektivna širina ploče u ovom slučaju je  $s_{ef} = 0.465$  m). Dobivena je veličina 175 cm<sup>4</sup> za upotrebljeni profil bulba 80\*7 mm što zadovoljava pravila.

Prva vlastita frekvencija izračunava se po izrazu iz pravila:

$$f = 2.4 \frac{t}{s_x^2} \left[ 1 + \left( \frac{s_x}{l} \right)^2 \right], \text{ Hz} \quad (3)$$

te je izračunata frekvencija  $f_p = 30.2$  Hz (indeks P - pravila) koja je veća od referentne veličine pobudne frekvencije  $F$  čime je završena provjera dimenzioniranja panela po pravilima.

Slijedi analiza veze prve vlastite frekvencije panela o zadanim rubnim uvjetima i dimenzijama panela pomoću metode konačnih elemenata za što su korišteni računalni programi MSC. Patran i Nastran. Ploča panela je modelirana sa plošnim ljuskastim pravokutnim konačnim elementima linearnih funkcija oblika i četiri čvora dok su ukrepe panela modelirane s grednim konačnim elementima linearnih funkcija oblika i dva čvora. Odabrana je diskretizacija na temelju konvergencije rezultata prvih deset vlastitih frekvencija jednostavno oslonjene ploče. Karakteristike čelika u modelu jesu modul elastičnosti  $E = 2.1 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, gustoća  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup> i Poisson-ov koeficijent  $\mu = 0.3$ .



Sl. 4. Dijagram utjecaja rasta momenta inercije poprečnog presjeka ukrepa na vlastite frekvencije panela dimenzija 3.9\*2.55\*0.005 m, uklještenog na gornjem rubu te jednostavno oslonjenog po ostalim rubovima sa pet jednoliko raspoređenih ukrepa: a) trake širine 0.007 m s navedenim visinama u metrima i b) ukrepa bulb 80\*7 mm [3], vlastitih frekvencija: a) jednostavno oslonjenog panela po rubovima i po osima ukrepa, b) jednostavno oslonjenog podpanela 0.65\*2.55\*0.005, c) jednostavno oslonjenog panela bez ukrepa i vlastite frekvencije po pravilima.

Iz dijagrama na slici 4. vidi se da vlastite frekvencije panela sa ukrepama teže ka vlastitim frekvencijama jednostavno oslonjenog panela pri rastu ukrućenja.

Izrazi (1) i (3) nastali su uvrstivši karakteristike čelika u izraz za vlastite frekvencije jednostavno oslonjene ploče po Rayleigh-Ritz metodi [2] iz čega se vidi zahtjev pravila da se panel dovoljno ukruti kako bi se on približno ponašao kao jednostavno oslonjeni panel.

Prva vlastita frekvencija za panel ugrađen na brod po metodi konačnih elemenata ima veličinu  $f_{MKE} = 31.6$  Hz (Slika 4., indeks MKE - metoda konačnih elemenata) dok su njezine izmjerene vrijednosti na šest podpanela u području  $f_M = 32-34$  Hz (na dijagramu na Slici 1.  $f_M = 32$  Hz, indeks M - mjerenje) čime je potvrđena točnost izračuna po pravilu za navedeni primjer sa broda.

### 3 PANELI S UKREPAMA U DVA SMJERA

Ukrepe u dva smjera (uzdužni i poprečni) ugrađuju se ukoliko je za ukrućivanje panela potrebno upotrijebiti nestandardno dimenzionirane ukrepe u jednom smjeru. Kao primjer navedenog slučaja odabran je horizontalni panel palube (Slika 1.) za kojeg će se u prvom dijelu ovog odlomka provjeriti da li četiri jednoliko raspoređene uzdužne odabrane ukrepe u jednom smjeru zadovoljavaju pravilo.

Minimalna debljina ploče panela koji vibrira u zraku i ima ukrepe u jednom smjeru izračunava se po izrazu (1) te za zadane veličine  $s_x = 0.5$  m i  $l = 3.9$  m minimalna debljina panela iznosi 2.4 mm. Na brodu se koristi ploča debljine  $t_2 = 5.5$  mm čime su zadovoljeni zahtjevi pravila.

Tip ukrepe odabire se na temelju minimalnog potrebnog ekvivalentnog momenta inercije poprečnog presjeka ukrepe koji se izračunava po izrazu (2) iz pravila gdje je za zadani panel palube  $k_1 = 1.0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $A = 13.8$  cm<sup>2</sup>,  $a = 2.5$  m,  $n = 4$ ,  $l = 3.9$  m i  $k_2 = 8.4$  za zadani rubni uvjet (uklještenje sa gornje strane panela i jednostavno oslonjenim ostali rubovi (Slike 3b. i 1.).

Dobivena je vrijednost  $I_2 = 917.55$  cm<sup>4</sup>. Na temelju poprečnog presjeka ukrepe i potrebnog momenta inercije odabire se odgovarajući profil te se izračunava ekvivalentni moment inercije za odabrani profil po pravilima (efektivna širina ploče u ovom slučaju je  $s_{ef2} = 0.5$  m). Dobivena je veličina 924 cm<sup>4</sup> za bulb 140\*8 mm čime on po pravilima zadovoljava ali se bulbovi te veličine obično ne koriste u nadgrađu pa je potrebno ugraditi i poprečne ukrepe.

Slijedi izračun po pravilima za panel sa uzdužnim i poprečnim ukrepama po kojem se prva vlastita frekvencija izračunava iz izraza:

$$f = \frac{k_4}{l^2} \sqrt{\frac{1}{t_e} \left[ \left( \frac{l}{a} \right)^4 \frac{k_1 I_x m}{s_x (m+1)} + \frac{k_1 I_y n}{s_y (n+1)} + 200 \left( \frac{l}{a} \right)^2 I_{xy} \right]} \text{ Hz}, \quad (4)$$

gdje je  $k_4 = 25$  koeficijent koji ovisi o rubnim uvjetima panela te ima navedenu vrijednost kad je panel uklješten na dvije susjedne strane i jednostavno oslonjen na ostalim rubovima (za jednostavno oslonjeni panel  $k_4 = 40$ ),  $I_{xy}$  u cm<sup>4</sup> manja veličina od

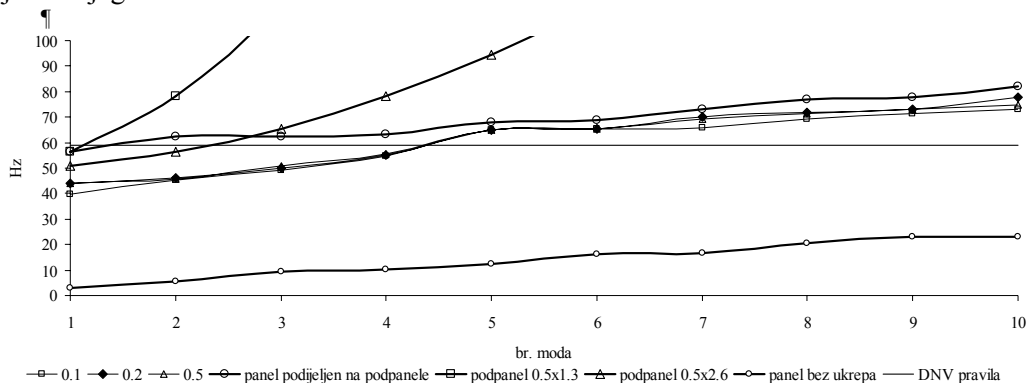
$\frac{k_1 I_x m}{100 s_x (m+1)}$  i  $\frac{k_1 I_y n}{100 s_y (n+1)}$ ,  $t_e = t + \frac{A_x m}{10 s_x (m+1)} + \frac{A_y n}{10 s_y (n+1)}$ , mm      efektivna debljina panela,  $s_y$  ( $s_x$ ) u m udaljenost između ukrepa postavljenih u y-smjeru ( $x$ -smjeru),  $A_x$  ( $A_y$ ) u cm<sup>2</sup> površina poprečnog presjeka jedne ukrepe postavljene u  $x$ -

smjeru ( $y$ -smjeru),  $m$  ( $n$ ) broj ukrepa u  $x$ -smjeru ( $y$ -smjeru) između oslonaca,  $I_x$  ( $I_y$ ) u  $\text{cm}^4$  efektivni moment inercije površine jedne ukrepe koja gleda u  $x$ -smjeru ( $y$ -smjeru), i  $k_1 = 0,85$  koeficijent za nesimetrično raspoređene ukrepe (za simetrične ukrepe  $k_1 = 1$ ).

Na brodu je za uzdužnu ukrepu odabran bulb  $80 \times 6$  mm [3] sa ekvivalentnim momentom inercije  $169 \text{ cm}^4$  po pravilima te slijedi provjera dobivene prve vlastite frekvencije vibriranja panela palube sa ugrađenom jednom poprečnom T ukrepom debljine stijenki  $0.01 \text{ m}$ , visine vrata  $0.2 \text{ m}$  i širine lica  $0.1 \text{ m}$ .

Izračunata je prva vlastita frekvencija  $f_{p2} = 59.1 \text{ Hz}$  koja je veća od referentne pobudne frekvencije  $F$  čime je završena provjera dimenzioniranja panela po pravilima.

Analiza veze prve vlastite frekvencije panela sa ukrepama u dva smjera o zadanim rubnim uvjetima i dimenzijama panela pomoću metode konačnih elemenata prikazana je na dijagramu na Sl. 5.

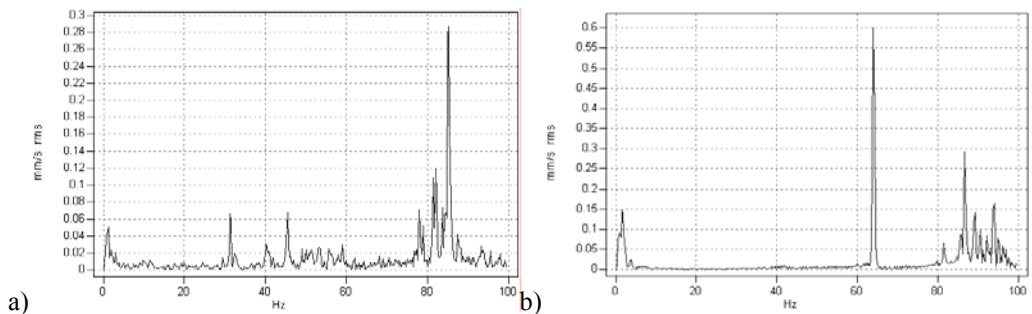


Sl. 5. Dijagram utjecaja rasta momenta inercije poprečnog presjeka T ukrepe na vlastite frekvencije panela dimenzija  $2.5 \times 3.9 \times 0.0055 \text{ m}$ , uklještenog na gornjem i jednom bočnom rubu te jednostavno oslonjenog po ostalim rubovima sa četiri jednoliko raspoređene uzdužne ukrepe bulb  $80 \times 6$  [3] i jedan poprečni T profil web trake širine  $0.01 \text{ m}$  i navedenih visina u metrima, vlastitih frekvencija: a) jednostavno oslonjenog panela po rubovima i osima ukrepa, b) jednostavno oslonjenog podpanela  $0.5 \times 1.3 \times 0.0055$ , c) jednostavno oslonjenog podpanela  $0.5 \times 2.6 \times 0.0055$ , d) jednostavno oslonjenog panela bez ukrepa i vlastite frekvencije po pravilima.

Iz dijagrama na slici 5. vidi se da vlastite frekvencije panela sa ukrepama teže ka vlastitim frekvencijama jednostavno oslonjenog panela pri rastu ukrućenja ali i da su uzdužne ukrepe na brodu (bulb  $80 \times 6$  [3]) premekane da bi se dostigla frekvencija jednostavno oslonjenog panela po rubu i po osima ukrepa sa povećanjem momenta inercije jedne poprečne T ukrepe.

Prva vlastita frekvencija cijelog panela proračunata pomoću metode konačnih elemenata jednak je  $f_{MKE2} = 43,8 \text{ Hz}$  dok su njezine izmjerene vrijednosti za panel  $2.5 \times 2.6 \text{ m}$   $f_{M2(2.5 \times 2.6)} = 31 \text{ Hz}$  (Slika 6b.) i za panel  $2.5 \times 1.3 \text{ m}$   $f_{M2(2.5 \times 1.3)} = 64 \text{ Hz}$  (Sl. 6a.).

Očita je razlika između proračunatih i izmjerenih veličina koja slijedi iz činjenice da su prve vlastite frekvencije panela mjerene s impulsnom pobudom čija energija nije dovoljno velika da pobudi T ukrepu pa se ona ponaša približno kao jednostavni oslonac. Izračun prvih vlastitih frekvencija za nova dva panela pomoću metode konačnih elemenata daje nove rezultate  $f_{MKE21(2.5 \times 2.6)} = 38.8 \text{ Hz}$  i  $f_{MKE22(2.5 \times 1.3)} = 63.5 \text{ Hz}$ .



Sl. 6. Izmjereni FFT frekventni spektar odziva panela palube a) 2.5\*2.6 m i b) 2.5\*1.3 m na impulsnu pobudu

S obzirom da je nova izračunata veličina  $f_{MKE21(2.5*2.6)}$  i dalje prilično viša od  $f_{M2(2.5*2.6)}$  slijedi da je gornji rubni uvjet panela 2.5\*2.6 (Slika 3b.) manje krut od bočnog rubnog uvjeta panela (Sl. 3a.). Nova izračunata veličina  $f_{MKE22(2.5*1.3)}$  približno je jednaka  $f_{M2(2.5*1.3)}$  iz čega slijedi da su rubni uvjeti za panel 2.3\*1.3 točno pretpostavljeni. Sve navedene vlastite frekvencije veće su od referentne frekvencije pobude  $F$  iz čega slijedi da je dimenzioniranje panela zadovoljavajuće ali je zabrinjavajuća činjenica da je izračunata vrijednost prve vlastite frekvencije na panelu 2.5\*3.9 pomoću MKE niža od izračunate vrijednosti po pravilima za 16 Hz što ukazuje na potrebu provjere izračunatih vrijednosti po pravilima pomoću mjerenja.

## 4 ZAKLJUČAK

Ukoliko je rubni uvjet dovoljno krut da spriječi pomake u x, y i z smjeru te rotaciju u y i z smjeru preostali rubni uvjet rotacije oko osi x ima krutost negdje između krutosti jednostavno oslonjenog i uklještenog oslonca što je temelj procijene zadanog rubnog uvjeta. U radu je eksperimentalno potvrđen izračun prve vlastite frekvencije panela po pravilima i pomoću metode konačnih elemenata.

### Literatura:

- [1] Det Norske Veritas, "Rules for the construction and classification of steel ships 1976", Chapter II: Sec. 8, D, Local Vibrations in Afterbody and Machinery spaces. Tentative rules, str.46., Sec. 9, A, Girders and girder systems, str. 50 i Appendix 2, Diagrams of section moduli and momennts of inertia, Grondahl / Son Trykkeri A.S., Oslo, 1976.
- [2] Den Hartog, J.P., "Vibracije u mašinstvu", prijevod s engleskog, Građevinska knjiga , Beograd, 1972.
- [3] Standardi Jadranbroda, Limovi i profili, Bulb profili, izvod iz Din 1019 1977-01, SB 5125, 1980-07.

### Autori:

**Ante Skoblar**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051 651 498, fax. 051 651 490, e-mail: [askoblar@riteh.hr](mailto:askoblar@riteh.hr), web str.: [www.riteh.hr/zav\\_katd\\_sluz/zav\\_teh\\_meh/katedre/din\\_stroj/pages/ante\\_eng.htm](http://www.riteh.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/ante_eng.htm)

**Roberto Žigulić**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, tel. 051 651 502, fax. 051 651 490 , e-mail: [zigulic@riteh.hr](mailto:zigulic@riteh.hr), web str: [www.riteh.hr/zav\\_katd\\_sluz/zav\\_teh\\_meh/katedre/din\\_stroj/pages/roberto\\_eng.htm](http://www.riteh.hr/zav_katd_sluz/zav_teh_meh/katedre/din_stroj/pages/roberto_eng.htm)

**Marin Maratović**, tel. 095 905 5101, e-mail: [marin.maratovic@gmail.com](mailto:marin.maratovic@gmail.com)

## NUMERIČKO MODELIRANJE VREMENSKI OVISNOG PONAŠANJA POLIETILENA

Skozrit, I. & Tonković, Z.

