

ZBORNİK RADOVA 11. susreta Hrvatskog društva za mehaniku

**HDM**   
HRVATSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKU  
ZAGREB - OSIJEK - RIJEKA - SL. BROD - SPLIT

# ZBORNİK RADOVA

11. susreta Hrvatskog društva za mehaniku

**Urednici:** Marino Brčić / Ante Skoblar / Dragan Ribarić

ISSN 1846-9701



9 771846 970000

Rijeka, 16. - 17. rujna 2021.



POKROVITELJI:



Sveučilište u Rijeci - Tehnički fakultet



Sveučilište u Rijeci

SPONZORI:



CADCAM Grupa d.o.o., Zagreb



Centar za vozila Hrvatske d.d., Zagreb



Feroplast d.o.o., Buje



Proplan d.o.o., Rijeka

OBLIKOVANJE:



Kreativ Media Grupa d.o.o., Rijeka



ZBORNIK RADOVA JEDANAESTOG SUSRETA HRVATSKOG DRUŠTVA  
ZA MEHANIKU

Urednici: Marino Brčić  
Ante Skoblar  
Dragan Ribarić

Izdavač: Hrvatsko društvo za mehaniku

Oblikovanje: Marino Brčić  
Kreativ Media Grupa d.o.o.

Tisak: Grafika Helvetica d.o.o.

Naklada: 120 kom.

ISSN 1846-9701



ZBORNİK RADOVA

JEDANAESTOG SUSRETA  
HRVATSKOG DRUŠTVA ZA MEHANIKU

*Rijeka, 16. – 17. rujna 2021. godine*

**Urednici:**

Marino Brčić  
Ante Skoblar  
Dragan Ribarić



ISSN 1846-9701



**ORGANIZACIJSKI ODBOR:**

Izv. prof. dr. sc. **Marino Brčić**, Sveučilište u Rijeci Tehnički fakultet, **predsjednik Organizacijskog odbora**

Prof. dr. sc. **Zdenko Tonković**, Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje, **predsjednik Društva**

Doc. dr. sc. **Ivica Skozrit**, Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje, **tajnik Društva**

Prof. dr. sc. **Marko Čanađija**, Sveučilište u Rijeci Tehnički fakultet

Izv. prof. dr. sc. **Dragan Ribarić**, Sveučilište u Rijeci Građevinski fakultet

Doc. dr. sc. **Ante Skoblar**, Sveučilište u Rijeci Tehnički fakultet

Izv. prof. dr. sc. **Davorin Penava**, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek, dopredsjednik Društva

**ORGANIZATOR:**

Hrvatsko društvo za mehaniku  
Podružnica Rijeka  
Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci  
Vukovarska 58  
51 000 Rijeka

**SJEDIŠTE:**

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet strojarstva i brodogradnje  
Ivana Lučića 5  
10 000 Zagreb

**POKROVITELJI:**

Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci  
Sveučilište u Rijeci

**SPONZORI:**

CADCAM Grupa d.o.o., Zagreb  
Centar za vozila Hrvatske d.d., Zagreb  
Feroplast d.o.o., Buje  
Proplan d.o.o., Rijeka

## **Predgovor:**

Poštovani čitatelji,

velika nam je čast predstaviti Vam zbornik radova 11. susreta Hrvatskog društva za mehaniku, održanog u organizaciji podružnice Hrvatskog društva za mehaniku u Rijeci. Usprkos globalnoj pandemijskoj situaciji, uspjeli smo održati ove susrete u klasičnom, normalnom načinu, uživo na Tehničkom fakultetu Sveučilišta u Rijeci, a posebno raduje činjenica da je i ove godine zaprimljen te izložen velik broj radova – ukupno 50 cjelovitih radova.

Valja napomenuti da su autori i koautori radova doktorandi zaposleni na fakultetima ali i u gospodarstvu, poslijedoktorandi, studenti diplomskih studija te istraživači u znanstveno – nastavnom zvanju. U radovima prevladavaju teme iz područja mehanike čvrstih tijela i mehanike fluida, ali i polimernih materijala, kompozita i nanomaterijala. Kao i na ranijim susretima, i ove godine su najviše zastupljeni radovi koji uključuju analitičke i numeričke metode, no veseli i povećani broj radova temeljenih na eksperimentalnoj analizi.

Prilikom uređivanja zbornika radova nije provedena lektura radova te urednici nisu odgovorni za eventualne pogreške.

Iskoristit ćemo ovu priliku da pozovemo i potaknemo članove Društva na međusobnu suradnju, za koju smatramo da se može podići na još višu razinu.

Na kraju, hvala svim sudionicima susreta i autorima dostavljenih radova. Posebna velika zahvala ide sponzorima i pokroviteljima na pruženoj potpori!

Organizacijski odbor 11. susreta HDMa



## SADRŽAJ:

|   |     |
|---|-----|
| NUMERIČKA ANALIZA SILOSA ZA SKLADIŠTENJE ŽITARICA .....   | 1   |
| USPOREDBA BIOMEHANIČKE STABILNOSTI DHS VIJAKA RAZLIČITIH POPREČNIH PRESJEKA .....                                   | 9   |
| UTVRĐIVANJE SVOJSTVA PRIONJIVOSTI IZMEĐU ČELIKA I POLIMERNE PJENE PROVEDBOM TESTA SAVIJANJA KOMPOZITNOG PANELA..... | 17  |
| NELINEARNA ANALIZA STABILNOSTI GREDNIH KONSTRUKCIJA S KOMPOZITNIM POPREČNIM PRESJEKOM .....                         | 25  |
| PREGLED OPTIMIZACIJSKIH METODA U KONSTRUKCIJI HODAJUĆIH MEHANIZAMA ..   | 33  |
| JEDNOSTRUKU UGLJIKOVE NANOCIJEVI: SIMULACIJE MOLEKULARNOM DINAMIKOM I MODELIRANJE STROJNIM UČENJEM .....            | 41  |
| ANALIZA MIJEŠANJA FLUIDA U PRISUTNOSTI NESIGURNOSTI.....  | 45  |
| O VEKTORU POLOŽAJA U NEEUKLIDSKIM PROSTORIMA.....   | 53  |
| EKSPERIMENTALNO ISPITIVANJE DINAMIČKOG ODZIVA DUGAČKE GREDNE KONSTRUKCIJE NA VIŠESTRUKU POBUDU OSLONACA .....       | 61  |
| TROČVORNI MEMBRANSKI KONAČNI ELEMENTI S ROTACIJSKIM STUPNJEVIMA SLOBODE .....                                       | 69  |
| ANALIZA GEOMETRIJSKI NELINEARNOG MIKROPOLARNOG KONTINUUMA METODOM KONAČNIH ELEMENATA U 3DT) .....                   | 77  |
| FRONTA PUKOTINE NA LIJEPLJENOM SPOJU ALUMINIJSKIH PLOČA.....  | 85  |
| POLUŽNI MEHANIZMI S KONSTANTNOM POGONSKOM SILOM.....  | 93  |
| NUMERIČKO MODELIRANJE DEFORMIRANJA MIKROSTRUKTURE SINTERIRANOG ČELIKA (12PT) .....                                  | 101 |
| ADAPTIVNA METODA FAZNOG POLJA ZA ANALIZU KRHKOG LOMA .....  | 109 |
| VIŠERAZINSKO MODELIRANJE VLAČNOG TESTA NODULARNOG LIJEVA .....  | 117 |
| ANALIZA NAPREZANJA U ELEMENTIMA CILINDRIČNOG ZGLOBA: RAZLIČITE OPCIJE RUBNIH UVJETA U MKE .....                     | 125 |
| 1D ŠTAPNI KONAČNI ELEMENTI GENERIRANI DUBOKIM UČENJEM.....  | 133 |
| DERIVACIJSKE MATRICE U MEHANICI – ANALITIČKI PRISTUP .....  | 137 |
| NUMERIČKA ANALIZA SUDARA OSOBNOG AUTOMOBILA U DEFORMABILNU BARIJERU .....   | 145 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>GREDNI MODEL ZA NUMERIČKU ANALIZU TOPLINSKOG IZVIJANJA FG GREDNIH NOSAČA</b><br>.....   | 151 |
| <b>NUMERIČKO ISTRAŽIVANJE INTERAKCIJE MALIH VODNIH TURBINA I DINAMIKE<br/>RIJEČNOG SEDIMENTA</b> .....   | 157 |
| <b>ISPITIVANJE KOMPOZITNOG PANELA NA SAVIJANJE S CILJEM UTVRĐIVANJA SVOJSTVA<br/>PRIONJIVOSTI OBLOGE I JEZGRE PANELA</b> .....                     | 165 |
| <b>UKLJUČIVANJE PRAKTIČNE KOMPONENTE U NASTAVU IZ TOPOLOŠKOG OPTIMIRANJA<br/>NOSIVIH KONSTRUKCIJA</b> .....  | 173 |
| <b>METODOLOGIJA ODREĐIVANJA KRIVULJA POTRESNERANJIVOSTI KAMENIH ZIDANIH<br/>ZGRADA</b> .....   | 181 |
| <b>MODELIRANJE OŠTEĆENJA U PIEZOELEKTRIČNIM MATERIJALIMA PRIMJENOM<br/>REŠETKASTOG MODELA</b> .....  | 189 |
| <b>ČISTO SAVIJANJE UZORAKA SA UNUTARNJOM STRUKTUROM</b> .....  | 195 |
| <b>OŠTEĆENJA DVORA TRAKOŠČAN TIJEKOM POTRESA <math>M \geq 5.5</math> U ZAGREBU I PETRINJI U<br/>2020. GODINI</b> .....                             | 201 |
| <b>TLAČNA ČVRSTOĆA TRADICIJSKIH ZIDOVA OD NABIJENE ZEMLJE: STUDIJA SLUČAJA IZ<br/>ALJMAŠA</b> .....  | 211 |
| <b>NUMERIČKO MODELIRANJE PROCESA RUPIČENJA METODOM FAZNOG POLJA</b> .....  | 219 |
| <b>EKSPERIMENTALNA ANALIZA I NUMERIČKO MODELIRANJE PONAŠANJA ASFALTNIH<br/>MJEŠAVINA</b> .....   | 227 |
| <b>VEZNI KINEMATIČKI ELEMENT S DVA ČVORA I NJEGOVA PRIMJENA NA USLOJENE<br/>KONSTRUKCIJE</b> .....   | 235 |
| <b>OPTIMIZACIJA SMJEŠTAJA OSJETNIKA VIBRACIJA</b> .....  | 243 |
| <b>UTJECAJ MALOG PRIGUŠENJA NA VIBRACIJE GREDE</b> .....   | 251 |
| <b>MODELIRANJE ELASTIČNOG PONAŠANJA POLIMETILMETAKRILATA PRIMJENOM<br/>NEURONSKE MREŽE</b> .....   | 259 |
| <b>EKSPERIMENTALNA I NUMERIČKA ANALIZA RASLOJAVANJA LIJEPLJENIH NOSAČA<br/>OVISNOG O BRZINI NANOŠENJA OPTEREĆENJA</b> .....                        | 269 |
| <b>NUMERIČKE SIMULACIJE HIDRAULIČKIH TRANZIJENATA U CHE FUŽINE</b> .....   | 277 |
| <b>NUMERIČKI POSTUPAK ODREĐIVANJA MATERIJALNIH PARAMETARA HIPERELASTIČNIH<br/>MATERIJALA IZ DVOOSNOG VLAČNOG TESTA NA KRIŽNIM EPRUVETAMA</b> ..... | 285 |
| <b>GEOMETRIJSKI TOČNI 3D GREDNI ELEMENT - SE(3) FORMULACIJA</b> .....  | 293 |
| <b>DEM SIMULACIJA DOSER BLADE ALATA</b> .....  | 299 |

|   |     |
|---|-----|
| ODREĐIVANJE MIKROMEHANIČKIH SVOJSTAVA SINTERIRANOG ČELIKA<br>INSTRUMENTIRANOM INDENTACIJOM.....                       | 307 |
| UTJECAJ MEHANIČKIH SVOJSTAVA ARTERIJE I PLAKA NA NAPREZANJA U STIJENCI<br>NAKON UGRADNJE STENTA .....                 | 315 |
| DINAMIČKA ANALIZA CIKLIČKE KIDALICE ZA <i>IN-SITU</i> ISPITIVANJA MATERIJALA UNUTAR<br>CT SKENERA .....               | 323 |
| NUMERIČKA ANALIZA I OPTIMIZACIJA DIZAJNA KORONARNOG STENTA.....   | 331 |
| NUMERIČKO MODELIRANJE VISOKOUČINKOVITOG ZAVARIVANJA DEBELIH PLOČA   | 339 |
| ISPITIVANJE OSJETLJIVOSTI PROMJENE GEOMETRIJSKIH ZNAČAJKI ISPITNOG UZORKA NA<br>RASPODJELU POSMIČNIH DEFORMACIJA..... | 347 |
| OPTIMIRANJE 3D MODELA ROBOTSKE RUKA ZA INSPEKCIJU CIJEVI CANDU<br>PAROGENERATORA .....                                | 355 |
| SMANJENJE RAČUNSKOG VREMENA POSTPROCESSINGA FEM REZULTATA KORIŠTENJEM<br>NEURONSKIH MREŽA.....                        | 363 |
| PRIMJENA <i>FIXED-POLE</i> INTERPOLACIJE U LINEARNOJ DINAMIČKOJ ANALIZI<br>TIMOŠENKOVE GREDE .....                    | 369 |
| RIZIK RUPTURE I MORFOLOGIJA ANEURIZME ABDOMINALNE AORTE .....   | 377 |



# Numerička analiza silosa za skladištenje žitarica

Abramović, L.<sup>1</sup> i Skozrit, I.<sup>2</sup>

## Sažetak

Tema rada je modeliranje i numerička analiza nosive konstrukcije silosa za žitarice. U uvodu su ukratko opisani silosi, njihova namjena, vrste te način projektiranja i problematika koja se javlja tijekom konstruiranja silosa. Napravljen je 3D model silosa u programskom paketu *Solidworks*. Sve dimenzije, geometrija i komponente silosa preuzete su iz kataloga tvrtke Polnet Sp. z o.o koja se bavi proizvodnjom različitih vrsta silosa. Tijekom modeliranja pojedinih komponenti konstrukcije napravljena su određena pojednostavljenja kako bi se ubrzala i olakšala numerička analiza. Pri tome su, naravno, napravljena samo ona pojednostavljenja koja ne utječu znatno na čvrstoću i stabilnost konstrukcije. Zatim je provedena verifikacija konačnih elemenata na jednostavnijem primjeru. Pri tome su se koristile različite vrste konačnih elemenata, a na temelju usporedbe konvergencije i točnosti rješenja odabrani su oni konačni elementi koji su najprikladniji za analizu silosa. Prije provođenja same analize izvršeni su analitički proračuni koji opisuju opterećenja koja djeluju na konstrukciju. Glavno i najveće opterećenje je ono koje se javlja uslijed težine uskladištenog materijala, a proračun tlakova koji djeluju na unutrašnje stijenke silosa proveden je prema normi EN 1991-4. Zatim, prema normi EN 1991-1-4:2005+A1 proveden je proračun za tlak koji nastaje uslijed djelovanja vjetra. Nakon određivanja svih opterećenja koja djeluju na silos, odabira prikladnih konačnih elemenata te modeliranja nosive konstrukcije silosa, provedena je numerička analiza silosa. Numerička analiza silosa izvršena je u programskom paketu *Abaqus* koji se temelji na metodi konačnih elemenata te je izvršena za slučaj najnepovoljnijeg opterećenja silosa. Nakon analize prikazani su i komentirani rezultati naprezanja i pomaka. Na kraju, temeljem analize i usporedbe rezultata izveden je zaključak [1].

**Ključne riječi:** silos, nosiva konstrukcija, uskladišteni materijal, tlak, numerička analiza, metoda konačnih elemenata

---

<sup>1</sup> **Luka Abramović, mag. ing. stroj.**, Poliol, Remetinečka cesta 7, 10000 Zagreb, e-mail: abramovic.luka95@gmail.com

<sup>2</sup> **Dr. sc. Ivica Skozrit, docent**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: ivica.skozrit@fsb.hr

## 1 Uvod

Silosu su spremnici koji se koriste u raznim industrijama i farmama za skladištenje rastresitih materijala koji su ključni u poljoprivredi, rudarstvu, kemijskoj i brodskoj industriji i slično. Većinom su sagrađeni od betona, čelika i aluminijske (rjeđe od drva ili polimera). Postrojenje koje sadrži više spremnika za skladištenje materijala koji tvore jednu cjelinu naziva se silos, dok se svaki pojedini spremnik naziva komora silosa. Međutim, radi jednostavnosti, često se i jedan zasebni spremnik naziva silos pa će se i u ovom radu rabiti taj termin. Dije se na lučke, pretovarne, mlinske i poljoprivredne silose, ovisno o namjeni, kapacitetu i trajanju skladištenja. Prema načinu gradnje, dije se na kružne, kvadratne, poligonalne. S obzirom na klase pouzdanosti, ovisno o pouzdanosti konstrukcije i različitim utjecajima otkazivanja konstrukcije prema [2] dije se na klase pouzdanosti 1, 2 i 3 ovisno o kapacitetu silosa. Danas europske norme donose podjelu silosa prema načinu proračuna vertikalnih zidova silosa, tj. prema vitkosti i prema postupku proračuna su [2] silosi velike vitkosti, silosi srednje vitkosti, zdepasti silosi i vrlo zdepasti silosi s ravnim dnom.

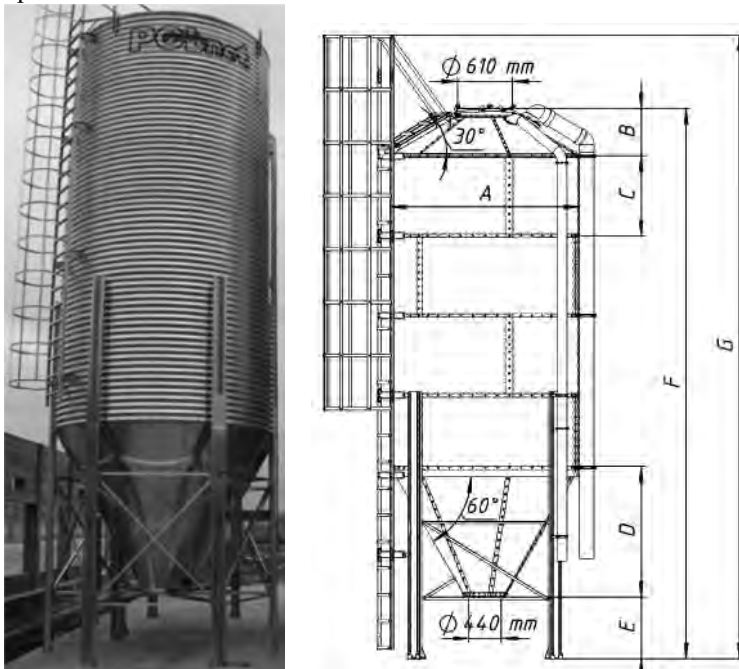
Veoma je teško predvidjeti ponašanje silosa uzimajući u obzir geometriju, uvjete oslanjanja i svojstva uskladištenog materijala. Većina otkazivanja konstrukcija silosa događa se na početku pražnjenja i uobičajeno dolazi do katastrofalnog kolapsa cijelog silosa. Osim tlakova koji djeluju na stijenke silosa te opterećenja uzrokovanih vjetrom i potresom, potrebno je uzeti u obzir i naprezanja nastala zbog temperaturne razlike između stijenki silosa i uskladištenog materijala [3, 4, 5].

Opterećenje tijekom pražnjenja znatno ovisi o načinu protoka uskladištenog materijala. Ovisno o načinu protoka materijala, tj. stvaranje svoda (tzv. zasvođavanje) preko otvora ispusta, formiranje cjevaste rupe kroz materijal i sam način protoka tijekom pražnjenja. Zasvođavanje ili formiranje cjevaste rupe povezano je s kohezivnošću materijala, a način protoka tijekom pražnjenja ovisi o kutu unutarnjeg trenja materijala i trenju koje se pojavljuje između materijala i stijenki silosa [4]. Načini protoka rastresite tvari pri pražnjenju silosa prema [4] su: masovni protok, dimnjački protok - cjevasti protok, mješoviti protok i prošireni protok.