**Sažetak:** U radu je prikazan konstitutivni model za opisivanje ponašanja polietilena srednje gustoće koji spreže mehanizme elastoplastičnosti i puzanja. Eksperimentalno dobiveni parametri modela preuzeti su iz literature. Za integriranje vremenski ovisnih konstitutivnih relacija izveden je algoritam na razini točke integracije konačnog elementa te je implementiran u korisničku rutinu CREEP programskog paketa ABAQUS. Točnost i učinkovitost izvedenog algoritma provjerena je usporedbom s eksperimentalnim rezultatima iz literature.

**Ključne riječi:** polietilen, puzanje, metoda konačnih elemenata,  $C$ -integral

### 1 UVOD

Povećana primjena polimernih materijala, posebno polietilena kao konstrukcijskog materijala zahtijeva nove metode za procjenu nosivosti komponenata izrađenih iz ovih materijala. Primjena polietilena srednje gustoće za izradu cijevi za distribuciju vode i plina jedan je od uobičajenih primjera. Točno modeliranje lomnog i viskoelastičnog ponašanja polietilena osnova je za procjenu cjelovitosti spomenutih konstrukcijskih elemenata kao i za proces njihovog projektiranja i optimiranja [2, 3].

Budući da su cijevi izrađene iz polietilena najčešće opterećene na puzanje, prikazani rad odnosi se na numeričko modeliranje mehanizma puzanja i loma pri sporom širenju pukotine. Numerički algoritmi za analizu pukotina u metalnim materijalima u novijoj literaturi primjenjuju se za modeliranje pukotina u polimerima. Pri tome se jednadžba za računanje  $J$ -integrala može koristiti za računanje  $C$ -integrala, ako deformaciju zamijenimo s brzinom deformacije [1, 5, 6, 7]. U radu je dan prikaz istraživanja koja se vrše u cilju razvoja novog algoritma za izračunavanje parametara mehanike loma i modeliranja mehanizama puzanja u polietilenu srednje gustoće primjenom realnog materijalnog modela.

### 2 KONSTITUTIVNI MODEL MATERIJALA

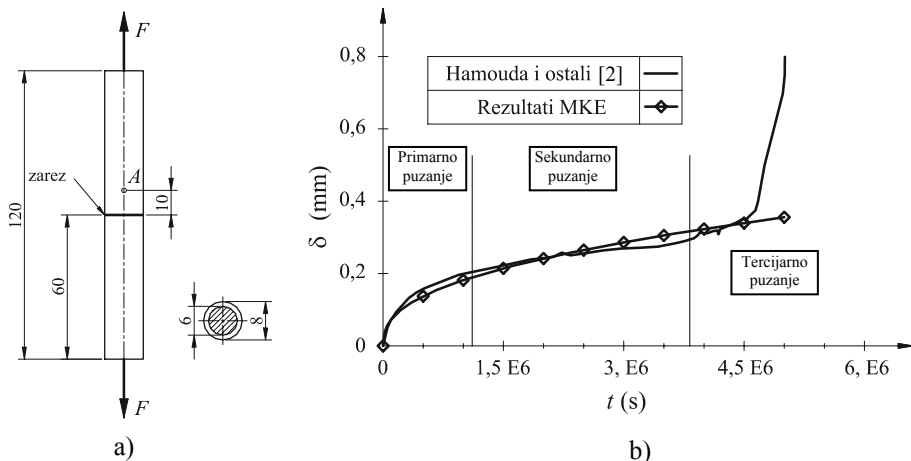
Nelinearno, vremenski ovisno i lomno ponašanje polietilena srednje gustoće eksperimentalno je istražio Ben Hadj Hamouda i ostali autori u radovima [2, 3]. Karakteristike analiziranog polietilena dane su u tablici 1. Pokusi puzanja provedeni su na vlačno opterećenoj osnosimetričnoj epruveti duljine 120 mm i promjera 8 mm s potpunim obodnim zarezom (*full notched crack tensile (FNCT) specimen*) čija je geometrija prikazana na slici 1a. Epruvete su izrezivane iz debelih cijevi za distribuciju plina debljine stjenke 10 i 20 mm paralelno sa smjerom ekstruzije. Na epruveti je napravljen zarez dubine 1 mm i radijusa oko 10  $\mu\text{m}$ . Epruveta je najprije opterećivana vlačnom silom do iznosa koji odgovara naprezanju u najmanjem presjeku  $\sigma_{\text{net}}$  od 8

MPa. Pri tome se naprezanje u najmanjem presjeku epruvete  $\sigma_{\text{net}}$  dobije na način da se opterećenje podijeli s početnom minimalnom površinom poprečnog presjeka (slika 1a). Nakon toga opterećenje je držano konstantno te su mjerene deformacije uslijed puzanja materijala epruvete. Eksperiment je proveden na temperaturi od 60°C.

Tablica 1. Karakteristike polietilena srednje gustoće [2, 3]

Comonomer	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	MI (g/10 min)	$M_n$	$M_w$	$M_z$	$X_C$ (%)	$T_m$ (°C)	SCB/1000C
Buten	0.949	0.7	23,100	1,51,300	6,40,000	58	127	7.4

Dijagram ovisnosti pomaka  $\delta$  točke A (slika 1a) uslijed puzanja polietilena o vremenu  $t$  prikazan je na slici 1b. Na dijagramu se razlikuju tri područja koja karakteriziraju primarno, sekundarno i tercijarno puzanje materijala. U primarnom području promjena pomaka točke A s vremenom kontinuirano opada. Za vrijeme sekundarnog puzanja promjena pomaka s vremenom je konstantna što odgovara stacionarnom puzanju, dok u trećem zadnjem području (tercijarno puzanje) pukotina propagira kroz preostali ligament epruvete sve do potpunog loma.



Sl. 1. Pokus puzanja: a) osnosimetrična epruveta s potpunim obodnim zarezom (*full notched crack tensile* (FNCT) *specimen*), b) dijagram međusobne ovisnosti pomaka točke A uslijed puzanja materijala i vremena pri 60°C i za  $\sigma_{\text{net}} = 8$  MPa [2, 3]

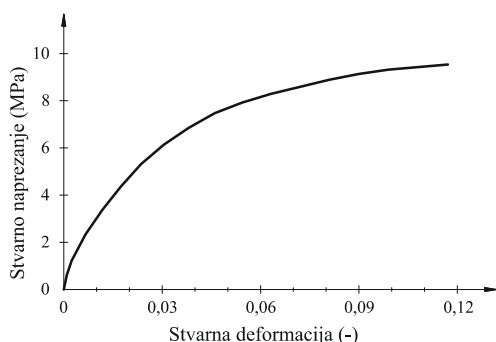
Na osnovi prikazanih eksperimentalnih rezultata, predložen je primarno-sekundarni zakon puzanja kako slijedi:

$$\dot{\varepsilon}_c = B_1 \cdot p \cdot t^{(p-1)} \cdot \sigma^{n_1} + B_2 \cdot \sigma^{n_2}, \quad (1)$$

gdje su  $\sigma$  i  $\varepsilon_c$  ekvivalentno Von Misesovo naprezanje i deformacija puzanja. Parametri materijala u jednadžbi (1) dobiveni aproksimacijom krivulje sa slike 1b iznose:  $B_1 = 5,73 \cdot 10^{-9}$ ,  $B_2 = 1,13 \cdot 10^{-12}$ ,  $p = 0,41$ ,  $n_1 = 5,81$  i  $n_2 = 6,1$ . U jednadžbi (1) točka iznad fizikalne veličine označava derivaciju po vremenu  $t$ . Prvi dio na desnoj

strani jednadžbe (1) predstavlja primarno puzanje, a drugi dio je sekundarni dio deformacije puzanja.

Slika 2 prikazuje nelinearno elasto-plastično ponašanje razmatranog polietilena u obliku krivulje stvarno naprežanje-deformacija. Vrijednosti su dane do 11% deformacije. Vrijednosti stvarnih naprežanja i deformacija primjenjenih u numeričkoj analizi prikazane su tablici 2. Budući da je provedena analiza velikih deformacija, nakon navedene vrijednosti deformacije pretpostavljeno je idealno plastično ponašanje polietilena.



Sl. 2. Krivulja stvarno naprežanje-deformacija [2, 3]

Tablica 2. Vrijednosti stvarnih naprežanja i deformacija

Stvarna deformacija $\varepsilon_t$ (-)	Stvarno naprežanje $\sigma_t$ (MPa)	Stvarna deformacija $\varepsilon_t$ (-)	Stvarno naprežanje $\sigma_t$ (MPa)
0.00000	0.59	0.01595	5.38
0.00063	1.25	0.02666	6.73
0.00235	2.03	0.03349	7.37
0.00491	2.92	0.04506	8.05
0.00725	3.52	0.06392	8.77
0.00921	4.00	0.07856	9.19
0.01202	4.60	0.10283	9.54

### 3 NUMERIČKO MODELIRANJE MEHANIZMA PUZANJA

Glavna namjera istraživanja je razvoj efikasnog algoritma za izračunavanje parametara mehanike loma i modeliranje mehanizama puzanja u polietilenu primjenom opisanog materijalnog modela. Za eksponencijalni zakon puzanja, što je slučaj kod metala, ABAQUS/Standard [4] sadrži ugrađenu rutinu za računanje  $C$ -integrala. No, za prikazani primarno-sekundarni zakon puzanja za polietilen opisan jednadžbom (1), izračunavanje  $C$ -integrala zahtijeva primjenu korisničke rutine CREEP.

Za numeričku formulaciju konstitutivnog modela, prikazane vremenski ovisne jednadžbe potrebno je zapisati u inkrementalnom obliku. Za poznate vrijednosti unutarnjih varijabli stanja sa kraja prethodnog vremenskog koraka  $t$  potrebno je

odrediti njihove vrijednosti u trenutku  $t + \Delta t$ . Za integriranje konstitutivnih jednadžbi primijenjena je implicitna integracijska metoda. U skladu s tim, inkrementalna forma zakona puzanja definiranog jednadžbom (1) ima oblik:

$$\varepsilon_{c,t+\Delta t} = \varepsilon_{c,t} + \Delta \varepsilon_c, \quad (2)$$

$$\Delta \varepsilon_c = B_1 \cdot \sigma^{n_1} \cdot \left[ t^{p_1} - (t - \Delta t)^{p_1} \right] \text{ za } t \leq t_{fp}, \quad (3)$$

$$\Delta \varepsilon_c = B_2 \cdot \sigma^{n_2} \cdot \Delta t \text{ za } t > t_{fp}, \quad (4)$$

gdje je vrijeme prijelaza između primarnog i sekundarnog puzanja  $t_{fp}$  dano izrazom:

$$t_{fp} = \left( \frac{B_2}{p_1 B_1} \right)^{\frac{1}{p_1-1}} \sigma^{\left( \frac{n_2-n_1}{p_1-1} \right)}. \quad (5)$$

Osim toga, za algoritam implicitne integracije konzistentni operator može se zapisati u obliku:

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon_c}{\partial \sigma} = \Delta \varepsilon_c \cdot \frac{n_1}{\sigma} \text{ za } t \leq t_{fp}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Delta \varepsilon_c}{\partial \sigma} = \Delta \varepsilon_c \cdot \frac{n_2}{\sigma} \text{ za } t > t_{fp}. \quad (7)$$

Prikazani algoritam implementiran je na nivou materijalne točke konačnih elemenata programskog paketa ABAQUS [4] primjenom korisničke rutine CREEP.

Za provjeru ispravnosti prikazanog algoritma provedena je simulacija puzanja na FNCT epruveti. Tipična mreža konačnih elemenata korištena u analizi prikazana je na slici 3a dok je usitnjena mreža u vrhu zaobljenog zarezeta dana na slici 3b. Koristeći simetriju, modelirana je samo četvrtina epruvete. Za diskretizaciju epruvete korišten je osam-čvorni osnosimetrični konačni element s reduciranom integracijom (CAX8R). Analiza velikih deformacija u paketu ABAQUS provedena je opcijom NLGEOM. Na model je prvo u trenutku  $t = 0$  dodijeljeno vlačno opterećenje primjenom nelinearno elasto-plastičnog modela (tablica 2). Pri tome  $\sigma_{net}$  iznosi 8 MPa. Opterećenje je nadalje držano konstantno te je provedena vremenski ovisna analiza puzanja. Dijagram međusobne ovisnosti pomaka točke A uslijed puzanja materijala i vremena u usporedbi s eksperimentalnim rezultatima [2, 3] dan je na slici 1b. Kao što je vidljivo sa slike dobivno je jako dobro poklapanje numeričkih i eksperimentalnih rezultata.

Što točnije opisivanje stanja naprezanja i deformacije u vrhu pukotine osnova je za efikasno određivanje  $C(t)$ -integrala koji je definiran kao linijski integral u obliku [5, 6]:

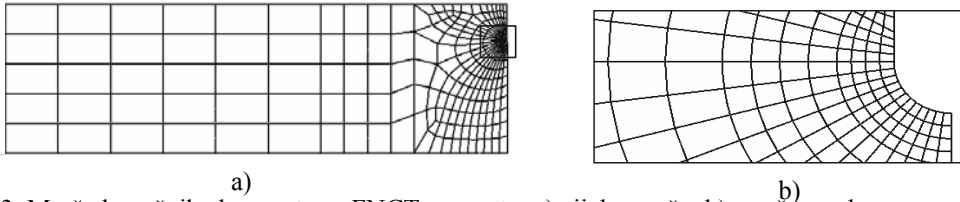
$$C(t) = \int_{\Gamma \rightarrow 0} \left[ W dy - T_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds \right], \quad (8)$$

gdje  $\Gamma \rightarrow 0$  označava da je integral potrebno računati vrlo blizu vrha pukotine tako da je brzina elastične deformacije mala u odnosu na brzinu deformacije puzanja. U jednadžbi (8),  $\dot{W}$  je brzina gustoće energije deformiranja koja je definirana kao:

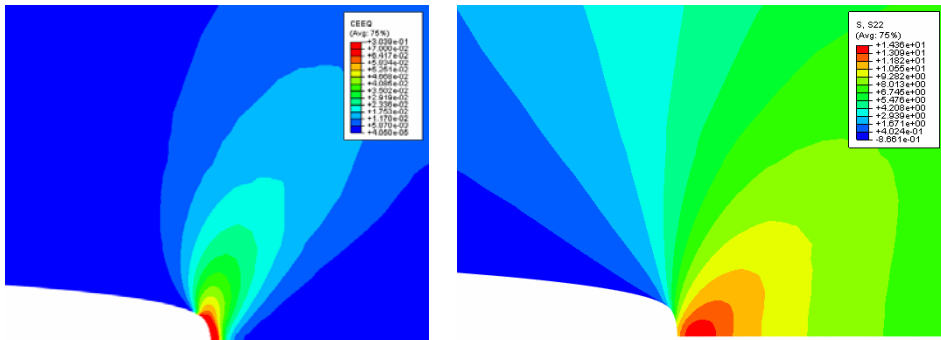
$$W = \int_0^{\varepsilon_c} \sigma d\varepsilon_c . \quad (9)$$

Nadalje, u jednađbi (8)  $u_i$  su komponente vektora pomaka.

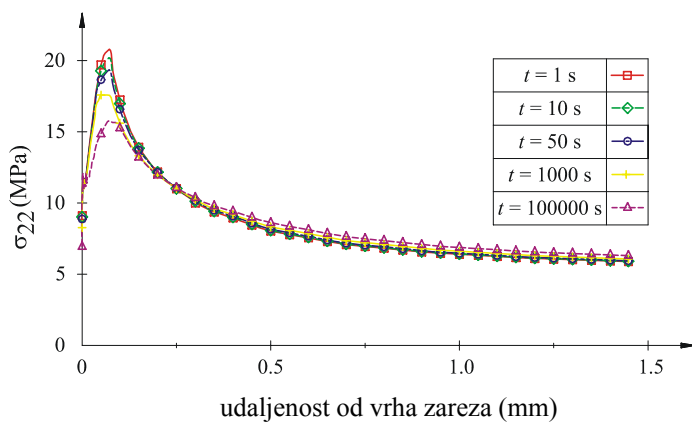
Na slici 4 dan je prikaz deformacija i napreznja u vrhu zareza nakon  $10^5$  s. Raspodjela ekvivalentne deformacije od puzanja prikazana je na slici 4a, a raspodjela maksimalnog glavnog napreznja  $\sigma_{22}$  dana je na slici 4b. Osim toga, na slici 5 prikazana je relaksacija maksimalnog glavnog napreznja  $\sigma_{22}$  u ovisnosti o udaljenosti od vrha zareza i vremenu.



Sl. 3. Mreža konačnih elemenata za FNCT epruvetu: a) cijela mreža; b) mreža u vrhu zareza.



Sl. 4. Prikaz raspodjele deformacija i napreznja u vrhu zareza nakon  $10^5$  s: a) ekvivalentna deformacija od puzanja b) napreznje  $\sigma_{22}$  (MPa)



Sl. 5. Relaksacija maksimalnog glavnog napreznja  $\sigma_{22}$  (MPa) u ovisnosti o udaljenosti od vrha zareza i vremenu

## 4 ZAKLJUČAK

U radu je dan prikaz istraživanja koja se vrše u cilju razvoja efikasnog algoritma za izračunavanje parametara mehanike loma i modeliranja mehanizama puzanja u polieteilenu srednje gustoće primjenom realnog materijalnog modela. Prikazan je konstitutivni model koji spreže mehanizme elastoplastičnosti i puzanja. Izveden je algoritam na razini točke integracije konačnog elementa za integriranje vremenski ovisnih konstitutivnih relacija te je implementiran u korisničku rutinu CREEP programskog paketa ABAQUS. Usporedbom s eksperimentalnim rezultatima iz literature provjerena je točnost izvedenog algoritma.

Na primjerima FNCT epruvete i cijevi opterećenim unutarnjim tlakom s vanjskom osnom pukotinom, daljnja istraživanja usmjerena su na izvođenju nove metode za procjenu C-integrala i kriterija plastičnog kolapsa [8].

### Literatura:

- [1] Ainsworth, R.A., "The assessment of defects in structures of strain hardening material", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 19, 1984, str. 633–642.
- [2] Hamouda, H.B.H., Laiarinandrasana, L., Piques, R., "Fracture mechanics global approach concepts applied to creep slow crack growth in a medium density polyethylene (MDPE)", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 74, 2007, str. 2187-2204.
- [3] Hamouda, H.B.H., Laiarinandrasana, L., Piques, R., "Viscoplastic behaviour of a medium density polyethylene (MDPE): Constitutive equations based on double nonlinear deformation model", International Journal of Plasticity, Vol. 23, 2007, str. 1307-1327.
- [4] Hibbitt, Karlsson & Serensen, Inc., ABAQUS/Standard. User's guide and theoretical manual, Version 6.7, 2007.
- [5] Kim, Y.-J., "Contour integral calculations for generalised creep laws within ABAQUS", International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 78, 2001, str. 661-666.
- [6] Kim, Y.-J., Kim, J.-S., Huh, N.-S., Kim, Y.-J., "Engineering C-integral estimates for generalised creep behaviour and finite element validation", International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 79, 2002, str. 427–443.
- [7] Skozrit, I., Tonković Z., "Fracture Analysis of Medium Density Polyethylene" In: Pantelakis S, editor. Proceedings of the 1st International Conference of Engineering Against Fracture [CD-ROM], 2008 Patras, Greece.
- [8] Tonković, Z., Skozrit, I., Alfirević I., "Influence of flow stress choice on the plastic collapse estimation of axially cracked steam generator tubes", Nuclear Engineering and Design, Vol. 238, 2008, str. 1762-1770.

### Autori:

**Ivica Skozrit**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 616 8115, fax. 01 616 8187, e-mail: [ivica.skozrit@fsb.hr](mailto:ivica.skozrit@fsb.hr), web stranica: [www.fsb.hr/lnm](http://www.fsb.hr/lnm)

**Zdenko Tonković**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, tel. 01 616 8450, fax. 01 616 8187, e-mail: [ztonkov@fsb.hr](mailto:ztonkov@fsb.hr), web stranica: [www.fsb.hr/lnm](http://www.fsb.hr/lnm)

## PRILAGODBA PARAMETARA MIKROMEHANIČKOG MODELA KRIVULJI RASTEZANJA TKANINE

Šomodi, Ž. & Hursa, A.

**Sažetak:** Mehaničko ponašanje tekstila odlikuje se nelinearnošću. Za potrebe simulacije nelinearnosti pri rastezanju tkanih i pletenih tekstilija, predlaže se jednostavan troparametarski mikromehanički model. Parametri tog modela vezani su za osnovne čimbenike deformiranja tekstila pri rastezanju: savitljivost i rastezljivost pređe te geometriju osnovne ćelije. Globalna nelinearnost izvodi se iz geometrijske nelinearnosti vezane za velike pomake pri deformiranju diskretizirane osnovne ćelije. Tangentna krutost izvodi se diferenciranjem jednadžbi ravnoteže i elastičnosti osnovne ćelije, a nelinearna vlačna karakteristika sila - produljenje dobiva se inkrementalnim postupkom. U radu se prikazuje postupak određivanja mikromehaničkih parametara s kojima će predloženi model što je moguće vjernije odgovarati stvarnoj snimljenoj krivulji rastezanja odabrane tkanine. Taj postupak započinje približnom ocjenom pojedinih parametara, nakon čega se fina prilagodba postiže prema načelu metode najmanjih kvadrata minimizacijom norme odstupanja između teorijske i snimljene krivulje u odabranim točkama.

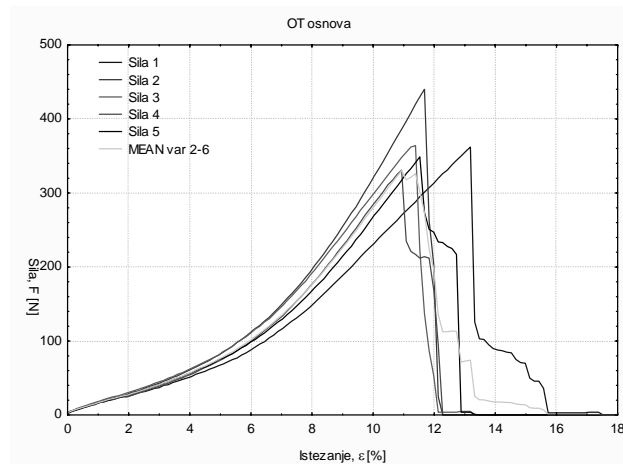
*Ključne riječi:* tekstil, rastezanje, nelinearno deformiranje, mikromehanički model

### 1 UVOD

Mehaničko ponašanje tekstilnih materijala složeno je i zahtjevno za opis i modeliranje. Tekstil se zbog izrazite savitljivosti lako izvija i gužva, može biti izrazito neizotropan, pod utjecajem vlastite težine zauzima ravnotežni položaj pri čemu dolazi do velikih pomaka i djelomičnog praćenja forme podloge ( problem tzv. pada tkanine), histerezo ponašanje pri rasterećenju ukazuje na efekte puzanja i plastičnosti, mehanička svojstva podložna su utjecajima vlage i topline itd. Već jednostavni vlačni pokus rezultira krivuljom sila – produljenje za čiji bi opis linearno elastični model predstavljao pretjerano pojednostavljenje.

Jasno je da će na mehanička svojstva tekstila utjecati geometrija njegove strukture te svojstva niti, odnosno pređe, iz koje je tekstil načinjen postupkom tkanja ili pletenja. Veza između geometrijske strukture i makromehaničkih svojstava predstavlja trajni izazov istraživačima u području mehanike tekstilnih materijala, kako u početnim istraživanjima u tom području [2,4] tako i u novije vrijeme [3,7].

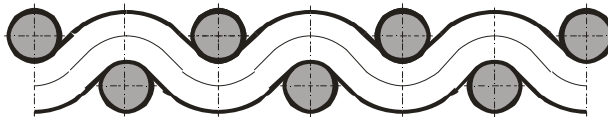
U našem radu [5] predlaže se jednostavni troparametarski model ponašanja tekstila pri rastezanju. Parametri tog modela vezani su za osnovna mehanička svojstva pređe te geometriju osnovne ćelije, a nelinearnost vlačnog deformiranja dobiva se kao posljedica utjecaja velikih pomaka u promjenama geometrije osnovne ćelije pri globalnom rastezanju. U ovom će radu uz kratki opis predloženog modela biti prikazan postupak njegove prilagodbe stvarnoj, snimljenoj vlačnoj karakteristici odabranog materijala. Kao primjer vlačne krivulje tkanine određene mjerenjem odabran je slučaj prikazan na slici 1 [1].



Sl. 1. Krivulje rastezanja tkanine

## 2 DEFINICIJA PROBLEMA

Nelinearni odziv kakav se susreće pri rastezanju tekstila, slika 1, možemo tumačiti na sljedeći način. U početnoj fazi opterećivanja dolazi prvo do stanovitog poravnavanja niti u pravcu djelovanja vlačne sile. Naime, u neopterećenom stanju nit osnove ili potke ima savijeni oblik kao što se vidi iz prikaza presjeka tkanine na slici 2.



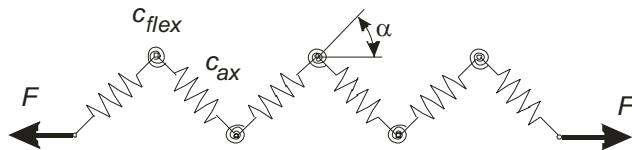
Sl. 2. Prikaz presjeka tkanine s početnim oblikom niti osnove ili potke

Dominantan utjecaj na globalno produljenje u toj početnoj fazi ravnjanja niti pređe ima dakle savitljivost niti, da bi kasnije, nakon što dođe do poravnanja, dominantan utjecaj preuzela sama njezina istezljivost. S obzirom da je otpornost niti pređe na savijanje malena, time se može tumačiti mala globalna vlačna krutost tkanine u početku opterećivanja. Veća strmina u vlačnoj karakteristici, koja nastupa nakon početnog poravnanja niti, odnosno nakon „koljena“ koje na slici 1 razabiremo oko šestpostotnog relativnog produljenja, potječe primarno od krutosti pređe na rastezanje.

U radu [5] predlaže se pojednostavljeni mikromehanički model u kojem se primjenom triju parametara opisuje utjecaj tri osnovna faktora na takvo nelinearno rastezanje tekstila: krutosti niti pređe na savijanje i rastezanje, te početne geometrije osnovne ćelije. Jednostavnost modela ogleda se u diskretizaciji svojstava savitljivosti i istezljivosti. Naime, kao što se savitljiva konstrukcija može pojednostavljeno prikazati kao sklop krutih elemenata povezanih u zglobovima s elastičnom vezom, tako se i opisana situacija rastezanja niti na slici 2 može približno predstaviti kao rastezanje niza kratkih elastičnih štapova, odnosno vlačnih elemenata ili opruga, međusobno povezanih u zglobovima pomoću zakretnih opruga stanovite krutosti, koja predstavlja krutost niti na savijanje. Vidi sliku 3.

Na slici 3 razabiru se osnovni parametri modela o kojem je riječ: krutost niti u osnovnoj ćeliji na rastezanje, odnosno aksijalna krutost  $c_{ax}$ , zatim krutost niti u

osnovnoj ćeliji na savijanje, predstavljena kao krutost zakretne opruge u zglobu  $c_{flex}$ , te kut nagiba niti u osnovnoj ćeliji prema pravcu globalnog rastezanja – u početnom nedeformiranom stanju, tj. pri  $F=0$ , taj kut označimo s  $\alpha_0$ .

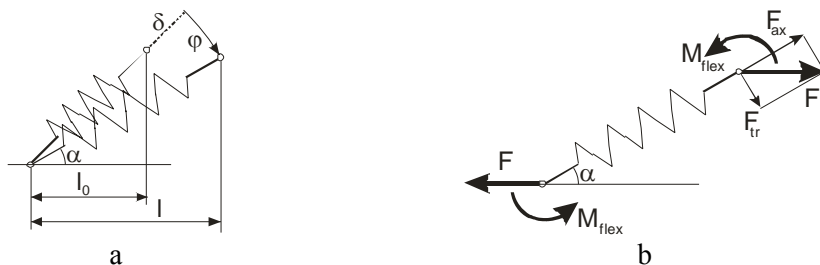


Sl. 3. Diskretizirani model rastezanja niti osnove ili potke u tkanini

Za opisani model potrebno je dakle izvesti zakon nelinearnog globalnog rastezanja, uzimajući u obzir promjenu kuta osnovne ćelije  $\alpha$  pri deformiranju. Nadalje treba razviti postupak kojim se osigurava prilagodba mikromehaničkih parametara  $c_{ax}$ ,  $c_{flex}$  i  $\alpha_0$  zadanoj stvarnoj, snimljenoj krivulji rastezanja tako da teorijska nelinearna karakteristika od nje odstupa što je moguće manje.

### 3 JEDNADŽBE NELINEARNOG RASTEZANJA

Na slici 4 prikazani su usporedba početnog i općeg deformiranog položaja osnovne ćelije (a), te utjecaj globalne vlačne sile  $F$  na vlačno opterećenje niti u osnovnoj ćeliji i na moment u elastičnom zglobu (b).



Sl. 4. Osnovna ćelija: početni i opći položaj (a), opterećenje pri globalnom rastezanju (b)

Pri izvodu zakona deformiranja pretpostavimo da su parametri  $c_{ax}$  i  $c_{flex}$  konstante, premda i deformacijsko ponašanje pređe može samo za sebe biti nelinearno. Uvjet ravnoteže u deformiranom stanju prema slici 4b glasi:

$$M_{flex} = \frac{1}{2} Fl \tan \alpha \quad (1)$$

Vlačna deformacija niti pređe u osnovnoj ćeliji te zakretna deformacija u elastičnom zglobu dane su izrazima:

$$\delta = \frac{F \cos \alpha}{c_{ax}} \quad (2)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{M_{flex}}{c_{flex}} \quad (3)$$

Duljina osnovne ćelije u pravcu globalnog rastezanja od početne vrijednosti  $l_0$  povećava se i u općem deformiranom stanju prema slici 4a dana je izrazom:

$$l = \left( \delta + \frac{l_0}{\cos \alpha_0} \right) \cos \alpha \quad (4)$$

Konačno, veza između općeg položaja osnovne ćelije  $\alpha$  i zakretne deformacije  $\varphi$  u elastičnom zglobu glasi:

$$\alpha = \alpha_0 - \varphi \quad (5)$$

Gornje jednadžbe (1) do (5) predstavljaju nelinearni zakon deformiranja. Nakon diferenciranja i eliminacije  $d\alpha$ ,  $d\varphi$  i  $d\delta$  slijedi veza između prirasta opterećenja  $dF$  i prirasta produljenja  $dl$ , odnosno tangenta krutost. Dobiva se:

$$\frac{dl}{dF} = \frac{\frac{1}{c_{ax}} \cos^2 \alpha + kl}{1 - kF} \quad (6)$$

Radi jednostavnijeg zapisa u izrazu (6) uvedena je oznaka  $k$  čije je značenje:

$$k = \frac{\frac{1}{c_{ax}} F \cos \alpha + \delta + \frac{l_0}{\cos \alpha_0}}{4c_{flex} + \frac{Fl}{\cos^2 \alpha}} \sin \alpha \tan \alpha \quad (7)$$

Vlačna karakteristika  $F-\Delta l$ , pri čemu je produljenje  $\Delta l = l - l_0$ , može se odrediti inkrementnim postupkom: polazi se iz početnog nedeformiranog stanja, za mali prirast sile  $dF$  odredi se pripadni prirast duljine  $dl$  te prirasti veličina  $\alpha$ ,  $\varphi$  i  $\delta$ , čije se trenutno stanje odredi akumulacijom, tj. ažurira. Opisani postupak je programiran tako da se kao rezultat dobije krivulja sila – produljenje.