U slučaju masovnog protoka, sav materijal u silosu je u pokretu tijekom pražnjenja. Mogućnost masovnog protoka javlja se samo kada su stijenke lijevka strme i glatke te ako se materijal prazni kroz cijeli otvor ispusta. Ako su stijenke lijevka plitke i hrapave, pojaviti će se dimnjački protok. Tada je u pokretu jedino dio materijala koji se nalazi iznad ili u okolini otvora. Uz način protoka, od iznimne je važnosti procijeniti je li protok centričan ili postoji ekscentricitet prilikom pražnjenja silosa. Budući da se u ovome radu razmatra slučaj masovnog protoka, nepravilni protok materijala nije detaljnije razmatran te je proračun opterećenja silosa proveden prema normi EN 1991-4: *Eurocode 1 – Actions on structures - Part 4: Silos and tanks* [2]. Na slici 1. prikazan je silos tvrtke Polnet Sp. z o.o. i opće dimenzije silosa [6, 7].

## 2 Geometrija silosa

Za modeliranje 3D modela silosa koristit će se programski paket *Solidworks* [8]. Sama geometrija te ostali podaci potrebni za modeliranje preuzeti su iz priručnika [7] poljske tvrtke Polnet sp. z o.o. Ovi silosi namijenjeni su za skladištenje rastresitog materijala gustoće do  $800 \text{ kg/m}^3$ . U poljoprivredi, materijali koji se skladište u silosima i zadovoljavaju traženi kriterij su: mješavina/granulat stočne hrane, ječam, brašno, kukuruz, soja, granulirana šećerna repa.



Slika 1. Silos tvrtke Polnet Sp. z o.o. i opće dimenzije silosa [6, 7]

Ovi silosi su proračunati prema standardima tako da izdrže opterećenje vjeta prve ( $20 \text{ m/s}$ ) i druge ( $24\text{--}30 \text{ m/s}$ ) zone u Poljskoj i karakteristično opterećenje od snijega do  $1,9 \text{ kN/m}^2$ . Svaki silos na dnu ima standardizirani otvor promjera  $440 \text{ mm}$  na koji se može priključiti pužni, vijčani ili lančani transporter poljske ili druge proizvodnje. Na krovu silosa je otvor, također standardiziranog promjera od  $610 \text{ mm}$ , a sam krov je montiran pod kutom od  $30$  stupnjeva kako bi spriječio nakupljanje vode ili snijega. Lijevak je konusnog oblika pod kutom od  $60$  stupnjeva i osigurava neometano istovarivanje materijala. Kako se s visinom silosa mijenja opterećenje na stijenke, tako se i proračunate debljine stijenki silosa s visinom mijenjaju.

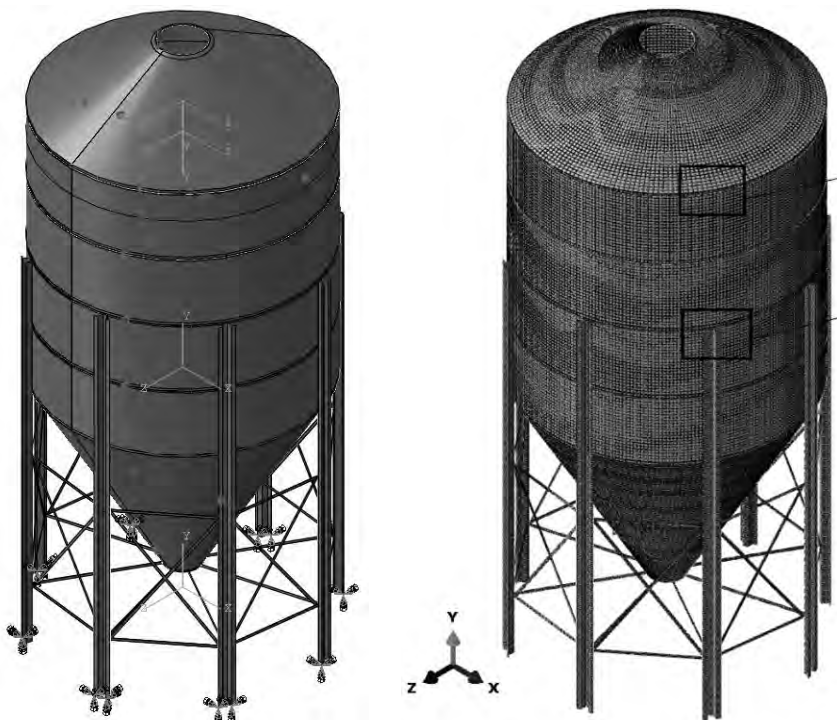
Prije numeričke analize, tijekom modeliranja 3D modela, bitno je pojednostaviti model kako bi se numerička analiza mogla što lakše i brže provesti. Pritom treba paziti,

naravno, da se pojednostave ili izbace samo oni konstrukcijski dijelovi i značajke koji neće znatno utjecati na rezultate analize. Dakle, veoma bitno je poznavati što se događa u cijeloj konstrukciji, kakva su opterećenja i koji dijelovi bespotrebno kompliciraju numeričku analizu.

### 3 Numerička analiza

Numerička analiza je provedena pomoću programskog paketa *Abaqus* koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Kako je silos sastavljen iz velikog broja dijelova dodijeljene su sve veze između pojedinih komponenti koje su međusobno na neki način spojene i daju stabilnost i čvrstoću konstrukciji. Na slici 2. prikazani su neki zadani rubni uvjeti te opterećenja kao normalni tlakovi i pripadni lokalni koordinatni sustavi. Kao opterećenja od pohranjenog materijala u silosu su dodijeljeni tlakovi na unutarnje stijenke. Opterećenje od snijega poznato je iz priručnika tvrtke Polnet gdje je naveden podatak o maksimalnom dopuštenom opterećenju. Opterećenje od vjetra izračunato je prema normi EN 1991-1-4:2005+A1 [9].

Za diskretizaciju silosa koristit će se heksaedarski konačni elementi drugog reda s reduciranom integracijom (C3D20R). Konačna mreža od 89853 konačna elementa prikazana je na slici 2.



Slika 2. Rubni uvjeti i opterećenje te mreža konačnih elemenata na silosu

Slika 3 prikazuje ekvivalentna naprezanja u silosu prema von Misesu u MPa. Deformirani oblik silosa je naravno karikiran, tj. uvećan za određeni faktor kako bi se lakše uočile velike deformacije i naprezanja.

Ako pogledamo maksimalno naprezanje, možemo primijetiti kako ono prelazi granicu tečenja za čelik S355 od kojeg je napravljen silos. Maksimalno naprezanje od oko 370 MPa pojavljuje se na preklopu dvaju cilindričnih segmenata koji se međusobno pričvršćuju vijcima. Na tom mjestu nalazi se i spoj cilindričnih segmenata s nogom silosa koja se pod utjecajem svih opterećenja savija prema unutra, odnosno prema središtu cilindra. Dakle, jasno je da će se ondje pojaviti koncentracija naprezanja. Međutim, ako promotrimo relevantne rezultate naprezanja u integracijskim točkama u elementima gdje se pojavljuje koncentracija naprezanja, možemo vidjeti kako je maksimalno naprezanje manje od 250 MPa što zadovoljava uvjet čvrstoće.

Na slike 3 vidljivo je da se donji segment podvlači pod gornji, a razlog je sprječavanje prodiranja vode u silos prilikom padanja kiše ili topljenja snijega. Zbog toga se rub donjeg segmenta silosa koji se podvlači pod gornji segment mora deformirati što uzrokuje spomenutu koncentraciju naprezanja na svim mjestima u silosu gdje je spoj dvaju segmenata i nogu silosa.



Slika 3. Ekvivalentna naprezanja prema von Misesu u MPa i amplituda pomaka u mm u silosu

Kako su stijenke krova najtanje u silosu i iznose samo 1 mm, potrebno je provjeriti i analizirati naprezanja u krovu. Najveća naprezanja su na otvoru krova, ali to je samo zbog

toga što u modelu ne postoji poklopac koji u stvarnosti učvršćuje krov na mjestu otvora i sprječava pojavu većih deformacija i naprezanja. Na spoju krova i cilindričnog odjeljka najveća naprezanja u integracijskim točkama iznose oko 95 MPa što zadovoljava uvjet čvrstoće.

Slika 3. prikazuje deformirani oblik cijele nosive konstrukcije silosa te raspodjelu pomaka u konstrukciji. Na slici se može vidjeti i maksimalni pomak u konstrukciji koji iznosi 13,5 mm. Na kraju, završetkom analize i proučavanjem rezultata možemo zaključiti kako je nosiva konstrukcija silosa stabilna i zadovoljava uvjet čvrstoće s faktorom sigurnosti  $S = 1,4$ . Također treba napomenuti kako su geometrija te pojedine komponente silosa pojednostavljene u svrhu lakšeg provođenja analize te uštede računalnog vremena.

## 4 Zaključak

U programskom paketu *Solidworks* modelirana, a zatim primjenom programskog paketa *Abaqus* koji se temelji na metodi konačnih elemenata numerički je analizirana nosiva konstrukcija silosa za žitarice. Potrebne dimenzije za modeliranje konstrukcije preuzete su iz kataloga tvrtke Polnet Sp. z o.o. Glavna opterećenja predstavljaju tlak koji se javlja uslijed težine pohranjenog materijala i težine snijega te tlak uslijed djelovanja vjetra.

Proračun za tlak od težine materijala proveden je prema normi EN 1991-4. Pri tome je bilo nužno poznavanje mehaničkih svojstava materijala koji se pohranjuje u silosu. Proračun za tlak od vjetra proveden je prema normi EN 1991-1-4:2005+A1. Za provedenu numeričku analiza nosive konstrukcije silosa analizirani su dobiveni rezultati, a mjesta pojave kritičnih naprezanja su uspoređena s pretpostavljenim kritičnim mjestima.

Velika koncentracija naprezanja javlja se i na spoju dvaju cilindričnih segmenata i kraja noge silosa. Ovdje je najopterećeniji donji cilindrični segment koji se podvlači pod gornji segment, a maksimalno naprezanje iznosi oko 250 MPa. Tu se također očekivano javlja koncentracija naprezanja zbog načina sklapanja same konstrukcije koja zahtijeva pred naprezanje stijenki prije opterećenja od uskladištenog materijala. Proučavanjem rezultata nogu silosa, ustanovljeno je najveće naprezanje od oko 215 MPa. Uslijed opterećenja od težine snijega i zbog male debljine stijenki, najveća naprezanja u krovu su oko 95 MPa što nije zanemarivo. Daljnjom analizom rezultata, pojava najvećeg pomaka u nosivoj konstrukciji nalazi se na mjestu spoja nogu i dvaju cilindričnih odjeljaka te iznosi 13,5 mm.

Na temelju provedene analize može se zaključiti kako je nosiva konstrukcija silosa za žitarice stabilna te zadovoljava uvjet čvrstoće i za najnepovoljniji slučaj opterećenja. Ipak, treba primijetiti da je pri tome faktor sigurnosti poprilično nizak ( $S = 1,4$ ). Iz toga je jasno da bilo kakvo dodatno nepredviđeno opterećenje, greška u montaži, kvaliteti materijala ili neka druga nepredviđena situacija može dovesti do katastrofalnog otkazivanja konstrukcije i pri tome ugroziti ljudske živote te uzrokovati velike troškove i gubitke. U ovom radu nisu uzeti u obzir faktori kao što je mogućnost pojave potresa, zatim kemijski procesi koji uzrokuju nagli porast temperature u silosu pri čemu može doći do samozapaljenja pohranjenog materijala i slično. Također, potrebno je napomenuti kako je numerička analiza provedena za silos s glatkim stijenkama cilindričnog dijela radi olakšavanja cijelog procesa zadavanja

ulaznih podataka u program. U stvarnosti, cilindrični dio je napravljen od valovitih limova što dodatno povećava čvrstoću same konstrukcije pa se na ovaj način nalazimo na strani sigurnosti. Teško je precizno uključiti sve faktore koji mogu utjecati na čvrstoću konstrukcije jer to iziskuje vrhunsko poznavanje problematike tijekom konstruiranja silosa. Upravo taj nedostatak znanja i želja za smanjenjem troškova izrade nerijetko dovode do ugrožavanja postojanosti konstrukcije i ljudskog života. Zbog navedenih problema postoji daljnja potreba za proučavanjem tog područja kako bi se korištenjem programskih paketa mogle provoditi analize pomoću kojih bi se gradili sigurniji i isplativiji silosi.

## Literatura

- [1] Abramović, Luka, Diplomski rad - Numerička analiza silosa za skladištenje žitarica; Fakultet strojarstva i brodogradnje; 2021; 96 str.
- [2] European Committee for Standardization (CEN) 2006. EN 1991-4: Eurocode 1 – Actions on structures - Part 4: Silos and tanks.
- [3] <https://www.dietmar-schulze.de/fre.html>
- [4] Skejić, D., Bolanča, M.: Projektiranje silosa s aspekta načina protoka materijala pri pražnjenju, Građevinski fakultet, Zagreb, 2013.
- [5] Tejchman, J.: Confined Granular Flow in Silos, Springer, Switzerland, 2013.
- [6] <https://www.polnet.pl/sites/default/files/paszowe-baner1.jpg>
- [7] [https://www.polnet.pl/sites/default/files/manual\\_for\\_polnet\\_silos\\_rev.2016-08-03\\_0.pdf](https://www.polnet.pl/sites/default/files/manual_for_polnet_silos_rev.2016-08-03_0.pdf)
- [8] Dassault Systemes Solidworks 2018 x64 Edition; <https://www.solidworks.com>
- [9] Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-4: General actions - Wind actions; <http://www.phd.eng.br/wp-content/uploads/2015/12/en.1991.1.4.2005.pdf>



# Usporedba biomehaničke stabilnosti DHS vijaka različitih poprečnih presjeka

Adamović, P.<sup>1</sup>, Sabalić, S.<sup>2</sup> i Kodvanj, J.<sup>3</sup>

## Sažetak

Učestalost komplikacija nakon osteosinteze vrata bedrene kosti iznosi i do 46%. Jedna od komplikacija je i avaskularna nekroza (AVN) koja se javlja u rasponu od 9% do 32%, ovisno o različitim biološkim i kirurškim čimbenicima. Druga moguća komplikacija je gubitak stabilnosti pozicije implantata s učestalošću 9% do 30%. Najčešći razlog gubitka stabilnosti je osteoporozna, a povećanjem primarne stabilnosti unutarnje fiksacije mogla bi se smanjiti učestalost navedene komplikacije.

Cilj ove studije je ispitivanje biomehaničke stabilnosti DHS vijka s četiri različita oblika poprečnog presjeka pod utjecajem dva različita iznosa opterećenja. Novi predloženi presjeci se do sada nisu koristili u medicinskoj praksi niti u konstrukciji implantata, već su preuzeti iz priručnika za konstruiranje presjeka poligonih osovina i vratila. Za dva iznosa opterećenja analizirani su rezultati maksimalnih von Mises naprezanja na vijku, maksimalnih pomaka glave femura i maksimalnih relativnih pomaka frakture femura dobiveni računalnim simulacijama metodom konačnih elemenata.

Rezultati su pokazali kako dva nova dosad neprimijenjena presjeka pokazuju izrazito bolju mehaničku stabilnost od dosada korištenog kružnog poprečnog presjeka i kao takvi mogli bi predstavljati novitet u proizvodnji implantata i liječenju prijeloma vrata bedrene kosti.

Na ovome mjestu dane su upute autorima za pisanje teksta rada namijenjenog objavi u okviru Zbornika radova 11. susreta Hrvatskog društva za mehaniku. Molimo autore neka za pisanje teksta rada koriste ovaj predložak uz navedene upute. Tekst rada započinje na drugoj stranici.

**Ključne riječi:** DHS vijak, naprezanje, metoda konačnih elemenata, biomehanička stabilnost, femur

---

<sup>1</sup> **Petra Adamović, mag. ing. mech.** Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Katedra za eksperimentalnu mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: petra.adamovic@fsb.hr

<sup>2</sup> **doc. dr. sc. Srećko Sabalić, dr. med.**, Klinika za traumatologiju, Klinički bolnički centar Sestre milosrdnice, Vinogradska cesta 29, 10000 Zagreb, e-mail: ssabalic@gmail.com

<sup>3</sup> **prof. dr. sc. Janoš Kodvanj, dipl. ing. stroj.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Katedra za eksperimentalnu mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: janos.kodvanj@fsb.hr

## 1 Uvod

Generiranje visokoenergijske traume u mladih pacijenata obično rezultira prijelomom vrata bedrene kosti [1]. Klasificiraju se na temelju stupnja vertikalnosti pomoću Pauwelove klasifikacije, pri čemu su prijelomi višeg stupnja prijelomi okomitije orijentacije. Zbog toga je za ovaj rad odabran najnepovoljniji slučaj spomenute klasifikacije, Pauwel tip III čiji je kut prijeloma oko  $70^\circ$  [2].

Jedan od ključnih čimbenika u liječenju ovih prijeloma je ostvarivanje stabilne fiksacije [3]. Međutim, kirurška fiksacija ovih prijeloma povezana je s izuzetno visokom stopom postoperativnih komplikacija od 30% do 40% [4], stoga je u literaturi provedeno nekoliko biomehaničkih studija kako bi se usporedila stabilnost fiksacije vertikalno orijentiranih prijeloma vrata bedrene kosti pomoću različitih osteosintetskih materijala. Husby i suradnici [5] testirali su kanulirane vijke, DHS vijak te Knowels klinove i nisu pronašli značajnu razliku dok su Baitner i suradnici [6] testirali kanulirane vijke i DHS vijak te pokazali da DHS vijak osigurava značajno bolju biomehaničku stabilnost. Postoji još nekoliko studija [7-9] na temelju kojih se ne može izvući jasan zaključak o superiornom izboru fiksacije, dakle potrebno je uvesti novi parametar koji će pomoći pri tom odabiru.

Ideja dolazi iz konstruiranja pogonskih sklopova. Naime, poligonalna vratila koriste se u prijenosnicima snage kao alternativa osovinama s perom i utorenim osovinama. Zbog dobrih geometrijskih svojstava presjeka takvih osovin, dva su odabrana za presjek DHS vijka iprovedbu računalnih simulacija stabilnosti prijeloma u ovoj studiji [10]. Rezultati su uspoređeni s rezultatima dobivenim s kružnim presjekom vijka i presjekom u obliku elipse.

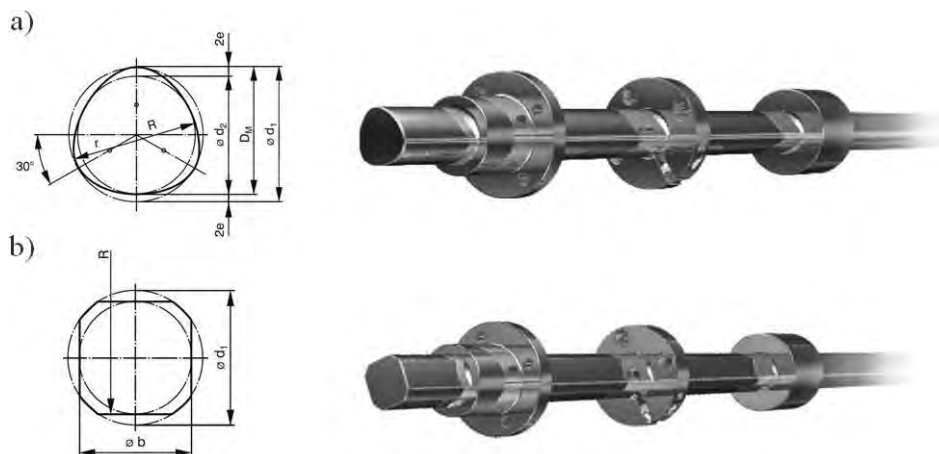
## 2 Materijali i metode

Kompozitni femur četvrte generacije (*Sawbones*, SAD) skeniran je metodom računalne tomografije u Kliničkom bolničkom centru Sestre Milosrdnice u Zagrebu. Njegova je geometrija nakon toga reproducirana u programskom paketu *Materialise Mimics* (*Materialise NV*, Belgija), a sklopovi kosti s vijcima su napravljeni u programskom paketu *SolidWorks* (*Dassault Systèmes*, Francuska). Rubni uvjeti i opterećenja su definirani u programskom paketu *Abaqus* (*Dassault Systèmes*, Francuska) koji je korišten za provedbu proračuna metodom konačnih elemenata.