#### 4 UGAĐANJE MIKROMEKANIČKIH PARAMETARA

Kao primjer za prilagodbu mikromehaničkih parametara stvarnoj krivulji rastezanja odaberimo sa slike 1 krivulju s najvećom prekidnom silom. Radi se o rezultatu vlačnog pokusa uzorka tkanine gustoće 24niti/cm u smjeru osnove.

Postupak ugađanja parametara provedimo u tri koraka. Prvo načinimo orijentacijsku procjenu pojedinih parametara na osnovi očitavanja sa zadane krivulje. U drugom koraku potražimo odstupanja između zadane i teorijske krivulje u okolini procijenjenih vrijednosti, radi približnog lociranja vrijednosti parametara koje će dati najmanje odstupanje. Konačno, u trećem koraku primijenimo algoritam minimizacije, kojim će se precizno utvrditi vrijednosti parametara pri kojima je odstupanje između teorijske i snimljene krivulje minimalno.

U prvom koraku najprije očitamo nagib vlačne krivulje neposredno prije loma, radi ocjene vlačne krutosti  $c_{ax}$ . U području između produljenja od 10% i 12% nagib krivulje, tj. omjer  $\Delta F/\Delta \varepsilon$  iznosi približno 7000N po presjeku uzorka. Za zadanu gustoću tkanine iz tipičnih geometrijskih odnosa u osnovnoj ćeliji (za detalje vidi [5]) slijedi promjer niti pređe od oko 0.228mm, pa se za ploštinu presjeka uzorka (5cmx24 niti/cm=120 niti) dobiva oko 4.895mm<sup>2</sup>. Dijeljenjem nagiba  $\Delta F/\Delta \varepsilon$  s ploštinom presjeka uzorka dobiva se orijentacijska vrijednost modula elastičnosti pređe  $E \approx 1.43\text{GPa}$ . S obzirom na duljinu niti pređe u tipičnoj geometriji osnovne ćelije, odatle slijede orijentacijske vrijednosti parametara  $c_{ax} \approx 118600\text{N/m}$  te, uz pretpostavku

čvrstog tijela,  $c_{flex} \approx 0.385 \cdot 10^{-3} \text{ Nm/rad}$ . Nadalje, kako se „koljeno“ vlačne krivulje razabire pri  $\varepsilon \approx 0.06$ , za orijentaciju uzмимо  $1 - \cos \alpha_0 = 0.06$ ,  $\alpha_0 \approx 19.9^\circ$ .

U drugom koraku ispitajmo okoliš procijenjenih vrijednosti. Kako se najpouzdanijom može smatrati procjena  $c_{ax}$ , promatrajmo uz fiksnu vrijednost  $c_{ax} = 120000 \text{ N/m}$  odstupanja zadane i teorijske krivulje u okolini procijenjenih vrijednosti  $\alpha_0$  i  $c_{flex}$ . Kao mjera odstupanja uzet je zbroj kvadrata odstupanja u četiri odabrane točke, pri vrijednostima vlačne sile na uzorak od 100, 200, 300 i 400N. Vidi tablicu 1.

	$\alpha_0 = 16^\circ$	$\alpha_0 = 18^\circ$	$\alpha_0 = 20^\circ$	$\alpha_0 = 22^\circ$
$c_{flex} = .0001 \text{ Nm/rad}$	3.813	0.3019	5.7134	24
$c_{flex} = .0002 \text{ Nm/rad}$	9.82	2.959	1.953	9.69
$c_{flex} = .0004 \text{ Nm/rad}$	21.76	12.65	6.13	3.849

Tablica 1. Odstupanja krivulja pri  $c_{ax} = 120000 \text{ N/m}$  u okolini prve procjene  $\alpha_0$  i  $c_{flex}$

Rezultat u tablici 1 jasno ukazuje da je prvotna procjena fleksijske krutosti bila nerealno visoka, naime kod niti pređe očito je omjer fleksijske i aksijalne krutosti osjetno manji nego kod čvrstog tijela jednakog promjera.

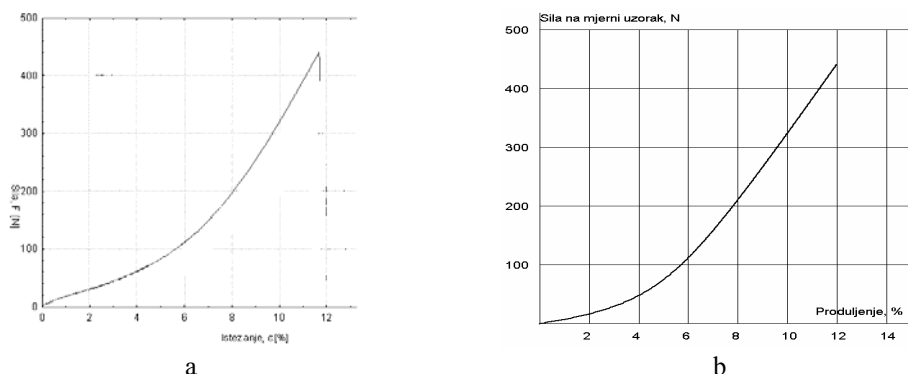
Daljnijm pretraživanjem okoliša vrijednosti koje korigiramo u skladu s ovim prvim rezultatima, dobivamo situaciju koja je prikazana u tablici 2.

	$\alpha_0 = 16^\circ$	$\alpha_0 = 17^\circ$	$\alpha_0 = 18^\circ$
$c_{flex} = .00002 \text{ Nm/rad}$	1.005	0.3754	2.295
$c_{flex} = .00004 \text{ Nm/rad}$	1.398	0.1708	1.287
$c_{flex} = .00006 \text{ Nm/rad}$	2.008	0.2467	0.6366

Tablica 2. Odstupanja krivulja pri  $c_{ax} = 120000 \text{ N/m}$  nakon korekcije  $\alpha_0$  i  $c_{flex}$

Tablica 2 ukazuje da je lokalizirano područje minimuma norme odstupanja, čime je okončan drugi korak postupka prilagodbe parametara.

U trećem koraku primjenjujemo algoritam minimizacije radi preciznog određivanja položaja minimuma norme odstupanja. Primijenjen je algoritam na osnovi kvadratične aproksimacije funkcije dviju varijabli opisan u [6]. Nakon nekoliko koraka dobivamo da najmanja moguća norma odstupanja teorijske i zadane vlačne krivulje iznosi 0.11216 pri vrijednostima parametara:  $c_{ax} = 121127 \text{ N/m}$ ,  $c_{flex} = 5.713 \cdot 10^{-5} \text{ Nm/rad}$ ,  $\alpha_0 = 17.33^\circ$ . Radi usporedbe, na slici 5 su prikazane obje krivulje.



Sl. 5. Zadana krivulja (a) i teorijska za  $c_{ax} = 121127 \text{ N/m}$ ,  $c_{flex} = 5.713 \cdot 10^{-5} \text{ Nm/rad}$ ,  $\alpha_0 = 17.33^\circ$  (b)

## 5 ZAKLJUČAK

Predloženi mikromehanički model daje solidne mogućnosti za vjerni numerički opis nelinearnog elastičnog deformiranja pri rastezanju tekstilnih materijala. Variranjem triju parametara moguće je dobiti široki spektar teorijskih vlačnih krivulja, spremnih za optimalnu prilagodbu zadanoj, snimljenoj krivulji prema načelu minimuma norme odstupanja.

S numeričkog stanovišta bilo bi zanimljivo usporediti djelotvornost primijenjenog inkrementnog postupka s iterativnim rješenjem kao drugim mogućim načinom određivanja nelinearne deformacije.

Predloženi model mogao bi poslužiti kao osnova za formiranje složenijih modela, koji bi mogli obuhvatiti efekte kao što su npr. histerezo ponašanje pri rastezanju, odnosno trajne deformacije. To bi naravno nužno značilo uvođenje novih elemenata i pripadnih novih parametara.

U planu je pokušaj dogradnje prikazanog modela radi opisa nelinearnog deformiranja tkanine pri dvoosnom opterećenju.

### Literatura:

- [1] Hursa, A.: "Numeričko modeliranje i optimizacija ojačanja na odjeći", doktorska disertacija, Sveučilište u Zagrebu, Tekstilno – tehnološki fakultet, Zagreb, 2008.
- [2] Kawabata, S., Niwa, M. & Kawai, H.: "The Finite-deformation Theory of Plain-weave Fabrics, Part I: The Biaxial-deformation Theory", The Journal of the Textile Institute, Vol. 64, No. 1, 1973, str. 21-46.
- [3] Leaf, G.A.V.: "Analytical woven fabric mechanics", International Journal of Clothing Science and Technology, Vol. 14, No. ¾, 2002, str.. 223-229.
- [4] Pierce, F.T.: "The Geometry of Cloth Structure", The Journal of the Textile Institute, Vol. 16, No. T45-T96, 1937.
- [5] Šomodi, Ž. & Hursa, A.: "A Simple Mechanical Model for Tensile Nonlinearity of Textiles", prihvaćeno za objavljivanje u zborniku radova 4<sup>th</sup> International Textile Clothing & Design Conference, Dubrovnik 2008.
- [6] Šomodi, Ž., Hursa, A. & Rogale, D.: "A Minimisation Algorithm with Application to Optimal Design of Reinforcements in Textiles And Garment", International Journal of Clothing Science and Technology, Vol. 19, No. 3/4, 2007, str. 159-166.
- [7] Tarfaoui, M. & Akesbi, S.: "Numerical study of the mechanical behaviour of textile structures", International Journal of Clothing Science and Technology, Vol. 13, No. 3/4, 2001, str. 166-175.

### Autori:

**Željko Šomodi**, Sveučilište u Zagrebu, Tekstilno – tehnološki fakultet, Zavod za temeljne prirodne i tehničke znanosti, Prilaz baruna Filipovića 28a, tel. 371 2552, fax 371 2599, e-mail: [zsomodi@ttf.hr](mailto:zsomodi@ttf.hr), web stranica: [www.ttf.hr](http://www.ttf.hr)

**Anica Hursa**, Sveučilište u Zagrebu, Tekstilno – tehnološki fakultet, Zavod za odjevnu tehnologiju, Prilaz baruna Filipovića 28a, tel. 371 2551, fax 371 2599, e-mail: [anica.hursa@ttf.hr](mailto:anica.hursa@ttf.hr), web stranica: [www.ttf.hr](http://www.ttf.hr)

**Zahvala:** Rad je nastao u sklopu projekta *Numeričko modeliranje u inženjerskoj analizi tekstila i odjeće*, koji dobiva novčanu potporu Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta RH.

## NELINEARNI MODEL ZA ANALIZU DUKTILNOSTI A/B KONSTRUKCIJA

Trogrlić, B., Mihanović, A. & Balić, I.

**Sažetak:** U ovome radu je analizirana plastifikacija a-b okvira numeričkim modelom koji uključuje materijalnu i geometrijsku nelinearnost po teoriji malih i velikih pomaka i prikazana je moguća primjena materijalno i geometrijski nelinearnih modela na nelinearnu statičku analizu prostornih okvira prema EN EUROCODE 8. Uporabljen je opći inkrementalno iterativni postupak pri monotono rastućem opterećenju do razine otkazivanja konstrukcije pojavom mehanizma i/ili gubitkom stabilnosti. Uporabljeni su kompozitni poprečni presjeci. Zbog simulacije prostornog stanja okvira rabi se model usporednog tijela. Usporedno tijelo je formirano od kvadratičnih elemenata presjeka protegnutih uzduž konačnog elementa tako da se stvara mreža od 3D brick elemenata. Jedno od bitnih svojstava a-b okvira je promjena položaja plastifikacijskih zglobova iz jedne faze opterećenja u drugu. Potpuni proces plastifikacije je diskontinuiran. Iz analiza je moguće izvući dominantni put nastanka mehanizma. Samo specijalnim izborom svojstava poprečnih presjeka moguće je postići kontinuirani put nastanka mehanizma. U radu je pojednostavnjeno prikazana primjena metode ciljanog pomaka kao prethodnica metode kapaciteta nosivosti a potom i sama metoda kapaciteta nosivosti. Pozornost je usmjerena na veličine pomaka izvornog matematičkog modela i njegova usporedba s ciljanim pomacima definiranim prema EN EC8. Modelom su analizirani: (1) a/b okviri različitih tipova i broja katova, (2) savojni samostalni zidovi, (3) zidovi s otvorima. U zaključku se daje inženjerski osvrt na konstruktivno držanje pojedinih sustava u a/b izvedbi s naglaskom na veličinu očekivanih deformacija.

**Ključne riječi:** a-b okviri, zidovi, monotono opterećenje, plastični zglobovi, putanja ravnoteže, krivulja kapaciteta

### 1 UVOD

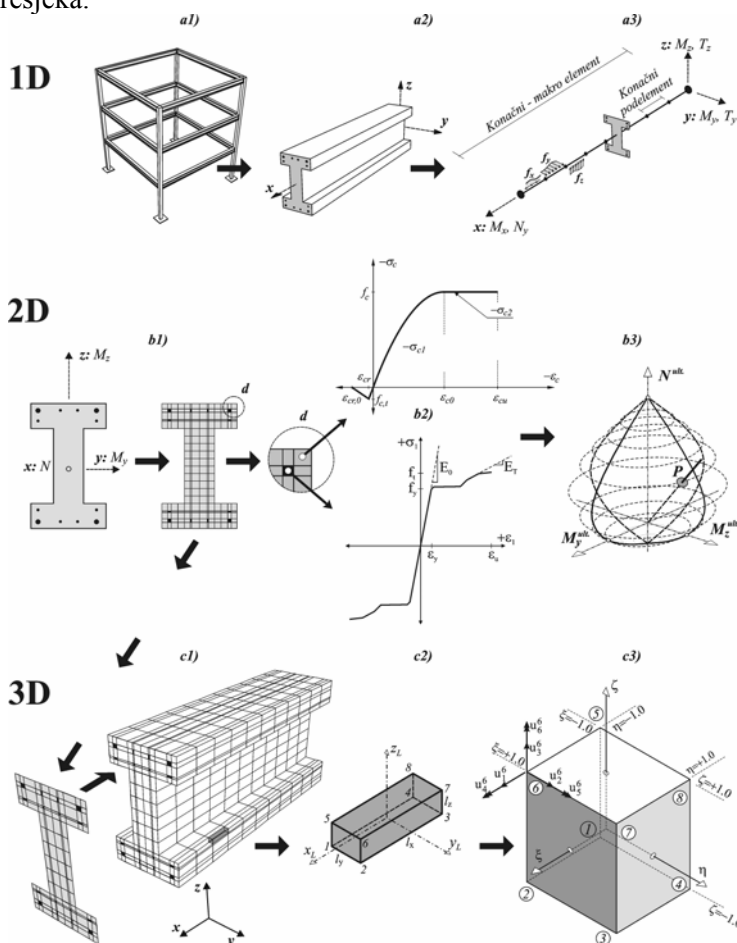
U analizi je uporabljen numerički model stabilnosti i nosivosti prostornih linijskih konstrukcija s uvažavanjem materijalne i geometrijske nelinearnosti [4, 5]. Modelom se opisuje ponašanje prostornih okvira od kompozitnih poprečnih presjeka pri djelovanju opterećenja od nultog intenziteta pa sve do sloma. Slom nastupa prekoračenjem nosivosti i/ili gubitkom stabilnosti prostornih štapova ili konstrukcije kao cjeline.