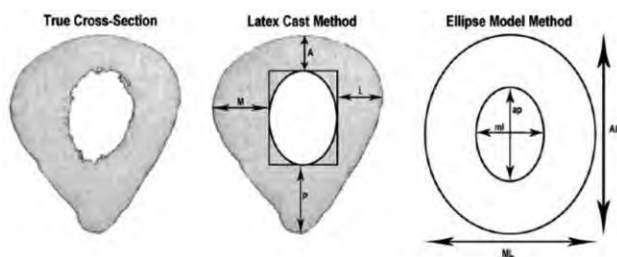
Sklop kosti sastoji se od kortikalnog koštanog tkiva s modulom elastičnosti 17000 MPa i trabekularnog koštanog tkiva s modulom elastičnosti 1100 MPa [11]. Sklop femura nastao je Boolean operacijom. DHS vijku dodijeljen je modul elastičnosti titana u iznosu 110 GPa. Za faktor trenja na površini frakture odabrano je 0,2 [12], dok su sve ostale veze definirane kao čvrste. Za opterećenje odabrane su sile iznosa 600 N i 1600 N. Opterećenje je narinuto vertikalno na acetabularni dio glave femura. Za mrežu konačnih elemenata odabran je tetraedarski konačni element drugog reda C3D10.

Kružni poprečni presjek DHS vijka odabran je za kontrolni model. Za ostala tri ispitna modela odabrani su elipsa, P3G (DIN 32711) i P4C (DIN 32712, slika 1). Promjer

kontrolnog modela je 6 mm, dok su za P3G i P4C odabrani nazivni promjeri također 6 mm. Za dimenzije poprečnog presjeka elipse prvo je odabran omjer poluosi iz [13] prikazan na slici 2, a iznos svake od poluosi zaokružen na cijeli broj je odabran na način da je površina presjeka elipse otprilike jednaka površini ostalih presjeka. Presjek na slici 2 predstavlja oblik elipse iz koje je preuzet omjer. Naslov ilustracije piše se ispod ilustracije, a naslov tablice iznad tablice.



Slika 1. Presjeci korišteni u računalnim simulacijama: a) P3G (DIN 32711) s dimenzijama presjeka osovina; b) P4C (DIN 32712) s dimenzijama presjeka osovina [14]



Slika 2. Presjek trupa femura [13]

### 3 Rezultati

Maksimalno von Mises naprezanje u vijku, maksimalni pomak glave femura te maksimalni relativni pomak frakture su odabrani parametri za analizu rezultata. Maksimalni relativni pomak frakture je parametar koji predstavlja pomak između dva čvorova na distalnoj i proksimalnoj strani frakture. Čvorovi su odabrani na način da je prvo odabrana ravnina koja je paralelna koronarnoj ravnini femura, a uz to sadrži točku maksimalnog pomaka glave femura. Rubovi koji su ostali na sklopu nakon rezanja vrata

femura definiranom ravninom su rubovi na kojima se nalaze dvije odabrane točke.

Rezultati računalnih simulacija za maksimalno von Mises naprezanje u vijku, maksimalni pomak glave femura te maksimalni relativni pomak frakture za sve presjeke te iznos sile 600 N prikazani su u tablici 1, a za iznos sile 1600 N u tablici 2. Raspodjela von Mises naprezanja na presjeku P3G vijka prikazana je na slici 3, raspodjela pomaka glave femura za presjek P3G prikazana je na slici 4, a raspodjela relativnih pomaka frakture snaznačenim najvećim iznosima presjeka P3G prikazana je na slici 5. Na slikama su mjesta maksimalnih vrijednosti označena kružićem i strelicom. Na svim slikama prikazane su raspodjele za silu 1600 N. Legenda na slici 4 se također može primijeniti i na sliku 5.

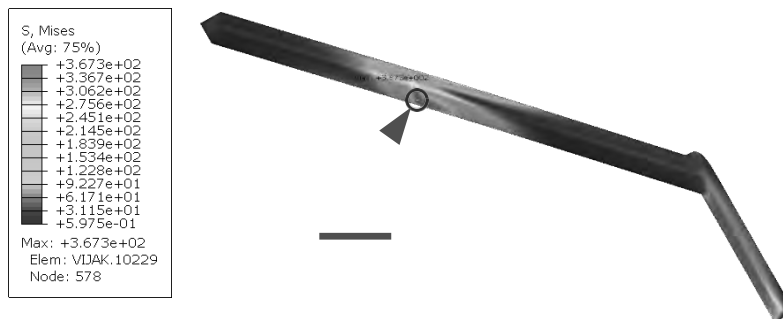
Na slici 3 prikazani su rezultati raspodjele naprezanja samo jednog od četiri presjeka, budući da se maksimalno naprezanje kod sva četiri presjeka vijaka pojavljuje na istom mjestu –kod donje strane frakturne pukotine. Na slici 4 je također prikazana raspodjela pomaka samo jednog presjeka vijka budući da je ona po tendenciji rasta jednaka za sve presjeke vijka. Mjesto pojavljivanja najvećeg pomaka se kod svih modela također nalazi uvijek na istom mjestu. Na slici 5a prikazana je raspodjela pomaka bedrene kosti i vijka s naznačenim maksimalnim iznosom, dok je na slici 5b izdvojen detalj s označenim čvorovima glave i tijela femura koji su odabrani za prikaz iznosa najvećeg relativnog pomaka frakture i koji su jednaki na svim ostalim sklopovima za iznos sile 1600 N. Za silu 600 N vrijede jednaka pravila.

Tablica 1. Rezultati računalnih simulacija za silu 600 N

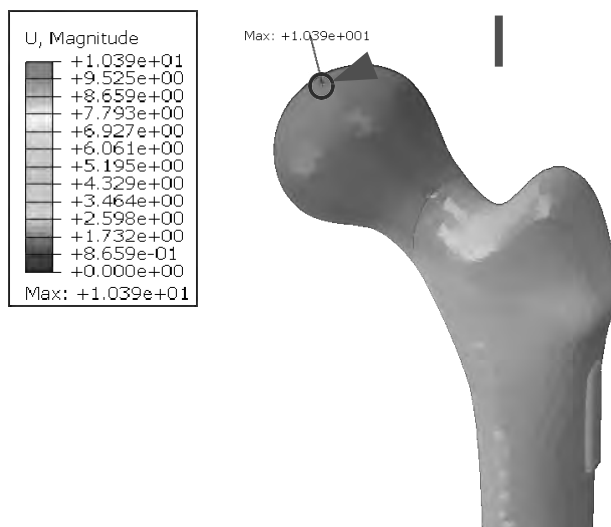
| Tip presjeka | Maksimalno von Mises naprezanje na vijku [MPa] | Maksimalni pomak glave femura [mm] | Maksimalni relativni pomak frakture femura [mm] |
|--------------|--|------------------------------------|---|
| P3G          | 138,9  | 4,146                              | 0,1653  |
| P4C          | 173,9  | 4,179                              | 0,2009  |
| Krug         | 354,4  | 4,373                              | 0,4153  |
| Elipsa       | 372,5  | 4,391                              | 0,4553  |

Tablica 2. Rezultati računalnih simulacija za silu 1600 N

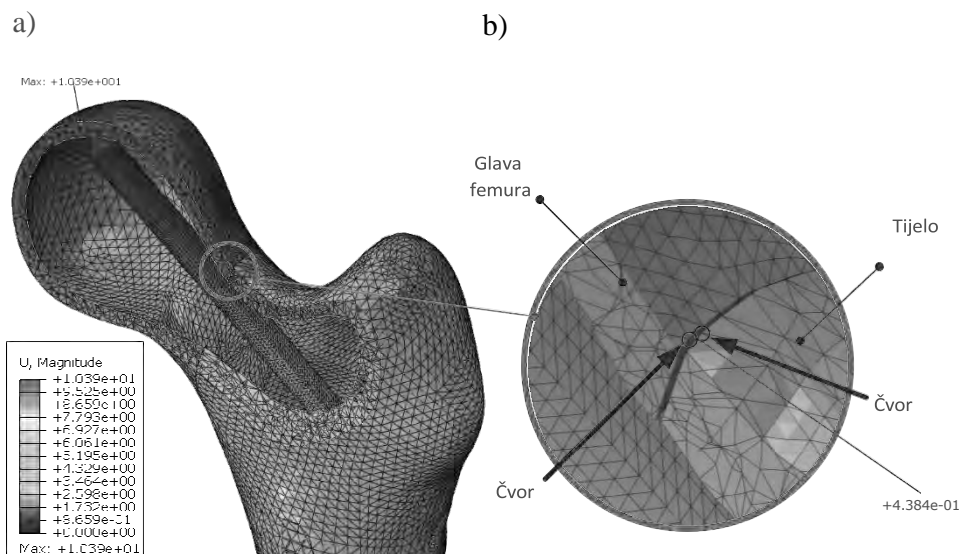
| Tip presjeka | Maksimalno von Mises naprezanje na vijku [MPa] | Maksimalni pomak glave femura [mm] | Maksimalni relativni pomak frakture femura [mm] |
|--------------|--|------------------------------------|---|
| P3G          | 367,3  | 10,390                             | 0,4384  |
| P4C          | 458,9  | 10,480                             | 0,5331  |
| Krug         | 940,1  | 11,234                             | 1,0670  |
| Elipsa       | 987,2  | 11,249                             | 1,1167  |



Slika 3. Raspodjela von Mises naprezanja na vijku s presjekom P3G za silu 1600 N (DIN 32711)



Slika 4. Raspodjela pomaka glave femura za vijak presjeka P3G za silu 1600 N (DIN 32711)



Slika 5. a) Raspodjela relativnih pomaka frakture za vijak presjeka P3G (DIN 32711) za silu 1600 N; b) detalj s prikazanim čvorovima za iznos relativnih pomaka

## 4 Zaključak

Cilj rada bio je usporediti biomehaničku stabilnost vijaka sa standardnim kružnim poprečnim presjekom i s novim predloženim poprečnim presjecima korištenim u proizvodnji vratila i osovina. Rezultati računalnih simulacija metodom konačnih elemenata su pokazali da presjeci tipa P3G i P4C svojim oblikom uvelike nadmašuju biomehaničku stabilnost kružnog poprečnog presjeka i to prema parametrima naprezanja u vijcima, pomaka glave femura te relativnog pomaka frakture femura. Presjek u obliku elipse postavljen na način da je njezina mala poluos paralelna s osi trupa femura pokazao je najlošije rezultate.

Rezultati ove studije pokazuju kako bi se proizvodnja DHS vijaka s predloženim poprečnim presjecima mogla uvelike pozitivno odraziti na biomehaničku stabilnost pri liječenju prijeloma vrata bedrene kosti visokih stupnjeva Pauwelove klasifikacije.

## Literatura

- [1] Robinson, C.M., Court-Brown, et al.; Hip fractures in adults younger than 50 years of age. Epidemiology and results; Clin Orthop Relat Res; 1995;238-246.
- [2] Bartonicek, J.; Pauwels' classification of femoral neck fractures: correct interpretation of the original; J Orthop Trauma; 2001;15;358-360.
- [3] Ly, T.V., Swionkowski, M.F.; Treatment of femoral neck fractures in young

- adults; *J Bone Joint Surg Am*; 2008;90:2254-2266.
- [4] Protzman, R.R., Burkhalter, W.E.; Femoral-neck fractures in young adults; *J Bone Joint Surg Am*; 1967; 58:689-695.
- [5] Husby, T., Alho, A., Høiseth, A. et al.; Strength of femoral neck fracture fixation. Comparison of six techniques in cadavers; *Acta Orthop Scand*; 1987;58:634-637.
- [6] Baitner, A.C., Maurer, S.G., Hickey, D.G., et al.; Vertical shear fractures of the femoral neck. A biomechanical study; *Clin Orthop Relat Res*; 1999;300-305.
- [7] Aminian, A., Gao, F., Fedoriw, W.W., et al.; Vertically oriented femoral neck fractures: mechanical analysis of four fixation techniques. *J Orthop Trauma*; 2007;21:544-548.
- [8] Nowotarski, P.J., Ervin, B., Weatherby, B, et al.; Biomechanical analysis of a novel femoral neck locking plate for treatment of vertical shear Pauwel's type C femoral neck fractures; *Injury*; 2012;46:802-806.
- [9] Knoke, M., Altgassen, S., Maier, K.J., et al.; Screw-blade fixation systems in Pauwels three femoral neck fractures: a biomechanical evaluation; *Int Orthop*; 2017;42:409-418.
- [10] Bhatta, R., Reffeor, W.; Comparison of load carrying capacity of three and four lobed polygonal shaft and hub connection for constant grinding diameter; Volume 9: Mechanics of Solids, Structures and Fluids; NDE, Diagnosis and Prognosis; 2016.
- [11] Rho, J.Y., et al.; Young's modulus of trabecular and cortical bone 368 material: Ultrasonic and microtensile measurements; *J Biomech*; 1993;26(2):111-119.
- [12] Zhou, L, Lin, J, Huang, A, Gan, W, Zhai , X, Sun, K, Huang, S, Li, Z.; Modified cannulated screw fixation in the treatment of Pauwels type III femoral neck fractures: A biomechanical study; *Clin Biomech*; 2020;74:103-110.
- [13] O'Neill, M.C., Ruff, C.B.; Estimating human long bone cross-sectional geometric properties: a comparison of noninvasive methods; *J Hum Evol*; 2004;47:221-235.
- [14] INKOMA katalog. <http://pdfs.findtheneedle.co.uk/14624.pdf> Preuzeto 24.8.2021.



# Utvrđivanje svojstva prionjivosti između čelika i polimerne pjene provedbom testa savijanja kompozitnog panela

Bakran, A.<sup>1</sup>, Krolo, P.<sup>2</sup> i Čeh, N.<sup>3</sup>

## Sažetak

Kompozitni paneli su strukture koje se sastoje od krute i čvrste površinske obloge odvojene debelom jezgrom manje čvrstoće i težine. Ovi elementi imaju višestruku primjenu kao što je avio, vojna i automobilska industrija, brodogradnja, građevinarstvo i dr. U građevinarstvu se kompozitni paneli uglavnom primjenjuju kao fasadni elementi za oblaganje građevinskih objekata. Kontinuiranim razvojem nastoji se osim dobrih izolacijskih svojstava, postići i nosiva svojstva za primjenu kompozitnih panela u funkciji glavnih konstrukcijskih elemenata. Kao jedan od prvih koraka u dostizanju tog cilja potrebno je osigurati dobru vezu između komponenata kompozitnog panela, odnosno čvrsto sprezanje obloge i jezgre.

U radu je prikazano laboratorijsko ispitivanje uzorka kompozitnog panela koji se sastoji od obloge izvedene od pocinčanog lima i jezgre od polimerne pjene. Testom savijanja cilj je odrediti svojstvo prionjivosti između obloge i jezgre. Ispitivanje je provedeno prema američkim normama ASTM C393/C393M-11 i ASTM D7250/7250M-20 te su kontaktnim i beskontaktnim metodama mjereni pomaci i deformacije na uzorku. Rezultati su pokazali zadovoljavajuću prionjivost obloge i jezgre.

**Ključne riječi:** kompozitni panel, čelik, polimerna pjena, prionjivost, test savijanjem, ASTM

---

<sup>1</sup> **Antonio Bakran, univ.bacc.ing.aedif.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski Fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: abakran@student.uniri.hr

<sup>2</sup> **doc.dr.sc. Paulina Krolo, dipl.ing.građ.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski Fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: paulina.krolo@uniri.hr

<sup>3</sup> **doc.dr.sc. Nina Čeh, mag.ing.aedif.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski Fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: nina.ceh@uniri.hr

## 1 Uvod

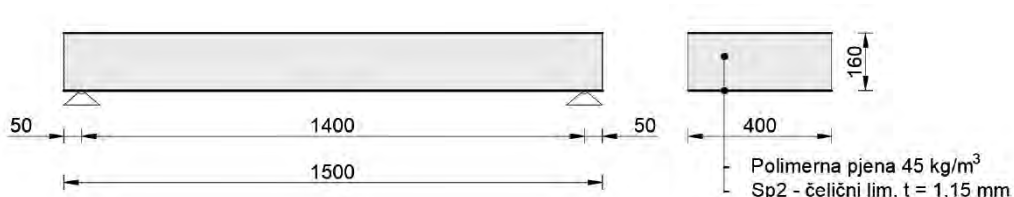
Kompozitni paneli, često nazivani sendvič panelima, strukture su koje se sastoje od tri glavna dijela. Dvije tanke, krute i čvrste površinske stijenke (obloge) odvojene su debelom jezgrom manje čvrstoće i težine. Kako bi se omogućio prijenos opterećenja među komponentama, obloge se pričvršćuju ljepilima za jezgru. Postoje i kompozitni paneli kod kojih se jezgra injektira u već odvojene obloge te se na taj način izostavlja uporaba ljepila. Uslijed opterećivanja panela, obloge se suprotstavljaju vanjskom momentu savijanja, dok se jezgra odupire poprečnim silama i stabilizira obloge u smislu izvijanja. Veza između obloga i jezgre mora biti dovoljno jaka kako bi se oduprla posmičnim i vlačnim naprezanjima između njih [1].

Svojstva prionjivosti između obloge i jezgre moguće je odrediti provođenjem dvaju ispitivanja, testom direktnog vlaka te testom savijanja. U ovom radu prikazano je ispitivanje savijanjem kompozitnog panela. Kako bi utvrdili svojstvo prionjivosti između obloge i jezgre panela, potrebno je osigurati najveći posmik u jezgri uz minimalno savijanje obloge. Analizirana su tri načina opterećivanja te je odabran način opterećivanja koji osigurava navedene kriterije.

## 2 Ispitivanje kompozitnog panela

### 2.1 Geometrija uzorka

Kompozitni panel izrađen je u obliku pravokutne prizme, poprečnog presjeka 155 x 370 mm i duljine 1500 mm. Obloga panela izrađena je od pocinčanog lima debljine 1,15 mm i ispunom od polimerne pjene normirane gustoće 45 kg/m<sup>3</sup>. Vizualnim pregledom uzorka, utvrđena je uzdužna pukotina u polimernoj pjeni duž gotovo cijele duljine uzorka. Oštećenja su nastala u proizvodnji, prilikom ispunjavanja uzorka polimernom pjennom.

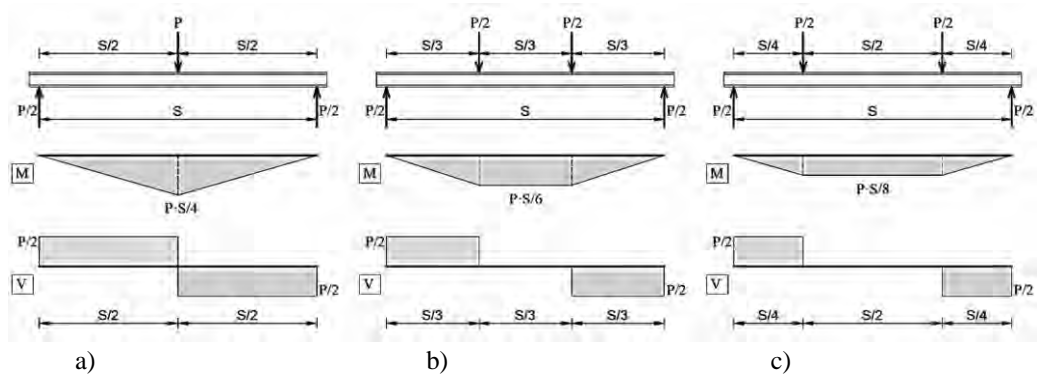


Slika 1. Dimenzije uzorka za ispitivanje prionjivosti savijanjem za uzorke polimerne pjene i čelika [2]

### 2.2 Način opterećivanja uzorka

Norme preporučuju dva načina opterećivanja uzorka: savijanje u 3 točke (3-Point Bending, 3PB) i savijanje u 4 točke (4-Point Bending, 4PB). Budući da je cilj provedbe testa savijanja utvrditi svojstvo prionjivosti između obloge i jezgre kompozitnog panela, potrebno je u uzorku postići što je veće moguće posmično naprezanje u jezgri uz minimalno savijanje obloge.

Analizirana su tri različita slučaja opterećivanja uzorka gdje je uzorak opterećen u 3 ili 4 točke (Slika 2). U slučaju opterećivanja uzorka u 4 točke (Slika 2 b) i c)), definirani su različiti razmaci između sila koje se nanose na uzorak, i to u iznosu od trećine i polovice udaljenosti između oslonaca. Za svaki od opisanih slučajeva opterećivanja prikazani se dijagrami momenata savijanja i poprečnih sila. Analiziranjem dijagrama ustanovljeno je da je slučaj prikazan na Slici 2 c) mjerodavan, tj. kada su opterećenja postavljena na četvrtini raspona, ostvaruje se najveći omjer poprečne sile i momenata savijanja u odnosu na preostala dva slučaja.



Slika 2. Prikaz slučajeva opterećivanja uzorka, a) 3PB - opterećenje na sredini raspona, b) 4PB - opterećenja na trećinama raspona, c) 4PB - opterećenja na četvrtini raspona [3]

### 2.3 Postava ispitivanja i mjerne opreme

Laboratorijska ispitivanja uzorka kompozitnog panela provedena su u Laboratoriju za konstrukcije na Građevinskom fakultetu u Rijeci na čeličnom okviru uz pomoć hidrauličkog aktuatora kapaciteta 250 kN. Kontrola ispitivanja i prikupljanje podataka izvršena je pomoću programa Cubus. Ispitivanja su provedena prema američkim normama ASTM C393/C393M-11 [4] i ASTM D7250/7250M-20 [5].

Postava uzorka s mjernom opremom prikazana je na Slici 3. Uzorak je položen na oslonce koji omogućavaju slobodnu rotaciju na mjestima oslanjanja, te su dovoljno kruti kako ne bi došlo do njihova izvijanja i/ili progibanja. Osni razmak oslonaca je 1400 mm, dok je razmak između dvostrukog opterećenja 700 mm. Prijenos opterećenja s aktuatora na sistem za dvostruko opterećenje postignut je preko HEB-100 profila.

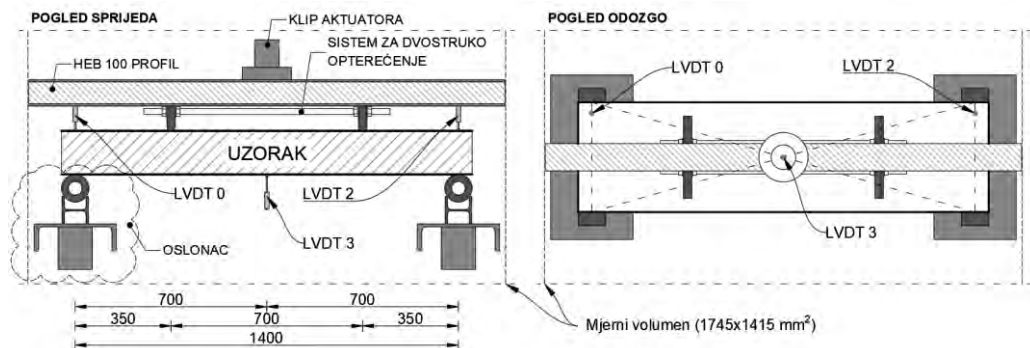
Savijanje u uzorku postignuto je djelovanjem klipa aktuatora s konstantnim prirastom pomaka od 6mm/min. Slom uzorka predviđen je u vremenskom periodu od 10 minuta kako

nalaže norma. Uzorci su ispitani na sobnoj temperaturi ( $23 \pm 3$ )° C i relativnoj vlažnosti zraka ( $50 \pm 5$ )%, pri uvjetima u kojima su i skladišteni.

Pomaci na uzorku praćeni su LVDT mjernim uređajima s nominalnim hodom od  $\pm 25$  mm i  $\pm 50$  mm, koji su postavljeni na tri pozicije na uzorku. Dva LVDT-a postavljena su iznad ležaja (LVDT-0 i LVDT-2) i jedan ispod djelujuće sile za praćenje vertikalnog pomaka ispod klipa aktuatora (LVDT-3).

Postavljanjem sistema za dvostruko opterećenje i HEB-100 profila za prijenos opterećenja, uzorak se dodatno opterećuje silom u iznosu od 513 N te su radi toga provedene dvije faze ispitivanja. U prvoj fazi ispitivanja, kada je uzorak neopterećen sistemom i profilom za prijenos opterećenja, izmjeren je nulti pomak na svim LVDT uređajima u trajanju od 10 sekundi. Nakon postavljanja sistema i profila, započinje druga faza ispitivanja te se postepeno unosi sila s aktuatora i pritom se nastavljaju bilježiti pomaci.

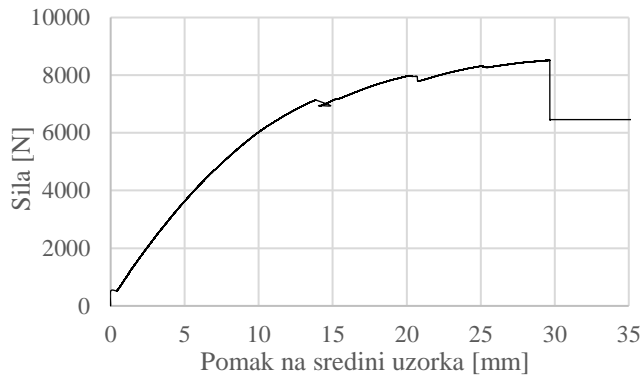
Provedena su i dodatna, kontrolna, beskontaktna mjerenja pomaka izvršena uz pomoć GOM 3D optičkog sustava s 12M kamerama [6] te je pri mjerenju praćen mjerni volumen od  $1745 \times 1415$  mm<sup>2</sup> označen pravokutnikom na Slici 3 [3]. Brzina optičkog mjerenja iznosi 1,5 slika u sekundi (fps).



Slika 3. Prikaz postave ispitivanja [3]

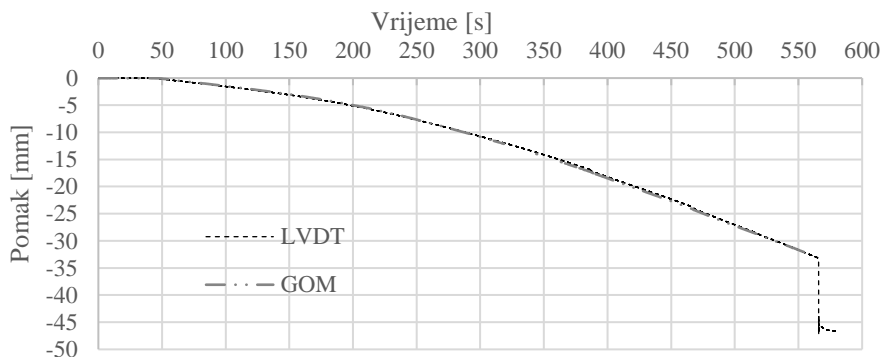
## 2.4 Rezultati ispitivanja

Kao rezultat ispitivanja uzorka kompozitnog panela na savijanje prikazan je dijagram odnosa djelovanja sile i relativnog pomaka na sredini raspona (Slika 4). Relativni pomak uzorka na sredini raspona dobiven je izuzimanje pomaka na osloncima nastalim uslijed rotacije uzorka koji su izmjereni uz pomoć LVDT-a 0 i LVDT-2. Prvi skok na dijagramu izmjeren je pri sili od približno 513 N nastao je tijekom prve faze ispitivanja tijekom postavljanja profila za prijenos opterećenja. U prvoj fazi ispitivanja LVDT 3 bilježi nulti vertikalni progib. Pri opterećenju od 7047 N dolazi do skokovitog prirasta sile koji su nastali uslijed lokalnog popuštanja materijala. Slom uzorka nastao je pri sili od 8513,39 N uz relativni maksimalni progib od 29,66 mm.



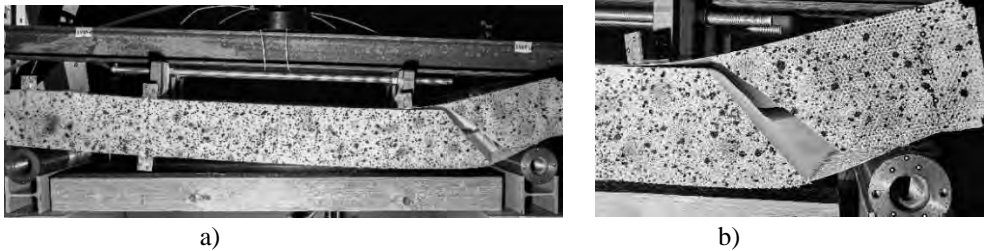
Slika 2. Prikaz odnosa djelovanja sile i relativnog pomaka uzorka na sredini raspona

Najveći apsolutni pomak uzorka na sredini raspona zabilježen LVDT-3 uređajem iznosi 33,1169 mm, dok je beskontaktnim mjerenjima uz pomoć 3D optičkog sustava zabilježen pomak od 32,2871 mm (Slika 5). Izmjerenim vrijednostima dobivenim LVDT-3 uređajem nije dodan pomak uzrokovan dodatnim opterećenjem nastao tijekom prve faze ispitivanja iz razloga što je optičkim kamerama praćena samo druga faza ispitivanja. Usporedbom rezultata vidljivo je da je vertikalni progib na sredini raspona izmjeren LVDT-3 uređajem za 2,57% veći u odnosu na progib izmjeren optičkim kamerama.



Slika 5. Prikaz izmjerenih apsolutnih pomaka na sredini uzorka

Tijekom ispitivanja zabilježen je oblik sloma uzorka koji je prikazan na Slici 6. Slom uzorka nastao je iznenada između oslonaca sistema za dvostruko opterećenje i desnog oslonca uzorka te je bio praćen glasnim praskom. Slom uzorka posljedica je prekoračenja posmične čvrstoće polimerne pjene te je uslijed slamanja uzorka došlo do pojave lokalne delaminacije veze između jezgre i stjenki u području sloma.



Slika 6. Prikaz sloma uzorka, a) krupni prikaz; b) prikaz detalja [3]

Posmična čvrstoća jezgre uslijed savijanja uzorka određena je prema izrazu (1) prema [5]:

$$F_s^{ult} = \frac{P_{max}}{(d + c) \cdot b} \quad (1)$$

gdje je  $P_{max}$  maksimalna sila pri slomu uzorka izražena u njutnima (N),  $d$  je debljina uzorka,  $c$  je debljina jezgre uzorka i  $b$  je širina uzorka kompozitnog panela. Posmična čvrstoća između čeličnog lima i jezgre polimerne pjene jednaka je posmičnoj jezgre, te ona iznosi  $F_s^{ult} = 74,778$  kPa.

### 3 Zaključak

U radu je provedeno laboratorijsko ispitivanje uzorka kompozitnog panela testom savijanja gdje su analizirana svojstva prionjivosti između obloge izrađene od čelika i jezgre od polimerne pjene. Na temelju provedenog eksperimentalnog istraživanja doneseni su sljedeći zaključci:

Otkazivanje uzorka kompozitnog panela nastupilo je doseganjem posmične čvrstoće polimerne pjene, prilikom kojeg je došlo do lokalne delaminacije veze između obloge i jezgre panela,

Osigurana je zadovoljavajuća prionjivost između čelične obloge i polimerne pjene te nije potrebna dodatna mehanička obrada obloge ili potreba za korištenjem adheziva.

U planu je provesti laboratorijska ispitivanja savijanjem na dodatnim uzorcima kako bi se potvrdile prethodno navedene činjenice.

### Zahvale

Istraživanje je provedeno u sklopu znanstvenih projekata Predgotovljene zgrade gotovo nulte energije proizvedene na industrijski način (KK.01.2.1.02) sufinanciran iz Europskog fonda za regionalni razvoj, te Investigation of behavior of composite panel components with integrated steel core (ZIP-UNIRI-1500-2-20) kojeg financira Sveučilište u Rijeci.

## Literatura

- [1] D. Zenkert, *The Handbook of Sandwich Construction*, Engineering Materials Advisory Services Ltd, 1997.
- [2] P. Krolo, »Plan i program ispitivanja, klasa: 361-03/20-02/04,« Građevinski fakultet u Rijeci, Rijeka, 2021.
- [3] A. Bakran, *Diplomski rad: Utvrđivanje svojstva prionjivosti između čelika i polimerne pjene provedbom testa savijanja kompozitnog panela*, Rijeka: Građevinski fakultet, Sveučilište u Rijeci, 2021.
- [4] D7250/7250M-20, »Standard Practice for Determining Sandwich Beam Flexural and Shear Stiffness,« ASTM International, US, 2012.
- [5] C393/C393M-11, »Standard Test Method for Core Shear Properties of Sandwich Constructions by Beam Flexure,« ASTM International, US, 2012.
- [6] *GOM Correlate Professional*, 2020.



# Nelinearna analiza stabilnosti grednih konstrukcija s kompozitnim poprečnim presjekom

Banić, D.<sup>1</sup>, Turkalj, G.<sup>2</sup>, Lanc, D.<sup>3</sup> i Kvaternik Simonetti, S.<sup>4</sup>

## Sažetak

U ovom radu prikazan je posmično deformabilni numerički model za nelinearnu analizu stabilnosti grednih konstrukcija. Inkrementalne ravnotežne jednadžbe za ravni tankostjeni gredni element dobivene su preko „Updated Lagranigan“ formulacije. Model koristi nelinearno polje pomaka, što omogućava analizu velikih pomaka. Gredni element uključuje utjecaje posmičnih deformacija na osnovi Timoshenokove teorije savijanja i Vlasove teorije uvijanja s ograničenim vitoperenjem. Također se uzimaju u obzir i interakcije između savijanja i uvijanja koje se javljaju kod nesimetričnih poprečnih presjeka. Svaka grana poprečnog presjeka sastoji se od različitih ortotropnih slojeva složenih po debljini grane. Svaki sloj je orijentiran pod 0- ili 90-stupnjeva. Kompozitni poprečni presjek se zamjenjuje s ekvivalentnim homogenim presjekom, te se na osnovu takvog poprečnog presjeka računaju karakteristike koje se koriste u daljnjoj analizi. Gredni element testiran je na numeričkom modelu za analizu stabilnosti, razvijenom od strane autora, te su rezultati prikazani i uspoređeni s dostupnima u literaturi.

**Ključne riječi:** gredni element, tankostjeni otvoreni profil, kompozitne konstrukcije, posmične deformacije, analiza stabilnosti.

---

<sup>1</sup> **Damjan Banić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: dbanic@riteh.hr

<sup>2</sup> **Prof. Goran Turkalj, dr. sc.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: goran.turkalj@riteh.hr

<sup>3</sup> **Prof. Domagoj Lanc, dr. sc.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: domagoj.lanc@riteh.hr

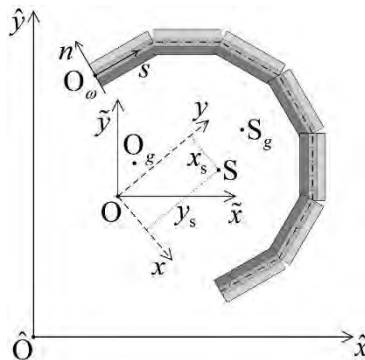
<sup>4</sup> **Sandra Kvaternik Simonetti, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: sandra.kvaternik@riteh.hr

## 1 Uvod

Kako nosive konstrukcije u pravilu sadrže vitke gredne elemente tankostjenog poprečnog presjeka, odziv takvih konstrukcija na vanjsko opterećenje je kompleksan, posebice je izražena sklonost gubitka stabilnosti deformacijske forme i pojavi izvijanja [1,2,3]. U grednim konstrukcijama pojava izvijanja može biti izražena u čisto fleksijskoj, čistoj torzijskoj, torzijsko-fleksijskoj ili lateralnoj deformacijskoj formi. Stoga, u optimalnom dizajnu konstrukcije, posebnu pažnju treba posvetiti točnom određivanju graničnog stanja stabilnosti deformacijskih formi. Analitička rješenja dostupna su samo za jednostavne konstrukcije [4], stoga razvoj i primjena numeričkih rješenja nameće se kao nužnost. Nelinearne analize kompozitnih grednih konstrukcija s utjecajem posmičnih deformacija prikazane su u [5-8]. U ovim radovima autori uključuju interakciju između savijanja i uvijanja koja se javlja kod nesimetričnih poprečnih presjeka, gdje se glavne osi savijanja ne poklapaju s glavnim osima posmika.

U ovom je radu prikazan otvoreni tankostjeni gredni element za nelinearnu analizu stabilnosti kompozitnih grednih konstrukcija. Svaka grana poprečnog presjeka sastoji se od različitih ortotropnih slojeva složenih po debljini grane. Svaki sloj je orijentiran pod 0- ili 90-stupnjeva. Kompozitni poprečni presjek se zamjenjuje ekvivalentnim homogenim presjekom, te se na osnovu takvog poprečnog presjeka računaju karakteristike koje se koriste u daljnjoj analizi. Gredni element uključuje utjecaje posmičnih deformacija. Prikazani gredni element ugrađen je u gredni model za nelinearnu analizu stabilnosti razvijen od strane autora [8], a koji nije prikazan u ovom radu.

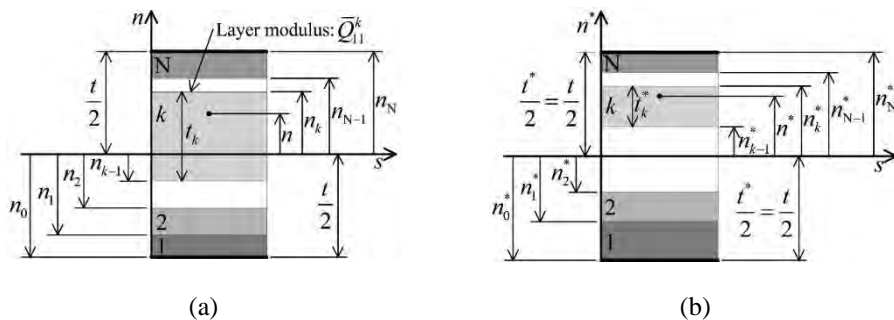
## 2 Temeljna razmatranja



Slika 1. Otvoreni tankostjeni kompozitni poprečni presjek

Na slici 1 prikazan je proizvoljan otvoreni tankostjeni poprečni presjek koji se sastoji od ravnih pravokutnika. Svaki pravokutnik poprečnog presjeka se sastoji od različitih ortotropnih slojeva orijentiranih pod 0- ili 90-stupnjeva. Uzdužne sile i momenti savijanja koji djeluju u smjeru tih slojeva ne uzrokuju posmičnu deformaciju ili uvijanje poprečnog presjeka. Sve karakteristike poprečnog presjeka uzimaju u obzir i utjecaj materijala, te će se u daljnjem tekstu spominjati kao materijalno-utežnjene karakteristike poprečnog presjeka. Postavljeni kartezijev koordinatni sustav izabran je takav da su mu  $x$  i  $y$  glavne materijalno-

utežnjene osi inercije,  $z$  os prolazi kroz materijalno-utežnjena težišta  $O$  svih poprečnih presjeka, dok je pozicija materijalno-utežnjene centra smicanja definirana s koordinatama  $x_s$  i  $y_s$ .  $O_g$  i  $S_g$  označavaju poziciju težišta i centra smicanja.  $O_\omega$  označava ishodište konturne koordinate  $s$ .



Slika 2. Geometrija: (a) N-slojnih pravokutnika; (b) N-slojnih materijalno-utežnjene pravokutnika

Materijal svakog ravnog pravokutnika podijeljen je kao na slici 2, gdje  $N$  označava ukupan broj slojeva svakog pravokutnika,  $s$  i  $n$  označavaju konturnu i debljinsku koordinatu,  $n^*$  označava materijalno-utežnjenu debljinsku koordinatu. Konstitutivna jednadžba svakog sloja dana je prema:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z^k \\ \tau_{zs}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^k & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{66}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_z^k \\ e_{zs}^k \end{Bmatrix} \quad (1)$$

gdje  $\bar{Q}_{ii}^k$  označava takozvane transformirane reducirane krutosti [9]. Budući da ovaj rad uzima u obzir samo orijentacije slojeva od 0- i 90-stupnjeva,  $\bar{Q}_{16}^k$  je jednak nuli. Na osnovu slike 2a računaju se takozvani referentni moduli:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11R} &= \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \bar{Q}_{11} dn = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k \int_{n_{k-1}}^{n_k} dn = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^k t_k \\ \bar{Q}_{66R} &= \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \bar{Q}_{66} dn = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{66}^k \int_{n_{k-1}}^{n_k} dn = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{66}^k t_k \end{aligned} \quad (2)$$

Debljina svakog sloja na slici 2a se utežnjuje s omjerom  $\bar{Q}_{11}^k / \bar{Q}_{11R}$ , što rezultira:

$$t_k^* = \int_{n_{k-1}^*}^{n_k^*} dn^* = \frac{\bar{Q}_{11}^k}{\bar{Q}_{11R}} \int_{n_{k-1}}^{n_k} dn = \frac{\bar{Q}_{11}^k}{\bar{Q}_{11R}} (n_k - n_{k-1}) = \frac{\bar{Q}_{11}^k}{\bar{Q}_{11R}} t_k \quad (3)$$

Izraz za materijalno-utežnjenu debljinsku koordinatu  $n^*$  slijedi iz slike 2 kao:

$$n^* = \frac{\bar{Q}_{11}^k}{\bar{Q}_{11R}} (n - n_{k-1}) + n_{k-1}^* \quad (4)$$

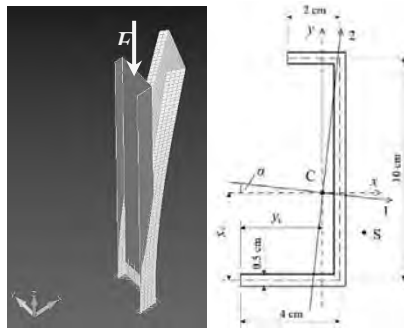
Diferencijal materijalno-utežnjene debljinske koordinate slijedi iz prošlog izraza kao:

$$dn^* = \frac{\bar{Q}_{11}^k}{\bar{Q}_{11R}} dn \quad (5)$$

Treba napomenuti da materijalno utežnjena debljinska koordinata nije kontinuirana varijabla, te da gore navedeni izrazi vrijede samo za sloj „k“.