Model materijalne nelinearnosti vezan je za odgovor kompozitnog poprečnog presjeka pri nelinearnim svojstvima materijala koji tvore taj poprečni presjek. Za uzdužno deformiranje izazvano kombiniranim djelovanjem uzdužne sile i savojnih momenta određuju se konstante poprečnog presjeka. Pri tome je moguća plastifikacija presjeka, te postplastično ponašanje štapa izazvano prekoračenjem nosivosti presjeka. Posmično deformiranje pri uvrtanju prati se na modelu usporednog tijela, kojim se određuju svojstva presjeka u uvjetima spriječenog izobličenja poprečnog presjeka i nejednolikog uvrtanja. Doprinos posmičnog deformiranja izazvanog poprečnim silama

uključen je kroz spregnute bazne funkcije. Modelom geometrijske nelinearnosti postiže se uspostavljanje ravnotežnog stanja na deformiranom položaju, sukladno Potpunoj Lagrange-ovoj formulaciji, a po teoriji malih pomaka. Pri tome je moguća pojava gubitka stabilnosti savijanjem, uvrtnjem i izbočenjem prostornih štapnih elemenata.

Prostorna diskretizacija sustava je na pravocrtne štapne dvo-čvorne konačne elemente ili podelemente sa 6 stupnjeva slobode po čvoru (Crtež 1.a). Diskretizacija poprečnog presjeka je vlaknasta čime se mehaničko ponašanje svakog vlakna opisuje zadavanjem  $\sigma$ – $\varepsilon$  dijagrama, a presjek uravnotežuje na temelju plohe nosivosti (Crtež 1.b). Diskretizacija usporednog tijela je na 8-čvorne kuboide sa 6 stupnjeva slobode po čvoru uz izbor Hermite-ovih baznih funkcija (Crtež 1.c).

Temeljem razvijenog numeričkog modela izrađen je računalni program za potvrdu točnosti modela i praktičnu primjenu u analizi materijalno i geometrijski nelinearnih prostornih a-b linijskih konstrukcija. Opći postupak je inkrementalni, a u svakom koraku obnavlja se osnovna (Ko) i geometrijska krutost (Kg) na bazi veličina sila iz prethodnog inkrementa, čime postupak ima obilježje kvazitangentne metode. Proračun daje prostornu putanju ravnoteže karakterističnog čvora, te slijed plastifikacije kritičnih poprečnih presjeka.



Crtež 1: Diskretizacija sustava: (a) diskretizacija prostornog okvira; (b) diskretizacija poprečnog presjeka; (c) diskretizacija usporednog tijela

Proračuni potresnog djelovanja prema EN EUROCODE 8 (EC8), kao jedan od mogućih postupaka uključuju statičku nelinearnu analizu. Prema EC8 predvidiva uporaba statičke nelinearne metode je kod analiza postojećih građevina, određivanja povećanog faktora ponašanja konstrukcije  $q$  te najvažnija moguća primjena je kreiranje novih a/b konstrukcija prema postupku kapaciteta nosivosti i ciljanih pomaka. Navedeni numerički model izvrsno može poslužiti svakom od željenih ciljeva a naročito onom posljednjem.

Osnovna pravila koja treba poštivati prema EC8 su redosljed monotonog opterećivanja u dva koraka za dva različita tipa opterećivanja. Traži se u prvom stupnju nanošenje svih opterećenja osim potresnog dok se u drugom stupnju traži postupno nanošenje potresnog opterećenja. Za oblik potresnog opterećenja predviđena su dva tipa. Prvi je onaj koji bi odgovarao inercijalnim silama prvog vlastitog vektora, a drugi onaj koji bi odgovarao konstantnom ubrzanju po visini konstrukcije. Mjerodavnim se smatra onaj koji daje nepovoljniji mehanizam sloma. Svi konkretni primjeri obrađeni u ovome radu daju nepovoljniji mehanizam koji bi odgovarao inercijalnim silama prvog vlastitog vektora.

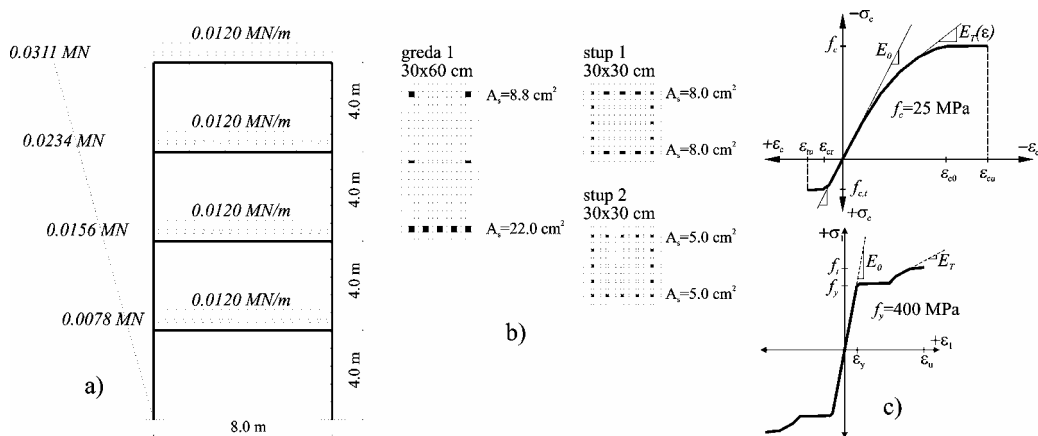
U nastavku su obrađene tri karakteristične vrste armirano betonskih konstrukcija: (1) okviri, (2) savojni samostalni zidovi i (3) zidovi s otvorima odnosno međusobno povezani zidovi. Premda je model razrađen za prostorne konstrukcije zbog jednostavnosti praćenja rezultata analiza promatrani su ravninski tipovi konstrukcija modelirani linijskim elementima.

## **2 MONOTONO OPTEREĆENJE RAVNINSKOG OKVIRA**

Za djelovanje se uzima raspodijeljeno opterećenje s linearnim povećanjem po visini. Zadano opterećenje se povećava inkrementalno - do sloma, odnosno gubitka stabilnosti, uz ažuriranje matrica osnovne i geometrijske krutosti u svakom inkrementalnom koraku. Moguća je distribuirana plastifikacija presjeka, njihova prostorna nezavisnost, kao i promjena položaja plastifikacijskih zglobova iz jedne faze opterećenja u drugu. Iz analiza je moguće zaključiti dominantni put nastanka mehanizma, odnosno predvidjeti razvoj mehanizma, te konačno i kolaps sustava. Izborom različitih omjera krutosti greda i stupova a-b okvira, kao i njihovog armiranja, moguće je postići različite odgovore sustava, pogotovo s gledišta kapaciteta nosivosti pri djelovanju potresa.

### **2.1 Primjer četveroetažnog jednopoljnog okvira**

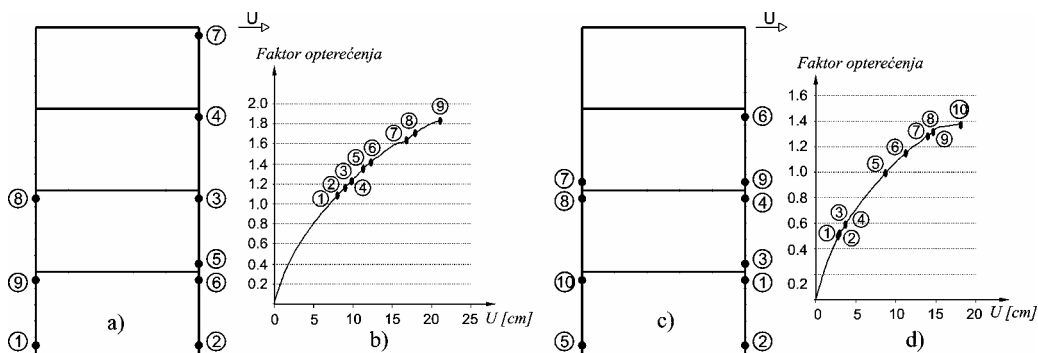
Analizirana su dva tipa jednopoljnih 4-etažnih a-b okvira, a razlikuju se u smislu duktilnosti stupova, odnosno površini armature stupova (stup 1 i stup 2). Oba okvira imaju istu geometriju, prikazanu na crtežu 2a. Diskretizacija poprečnih presjeka grede i stupova prikazani su na crtežu 2b, a numerički modeli betona i čelika na crtežu 2c. 'Okvir 1' se sastoji od poprečnih presjeka 'grede' i 'stupa1', a 'Okvir 2' od 'grede' i 'stupa2'.



Crtež 2: a) Geometrija okvira i djelovanje; b) Diskretizacija poprečnog presjeka; c) Numerički modeli materijala

Rezultati proračuna u obliku slijeda pojave plastičnih zglobova i putanje ravnoteže vrha okvira, a prikazani su na crtežu 3. Za 'Okvir 1' je omjer između faktora opterećenja pri slomu i pojavi prvog plastičnog zgloba  $\frac{\alpha_u}{\alpha_1} = 1.66$ .

Za 'Okvir 2' je omjer između faktora opterećenja pri slomu i pojavi prvog plastičnog zgloba  $\frac{\alpha_u}{\alpha_1} = 2.93$ .



Crtež 3: Rezultati analize: a) Pojava plastičnih zglobova na Okviru 1; b) Putanja ravnoteže za Okvir 1; c) Pojava plastičnih zglobova na Okviru 2; d) Putanja ravnoteže za Okvir 2

Praktični primjeri pokazuju da male razlike u armiranju (površini armature) a-b stupova imaju značajan utjecaj na veličinu opterećenja kod pojave prvog plastičnog zgloba, te značajan utjecaj na slomno opterećenje, odnosno na kapacitet nosivosti a-b okvira. Potpuni proces plastifikacije je diskontinuiran. Samo posebnim izborom svojstava poprečnih presjeka a-b okvira moguće je postići kontinuirani put nastanka mehanizma.

### 3 MODEL KAPACITETA NOSIVOSTI I CILJANOG POMAKA

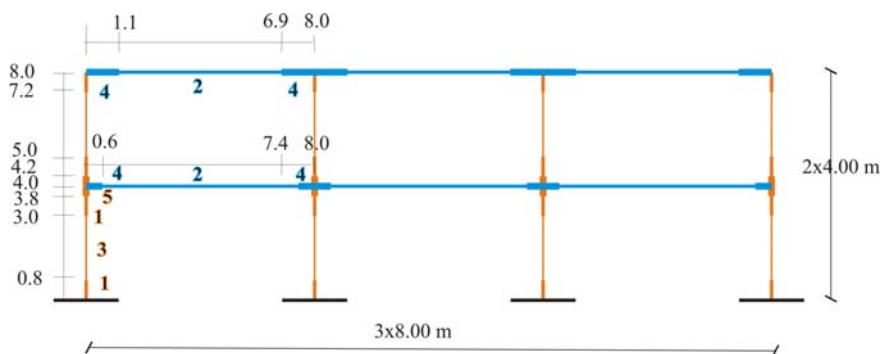
Model kapaciteta nosivosti podrazumijeva da se dijagram nosivosti ili uobičajeno rečeno putanja ravnoteže smjesti u dijagram kapaciteta pojedine potresne zone. Putanja ravnoteže slijedi iz statičke nelinearne analize a dijagram kapaciteta slijedi iz odnosa potresnog ubrzanja 5% elastičnog spektra  $S_e$  i potresnog pomaka 5% elastičnog spektra  $SD_e$ , prema kriteriju:

$$S_e = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 SD_e \quad (1)$$

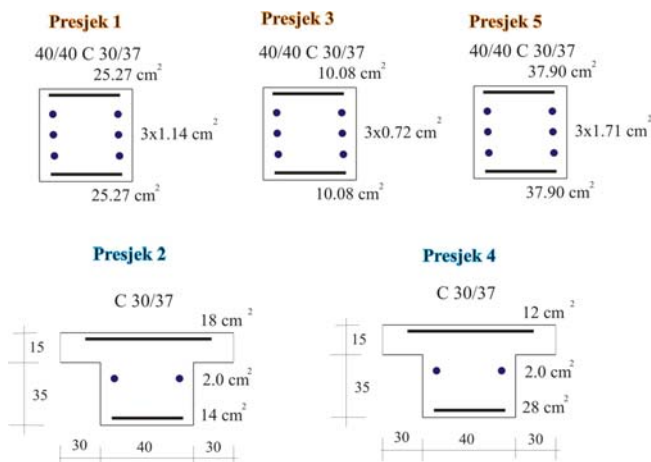
Kada se putanja ravnoteže smjesti na dijagram kapaciteta moguća je procjena zadovoljava li promatrana konstrukcija tražene uvjete prema EC8. Put tog dokaza dan je u nastavku na konkretnom primjeru a/b okvira.

#### 3.1 Primjer dvoetažnog tropoljnog okvira

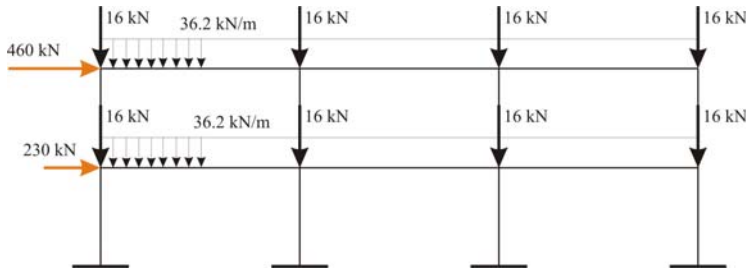
Geometrijski podaci svojstva presjeka i materijala te način i oblik opterećenja prikazani su na crtežima 4-6. Nelinearna svojstva betona odgovaraju  $\sigma$ - $\varepsilon$  dijagramu za klasu 25/30, a nelinearna svojstva armature čeliku klase B 500B. Opterećenje potresom zadano je prema trokutnom pravilu što približno odgovara obliku inercijalnih sila prvog vlastitog vektora.



Crtež 4. Geometrija okvira



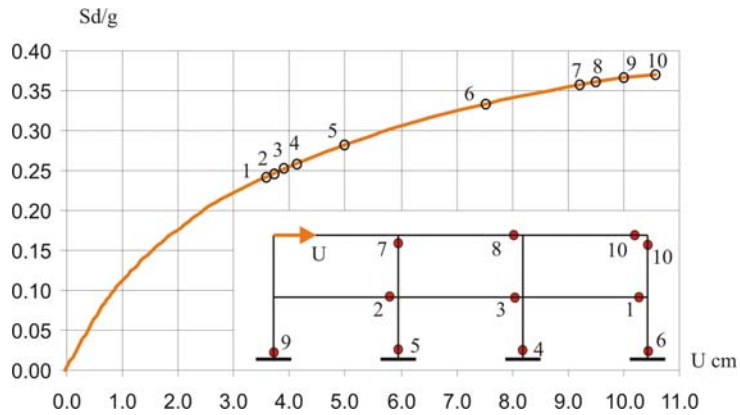
Crtež 5. Poprečni presjeci



Crtež 6. Opterećenje okvira

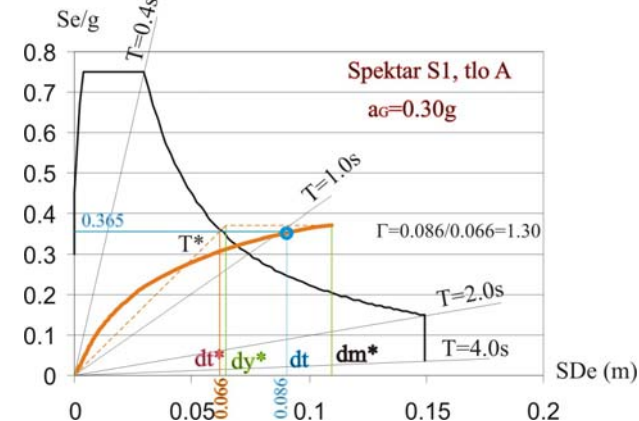
Putanja ravnoteže prikazana je na crtežu 7. Na ordinati je prikazan intenzitet opterećenje podijeljen s gravitacijom. Slomni mehanizam se javlja pri intenzitetu opterećenja:

$$\frac{S_d}{g} = 0.37 \quad (2)$$



Crtež 7. Putanja ravnoteže

Preklapanje putanje ravnoteže i krivulje kapaciteta za spektar tip S1, tlo tipa A prema EC8 i projektno ubrzanje tla  $a_G=0.30g$  prikazano je na crtežu 8. Oznakom pomaka  $d_m$  definirana je granica sloma sustava tj. pojava mehanizma.