### 3 Primjer

Slika 3 prikazuje uklještenu stup asimetričnog poprečnog presjeka. Profil se sastoji od četiri Grafit-epoksi sloja, te se razmatraju tri materijalne konfiguracije: (0/90/0/90), (0/90/90/0) i (90/0/90/0). Korištene su sljedeće karakteristike materijala:  $E_1 = 144$  GPa,  $E_2 = 9.65$  GPa i  $G_{12} = 4.14$  GPa. Pošto je poprečni presjek asimetričan, prilikom izvijanja nastupiti će torzijsko-fleksijska forma izvijanja. Vlastite vrijednosti sile pri kojoj dolazi do izvijanja su dane



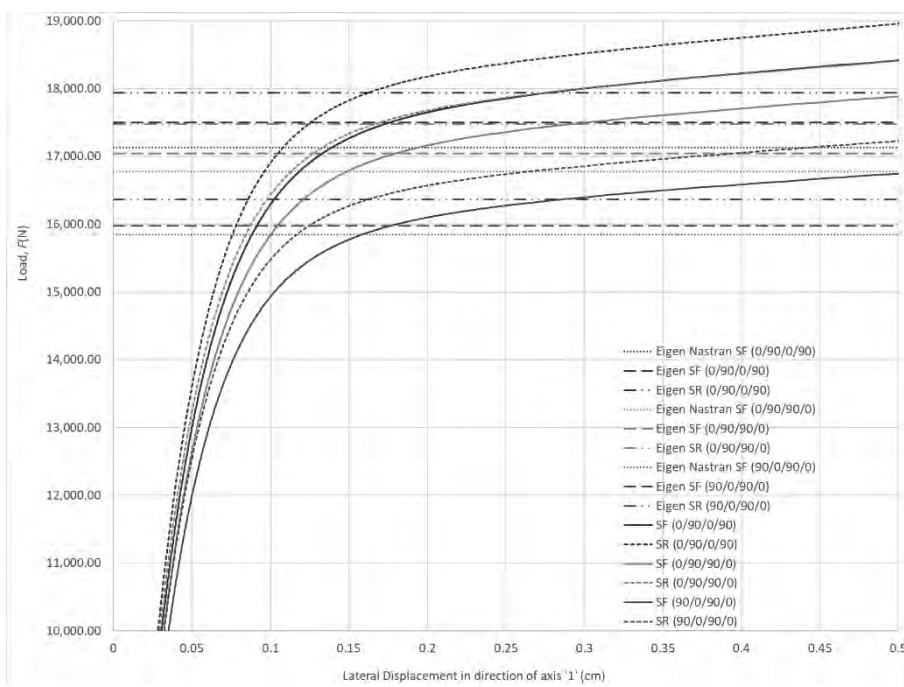
Slika 3. Uklještenu stup asimetričnog poprečnog presjeka

u tablici 1. Dobivena rješenja uspoređena su s rješenjima dobivenim u NX Nastranovom modelu s 1120 „laminata shell“ elemenata, dok gredni model koristi mrežu od 32 elementa. SR označava „shear rigid“ i označava rješenje bez utjecaja posmičnih deformacija, dok SF označava „shear flexible“ i označava rješenje s utjecajem posmičnih deformacija. Da bi se izazvalo izvijanje koristi se mala sila (1000 puta manjeg intenziteta od tlačne sile) u smjeru glavne osi „1“. Na slici 4 prikazan je pomak slobodnog kraja stupa ovisno o intenzitetu tlačne sile za sve materijalne konfiguracije. Na slici 5 prikazana je konvergencija rješenja ovisno o broju elemenata duž grede za (0/90/90/0) materijalnu konfiguraciju. Obje slike prikazuju

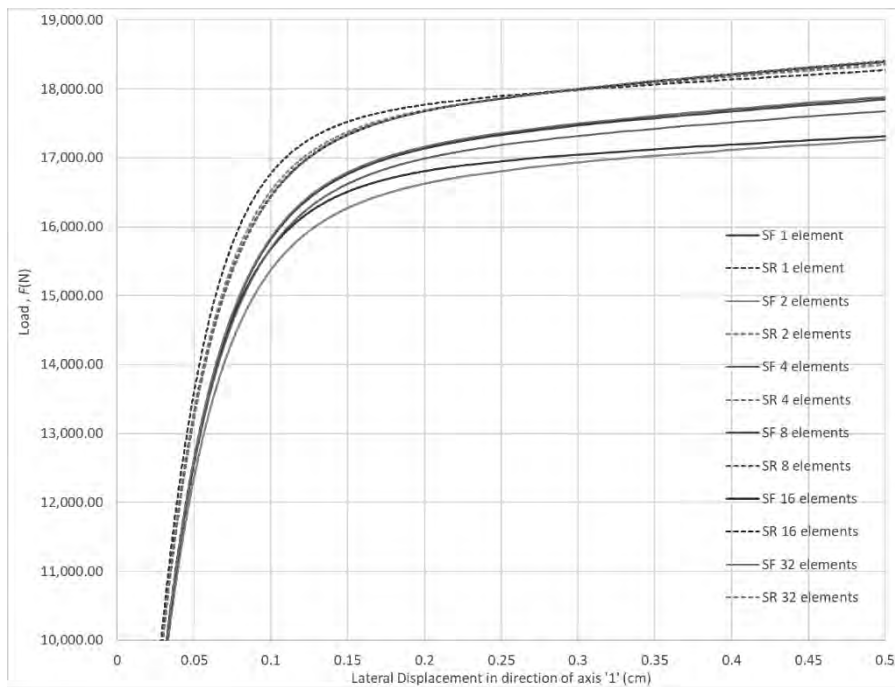
nelinearni odziv konstrukcije. Iz slike 5 vidljivo je da se takozvani „shear-locking“ efekt ne pojavljuje.

Tablica 1. Vlastite vrijednosti tlačne sile F

| L = 70 cm  | {0/0/0/0} | {0/90/90/0} | {0/90/0/90} | {90/0/90/0} |
|------------|-----------|-------------|-------------|-------------|
| Nastran SF | 24958.60  | 16783.34    | 17133.66    | 15846.89    |
| SR         | 27055.20  | 17476.00    | 17938.30    | 16366.10    |
| SF         | 25939.40  | 17046.60    | 17501.20    | 15970.70    |



Slika 4. Krivulja sila - pomak, pomak slobodnog kraja stupa u smjeru glavne osi „1“;



Slika 5. Krivulja sila - pomak, prikaz konvergencije za materijalnu konfiguraciju (0/90/90/0)

## 4 Zaključak

Prikazani rad ukratko daje ideju o homogenizaciji kompozitnog poprečnog presjeka. Gredni element uzima u obzir utjecaje posmičnih deformacija, te je na prikazanom primjeru potvrđena točnost samog elementa. Iz prikazanog primjera može se uočiti smanjene kritičnog opterećenja ako se uzmu u obzir posmične deformacije, što naglašava važnost uključivanja posmičnih deformacija pri određivanju kritičnog opterećenja konstrukcije. Također je prikazana i konvergencija izloženog modela, te se može zaključiti da se takozvani „shear-locking“ efekt ne pojavljuje. Iako, uspoređujući rezultate model s elementima višeg tipa („shell“ element), daljnje poboljšanje prikazanog modela se vidi uvođenjem mogućnosti deformacije samog poprečnog presjeka. Daljnje istraživanje biti će usmjereno upravo u tom smjeru, uvođenjem neke od grednih teorija koje omogućavaju deformaciju samog poprečnog presjeka.

## Zahvale

Autori se velikodušno zahvaljuju financijskoj potpori Hrvatske zaklade za znanost (projekt Br. IP-2019-04-8615) i Sveučilišta u Rijeci (uniri-tehnic-18-107; uniri-tehnic-18-139).

## Literatura

- [1] Cardoso, J. E. B., Benedito, N. M. B., Valido, A. J. J., Finite element analysis of thin-walled composite laminated beams with geometrically nonlinear behavior including warping deformation, *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, Issue 11, 2009.
- [2] Minghini, F., Tullini, N., Laudiero, F. Elastic buckling analysis of pultruded FRP portal frames having semi-rigid connections, *Engineering Structures*, Vol. 31, Issue 2, 2009.
- [3] Mororó, L.A.T, Cartaxo del Melo, A.M., Junior, E.P. Geometrically nonlinear analysis of thin-walled laminated composite beam, *Latin America Journal of Solids and Structures*, Vol. 12, Issue 11, 2015.
- [4] Cortínez, V.H., and Piovan, M.T. Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability, *Journal of Sounds and Vibrations*, Vol. 258, Issue 4, 2002.
- [5] Kim, N.I., Lee, B.J., Kim, M.Y., Exact element static stiffness matrices of shear deformable thin-walled beam-columns, *Thin-Walled Structures*, Vol. 42, 2004.
- [6] Kim, N.I., Kim, M.Y., Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects, *Thin-Walled Structures*, Vol. 43, 2005.
- [7] Minghini, F., Tullini, N., Laudiero, F., Locking-free finite elements for shear deformable orthotropic thin-walled beams, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol 72, 2007.
- [8] Turkalj, G., Lanc, D., Banić, D., Brnić, J., Vo, T.P., A shear-deformable beam model for stability analysis of orthotropic composite semi-rigid frames, *Composite Structures*, Vol. 189, 2018.
- [9] Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, 2nd ed., Taylor & Francis, 1999.



# Pregled optimizacijskih metoda u konstrukciji hodajućih mehanizama

Birt, D.<sup>1</sup>, Miler, D.<sup>2</sup> i Hoić, M.<sup>3</sup>

## Sažetak

Hodajući mehanizmi su vrsta polužnih mehanizama čija struktura omogućuje imitiranje ljudskog hoda. Trenutno se kod takvih mehanizama najčešće provode razne kinematske analize u svrhu optimiranja lokusa, tj. karakteristika hodanja se pokušava prilagoditi određenom problemu. Osim analitičkih metoda, za optimizaciju nekog od aspekata takvih mehanizama sve češće se koriste meta-heuristički algoritmi. Najpoznatiji hodajući mehanizmi za koje su pronađeni radovi vezani za optimizaciju su Theo-Jansen i Klann hodajući mehanizmi. Članak prezentira najčešće primijenjene metode optimiranja hodajućih mehanizama, te navesti njihove bitne značajke. Opisane metode primjerene su za optimizacijski problem definiran kao minimizacija ukupne duljine svih poluga mehanizma čime se implicitno minimizira masa mehanizma gdje se kao ograničenja uvode odnosi duljina poluga koji omogućavaju sastavljanje funkcionalnog mehanizma te strmine karakteristika lokusa koje predstavljaju ograničenja na akceleracije, tj. inercijske sile koje djeluju na mehanizam.

**Ključne riječi:** hodajući mehanizam, metode optimizacije hodajućih mehanizama, optimizacijski algoritmi

---

<sup>1</sup> **Dominik Birt, mag. ing. mech., asistent**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: dominik.birt@fsb.hr

<sup>2</sup> **Dr. sc. Daniel Miler, poslijedoktorand**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: daniel.miler@fsb.hr

<sup>3</sup> **Doc. dr. sc. Matija Hoić, docent**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: matija.hoic@fsb.hr

## 1 Uvod

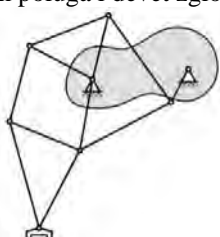
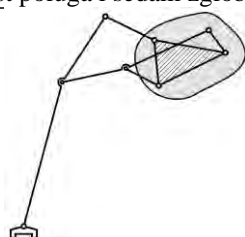
U usporedbi s živim bićima, vozila s konvencionalnim kotačima mnogo teže savladavaju teške terene. Posljedično, prirodni mehanizmi hodanja mogu biti promatrani kao potencijalna rješenja prilikom osnivanja vozila za prijenos tereta kada su prepreke na trasi izražene. Općenito, u primjeni su hodajući mehanizmi s i bez linearnih članova [1] pri čemu općenito vrijedi kako potonji imaju manju kompleksnost i troškove proizvodnje zbog jednog stupnja slobode. S druge strane, zbog jednog stupnja slobode i njihove radne karakteristike su lošije. Ovisno o projektnim zahtjevima, očekuje se kako bi mehanizmi bez linearnih članova mogli biti zadovoljavajuća rješenja kod primjerice neke vrste transportnih uređaja koji mogu savladavati nepristupačne terene.

Osnovna ideja je korištenje sustava poluga vezanih rotacijskim zglobovima i jednog rotacijskog izvora koji pokreće takav mehanizam. Nadalje, pojedini mehanizmi u praksi se koriste s različitim dimenzijama, ali s istim omjerom duljina polužja. Promjenom odnosa duljina poluga i njihova razmještaja može se utjecati na karakteristiku hodanja. Stoga se postavlja pitanje potencijala za optimiranje omjera duljina poluga s ciljem pronalaženja rješenja koje ostvaruje ciljane karakteristike hoda uz smanjenu masu i dimenzije mehanizma.

## 2 Hodajući mehanizmi

Neki od najčešće analiziranih, ali i optimiranih hodajućih mehanizama su Theo-Jansen mehanizam (00) i Klann mehanizam (00) prikazani u Tablici 1. Osim navedenih, postoje deseci različitih mehanizama (00), no za njihove konstrukcije nije proveden postupak optimiranja. Prilikom hodanja hodajućeg mehanizma, izlazni član (noga) se kreće određenom putanjom uslijed rotacije ulaznog člana. Sve točke putanje kroz koje noga prilikom hodanja prolazi čine lokus, tj. karakteristiku hodanja hodajućeg mehanizma. Promjena omjera duljina poluga varira lokus 0.

Tablica 1. Poznate vrste hodajućih mehanizama 0

| <b>Theo-Jansen hodajući mehanizam</b>   | <b>Klann hodajući mehanizam</b>  |
|---|--|
| Osam poluga i devet zglobova  | Šest poluga i sedam zglobova   |
|  |  |

## 2.1. Ciljevi i ograničenja pri optimiranju hodajućih mehanizama

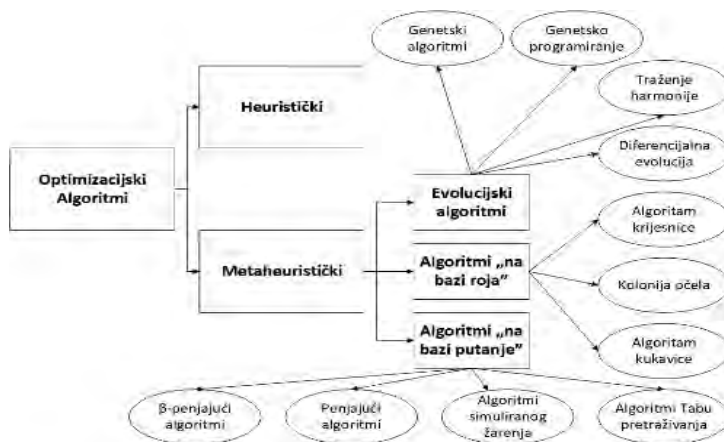
Kako promjena omjera duljine poluga omogućava promjenu lokusa mehanizma, optimiranje hodajućih mehanizama tipično podrazumijeva traženje rješenja s najmanjom sumom duljina svih poluga u mehanizmu. Pritom svaka kombinacija mora rezultirati traženim lokusom. Ovakav pojednostavljeni pristup, u kojem se ne razmatraju poprečni presjeci polužja te opterećenja, implicira da će mehanizam s najkraćim polugama ujedno imati najmanju masu.

Kod promjene odnosa duljina poluga mehanizma valja uzeti u obzir kombinacije omjera duljina kojima sa stajališta kinematike nije moguće formirati funkcionalni mehanizam. Drugim riječima, mehanizam nije moguće formirati jer se s predloženim duljinama, poluge ne mogu spojiti u zglobovima (tj. mehanizam nije moguće sastaviti). Također, neke mehanizme je moguće sastaviti samo u nekim od položaja, no nije moguće opisati čitav lokus. Mehanizam koji ne zadovoljava ova ograničenja očito nije funkcionalan pa se navedeni uvjet smatra nužnim.

Dodatno, tip rješenja utječe na vremenski odziv pozicije noge, tj. na ubrzanja što mijenja inercijske sile, a time i dimenzije/masu mehanizma. Ubrzanje je općenito moguće obuhvatiti u okvir optimizacijskog postupka na dva načina. Prvi je da se ubrzanje (tj. inercijske sile) obuhvate ciljnom funkcijom kroz njihov utjecaj na dimenzije. Ovakav pristup je proračunski zahtjevniji jer zahtjeva detaljan fizikalni model mehanizma. Drugi pristup je da se akceleracije ograniče na iznose koji će uzrokovati zanemarivo malene inercijske sile, što je prihvatljivo u području transportnih uređaja. Budući da korisnik zadržava slobodu kroz postavljanje vrijednosti akceleracije koju smatra dovoljno niskom, ovo ograničenje može se smatrati „mekim“.

## 3 Optimiranje hodajućih mehanizama u primjeni

Kod optimizacije mehanizama postoji tendencija primjene meta-heurističkih algoritama. Za razliku od heurističkih algoritama, oni su formirani na način da rješavaju određenu vrstu optimizacijskih problema umjesto samo jednog problema (Slika 1). Pritom zadržavaju ostale povoljne karakteristike kao što su robusnost, trebaju manje računalnih resursa te konvergiraju prema približno najboljem rješenju (ne nužno striktnom globalnom minimumu). Od razvijenih meta-heurističkih algoritama, tipično se za optimiranje mehanizama koriste stohastički algoritmi, ponajprije evolucijski, a u novije vrijeme i algoritmi „na bazi roja“ [00].



Slika 1. Podjela optimizacijskih algoritama 0

Navedeni algoritmi u primjeni imitiraju procese prirodne selekcije, preživljavanja i slično, te tako traže optimalno rješenje u zadanoj domeni. Za višekriterijske probleme, oni prilikom optimiranja mogu u obzir uzeti kompromis između više zadanih ciljeva. Kod ovog tipa algoritama princip traženja optimuma se u pravilu temelji na metodi pokušaja i promašaja – algoritam u prvom krugu traženja nasumično generira rješenja unutar zadane domene. Potom se izračunava vrijednost ciljne funkcije za sva potencijalna rješenja, nakon čega se iz rješenja koja daju više vrijednosti ciljne funkcije generira nova generacija, koja bi trebala biti bliže optimalnom rješenju u odnosu na prethodnu. U drugom (i svakom sljedećem) krugu traženja rješenja ponavljaju se drugi i treći korak, čime algoritam konvergira prema optimumu. Proces se nastavlja dok se ne zadovolje ranije postavljeni kriteriji zaustavljanja. Upravo zbog toga, takvi algoritmi su veoma uspješni prilikom traženja globalnog optimuma 0.

### 3.1. Genetski algoritmi

Genetski algoritmi (GA) se temelje na procesu prirodne selekcije, ali primijenjenom u kontekstu tehničkih sustava. Ideja genetskih algoritama je oponašanje evolucije, gdje algoritam počinje s  $n$  nasumično generiranih jedinki (potencijalnih rješenja) koje zajedno čine populaciju. Za svaku jedinku unutar populacije se potom izračunava vrijednost funkcije cilja, što omogućava rangiranje prema kvaliteti (vrijednosti ciljne funkcije koja je skalar). U svakoj sljedećoj iteraciji se generira nova populacija jedinki pomoću tri biološka procesa: selekcije, križanja i mutacije.