Crtež 8. Ciljani pomak i kapacitet nosivosti

Provjera nosivosti prema EC8 dodatak B, polazi od pretpostavke da se sustav tretira kao jednostupnjevni elasto-plastični, crtkane linije ca crtežu 8. Početak plastičnog platoa definiran je apscisom  $d_y$ . Elasto-plastični sustav ima period  $T^*$  a za njega je ekvivalentni elastični pomak sustava na sjecištu pravca  $T^*$  i krivulje kapaciteta nosivosti, definirano apscisom  $d_t$ , u konkretnom slučaju to iznosi 0.066 m. Ovim postupkom je dokazano da sustav u svom prvom vlastitom obliku deformiranja zadovoljava. Pošto je promatrani sustav višestupnjevni tada se utjecaj svih ostalih vlastitih oblika određuje prema učešću u ukupnoj masi sustava. U ovom slučaju na prvi vlastiti vektor otpada 1/1.30 od ukupne mase. Utjecaj svih ostalih vlastitih vektora se prema EC8 aproksimira uvećanjem utjecaja prvog vlastitog vektora za  $\Gamma=1.30$ , definiran apscisom  $d_t$ , što u promatranom slučaju iznosi 0.086 m. Na krivulji putanje ravnoteže to odgovara iskoristivosti okvira do potresnog opterećenja  $S_e/g=0.365$ . Sustav zadovoljava na samoj granici kapaciteta. Unatoč činjenici da sustav zadovoljava vrlo upitna je uporaba ovakve konstrukcije u praktičnoj inženjerskoj primjeni.

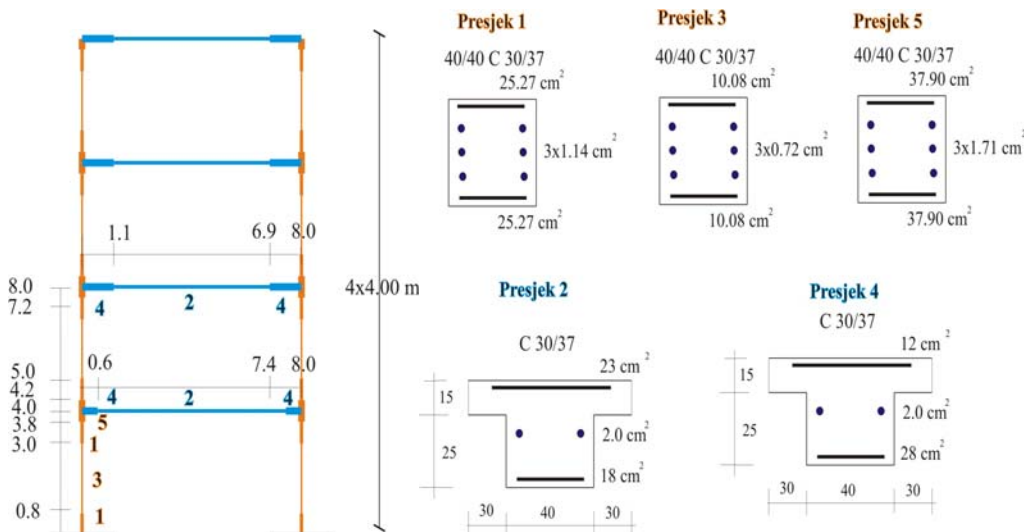
U slučajevima kada je:

$$d_t > d_m \tag{3}$$

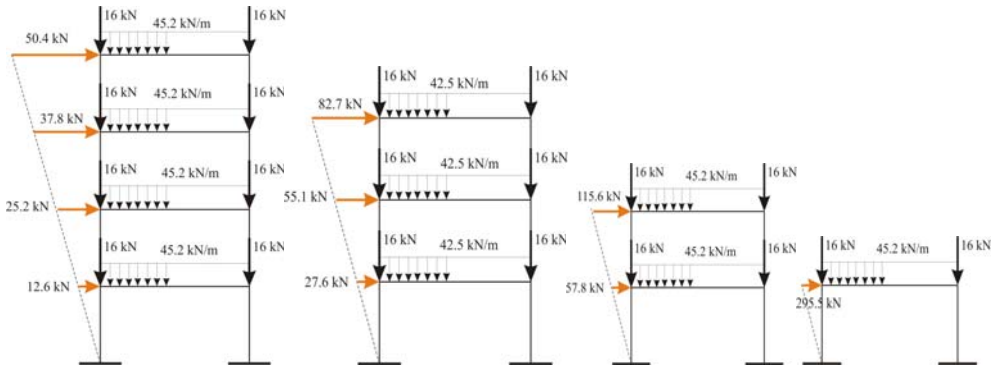
promatrana konstrukcija ne zadovoljava traženim uvjetima.

#### 4 NELINEARNA SVOJSTVA OKVIRNIH KONSTRUKCIJA

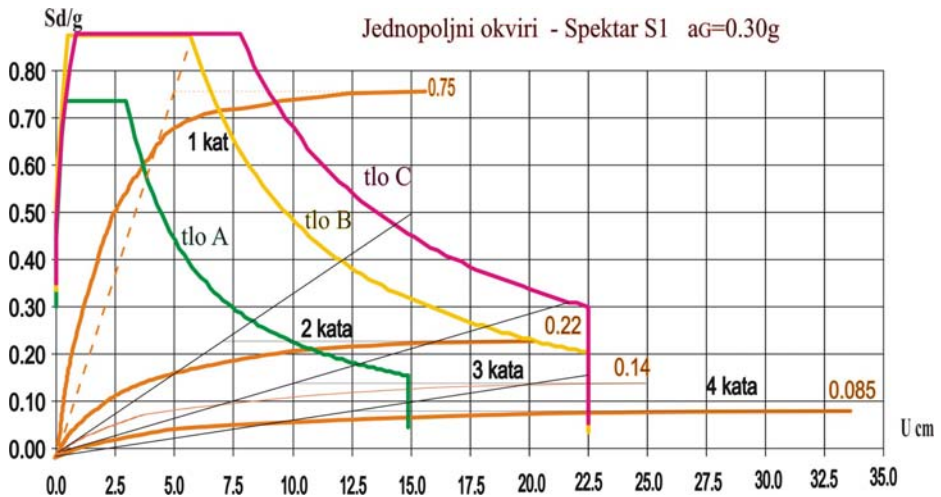
Jedan ili nekoliko konkretnih primjera ne mogu dati potpunu sliku cjeline, ipak serija sličnih primjera može pomoći određenim spoznajama u ponašanju određenog tipa konstrukcija. U nastavku je analizirana serija, četverokatnog do jednokatnog okvira istih geometrijskih oblika kata danih na crtežu 9. Potresna opterećenja su odabrana kao trokutna u svakom primjeru a prikazana su na crtežu 10. Preklapanje putanja ravnoteže i krivulja kapaciteta pokazano je na jedinstvenim dijagramima. Za spektar tip S1 i projektno ubrzanje  $a_G=0.30g$  za tla tipa A,B i C, preklapanja su prikazana na crtežu 11.



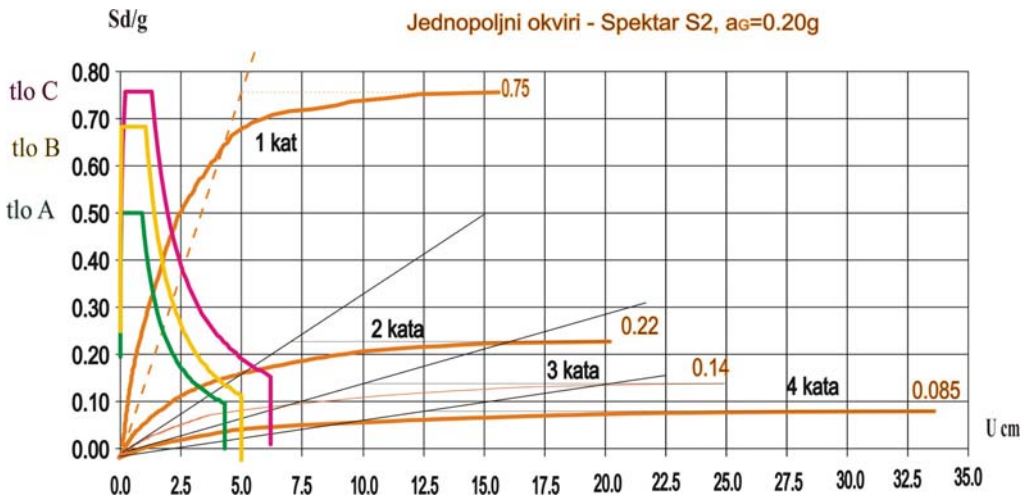
Crtež 9. Geometrija i poprečni presjeci jednopoljnog okvira



Crtež 10. Opterećenje jednopoljnog okvira



Crtež 11. Putanje ravnoteže okvira i krivulje kapaciteta za spektar  $S_1$  i projektno ubrzanje  $a_G=0.30g$

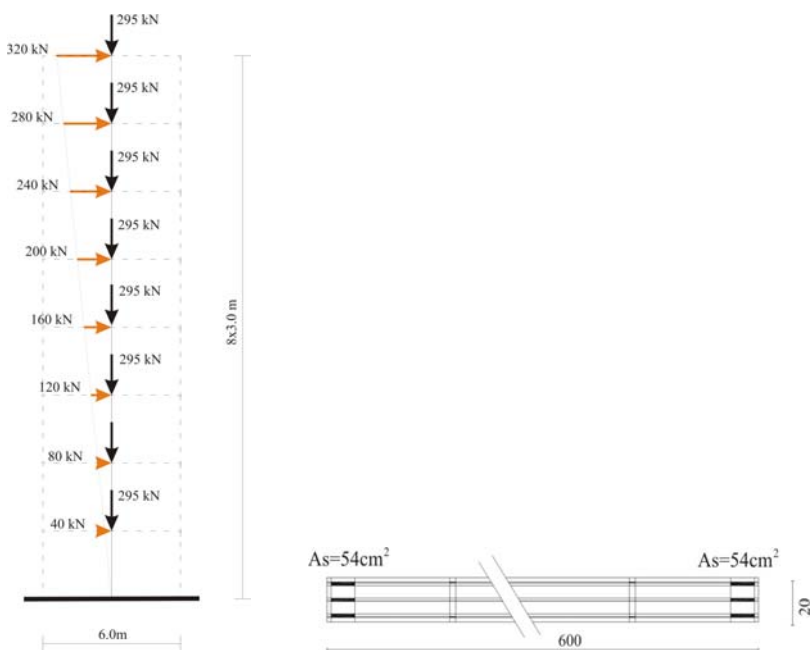


Crtež 12. Putanje ravnoteže okvira i krivulje kapaciteta za spektar  $S_2$  i projektno ubrzanje  $a_G=0.20g$

Rezultati pokazuju visoka plastifikacijska svojstva, inače očekivana dobra svojstva okvira. To ukazuje na visoki faktor ponašanja  $q$  sukladno EC8. Za jednopoljni 4-etažni okvir faktor ponašanja  $q$  približno iznosi  $q \approx 5.45$ , 3-etažni okvir  $q \approx 5.50$ , 2-etažni okvir  $q \approx 5.55$  i za 1-etažni okvir  $q \approx 5.60$ . Prema crtežu 11. vidljivo je da zbog velikog intenziteta projektnog ubrzanja tla  $a_G=0.30g$ , zadovoljava samo jednokatni okvir na tlu tipa A. Duktilnost okvira raste s brojem katova, međutim to istodobno znači veliku deformabilnost čime je isključena praktična uporaba takvih konstrukcija. Prema crtežu 12. za projektni spektar tip  $S_2$  i projektno ubrzanje tla  $a_G=0.20g$  isti okviri pokazuju svojstva deformabilnosti na gornjoj granici uporabe.

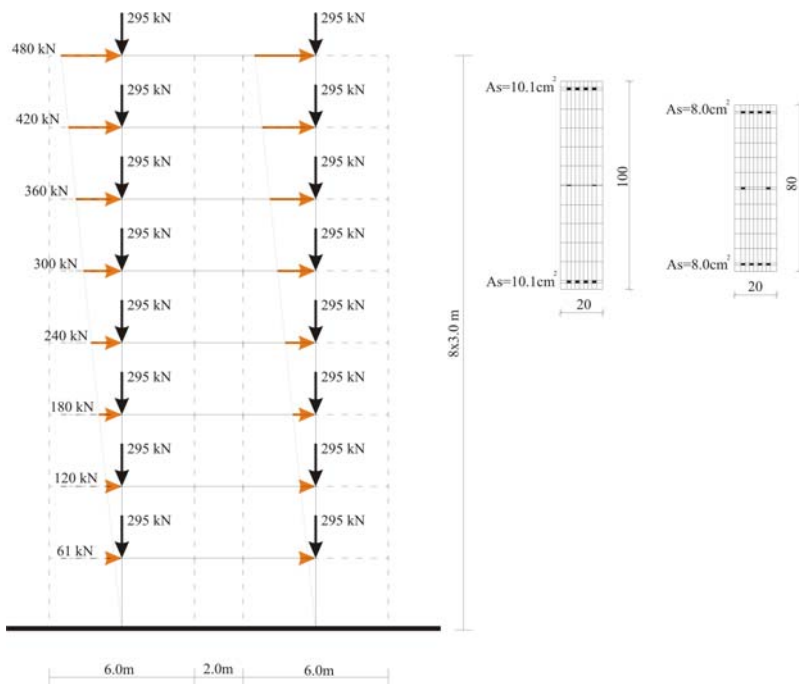
## 5 NELINEARNA SVOJSTVA SAMOSTALNIH I POVEZANIH A/B ZIDOVA

U nastavku je prikazana analiza samostalnog a/b zida te povezanih zidova. Svojstva materijala usvojena su kao i kod okvirnih konstrukcija. Geometrija i opterećenje samostalnog odnosno nepovezanog zida prikazano je na crtežu 13. Primjeri su postavljeni tako da jedan zid iz dvojnih povezanih zidova ima ista svojstva i opterećenje kao samostalan zid, što omogućuje kvalitetnu usporedbu rezultata analize.

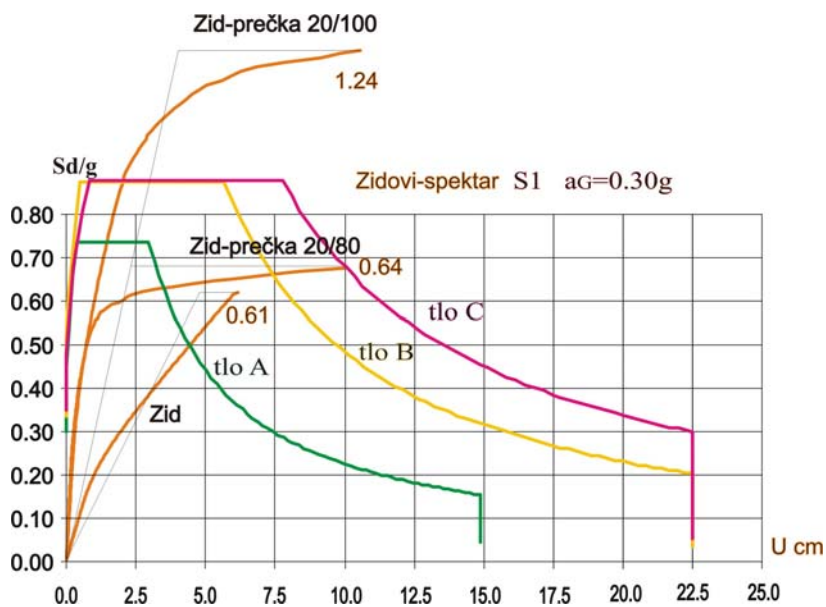


Crtež 13. Geometrija i opterećenje samostalnog zida

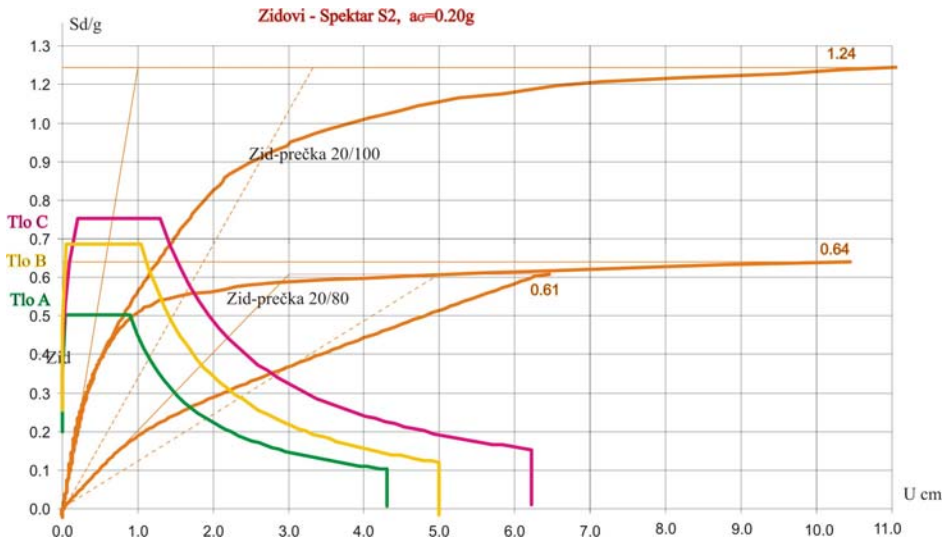
Geometrija povezanih zidova prikazana je na crtežu 14. Analizirane su dvije inačice vezivanja prečkama. Prečka  $20/80 \text{ cm}$  te prečka  $20/100 \text{ cm}$  jače armirana. Rezultati su prikazani na crtežima 15 i 16. Na crtežu 15. prikazane su putanje ravnoteže i krivulje kapaciteta za slučaj spektra  $S_1$  i projektnog ubrzanja tla  $a_G=0.30g$ . Na crtežu 16. prikazane su iste krivulje za slučaj spektra  $S_2$  i projektnog ubrzanja tla  $a_G=0.20g$ .



Crtež 14. Geometrija i opterećenje povezanih zidova



Crtež 15. A/B zidovi, putanje ravnoteže i krivulje kapaciteta za spektar  $S_1$  i projektno ubrzanje  $a_G=0.30g$



Crtež 16. A/B zidovi, putanje ravnoteže i krivulje kapaciteta za spektar  $S_2$  i projektno ubrzanje  $a_G=0.20g$

Rezultati pokazuju izvrsna svojstva a/b zidova u nelinearnoj analizi, kako samostalnih tako i povezanih. Čak i samostalni zid ima dobra duktilna svojstva. Za samostalni zid faktor ponašanja  $q$  približno iznosi  $q \approx 4.20$ , povezani zid s prečkama 20/80 cm  $q \approx 20.0$  i povezani zid s prečkama 20/100 cm  $q \approx 10.0$ . Zidovi imaju visok intenzitet slomnih potresnih sila uz inženjerski gledano vrlo prihvatljive deformacije. Nadalje primjetan je neznatan učinak prečke 20/80. Iz navedenog zaključujemo da doprinos međukatnih a/b ploča nije zamjetljiv.

## 6 ZAKLJUČAK

Provedena je nelinearna analiza a-b okvira pri inkrementalnom povećanju horizontalnog opterećenja do sloma. Izložena materija pokazuje mogućnost efikasne primjene nelinearnog modela u nelinearnoj statičkoj analizi prema načelima EC8 uključujući mogućnost određivanja faktora ponašanja  $q$ . Omogućena je analiza pojedinačnih konstrukcija ali i izrada parametarskih studija. Obradeni primjeri pokazuju ograničenu mogućnost uporabe okvirnih konstrukcija u zonama visoke seizmičnosti. Praktično već kod  $a_G=0.20g$  a naročito za više vrijednosti, okvirne konstrukcije teško udovoljavaju graničnom stanju uporabljivosti - zbog velike deformabilnosti. Konstrukcije a/b zidova, pretežito savojnih, samostalnih ili povezanih imaju izvrsna svojstva. Dovoljno su duktilni, velikog kapaciteta nosivosti uz sasvim prihvatljive deformacije pri potresnim horizontalnim djelovanjima. Pokazuje se da prečke između povezanih zidova odnosno zidovi s otvorima imaju uvećanu nosivost u odnosu na samostalne zidove tek kada krutost prečki postaje značajna. Doprinos međukatnih a/b ploča je zanemariv.

## Literatura:

- [1] EN 1998-1, "Design of structures for earthquake resistance Part 1: General rules, seismic actions and rules for buildings", European Committee for Standardization, Bruxelles, December 2004.
- [2] Mihanović, A. and Trogrlić, B., "Extended fibre decomposition procedure for nonlinear analysis of reinforced concrete 3D frames", Proceedings of the 9th International Conference on Numerical Methods in Continuum Mechanics, Žilina Slovakia, 2003.
- [3] Mihanović, A. and Trogrlić, B., "Numerički model velikih pomaka a/b prostornih okvira", Zbornik radova sa savjetovanja Nove tehnologije u Hrvatskom građevinarstvu Hrvatsko društvo građevinskih konstruktora, 2003, pp. 267-272.
- [4] Trogrlić, B., "Nelinearni numerički model stabilnosti i nosivosti prostornih armirano betonskih linijskih konstrukcija", disertacija, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Split, 2003.
- [5] Trogrlić, B. and Mihanović, A., "The comparative body model in material and geometric nonlinear analysis of space R/C frames", Engineering Computations, Vol. 25, No. 1. and 2., 2008, pp. 155-171.
- [6] Trogrlić, B., Mihanović, A. and Balić, I., "Plastification of R/C frames under monotonic loading", 8th. World Congress on Computational Mechanics (WCCM8) and 5th. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2008), June 30 – July 5, 2008, Venice, Italy, Ed. B.A. Schrefler and U. Perego, 2008.
- [7] Trogrlić, B., Mihanović, A. and Nikolić, Ž., "Nonlinear analysis of space r/c frames with non-uniform torsion", III. European Conference on Computational Mechanics; Solid, Structures and Coupled Problems in Engineering: CD Proceedings of ECCM2006, Lisbon, Portugal, June 5-8, 2006., Ed. Soares C.A.M. et al., paper No. 2121., 2006.

## Autori:

doc. dr. sc. **Boris Trogrlić**, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Matice hrvatske 15, 21000 Split, Hrvatska, tel. (021) 303 352, fax: (021) 465 117, [boris.trogrlic@gradst.hr](mailto:boris.trogrlic@gradst.hr)

prof. dr. sc. **Ante Mihanović**, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Matice hrvatske 15, 21000 Split, Hrvatska, tel. (021) 303 357, fax: (021) 465 117, [ante.mihanovic@gradst.hr](mailto:ante.mihanovic@gradst.hr)

**Ivan Balić**, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Matice hrvatske 15, 21000 Split, Hrvatska, tel. (021) 303 332, fax: (021) 465 117, [ivan.balic@gradst.hr](mailto:ivan.balic@gradst.hr)

## GREDNI ELEMENT ZA NELINEARNU ANALIZU TANKOSTIJIENIH OKVIRA S POLUKRUTIM VEZAMA

Turkalj, G. & Lanc, D.

**Sažetak:** U radu je prikazan gredni konačni element za numeričku simulaciju nelinearnog odziva tankostijenih grednih konstrukcija s polukrutim vezama. Primjenom lineariziranog principa virtualnih radova i nelinearnog polja pomaka tankostijenog poprečnog presjeka izvedene su linearizirane inkrementalne ravnotežne jednadžbe tankostijenog grednog konačnog elementa. Na osnovi njih je, potom, izvedena tangentna matrica krutosti konačnog elementa. Za polukrute je spojeve pretpostavljeno da se pojavljuju samo na krajevima konačnog elementa. Njihov je utjecaj uveden u numerički algoritam primjenom specijalne transformacijske matrice, a kojom se modificiraju odgovarajuće matrice i vektori konvencionalnog grednog konačnog elementa.

**Ključne riječi:** Tankostijeni okviri, Gredni konačni element, Polukruti spojevi.

### 1 UVOD

U konvencionalnim numeričkim procedurama spojevi okvirnih konstrukcija idealiziraju se ili kao idealno kruti spojevi ili kao idealni translacijski/rotacijski zglobovi. Međutim, ponašanje realnih spojeva dijelova okvira često se ne može svrstati niti u jednu od ove dvije idealizirane kategorije, pa takve spojeve kategoriziramo kao polukrute (engl. semi-rigid) spojeve [1-3]. Stoga i numeričke procedure namijenjene analizi odziva okvirnih konstrukcija moraju biti modificirane u tom smislu.

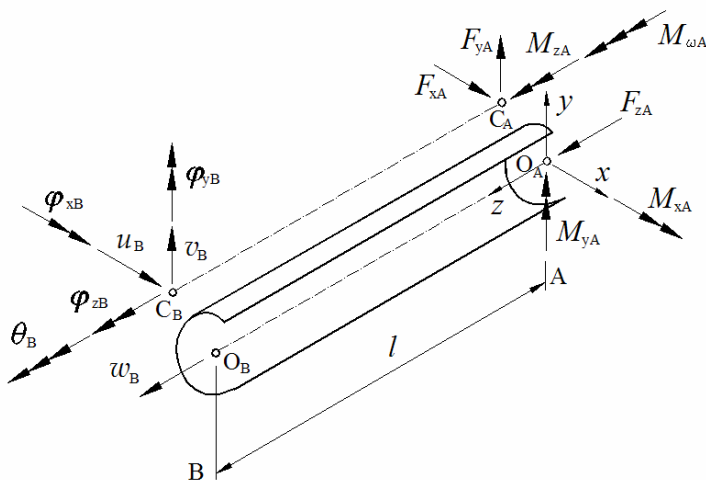
U ovom je radu prikazan jedna takva modifikacija numeričke formulacije prikazane u radovima [4], namijenjene nelinearnoj analizi tankostijenih okvirnih konstrukcija s idealno krutim vezama. Ravnotežne jednadžbe pravocrtnog grednom konačnog elementa s 14 stupnjeva slobode gibanja (7 po čvoru) dobivene su primjenom lineariziranog principa virtualnih pomaka, *updated Lagrangian* (UL) inkrementalne formulacije i nelinearnog polja pomaka nesimetričnog poprečnog presjeka, a koje uključuje efekt velikih rotacija i utjecaj ograničenog vitoperenja. Na osnovi njih su, potom, izvedene odgovarajuće matrice krutosti konačnog elementa. Unutrašnji momenti izvedeni su sukladno Euler-Bernoullijevoj teoriji savijanja i Vlasovoj teoriji uvijanja.

Polukrute ili fleksibilne veze promatranog konačnog elementa sa susjednim elementima modelirane su pomoću fiktivnih opruga nulte duljine, svaka krutosti  $S_i$ . Pri tome se polukrute veze mogu pojaviti kod svih stupnjeva slobode gibanja pojedinog čvora, tj. kod translacijskih pomaka, rotacijskih pomaka i pomaka koji opisuje vitoperenje poprečnog presjeka uslijed uvijanja. Utjecaj fleksibilnosti spojeva uveden je, potom, u konačnoelementnu formulaciju preko specijalne inkrementalne transformacijske matrice koja konvencionalni element, s krutim vezama u čvorovima, transformira u hibridni ili SR element, s polukrutim vezama u čvorovima.

## 2 KONVENCIONALNI KONAČNI ELEMENTA

### 2.1 Čvorni vektori

Na slici 1 prikazan je prostorni tankostijeni gredni konačni element nesimetričnog poprečnog presjeka. Pri tome su s A i B označeni čvorovi konačnog elementa, O i C predstavljaju težište i centar smicanja poprečnog presjeka, z je uzdužna os konačnog elementa koja spaja težišta čvornih presjeka, dok su x i y glavne centralne osi poprečnog presjeka.



Sl. 1. Tankostijeni gredni konačni element: cvorni pomaci i čvorne sile

Vektori čvornih pomaka i čvornih sila e-tog elementa jesu:

$$(\mathbf{u}^e)^T = \{w_{oA}, u_{sA}, v_{sA}, \varphi_{zA}, \varphi_{xA}, \varphi_{yA}, w_{oB}, u_{sB}, v_{sB}, \varphi_{zB}, \varphi_{xB}, \varphi_{yB}, \theta_A, \theta_B\}, \quad (1)$$

$$(\mathbf{f}^e)^T = \{F_{zA}, F_{xA}, F_{yA}, M_{zA}, M_{xA}, M_{yA}, F_{zB}, F_{xB}, F_{yB}, M_{zB}, M_{xB}, M_{yB}, M_{\omega A}, M_{\omega B}\}. \quad (2)$$

pri čemu su:

$$\varphi_x = -\frac{dv_s}{dz}; \quad \varphi_y = \frac{du_s}{dz}; \quad \theta = -\frac{d\varphi_z}{dz}. \quad (3)$$

### 2.2 Ravnotežne jednadžbe

Sukladno UL formulaciji, princip virtualnih radova za konačni element u nepoznatoj konfiguraciji  $C_2$ , izražen u odnosu na zadnju poznatu konfiguraciju  $C_1$ , glasi [5]:

$$\int_{V'} {}^2S_{ij} \delta_1 \varepsilon_{ij} {}^1dV = \int_{A_\sigma} {}^2t_i (\delta u_i + \delta \tilde{u}_i) {}^1dA_\sigma, \quad (4)$$

gdje  $S_{ij}$  predstavlja drugi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja,  $t_i$  površinske ili kontaktne sile,  $\varepsilon_{ij}$  Green-Lagrangeov tenzor deformacija, a  $u_i$  i  $\tilde{u}_i$  primarne i sekundarne komponente nelinearnog polja pomaka poprečnog presjeka [6]. U izrazu (4) lijevi gornji indeks označava konfiguraciju u kojoj se fizikalna veličina pojavljuje, a lijevi donji indeks predstavlja konfiguraciju u odnosu na koju je fizikalna veličina definirana. Pritom indeks 1 označava konfiguraciju  $C_1$ , a indeks 2 konfiguraciju  $C_2$ .

Linearizacijom izraza (4), princip virtualnih radova moguće je zapisati kao:

$$\delta\mathcal{U}_E + \delta\mathcal{U}_G = \delta_1^2\mathcal{W} - \delta_1^1\mathcal{W}, \quad (5)$$

gdje prvi član s lijeve strane znaka jednakosti predstavlja virtualnu inkrementalnu potencijalnu energiju deformiranja:

$$\delta\mathcal{U}_E = \int_V {}^1S_{ij} \delta_1 e_{ij} {}^1dV = (\delta\mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_E^e \mathbf{u}^e, \quad (6)$$

drugi član virtualni inkrementalni geometrijski potencijal:

$$\delta\mathcal{U}_G = \int_V {}^1S_{ij} (\delta_1 \eta_{ij} + \delta_1 \tilde{e}_{ij}) {}^1dV - \int_{A_\sigma} {}^1t_i \delta \tilde{u}_i {}^1dA_\sigma = (\delta\mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_G^e \mathbf{u}^e, \quad (7)$$

dok članovi s desne strane znaka jednakosti predstavljaju virtualne radove vanjskih sila na kraju i početku inkrementa, tj.:

$$\delta_1^2\mathcal{W} = \int_{A_\sigma} {}^2t_i \delta u_i {}^1dA_\sigma = (\delta\mathbf{u}^e)^T {}^2\mathbf{f}^e; \quad (8)$$

$$\delta_1^1\mathcal{W} = \int_V {}^1S_{ij} \delta_1 e_{ij} {}^1dV = (\delta\mathbf{u}^e)^T {}^1\mathbf{f}^e.$$

U gornjim izrazima  $\mathbf{k}_E^e$  i  $\mathbf{k}_G^e$  predstavljaju elastičnu (linearnu) i geometrijsku (nelinearnu) matricu krutosti konačnog elementa.