Selekcija uključuje odabir najboljih jedinki koja se neposredno prenesu (kloniraju) u novu generaciju. Križanje podrazumijeva odabir dobrih jedinki čiji se parametri rekombiniraju iz čega slijedi novo i drugačije rješenje – po uzoru na razmnožavanje životinja. Konačno, određeni broj najlošijih rješenja se eliminira te se nove jedinke generiraju nasumičnom varijacijom pojedinih parametara rješenja, tj. mutacijom. 0

Neke od općih prednosti genetskih algoritama su: (i) jednostavna implementacija, (ii) robusnost, (iii) sposobnost traženja višestrukih rješenja te (iv) nisu ograničeni na traženje

lokalnog optimuma. Zbog dobrih karakteristika, genetski algoritmi se općenito često koriste za optimizaciju mehanizama 0. Pritom se glavni izazovi u primjeni javljaju kod problema koji su karakterizirani postojanjem lokalnih optimuma kao što su hodajući mehanizmi.

### 3.2. Firefly algoritam

Firefly algoritam temelji se na imitaciji ponašanja krijesnica; populacija krijesnica odašilje svjetlosne signale čime privlači potencijalne partnere i upozorava na blizinu predatora. U algoritmu svaka krijesnica predstavlja potencijalno rješenje, dok količina svjetlosti koju emitira odgovara iznosu pripadajuće ciljne funkcije. Pritom se pretpostavlja da se sve krijesnice jednako privlače (algoritam ne razlikuje spolove). Pojednostavljeno, rad algoritma bazira se na tri ključna principa – privlačnost, apsorpciju i nasumičnost.

U prvoj fazi, krijesnice se nasumično generiraju unutar zadane domene te se računaju vrijednosti ciljne funkcije (intenziteta svjetla). Intenzitet svjetla pojedine krijesnice određuje njezinu privlačnost, to jest, njezinu sposobnost da privuče druge krijesnice. Nadalje, apsorpcija predstavlja sposobnost krijesnice da detektira i usmjeri se prema svjetlosti druge krijesnice. Općenito gledano, moguće je postaviti različite utjecaje intenziteta svjetlosti na privlačnost i apsorpciju, a u najjednostavnijoj verziji odnos je proporcionalan.

U drugoj i svakoj sljedećoj fazi (do kriterija zaustavljanja), krijesnice se pomiču sa svoje trenutne pozicije na pozicije bliže najsvjetlijim krijesnicama u svojoj okolini. Drugim riječima, rješenja konvergiraju prema onim boljim, a time i prema optimumu. Ovdje nastupa princip nasumičnosti, što se očituje kroz nasumičnu duljinu koraka u smjeru najsvjetlije krijesnice, kao i nasumičan iznos i smjer pomaka krijesnica koje u svojoj blizini nisu uočile svjetlost druge krijesnice. Važno je napomenuti kako će najsvjetlije krijesnice zbog okruženosti krijesnicama slabije svjetlosti imati mali pomak, dok će krijesnice koje se nasumično pomiču pretraživati ostatak domene, smanjujući vjerojatnost konvergencije prema lokalnom optimumu. Zbog sposobnosti da s velikom vjerojatnošću pronađu globalni te istovremeno i neke lokalne optimume, ovaj algoritam se sve češće koristi za optimiranje hodajućih mehanizama 00.

### 3.3. Cuckoo search algoritam

Cuckoo search algoritam temelji se na oponašanju parazitskog ponašanja uočenom kod nekih vrsta ptica kukavica. Naime, neke kukavice podižu svoje potomstvo tako da traže domaćina koji ima slične osobine te parazitiraju kroz zamjenu jaja domaćina svojim. Ako ih domaćin ne spriječi i ne opazi razliku, odgojit će ptiče kukavice umjesto svojeg potomstva. Dodatno, kad se kukavica izlegne, najčešće izbacila ostala jaja iz gnijezda, što joj daje značajnu prednost za preživljavanje. Također, postoji mogućnost da ptica domaćin prepozna uljeza ili pomisli da je njegovo jaje uljez pri čemu napušta ili uništava gnijezdo.

Algoritam, u svom najjednostavnijem obliku započinje generiranjem dvije inicijalne generacije s jednakim brojevima članova. Prva inicijalna generacija jaja predstavlja domaćina te se dobiva nasumičnim odabirom unutar zadane domene. Druga je početna generacija jaja kukavica koja se dobiva na isti način, s dodatkom varijacija primjenom nasumične promjene (tzv. Levy flights). U drugom koraku, nasumično se formiraju parovi

jaja domaćin/kukavica koji se nazivaju gnijezda (kukavice nasumično biraju i ubacuju svoje jaje u gnijezdo domaćina). U trećem koraku, uspoređuju se ciljne funkcije jaja domaćina i kukavice. Ako je kukavičje jaje bolje, ono zamjenjuje jaje domaćina (kukavica je uspješno prevarila domaćina). U suprotnom, jaje domaćina se zadržava (domaćin je spriječio kukavicu). U četvrtom koraku, najbolja jaja prelaze u novu generaciju u kojoj će sva jaja postati jaja domaćina. Preostala, najgora jaja u generaciji se odbacuju i na njihovo mjesto se generira isti broj novih nasumično odabranih jaja domaćina (domaćin napušta/uništava gnijezdo i formira novo).

Ponovno generiranje novog rješenja, usporedba s postojećim i eliminacija onog lošijeg osiguravaju konvergenciju prema optimumu. Također, kontinuirano nasumično generiranje dijela jaja u svakoj generaciji poboljšava pretragu domene, smanjujući rizik od konvergiranja prema lokalnom optimumu. Novija istraživanja 00 predlažu primjenu hibridnog „Firefly“ i „Cuckoo“ algoritma u kojem se najbolja jaja ne prenose direktno u novu generaciju, već se pomiču prema onim s boljom ciljnom funkcijom, odnosno najbolja jaja funkcioniraju kao krijesnice.

## 4 Zaključak

Na osnovu pregleda literature, moguće je zaključiti da je variranje odnosa duljina poluga hodajućih mehanizama može značajno promijeniti njegov lokus. Kako za svaki mehanizam postoji beskonačno mnogo kombinacija odnosa duljina poluga, isti lokus se može dobiti s više kombinacija duljina poluga. Pronalazak kombinacije poluga koje daju ciljani lokus uz minimalnu ukupnu duljinu poluga, a posljedično i najmanje dimenzije te masu, moguće je promatrati kao optimizacijski problem.

U kontekstu hodajućih mehanizama, za rješavanje ovakvih problema primjećuje se učestala primjena meta-heurističkih optimizacijskih algoritama, pri čemu su najzastupljeniji genetski algoritmi, Firefly algoritam te Cuckoo search algoritam. Osnovni razlog za to je njihova računalna efikasnost, a glavni izazov nedostatak pouzdane konvergiranja prema globalnom optimumu. Pritom se u novije vrijeme može uočiti sve češća primjena hibridnih algoritama koji kombinacijom karakteristika povećavaju vjerojatnost približavanja globalnom optimumu.

## Literatura

- [1] Birt, D.; Hoić, M.; Miler, D., Prijenosnik palete na bazi hodajućeg mehanizma tipa Strider // *Zbornik radova Desetog susreta Hrvatskog društva za mehaniku / Damjanović, D. ; Kozak, D. ; Konjatić, P. ; Katinić, M. (ur.). Slavonski Brod, 2020. str. 43-48*
- [2] Wang, C.-Y., Hou, J.-H., Analysis and applications of theo jansen's linkage Mechanism: Theo Jansen's linkage mechanism on kinetic architecture (2018) CAADRIA 2018 - 23rd International Conference on Computer-Aided Architectural Design Research in Asia: Learning, Prototyping and Adapting, 2, pp. 359-368.

- [3] J. K. Sheba, E. Martínez-García, M. R. Elara and L. Tan-Phuc, "Design and evaluation of reconfigurable Klann mechanism based four legged walking robot," *2015 10th International Conference on Information, Communications and Signal Processing (ICICS)*, 2015.
- [4] Kulandaidasan Sheba, J.; Elara, M.R.; Martínez-García, E.; Tan-Phuc, L. Trajectory Generation and Stability Analysis for Reconfigurable Klann Mechanism Based Walking Robot. *Robotics* **2016**.
- [5] Hoeltgebaum, T. & Silva, E. & Barreto, R. & Maletz, E. & Morlin, F. & Piga, A. & Martins, D. (2021). Walking Mechanisms - A State of the Art Survey and New Developments Opportunities
- [6] Selvi Ö., Yavuz S. (2018) Design and Dimensional Optimization of a Novel Walking Mechanism with Firefly Algorithm. In: Dede M., İtik M., Lovasz EC., Kiper G. (eds) Mechanisms, Transmissions and Applications. IFToMM 2017. Mechanisms and Machine Science, vol 52. Springer, Cham
- [7] Yavuz E., İbrahim B. K., İlker Ü., Chapter 2 - Introduction to Optimization, Editor(s): Ozan E., Optimization in Renewable Energy Systems, Butterworth-Heinemann, 2017. Yang, Xin-She. (2010). Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms.
- [8] James I. A., , University of Johannesburg, Doctor Ingenieriae, 2006.
- [9] Bošković, M. & Bulatović, R. & Šalinić, S. & Miodragović, G. & Bogdanovic, G. (2018). Optimization of dynamic quantities of a four-bar mechanism using the Hybrid Cuckoo Search and Firefly Algorithm (H-CS-FA).
- [10] Yang X.: Nature-inspired metaheuristic algorithms. Luniver press, 2010.
- [11] Mohammad S., Ahamad T. K., Mohammed A. Al-Betar, A survey on applications and variants of the cuckoo search algorithm, Applied Soft Computing, Volume 61, 2017.
- [12] Bošković, M., Bulatović, R.R., Šalinić, Optimization of dynamic quantities of a four-bar mechanism using the Hybrid Cuckoo Search and Firefly Algorithm (H-CS-FA) (2018).. Archive of Applied Mechanics.



# Jednostruke ugljikove nanocijevi: simulacije molekularnom dinamikom i modeliranje strojnim učenjem

Čanađija, M.

## Sažetak

U radu se opisuju rezultati simulacije molekularnom dinamikom jednostrukih ugljikovih nanocijevi. Dobiveni rezultati materijalnih značajki iskorišteni su kao ulazni skup podataka za modeliranje dubokim strojnim učenjem. Algoritam strojnog učenja vjerno reproducira rezultate molekularne dinamike, s dodatnom prednošću djelomičnog uklanjanja stohastičnosti uzrokovanih termičkim fluktuacijama atoma ugljika.

**Ključne riječi:** ugljikove nanocijevi, molekularna dinamika, mehaničke značajke, strojno učenje

## 1 Uvod

Posljednjih se godina može uočiti eksponencijalni rast broja publikacija na temu nanotehnologije. Vezano za ovaj rad, posebno su zanimljiva nova istraživanja na području nanomehanike nanostrukture. Kao jedan od materijala od posebnog značaja ističu se ugljikove nanocijevi, koje se pak mogu pronaći u više različitih oblika. U ovome će se radu razmatrati jednostruke ugljikove nanocijevi.

Ono što se vrlo brzo pokazuje prilikom pregleda literature ove tematike jest da se koriste prilično različite vrijednosti mehaničkih značajki. Raspon vrijednosti u kojima se mehaničke značajke dokumentiraju razmjerno je širok, što generira dodatne nesigurnosti u modelu. Jedan od razloga jest i to da su analize molekularnom dinamikom (MD), kojima se najčešće dobivaju ovi podaci, vrlo sažeto dokumentirane što otežava reprodukciju rezultata. Naposljetku, mehaničke značajke ovise i o specifičnostima pojedine konfiguracije nanocijevi. Literatura uglavnom pokriva samo nekoliko karakterističnih konfiguracija, dok za ostale konfiguracije rezultati nisu poznati.

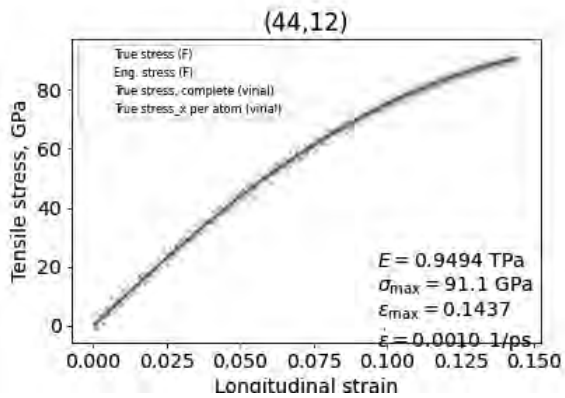
Imajući ovo u vidu, ovim se istraživanjem [1, 2] detaljno dokumentira vrijednosti modula elastičnosti, Poissonovog broja te naprezanja i deformacije pri lomu nanocijevi za sve konfiguracije nanocijevi promjera do 4 nm putem molekularne dinamike.

No, imajući u vidu visoke računalne troškove povezane s takvim proračunima, stvoren i računalni model koji interpolira tražene značajke temeljem kiralnih parametara  $n$  i  $m$  nanocijevi. Algoritam se temelji na strojnom učenju. Povrh ovoga, učinjene su i analize koje daju informaciju o potrebnoj veličini ulaznog skupa podataka, a da bi se još uvijek ostvarila interpolacija visoke točnosti.

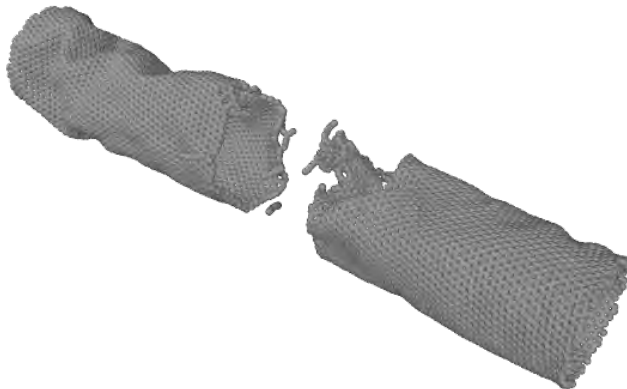
## 2 MD model i rezultati

U svrhu dobivanja mehaničkih značajki jednostrukih nanocijevi provedeni su vlačni testovi u softveru za molekularnu dinamiku LAMMPS. Pripremljeno je 818 različitih konfiguracija, sve s omjerom duljine i promjera približno jednakim 5. Uključeni su svi promjeri nanocijevi manji od 4 nm. Brzina uvođenja deformacije održavana je konstantnom u svim testovima i iznosila je 0.001 1/ps. Interakcije među atomima ugljika modelirane su AIREBO potencijalom. Temperatura na kojoj se provodio vlačni test iznosila je 300 K. Kako je to dobro poznato, MD simulacije koje se provode na temperaturama višim od 0 K, uključuju termičke fluktuacije atoma. Na taj način, svi testovi imaju određenu stohastičku komponentu. Radi dobivanja vrijednosti koje će čim vjernije odražavati stvarno stanje, navedene su simulacije provedene tri puta, svaki puta počevši od drugog slučajnog stanja položaja atoma.

Dobiveni su rezultati u vidu krivulja naprezanje-deformacija, Sl. 1. Bilježili su se podaci o trenutnoj duljini, promjeru, sili i temperaturi. Temeljem tih vrijednosti, određeni su modul elastičnosti, Poissonov broj, te deformacija i naprezanje pri lomu. Utvrđeno je da se modul elastičnosti kreće u granicama 904 GPa do 1017 GPa, Poissonov broj od 0.047 do 0.273, maksimalno naprezanje od 76 GPa do 109 GPa te deformacija pri lomu od 0.132 do 0.214.



Slika 1. Krivulja naprežanje-deformacija jednostruke ugljikove nanocijevi 44x12.



Slika 2. Lom jednostruke ugljikove nanocijevi (44, 12).

### 3 Strojno učenje

Ovim se istraživanjem željelo stvoriti model duboke neuronske mreže (DNM) koja bi uspješno interpolirala vrijednosti mehaničkih značajki temeljem rezultata dobivenih MD analizama. U tu se svrhu koristio softver otvorenog tipa Keras. Arhitektura mreže je sekvencijalna, s gustim slojevima koji su redom sadržavali 128-64-64-32-32-32-32-8-8-

4 neurona. Ulazni skup podataka predstavljali su usrednjeni MD podaci. Skup je podijeljen u tri manja skupa – skup za treniranje, validaciju i provjeru, u omjeru 70:15:15. Podjela je učinjena slučajnim odabirom, te je postupak ponovljen za deset različitih slučajnih odabira. Kao relevantna neuronska mreža usvojeno je ono rješenje koje je davalo najmanju MSE grešku (0.00531) na skupu podataka za provjeru.

Istrenirana mreža tako je interpolirala cjelokupni ulazni skup podataka s R2 vrijednostima u granicama 0.963 do 0.992. Niže vrijednosti dobivene su za modul elastičnosti i Poissonov broj, dok se više vrijednosti dobivaju za maksimalno naprezanje i deformaciju pri lomu. Pojedinačna odstupanja od MD rezultata kretala su se u granicama od -4.125%, do 2.665%, izuzev za Poissonov broj gdje su zabilježena veća odstupanja, od -28.11% do 18.775%

## **4 Zaključak**

Rezultati istraživanja dobiveni putem MD daju cjelokupni uvid u mehaničke značajke jednostrukih ugljikovog nanocijevi promjera do 4 nm. Temeljem ovih rezultata provedena je interpolacija uporabom neuronske mreže, te je pokazana visoka kvaliteta ove aproksimacije.

## **Zahvale**

Ovaj je rad financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom IP-2019-04-4703.

## **Literatura**

- [1] Čanađija, M.; Deep learning framework for carbon nanotubes: mechanical properties and modeling strategies; Carbon; 2021 (prihvaćeno za tisak).
- [2] Čanađija, M.; Mechanical Properties of Carbon Nanotubes - Deep Learning Approach; NT21: International Conference on the Science and Application of Nanotubes and Low-Dimensional Materials, Rice University, Houston, SAD, 6-11 lipnja 2021.

# Analiza miješanja fluida u prisutnosti nesigurnosti

Črnjarić-Žic, N.<sup>1</sup>, Ivić, S.<sup>2</sup> i Bukvić, L.<sup>3</sup>

## Sažetak

Razumijevanje transporta čestica fluida značajno je u mnogim prirodnim i industrijskim tokovima. U praksi se analiza miješanja fluida često temelji na aproksimaciji Lagrangeovih koherentnih struktura. Jedan od načina je mjerenje Lagrangeove deformacije pomoću mezohiperboličkih polja brzina. U ovom se radu promatra tok fluida definiran vektorskim poljem brzina uz prisustvo nesigurnosti. Trajektorije gibanja pod utjecajem nesigurnosti u vektorskom polju dobivaju se rješavanjem stohastičkih diferencijalnih jednažbi, te se rezultati dobivenih simulacija koriste za računanje mezohiperboličkih polja brzina. Dobiveni rezultati uz prisustvo nesigurnosti uspoređeni su s rezultatima bez prisutnosti nesigurnosti te je provedena statistička analiza njezina utjecaja. Rezultati pokazuju da su za umjerene nesigurnosti u vektorskom polju koherentne strukture dosta stabilne. Kao što je i očekivano, utjecaj nesigurnosti veći je u nestacionarnom slučaju.

**Ključne riječi:** tok fluida, mezohiperbolika, miješanje, Lagrangeove koherentne strukture

---

<sup>1</sup> **Prof. Nelida Črnjarić-Žic, dipl. ing.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za matematiku, fiziku i strane jezike, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: nelida@riteh.hr

<sup>2</sup> **Doc. Stefan Ivić, dipl. ing.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarsko inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: sivic@riteh.hr

<sup>3</sup> **Luka Bukvić, mag. ing. mech.**, Saipem, e-mail: luka.bukvic@saipem.com

## 1 Uvod

Koherentne strukture dinamičkog gibanja mogu biti korisne u razumijevanju fizikalnih pojava kod složenih gibanja [2]. Mogu se, na primjer, koristiti kod predviđanja širenja onečišćenja [1,3], u analizi miješanja [2], itd. Jedan od često korištenih alata kod otkrivanja geometrijskih svojstava Lagrangeovih koherentnih struktura je polje Ljapunovljevih eksponenata u konačnom vremenu (FTLE) [4], koji predstavljaju mjeru separacije dviju trajektorija koje započinju u maloj okolini neke točke u promatranom vremenu [2].

U realnim je situacijama dinamičko gibanje često pod utjecajem vektorskih polja brzina kod kojih se pojavljuje nesigurnost, npr. zbog nepreciznosti u mjerenju i modeliranju, te rezolucijskih pogrešaka. Također se utjecaj difuzije na gibanje fluida može analizirati promatranjem toka u Lagrangeovoj formulaciji pod utjecajem vektorskih polja brzina s dodanim stohastičkim poremećajima [5]. Takve nesigurnosti imaju utjecaja na koherentne strukture, pa procjene pogrešaka koje nastanu u izračunatim koherentnim strukturama mogu biti izuzetno korisne. U [6] je promatran utjecaj determinističke nesigurnosti na FTLE, dok je u [7] nesigurnost modelirana pomoću stohastičkog člana, te je dana teoretska ocjena pogrešaka u FTLE polju.

U [1] je prikazan jedan od postupaka za otkrivanje koherentnih struktura utemeljen na mezohiperboličkim poljima brzina za dvodimenzionalna nekompresibilna strujanja. Temeljem tog se kriterija dobiva particija domene na područja s različitim svojstvima strujanja: mezohiperboličkima, u kojima dominira stezanje i rastezanje, te mezoeliptičkima u kojima dominira rotacija. Proširenje mezohiperboličke klasifikacije strujanja na trodimenzionalni slučaj dan je u [8].

U ovom se radu promatra utjecaj nesigurnosti na spomenutu mezohiperboličku analizu miješanja. Rad je koncipiran na sljedeći način. U drugom poglavlju opisano je modeliranje strujanja definirano nesigurnim vektorskim poljem brzina uz pomoć stohastičke diferencijalne jednadžbe. U trećem poglavlju opisana je mezohiperbolička analiza miješanja i postupak analize utjecaja nesigurnosti na koherentne strukture. Za procjenu utjecaja nesigurnosti na promatrani dijagnostički alat koristit će se stohastičke simulacije i statistička analiza. U zadnjem su poglavlju prikazani rezultati provedene analize.

## 2 Tokovi i vektorska polja s nesigurnošću

Promatra se vremenski ovisno polje brzina  $\mathbf{v}$  i dvodimenzionalni tok nekompresibilnog fluida na domeni  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ . Gibanje čestica fluida opisano je jednadžbom

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

Advekcija odabrane čestice  $\mathbf{x} \in A$  tijekom vremenskog intervala  $[t_0, t_0 + T]$  dana je s

$$\mathbf{x}(t_0 + T) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), s) ds \quad (2)$$

Tok u intervalu duljine  $T$  opisan preslikavanjem  $\Phi_{t_0}^{t_0+T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  danim s  $\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(t_0 + T)$  predstavlja poziciju u trenutku  $t_0 + T$  čestice koja je započela gibanje iz točke  $\mathbf{x}$ .

Za ispitivanje utjecaja nesigurnosti na tok fluida, u ovom je radu slučajni efekt uključen aditivno, tako da je vektorsko polje s nesigurnošću oblika

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t, \xi(\omega, t)) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \xi(\omega, t), \quad (3)$$

gdje je  $\xi(\omega, t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  slučajni proces na vjerojatnosnom prostoru  $\Omega$ . Gibanje čestica fluida potom je opisano stohastičkom diferencijalnom jednačžbom

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t, \xi(\omega, t)) \quad (4)$$

Kako bi se adekvatno modeliralo efekt eventualne nepreciznosti u mjerenjima, odnosno pogreške numeričkih simulacija, pretpostavlja se da je stohastički proces oblika

$$\xi(\omega, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i(\omega) \chi((i-1)\Delta t^s, i\Delta t^s](t), \quad (5)$$

gdje je  $\Delta t^s$  odabrani vremenski interval između promjena, dok su  $\xi_i$  nezavisne, jednako i uniformno distribuirane slučajne varijable na  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , a  $\varepsilon > 0$  granica nesigurnosti. Vremenski interval  $\Delta t^s$  između promjena može se shvatiti kao vremenski korak između dvaju mjerenja ako je polje brzina dobiveno mjerenjem ili pak kao vremenski korak numeričke simulacije ako je polje brzina dobiveno simulacijom. U slučaju kada se modelira difuzija, stohastički je proces  $\xi(\omega, t)$  zapravo Brownovo gibanje i (4) se treba rješavati korištenjem Itôva integralnog računa [5]. Za slučajni proces pretpostavljenog oblika, rješenja jednačžbe (4) definirana su za svaki događaj  $\omega$  i pripadajuću vrijednost slučajnog procesa, kao rješenja obične diferencijalne jednačžbe. Advekcija odabrane čestice  $\mathbf{x} \in A$  tijekom intervala  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  sada je dana s

$$\mathbf{x}(t_0 + T, \omega) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^{t_0+T} \mathbf{v}(\mathbf{x}(s, \omega), s) ds + \int_{t_0}^{t_0+T} \xi(\omega, s) ds. \quad (6)$$

Na opisani se način za svaki  $\omega \in \Omega$  dobivaju tokovi  $\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\cdot, \omega): \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}(t_0 + T, \omega)$ , te se može odrediti distribucija vjerojatnosti za tokove.

### 3 Mezohiperbolička analiza miješanja

U ovom je radu metoda korištena predložena u [1] za definiranje područja koja karakteriziraju specifična ponašanja čestica fluida, kao što su stezanje i rastezanje, odnosno miješanje.

Pretpostavlja se da je tok tijekom intervala duljine  $T$  opisan preslikavanjem  $\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x})$ .

Derivacija toka, koja je dana Jacobijevom matricom  $D\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{x}(t_0+T)}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t_0, T)$ , koristi se za mjeru evolucije infinitezimalne perturbacije trajektorija i deformacije susjednih materijalnih elemenata. Budući da za nekompresibilni fluid vrijedi  $\det \mathbf{J}(\mathbf{x}, t_0, T) = 1$ , za mesohiperboličku brzinu definiranu s

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t_0, T) = (\mathbf{x}(t_0 + T) - \mathbf{x})/T, \quad (7)$$

vrijedi relacija

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t_0, T) = \mathbf{I} - T \nabla \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t_0, T). \quad (8)$$

Kako je u dvodimenzionalnom slučaju  $\det \mathbf{J}(\mathbf{x}, t_0, T) = \lambda_1 \lambda_2 = 1$ , pri čemu su  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  svojstvene vrijednosti Jacobijeve matrice  $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t_0, T)$ , slijedi da su obje svojstvene vrijednosti ili realne ili pak kompleksno konjugirane na jediničnoj kružnici. Trajektorija koja započinje u točki  $\mathbf{x}$  u trenutku  $t = t_0$  naziva se mezohiperbolička na intervalu  $[t_0, t_0 + T]$  ako su svojstvene vrijednosti  $\lambda_{1,2}$  obje realne, a mezoeliptička ako su obje kompleksne. Koristeći izraz (8), u [1] je dokazano da je u dvodimenzionalnom slučaju trajektorija mezohiperbolička ako je  $\det \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t_0, T) < 0$  ili  $\det \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t_0, T) > 4/T^2$ , a mezoeliptička u slučaju kada je  $0 <$

$\det \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t_0, T) < 4/T^2$ . Grafički prikaz polja  $\det \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t_0, T)$  naziva se hipergraf i može se koristiti kao kvalitativni alat za analizu ponašanja toka. Pritom u mezoeliptičkim područjima prevladava miješanje, dok u mezohiperboličkim područjima prevladava rastezanje u jednom smjeru i kontrakcija u drugom.

Kod analize u stohastičkom slučaju, mezohiperboličke brzine koje se dobivaju iz tokova  $\Phi_{t_0}^{t_0+T}(\mathbf{x}, \omega)$  ovise o slučajnom događaju  $\omega$ , te isto vrijedi i za particiju domene na područja s određenim tipovima strujanja. Kako bi se utvrdio utjecaj nesigurnosti na opisani kriterij, ova je dijagnostička metoda primijenjena na veliki broj realizacija nesigurnosti, te su rezultati uspoređeni s rezultatima dobivenima na strujanju bez nesigurnosti. Pritom je za svaku početnu točku trajektorije izračunata relativna frekvencija simulacija u kojima se detektira drukčije ponašanje u odnosu na ponašanje koje je utvrđeno za strujanje bez nesigurnosti. Prikazana je prostorna distribucija dobivenih vrijednosti, te je za svaku odabranu granicu nesigurnosti  $\varepsilon$  određen udio stabilnih točaka, tj. onih kod kojih se promjena tipa strujanja dogodi s vjerojatnošću manjom od zadanog praga.

## 4 Numerički rezultati i diskusija

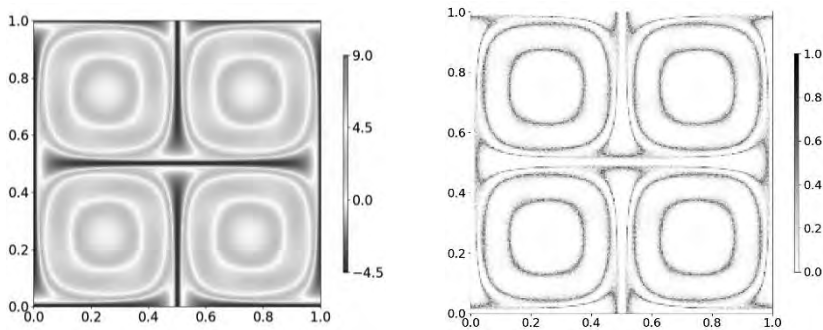
Ovdje su prikazani numerički rezultati na dva teoretska i jednom realnom testnom primjeru. U svim su primjerima prikazani hipergrafovi koji pripajaju zadanim vektorskim poljima bez nesigurnosti. Pritom su na slikama plavom i crvenom bojom prikazana mezohiperbolička, a zelenom mezoeliptička područja. Također je u svim primjerima prikazana prostorna distribucija relativne frekvencije točaka u kojima se dogodi promjena tipa trajektorije u slučaju prisustva nesigurnosti izračunata na odabranom broju simulacija.

### 4.1 Primjer 1

Ovaj je testni primjer definiran stacionarnim vektorskim poljem brzina

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\sin(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2) \\ \cos(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

i domenom  $A = [0,1] \times [0,1]$ . Numeričke simulacije provedene su na uniformnoj diskretnoj mreži  $201 \times 201$ . Polje  $\det \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t_0, T)$  izračunato je za  $T = 0,94248$  kao u [1]. Rezultati dobiveni za  $N = 50$  simulacija, te za granicu nesigurnosti  $\varepsilon = 0,02$  u obliku opisanom u uvodnom dijelu ovog poglavlja prikazani su na slici 1.



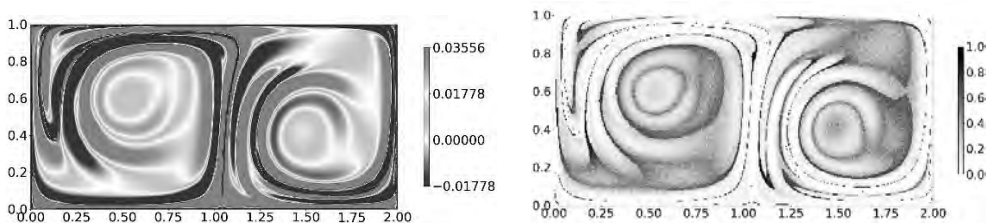
Slika 1. Hipergraf za strujanje bez nesigurnosti i prostorna distribucija relativne frekvencije točaka u kojima se dogodi promjena tipa strujanja za  $\varepsilon = 0,02$ .

#### 4.2 Primjer 2

Testni primjer dvostrukog vrtloga definiran je nestacionarnim vektorskim poljem

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} -A \pi \sin(\pi f(x_1, t)) \cos(\pi x_2) \\ A \pi \cos(\pi f(x_1, t)) \sin(\pi x_2) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

pri čemu je  $f(x_1, t) = a(t)x_1^2 + b(t)x_1$ ,  $a(t) = \delta \sin(\omega t)$ ,  $b(t) = 1 - 2\delta \sin(\omega t)$ . Domena je  $[0, 2] \times [0, 1]$ , a parametri su jednaki  $A = 0,1$ ,  $\omega = 0,2\pi$ ,  $\delta = 0,1$ . Numeričke su simulacije provedene na uniformnoj diskretnoj mreži  $401 \times 201$ . Polje  $\det \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t_0, T)$  izračunato je za  $t_0 = 0$  i  $T = 15$ . Na slici 2. prikazani su rezultati na isti način i s jednakim parametrima kao i u primjeru 1. Očekivano je tok u nestacionarnom slučaju osjetljiviji na nesigurnosti, a time postaje osjetljivija i dijagnostička metoda.



Slika 2. Hipergraf za strujanje bez nesigurnosti i prostorna distribucija relativne frekvencije točaka u kojima se dogodi promjena tipa strujanja za  $\varepsilon = 0,02$ .

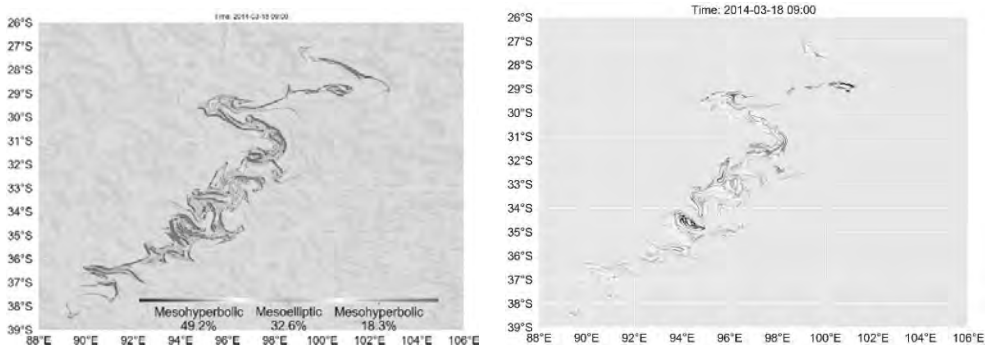
U tablici 1. je za različite vrijednosti granice nesigurnosti  $\varepsilon$ , u oba promatrana primjera prikazan udio diskretizacijskih točaka domene kod kojih se promjena tipa strujanja dogodi s relativnom frekvencijom većom od 0,2.

Tablica 1. Udio točaka s promijenjenim tipom strujanja za odabrane granice nesigurnosti.

|   | $\varepsilon$ | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 |
|---|---------------|-------|-------|------|------|
| Udio točaka s promijenjenim tipom strujanja | Primjer 1.    | 0,8%  | 5%    | 9%   | 19%  |
|   | Primjer 2.    | 10%   | 20%   | 33%  | 48%  |

### 4.3 Primjer 3

Promatrano se polje brzina odnosi na područje Indijskog oceana te pokriva područje od  $88^\circ$  do  $106^\circ$  geografske širine, te od  $-39^\circ$  do  $-26^\circ$  geografske duljine i vremenski period od 6.3.2014. do 1.4.2014. godine. Podaci su dobiveni simulacijom na uniformnoj mreži prostorne rezolucije od  $1/25^\circ$  dimenzija  $551 \times 425$  i s vremenskim korakom od 3 h korištenjem HYCOM modela od US Navy. Hipergrafovi sa i bez prisustva nesigurnosti određeni su za desetodnevni vremenski period započevši s 8.3.2014. na isti način kao u [9]. Podaci su prikazani na način kao i u prethodnim primjerima. Za određivanje prostorne distribucije točaka kod kojih se promijeni tip strujanja korištene su sljedeće granice nesigurnosti  $\varepsilon$ : 0,01, 0,02, 0,05 i 0,1 [ $^\circ/h$ ], što uz maksimalnu brzinu od otprilike 1,5 [ $^\circ/h$ ], daje približno istu relativnu nesigurnost kao u primjerima 1 i 2. Pripadajući udjeli točaka s promijenjenim tipom strujanja u barem 20% od  $N = 50$  provedenih simulacija redom su jednaki 23%, 25%, 45% i 65%. Usporedbom s vrijednostima iz tablice 1. uočava se da su u ovom primjeru ti udjeli značajno veći.



Slika 3. Hipergraf za strujanje bez nesigurnosti i prostorna distribucija relativne frekvencije točaka u kojima se dogodi promjena tipa strujanja za  $\varepsilon = 0,02$ .

### Zahvale

Ovaj je rad izrađen u sklopu potpore Sveučilišta u Rijeci, uniri-prirod-18-118-1257.

## Literatura

- [1] Mezić, I., Loire, S., Fonoberov, V.A., i Hogan, P.; A New Mixing Diagnostic and Gulf Oil Spill Movement; *Science*; 2010; 330; 486-489.
- [2] Haller, G.; Lagrangian coherent structures; *Annu. Rev. Fluid Mech.*; 2015; 47; 137-162.
- Froyland, G., Stuart, R. i van Sebille, E.; How well connected is the surface of the global ocean?; *Chaos*; 2014; 24; 033126.
- [3] Shadden, S.C., Lekien, F. i Marsden, J.; Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flow; *Physica D*; 2005; 212; 271-304.
- [4] Pavliotis, G.A.; *Stochastic Processes and Applications: Diffusion Processes, the Fokker-Planck and Langevin Equations*, Vol. 60 of *Texts in Appl. Math.*; Springer; 2014.
- [5] Haller, G.; Lagrangian coherent structures from approximate velocity data; *Phys. Fluids*; 2002; 14; 1851-1862.
- [6] Balasuriya, S.; Uncertainty in finite-time Lyapunov exponent computation; *J. Comp. Dyn. AIMS*; 2020; 7; 313-337.
- [7] Budišić, M., Siegmund, S., Son, D.T. i Mezić, I.; Mesochronic classification of trajectories in incompressible 3D vector fields over finite times; *Discret. Contin. Dyn.-S*; 2016; 9; 923-958.
- [8] Ivić, S., Mezić, I., Crnković, B.; Search strategy in a complex and dynamic environment: the MH370 case; *Nature*; 2020; 10; 19640.



## O vektoru položaja u neeuklidskim prostorima

Drašković, Z.<sup>1</sup>

### Sažetak

Pokušalo se sa uvođenjem pojma vektora položaja i u neeuklidskim prostorima. Pokazalo se da je, u predloženom pristupu, vektor položaja u dvodimenzionalnom prostoru Riemanna, tj. na plohi uveden na jednoznačan način, da mu je modul jednak duljini luka između točaka na koje se on odnosi, ali i da – pod određenom pretpostavkom – ima još jedno važno svojstvo vektora položaja u euklidskom prostoru.

**Ključne riječi:** vektor položaja, dvostruka tenzorska polja, operatori paralelnog prijenosa, geodetske krivulje, neeuklidski prostori, kovarijantna derivacija

---

<sup>1</sup> **Dr. sc. Zoran Drašković**, Hrnetička 20, 10090 Zagreb, Hrvatska, e-mail: zoran.draskovic\_643@yahoo.com

## 1 Uvod

Uvriježeno je mišljenje da se pojam vektora položaja može uvesti samo u euklidskom prostoru, tim prije kad se zna: «*Of course, when the space is more general, the statement that a vector lies on a tangent to [curve] C cannot be taken in any literal sense because, firstly, the usual interpretation of vector breaks down and, secondly, the concept of tangent has not yet be defined.*» ([4], str. 170-171). Međutim, kad se kod neupitnih autoriteta nije pročitalo kako takav pojam ne postoji u neeuklidskim prostorima, već da je on proizvoljan: «*In euclidean space ... distance is equal to the radius vector; in a non-euclidean space ... there is no quantity which has all the properties of the euclidean radius vector ... . Therefore the choice of a „radius vector“ is now arbitrary.*» ([2], str. 282) – bio je pravi izazov pokušati sa uvođenjem vektora položaja i u tim prostorima.

U tom pokušaju osobito se korisnom pokazala mogućnost da se vektor položaja u euklidskom prostoru može interpretirati kao dvostruko tenzorsko polje, na što se, posve nenadano, naišlo u knjizi koja se bavi asimptotskom analizom ljusaka.

## 2 Vektor položaja kao dvostruko tenzorsko polje

Naime, u [3] se izvode sledeći izrazi<sup>1</sup> za koordinate  $r^i$  vektora položaja  $r$  točke  $P$  u odnosu na točku  $P_o$  (u općem slučaju se pretpostavlja da je  $P_o \neq O$ , tj. da se točka  $P_o$  ne podudara sa koordinatnim početkom  $O$ ) u proizvoljnom zakrivljenom koordinatnom sustavu  $x^i$  ( $i=1,2,3$ ) u trodimenzionalnom euklidskom prostoru<sup>2</sup>

$$r^i(P, P_o) = \int_{P_o}^P g_j^i(M, P) dx^j(M) \quad , \quad (1)$$

a to ukazuje da vektor položaja pripada kategoriji dvostrukih tenzorskih polja ili tzv. dvotočkastih tenzora (kako se tenzorska polja definirana u različitim točkama prostora ponekad nazivaju): «*The position vectors belong to the category of two-point tensors.*» ([3], str. 500); pri tome: «*With respect to the first point indicated behind the kernel letter  $r$ , they represent an ordinary vector and with respect to the second point, an absolute scalar.*».

<sup>1</sup> Izrazi (1) predstavljaju koordinatni oblik relacije koja se dobiva integriranjem poznatog izraza za diferencijal vektora položaja  $dr = g_i dx^i$ , gdje su  $g_i$  bazni vektori koordinatnog sustava  $x^i$ .