Povratom se izraza (6)-(8) u izraz (5) dobivaju inkrementalne ravnotežne jednačbe konačnog elementa:

$$\mathbf{k}_T^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e; \quad \mathbf{k}_T^e = \mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e; \quad \mathbf{f}^e = {}^2\mathbf{f}^e - {}^1\mathbf{f}^e, \quad (9)$$

pri čemu, sada,  $\mathbf{f}^e$  predstavlja vektor inkrementalnih čvornih sila. Sukladno izrazu (9), čvorne sile na kraju inkrementalnog koraka iznose:

$${}^2\mathbf{f}^e = {}^1\mathbf{f}^e + \mathbf{f}^e = {}^1\mathbf{f}^e + \mathbf{k}_T^e \mathbf{u}^e. \quad (10)$$

gdje je  $\mathbf{k}_T^e$  elastična tangentna matrica krutosti. Jasno, vektor  ${}^2\mathbf{f}^e$  sadrži komponente čvornih sila konačnog elementa u konfiguraciji  $C_2$ , ali pravci kojih su paralelni s pravcima osi konačnog elementa u konfiguraciji  $C_1$ . Stoga komponente tog vektora ne možemo smatrati generaliziranim silama. Da bismo odredili vektor  ${}^2\mathbf{f}^e$ , a čije komponente djeluju na pravcima osi konačnog elementa u konfiguraciji  $C_2$ , u ovoj će analizi biti uporabljene dva pristupa.

Prvi je tzv. EA (elementary approach) pristup [7]:

$${}^2\mathbf{f}^e = \mathbf{t}_{12}^e \left( {}^1\mathbf{f}^e + \mathbf{k}_T^e \mathbf{u}^e \right). \quad (11)$$

gdje je  $\mathbf{t}_{12}^e$  transformacijska matrica koja izraz (10) transformira iz konfiguracije  $C_1$  u  $C_2$ . Ovaj pristup ne narušava simetričnost elastične tangentne matrice krutosti elementa, ali zahtjeva uporabu manjih inkrementalnih koraka tijekom proračuna jer djelomično zanemaruje pomake konačnog elementa kao krutog tijela.

Drugi je tzv. ESA (external stiffness approach) pristup [6]:

$${}^2\mathbf{f}^e = {}^1\mathbf{f}^e + \mathbf{f}^e = {}^1\mathbf{f}^e + \left( \mathbf{k}_T^e - \mathbf{k}_{Ext}^e \right) \mathbf{u}^e, \quad (12)$$

pri čemu  $\mathbf{k}_{Ext}^e$  predstavlja tzv. eksternu matricu krutosti, a čijim se uvođenjem u potpunosti anulira utjecaj pomaka konačnog elementa kao krutog tijela. Ovaj je pristup, za razliku od prethodnog, jednostavniji za primjenu jer umjesto množenja

matrica imamo oduzimanje, on dopušta rad s većim inkrementalnim koracima tijekom proračuna, međutim eksterna matrica krutosti narušava simetričnost elastične tangentne krutosti elementa.

Ukoliko se, pak, kod konačnog elementa pojavljuju i plastične deformacije, tada je vektor inkrementalnih čvornih sila konačnog elementa:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}_{T,EP}^e \mathbf{u}^e, \quad (13)$$

gdje je  $\mathbf{k}_{T,EP}^e$  elastoplastična tangentna matrica krutosti konačnog elementa, a koja se kod primjene EA pristupa određuje prema izrazu:

$$\mathbf{k}_{T,EP}^e = \mathbf{k}_T^e - \mathbf{k}_P^e, \quad (14)$$

a kod ESA pristupa:

$$\mathbf{k}_{T,EP}^e = \mathbf{k}_T^e - \mathbf{k}_{Ext}^e - \mathbf{k}_P^e. \quad (15)$$

U izrazima (14) i (15)  $\mathbf{k}_P^e$  predstavlja tzv. plastičnu redukcijsku matricu konačnog elementa [4, 7]. Primjena ove matrice pretpostavlja da se materijal konstrukcije u području elastoplastičnih deformacija ponaša kao idealno plastičan, da su sve plastične deformacije koncentrirane u plastičnim zglobovima nulte duljine te da postoji kontinuirana i konveksna funkcija tečenja [8]:

$$\Phi(\mathbf{f}^e) = 1. \quad (16)$$

Iz ove se funkcije, potom, dobiva gradijentna matrica:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_B \end{bmatrix}, \quad (17)$$

gdje je:

$$\mathbf{G}_i^T = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_{zi}}, \frac{\partial \Phi}{\partial F_{xi}}, \frac{\partial \Phi}{\partial F_{yi}}, \frac{\partial \Phi}{\partial M_{zi}}, \frac{\partial \Phi}{\partial M_{xi}}, \frac{\partial \Phi}{\partial M_{yi}}, \frac{\partial \Phi}{\partial M_{oi}} \right\}; \quad i = A \text{ ili } B. \quad (18)$$

Plastičnu redukcijsku matricu sada iznosi:

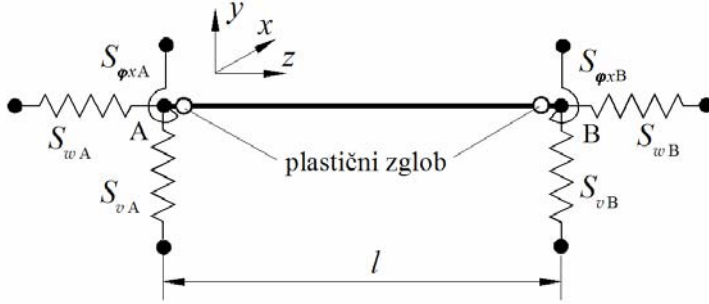
$$\mathbf{k}_P^e = \mathbf{k}_T^e \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \mathbf{k}_T^e \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{k}_T^e \quad (19)$$

prema EA pristupu, odnosno prema ESA pristupu.:

$$\mathbf{k}_P^e = (\mathbf{k}_T^e - \mathbf{k}_{Ext}^e) \mathbf{G} \left[ \mathbf{G}^T (\mathbf{k}_T^e - \mathbf{k}_{Ext}^e) \mathbf{G} \right]^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{k}_T^e - \mathbf{k}_{Ext}^e). \quad (20)$$

### 3 HIBRIDNI (SR) KONAČNI ELEMENTA

Za modeliranje polukrutih spojeva, u ovoj će analizi biti uporabljen hibridni ili SR konačni element, a koji se sastoji od konvencionalnog elementa sa slike 1 i sustava translacijskih i rotacijskih opruga nulte duljine, svaka krutosti  $S_i$ . Pomoću ovog sustava opruga konačni se element *polukruto* (fleksibilno) veže za susjedne elemente. Krutost svake opruge odgovara krutosti spoja za pojedini stupanj slobode gibanja čvora konačnog elementa, a deformacije opruge odgovara relativnoj deformaciji spoja, odnosno čvora. Na slici 2 prikazan je jedan takav SR element za analizu ravninskih grednih konstrukcija.



Sl. 2. Hibridni (SR) gredni konačni element

Vektor inkrementalnih čvornih pomaka konvencionalnog konačnog elementa jednak je razlici inkrementalnih pomaka SR elementa i pomaka uzrokovanih inkrementalnim deformacijama opruga, tj.:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}_{SR}^e - \mathbf{u}_r^e, \quad (21)$$

Vektor inkrementalnih čvornih sila konačnog elementa moguće je sada definirati kao:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{S}^e \mathbf{u}_r^e, \quad (22)$$

pri čemu matrica  $\mathbf{S}^e$  sadrži tangentne krutosti opruga koje vežu pojedine čvorne sile za pojedine stupnjeva slobode gibanja. Ukoliko ne postoji interakcija između pojedinih stupnjeva slobode,  $\mathbf{S}^e$  postaje dijagonalnom matricom [9]:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^e &= \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{S}}_A^e & \mathbf{S}_B^e & \mathbf{S}_\omega^e \\ \mathbf{S}_i^e & \overline{\mathbf{S}}_i^e & \mathbf{S}_{\phi i}^e \\ \mathbf{S}_\omega^e & \mathbf{S}_{\theta i}^e & \overline{\mathbf{S}}_{\theta i}^e \end{bmatrix}, \quad (i = A, B), \\ \mathbf{S}_i^e &= \begin{bmatrix} \overline{S}_{wi} & S_{ui} & S_{vi} & S_{\phi zi} & S_{\phi xi} & \overline{S}_{\phi yi} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{S}_\omega^e &= \begin{bmatrix} \overline{S}_{\theta A} & S_{\theta B} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

Ukoliko su krutosti spojeva nelinearne, matricu  $\mathbf{S}^e$  potrebno je izračunati na početku svakog pojedinog inkrementalnog koraka.

Vratimo li, sada, izraz (22) u (21), slijedi:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}_{SR}^e - (\mathbf{S}^e)^{-1} \mathbf{f}^e, \quad (24)$$

a što povratom u izraza (13) daje:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}_{T,EP}^e \left[ \mathbf{u}_{SR}^e - (\mathbf{S}^e)^{-1} \mathbf{f}^e \right], \quad (25)$$

odnosno:

$$\mathbf{f}^e = (\mathbf{T}_{SR}^e)^{-1} \mathbf{k}_{T,EP}^e \mathbf{u}_{SR}^e, \quad (26)$$

gdje je:

$$\mathbf{T}_{SR}^e = \mathbf{I} + \mathbf{k}_{T,EP}^e (\mathbf{S}^e)^{-1}, \quad (27)$$

inkrementalna transformacijska matrica koja konvencionalni konačni element transformira u SR element.  $\mathbf{I}$  predstavlja jediničnu matricu dimenzija  $14 \times 14$ . Matricu  $\mathbf{T}_{SR}^e$  potrebno odrediti na početku svakog inkrementalnog pomaka sukladno karakteristikama spoja.

## 4 ZAKLJUČAK

U radu je prikazana UL inkrementalna formulacija inkrementalnih ravnotežnih jednadžbi tankostijenog grednog konačnog elementa s polukrutim čvornim vezama. U okviru toga, izvedena je tangentna matrica krutosti konvencionalnog i hibridnog (SR) elementa za elastični i elastoplastični slučaj. Plastične deformacije modelirane su primjenom metode plastičnih zglobova, dok su polukruti spojevi modelirani sustavom opruga pridodanih u čvorovima elementa. Hibridni element dobiven je transformacijom konvencionalnog elementa, a u tu je svrhu izvedena posebna inkrementalna transformacijska matrica.

Budući rad na ovoj problematici obuhvatit će implementaciju prikazanog numeričkog algoritma u računalni program za analizu nelinearnog odziva grednih konstrukcija s polukrutim vezama te njegovu verifikaciju.

### Literatura:

- [1] Urbonas, K., Daniūnas, A., "Behaviour of Semi-rigid Steel Beam-to-beam Joints under Bending and Axial Forces", Journal of Constructional Steel Research, Vol. 62, No. 12, 2006, str. 1244-1249.
- [2] Chen, W. F., Lui, E. M., "Practical Analysis for Semi-Rigid Frame Design", World Scientific Publishing Company, Singapore, 2000.
- [3] Chan, S. L., Chui, P. P. T., "Non-linear Static and Cyclic Analysis of Steel Frames with Semi-rigid Connections", Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [4] Turkalj, G., Brnić, J., "Nonlinear Stability Analysis of Thin-walled Frames", International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 4, No. 1., 2004, str. 45-67.
- [5] Yang, Y. B., Kuo, S. R., "Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures", Prentice Hall, New York, 1994.
- [6] Turkalj, G., Brnić, J., Prpic Orsic, J., "Large Rotation Analysis of Elastic Thin-walled Beam-types Structures using ESA Approach", Computers & Structures, Vol. 81, 2003, str. 1851-1864.
- [7] McGuire, W., Gallagher, R. H., Ziemian, R. D., "Matrix Structural Analysis", John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [8] Turkalj, G., Brnić, J., Prpić-Oršić, J., "ESA Formulation for Large Displacement Analysis of Framed Structures with Elastic-plasticity", Computers & Structures, Vol. 82, 2004, str. 2001-2034.
- [9] Turkalj, G., Vizentin, G., Lanc, D., "Finite Element Modelling of the Behaviour of Connections in the Stability Analysis of Thin-walled Beam-type Structures", Transactions of FAMENA, Vol. 31, No. 1, 2007, str. 25-36.

### Autori:

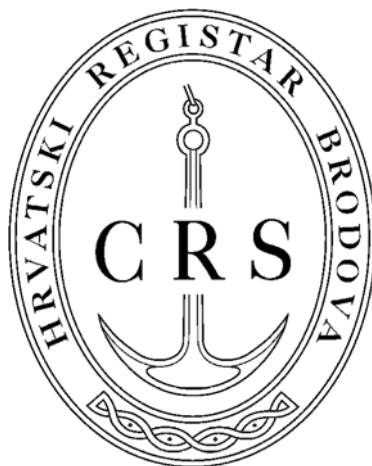
**Goran Turkalj**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 499, fax 051 651 490, e-mail: [goran.turkalj@riteh.hr](mailto:goran.turkalj@riteh.hr), web stranica: [www.riteh.hr/ustroj/ztm/](http://www.riteh.hr/ustroj/ztm/)

**Domagoj Lanc**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, tel. 051 651 495, fax 051 651 490, e-mail: [dlanc@riteh.hr](mailto:dlanc@riteh.hr), web stranica: [www.riteh.hr/ustroj/ztm/](http://www.riteh.hr/ustroj/ztm/)

## INDEKS AUTORA

Balić, I. ....	85
Brčić, M. ....	1
Brnić, J. ....	1
Čanadija, M. ....	1
Domazet, Ž. ....	43
Dražković, Z. ....	7
Galić, I. ....	13
Galić, M. ....	19
Hoster, J. ....	31
Hursa, A. ....	79
Jarak, T. ....	31
Krstulović-Opara, L. ....	43
Krščanski, S. ....	1
Lanc, D. ....	97
Lozina, Ž. ....	37
Maratović, M. ....	67
Marendić, P. ....	43
Marenić, E. ....	49
Marović, P. ....	19
Mihanović, A. ....	55, 61, 85
Nikolić, Ž. ....	19, 55, 61
Sedlar, D. ....	37
Skoblar, A. ....	67
Skozrit, I. ....	49, 73
Smoljanović, H. ....	55
Sorić, J. ....	31
Šomodi, Ž. ....	79
Tonković, Z. ....	13, 49, 73
Trogrlić, B. ....	85
Turkalj, G. ....	97
Veljača, T. ....	43
Vučina, D. ....	37
Vučković, K. ....	13
Vukelić, G. ....	1
Žigulić, R. ....	67
Živaljić, N. ....	61

## Sponzori



Turistička zajednica Grada Splita

Turistička zajednica Županije Splitsko-dalmatinske

ISBN 953-7539-00-6



9 789537 539016

Na slici je prikazana tenda na kupališnom kompleksu Bačvice

ZBORNIK RADOVA DRUGOG SUSRETA HRVATSKOGA DRUŠTVA ZA MEHANIKU