<sup>2</sup> Koristi se Einsteinova konvencija o zbrajanju po ponovljenim indeksima. Mali latinski indeksi uzimaju vrijednosti iz skupa  $\{1,2,3\}$ , a mali grčki indeksi uzimat će vrijednosti iz skupa  $\{1,2\}$ .

Napomenimo kako toj kategoriji polja pripadaju i operatori paralelnog prijenosa  $g^i_j$  („*Euclidean shifters*“; v. str. 807 u [1]) između dviju točaka u euklidskom prostoru i prvi indeks im se, bilo da je gornji ili donji, odnosi na točku određenu prvim argumentom, dok se drugi indeks odnosi na točku određenu drugim argumentom.

### 3 Vektor položaja u prostoru Riemanna

Dobro je poznato da analogija nema snagu dokaza, ali je isto tako dobro poznato i da se, na primjer, izraz za kovarijantnu derivaciju vektorskog polja u nekoj oblasti prostora Riemanna uvodi u *analogiji* sa tom derivacijom u euklidskom prostoru. Stoga je prirodno (u onoj mjeri u kojoj nam je uopće moguće rasuđivati o prirodnosti događanja unutar nekog neeuklidskog prostora), zapitati se da li bi se, na primjer, i pojam vektora položaja u dvodimenzionalnom prostoru Riemanna, tj. na plohi mogao uvesti u *analogiji* sa takvim vektorom u obvojnem, trodimenzionalnom euklidskom prostoru? Učinimo to pomoću sljedećih izraza

$$\rho^\alpha(P, P_o) = \int_{P_o}^P g K_\beta^\alpha(M, P) du^\beta(M) \quad , \quad (2)$$

gdje su  $u^\alpha$  zakrivljene koordinate na samoj toj plohi (tzv. Gaussovi parametri), a umjesto „*Euclidean shifters*“ stoje „*Riemannian shifters*“, tj. koeficijenti  $K$  koji predstavljaju operatore paralelnog prijenosa duž krivulje u prostoru Riemanna ([5]), s tim da se ovdje radi o paralelnom prijenosu duž *geodetske krivulje* između točaka  $P_o$  i  $P$  (što sugerira indeks  $g$  u kernelu  $K$ ). Time smo postigli da – makar u nekoj dovoljno maloj oblasti u prostoru Riemanna gdje se može pretpostaviti egzistencija jedinstvene geodetske krivulje između ma kojih dviju točaka – na gornji način definiran vektor bude *jednoznačno uveden*, tj. da nije proizvoljan.

Prvo što bi se sad trebalo zapitati za tako uveden pojam vektora položaja na plohi, a znajući da se i u prostorima Riemana definira kvadrat *intenziteta* ili *modula* vektora kao<sup>1</sup>

$$\rho^2 = \rho^2(P, P_o) = a_{\alpha\beta}(P) \rho^\alpha(P, P_o) \rho^\beta(P, P_o) \quad , \quad (3)$$

jeste koliki je taj intenzitet na primjer kada se radi o nekoliko po volji izabranih parova točaka na sfernoj plohi radijusa  $R=10$  na kojoj su uvedene geografske koordinate  $u^1 \equiv \varphi$ ,  $u^2 \equiv \vartheta$ ? Određujući koordinate  $\rho^\alpha$  tako što se krivuljni integrali u (2) svedu na jednostavne integrale<sup>2</sup>, zatim se ukupni interval integracije podijeli u jednake podintervale, a potom se integralne sume računaju u broju koraka potrebnom da razlika između njihovih uzastopnih

<sup>1</sup>  $a_{\alpha\beta}$  je prvi osnovni tenzor tog prostora, odnosno plohe.

<sup>2</sup> Pri tome su korišteni izrazi (D1) za operatore paralelnog prijenosa duž geodetske krivulje!

vrijednosti bude manja od  $\varepsilon=0.0000001$ , formirana je Tablica 1., s tim da je za određivanje udaljenosti između točaka na sfernoj plohi korišten izraz temeljen na kosinusnom poučku iz sferne trigonometrije, odnosno tzv. Haversine formula.

Međutim, osim tog numeričkog „dokazivanja“, moguće je i analitičkim putem potvrditi da je modul vektora (3) zaista jednak duljini luka  $s$  između točaka na koje se on odnosi. Naime, pretvarajući u (2) krivoljni integral II. vrste u krivoljni integral I. vrste i koristeći činjenicu da tangenti vektor geodetske linije tvori polje paralelnih vektora duž te krivulje, tj. da je

Tablica 1. Intenzitet vektora položaja  $\rho(P, P_o)$  na sfernoj plohi  
versus udaljenost između točaka  $P_o$  i  $P$  na toj plohi

| $P_o(\varphi_o, \vartheta_o)$ | $P(\varphi_p, \vartheta_p)$ | Intenzitet $\rho$<br>vektora položaja | Udaljenost između točaka na sfernoj<br>plohi<br>(kosinusni poučak) (Haversine<br>formula) |                        |
|-------------------------------|-----------------------------|---------------------------------------|---|------------------------|
| (0°,0°)                       | (25°,25°)                   | 6.069450284729144<br>1                | 6.069458618647328<br>9  | 6.069458618647328<br>1 |
| (10°,15°)                     | (45°,60°)                   | 9.023544372356692<br>4                | 9.023544637726740<br>1  | 9.023544637726740<br>1 |
| (45°,15°)                     | (25°,25°)                   | 3.708667540842900<br>0                | 3.708680316872447<br>6  | 3.708680316872443<br>6 |

$$\left. \frac{du^\alpha}{ds} \right|_P = {}_g K_\beta^\alpha(P_o, P) \left. \frac{du^\beta}{ds} \right|_{P_o} \quad (4)$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \rho^\alpha(P, P_o) &= \int_{P_o}^P {}_g K_\beta^\alpha(M, P) du^\beta(M) \\ &= \int_{P_o}^P \left( {}_g K_\beta^\alpha(M, P) \left. \frac{du^\beta}{ds} \right|_M \right) ds = \int_{P_o}^P \left( \left. \frac{du^\alpha}{ds} \right|_P \right) ds = \left. \frac{du^\alpha}{ds} \right|_P (s_P - s_o), \end{aligned} \quad (5)$$

i zato (zbog  $ds^2 = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta$ )

$$\rho^2 = \rho^2(P, P_o) = a_{\alpha\beta}(P) \left. \frac{du^\alpha}{ds} \right|_P \left. \frac{du^\beta}{ds} \right|_P (s_P - s_o)^2 = (s_P - s_o)^2 \quad ! \quad (6)$$

## 4 O kovarijantnoj derivaciji vektora položaja

Potvrda uspješnosti provedenog „numeričkog pokusa“ navela je na pomisao kako bi valjalo provjeriti da li možda vektor  $\rho$  ima i osobinu vektora položaja u euklidskom prostoru da se njegovim kovarijantnim deriviranjem dobiva Kroneckerov  $\delta$ -simbol ([3], str. 500)? U tom cilju smo, u analogiji sa takvim postupkom u obvojnem euklidskom prostoru, proveli sljedeći granični proces kojim se duž koordinatne krivulje  $u^\beta$  izračunava kovarijantna derivacija na plohi u nekoj točki  $P$  (stavljanje indeksa  $i$  u zagrade ukazuje se na njegov netenzorski karakter!)

$$\overset{g}{\nabla}_\beta \rho^\alpha(P, P_o) = \lim_{\Delta u^\beta \rightarrow 0} \frac{\rho^\gamma(P_{(i)}, P_o) \overset{g}{K}_\gamma^\alpha(P_{(i)}, P) - \rho^\alpha(P, P_o)}{\Delta u^\beta}, \quad (7)$$

Tablica 2. Proces kovarijantnog deriviranja polja  $\rho^\alpha(P, P_o)$  u točki  $P$  duž paralele  $\varphi$

| $P_{(i)}(\varphi_{(i)}, \mathcal{G}_P)$<br>$\varphi_{(i)} = \varphi_P -$<br>$-(\varphi_P - \varphi_o)/i$ | $\overset{g}{\nabla}_1 \rho^1 = \overset{g}{\nabla}_\varphi \rho^\varphi \rightarrow 1$   |  |  |
|--|---|--|--|
|  | $\overset{g}{\nabla}_1 \rho^2 = \overset{g}{\nabla}_\varphi \rho^\vartheta \rightarrow 0$ |  |  |
|  | $\rho[(25^\circ, 25^\circ); (0^\circ, 0^\circ)]$  | $\rho[(45^\circ, 60^\circ); (10^\circ, 15^\circ)]$ | $\rho[(25^\circ, 25^\circ); (45^\circ, 15^\circ)]$ |
| $i=10$   | 0.99994331417161919<br>-8.3571006803827980E-003   | 0.99953355460703541<br>-1.3223563669643456E-002    | 0.99996372391158905<br>6.6854350808361693E-003     |
| $i=100$  | 0.9999943326351826<br>-8.3562569459530434E-004  | 0.9999533556018427<br>-1.3225599833234911E-003     | 0.9999963729414121<br>6.6850031025191773E-004      |
| $i=1000$   | 0.9999999450860355<br>-8.3562485123016652E-005  | 0.9999995513601292<br>-1.3225620216894554E-004     | 0.9999999635538284<br>6.6849987839658228E-005      |
| $i=10000$  | 1.000000348623712<br>-8.3562488796049294E-006   | 1.0000001239713461<br>-1.3225622017196403E-005     | 0.99999999048208343<br>6.6849987017343630E-006     |

pri čemu se paralelni prijenos vektora položaja  $\rho$  između točaka  $P_{(i)}$  i  $P$  obavlja duž geodetske krivulje (na što ukazuje i simbol  $g$  u oznaci za kovarijantnu derivaciju) koja ih spaja! U primjeru sferne plohe, koristeći (5), dobili smo gornje rezultate.

## 5 Završne napomene i buduće aktivnosti

Ipak, ta vrlo obećavajuća konvergencija zahtijeva i svoju analitičku potvrdu! Međutim, iako je u ovom radu (zapravo prethodnom priopćenju) na jednoznačan način predloženo uvođenje pojma vektora položaja i u prostoru Riemanna, iako mu je u slučaju plohe modul jednak duljini luka između točaka na koje se on odnosi, čini se kako je osnovno pitanje na koje bi trebalo odgovoriti u budućnosti ono o geometrijskom smislu takva pojma, imajući, s jedne

strane, u vidu da se vektorom u uočenoj točki neke plohe po definiciji smatra onaj vektor koji leži u tangencijalnoj ravnini te plohe u toj točki, ali ne iznenadivši se, sa druge strane, ni opetovanim, odavno na internetu postavljenim pitanjem: «*Is it possible to have a curved vector?*».

### Zahvala

Financijsku pomoć Društva Crnogoraca i prijatelja Crne Gore „Montenegro“ Zagreb autor sa zahvalnošću ističe.

### Literatura

- [1] Ericksen, J.L.; *Tensor Fields*; Handbuch der Physik, Bd. III/1; Springer-Verlag; Berlin - Göttingen – Heidelberg; 1960.
- [2] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M.; *The Classical Theory of Fields*; Pergamon Press; Oxford - New York - Toronto - Sydney – Braunschweig; 1971.
- [3] Rutten, H.S.; *Theory and Design of Shells on the Basis of Asymptotic Analysis*; Rutten+Kruisman, Consulting Engineers; Voorburg; 1973.
- [4] Golab, S.; *Tensor Calculus*; Elsevier; Amsterdam - London - New York; 1974.
- [5] Drašković, Z.; *On the determination of shifting operators along geodesics on a surface*; Theoretical and Applied Mechanics (Special Issue – Address to Mechanics); 2012.; 40; 17-26.

### Dodatak

U [5] su dobijeni eksplicitni izrazi za operatore paralelnog prijenosa po sfernoj plohi duž geodetske krivulje (glavne kružnice) između točaka  $P_o$  i  $P$  zadatih geografskim koordinatama.

$$\left. \begin{aligned}
 {}_g K_1^1(P_o, P) &= \frac{1}{S} \left\{ \frac{\cos \mathcal{G}_o}{\cos \mathcal{G}_p} \sin^2(\varphi_p - \varphi_o) - \right. \\
 &\quad \left. - \cos^2 \mathcal{G}_o [\cos(\varphi_p - \varphi_o) \tan \mathcal{G}_p - \tan \mathcal{G}_o] \times \right. \\
 &\quad \left. \times [\cos(\varphi_p - \varphi_o) \tan \mathcal{G}_o - \tan \mathcal{G}_p] \right\} \\
 {}_g K_2^1(P_o, P) &= -\frac{1}{S} \sin(\varphi_p - \varphi_o) \left\{ [\cos(\varphi_p - \varphi_o) \tan \mathcal{G}_p - \tan \mathcal{G}_o] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\cos \mathcal{G}_o}{\cos \mathcal{G}_p} [\cos(\varphi_p - \varphi_o) \tan \mathcal{G}_o - \tan \mathcal{G}_p] \right\} \\
 {}_g K_1^2(P_o, P) &= \frac{1}{S} \sin(\varphi_p - \varphi_o) \times \\
 &\quad \times \left\{ \cos \mathcal{G}_p \cos \mathcal{G}_o [\cos(\varphi_p - \varphi_o) \tan \mathcal{G}_p - \tan \mathcal{G}_o] + \right. \\
 &\quad \left. + \cos^2 \mathcal{G}_o [\cos(\varphi_p - \varphi_o) \tan \mathcal{G}_o - \tan \mathcal{G}_p] \right\} \\
 {}_g K_2^2(P_o, P) &= \frac{1}{S} \left\{ \sin^2(\varphi_p - \varphi_o) - \right. \\
 &\quad \left. - \cos \mathcal{G}_p \cos \mathcal{G}_o [\cos(\varphi_p - \varphi_o) \tan \mathcal{G}_p - \tan \mathcal{G}_o] \times \right. \\
 &\quad \left. \times [\cos(\varphi_p - \varphi_o) \tan \mathcal{G}_o - \tan \mathcal{G}_p] \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (D1)$$

$$\left( \begin{aligned}
 S &\equiv \sqrt{\sin^2(\varphi_p - \varphi_o) + \cos^2 \mathcal{G}_o [\cos(\varphi_p - \varphi_o) \tan \mathcal{G}_o - \tan \mathcal{G}_p]^2} \times \\
 &\times \sqrt{\sin^2(\varphi_p - \varphi_o) + \cos^2 \mathcal{G}_p [\cos(\varphi_p - \varphi_o) \tan \mathcal{G}_p - \tan \mathcal{G}_o]^2}
 \end{aligned} \right)$$



# Eksperimentalno ispitivanje dinamičkog odziva dugačke gredne konstrukcije na višestruku pobudu oslonaca

Fabijan, P.<sup>1</sup>, Guy de Chamisso, Q.<sup>2</sup> i Čeh, N.<sup>3</sup>

## Sažetak

Eksperimentalno se ispituje model dugačke gredne konstrukcije podvrgnut različitoj pobudi oslonaca. Ispitivanja se provode koristeći dvije potresne platforme te su pomaci tj. odziv grede mjereni beskontaktnim optičkim mjernim sustavom. Paralelno s time se razvija numerički model koji opisuje ponašanje vitke i dugačke gredne konstrukcije izložene nejednolikim potresnim opterećenjima oslonaca.

Cilj je na temelju provedenog eksperimentalnog programa bolje razumjeti ponašanje dugačkih konstrukcija prilikom potresnog opterećenja te usporedbom dobivenih eksperimentalnih rezultata s numeričkima validirati razvijeni numerički model. Prikazani rezultati pokazuju kako način na koji je masa raspoređena duž grede utječe na njen dinamički odgovor te kako kašnjenje pobude između dva oslonca može rezultirati značajnim smanjenjem simetričnih tonova u ukupnom dinamičkom odgovoru grede.

**Ključne riječi:** potresna pobuda, spektralna analiza, višestruka pobuda oslonaca, vitke dugačke konstrukcije.

---

<sup>1</sup> **Paolo Fabijan, student**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: [pfabijan@student.uniri.hr](mailto:pfabijan@student.uniri.hr)

<sup>2</sup> **Quentin Guy de Chamisso, student**, École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, Téléport 2 – 1 avenue Clément Ader BP 40109, e-mail: [quentin.guy-de-chamisso@etu.isae-ensma.fr](mailto:quentin.guy-de-chamisso@etu.isae-ensma.fr)

<sup>3</sup> **doc. dr. sc. Nina Čeh, docentica**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: [nina.ceh@uniri.hr](mailto:nina.ceh@uniri.hr)

## 1 Uvod

Kod su dugačkih konstrukcija, poput mostova, izloženih potresnoj pobudi potrebno je uzeti u bzir efekte višestruke pobude oslonaca, do koje dolazi zbog međusobne udaljenosti susjednih oslonaca i građe podloge na kojoj se oni nalaze. Dinamički odziv takvih konstrukcija se može bitno razlikovati od odgovora konstrukcije podvrgnute jednolikoj pobudi. U ovom radu je provedeno istraživanje utjecaja vremena potrebnog da potresna pobuda dođe s jednog oslonca na drugi na veličine pomaka i deformacija modela gredne dugačke konstrukcije. Takva nejednolika dinamička pobuda može izazvati veliki doprinos asimetričnih oblika deformiranja ukupnom dinamičkom odgovoru konstrukcije i povećati deformacije i naprezanja koja se javljaju unutar konstrukcije. [1, 2]

Iz tog razloga je osmišljena i provedena serija eksperimenata umanjenog modela gredne konstrukcije pomoću potresnih platformi. Paralelno s time se razvija numerički model kojim se također želi simulirati isto ponašanje, a koji će se u konačnici validirati na temelju dobivenih rezultata iz optičkih mjerenja eksperimentalnih ispitivanja. Za izradu numeričkog modela korišten je programski jezik Python.

## 2 Numerički model

Numerički model se bazira na rješavanju jednadžbe kretanja koja opisuje ponašanje dugačke slobodno oslonjene grede s dodanim diskretnim masama na odabranim mjestima metodom direktne integracije. Koristi se metoda iz Newmarkove skupine metoda, prigodne za dinamičke analize konstrukcija pod djelovanjem potresnih i udarnih pobuda. Jednadžba kretanja je dobivena na temelju metode konačnih elemenata. [3, 4]

Numeričko model se bazira na pronalasku rješenja jednadžbe dinamičke ravnoteže [3]:

$$M * \ddot{u}_t + C * \dot{u}_t + K * u_t = p_t \quad (1)$$

gdje su  $M$ ,  $C$  i  $K$  globalne matrice masa, prigušenja i krutosti,  $\ddot{u}_t$ ,  $\dot{u}_t$  i  $u_t$  vektori ubrzanja, brzine i pomaka (ili kutova zaokreta) točaka u vremenu, a  $p_t$  efektivni vektor opterećenja.

Zapišemo li efektivni vektor opterećenja u drugom obliku onda izraz (1) izgleda ovako [3]:

$$M * \ddot{u}_t + C * \dot{u}_t + K * u_t = -M * i * \ddot{u}_g \quad (2)$$

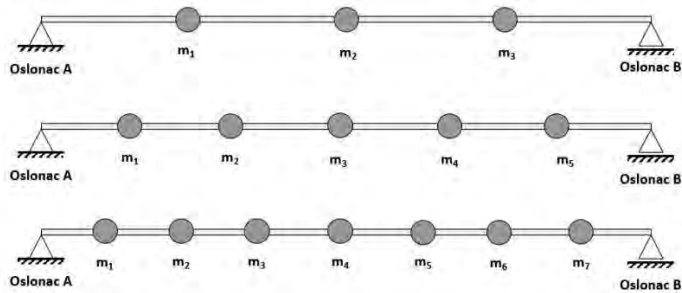
gdje je  $i$  utjecajna matrica, a  $\ddot{u}_g$  vektor ubrzanja oslonaca.

Opisani model je razvijen u programskom jeziku Python (1), a u planu je naknadna validacija i poboljšanje numeričkog modela s prikazanim eksperimentalnim rezultatima.

### 3 Eksperimentalna ispitivanja

Sva ispitivanja su provedena u Laboratoriju za konstrukcije Građevinskog fakulteta u Rijeci koristeći dvije potresne platforme i sustav za mjerenje pomaka na dugačkoj vitkoj gredi od aluminija. Korištena su potresne platforme Quanser ST-III s mogućnošću simuliranja ubrzanja frekvencije do 20 Hz. Ponašanje grede je praćeno optičkim sustavom za mjerenje pomaka i deformacija GOM Aramis 4M, koji se sastoji od dvije kamere rezolucije 2400x1728 piksela, brzinom od 50 do 100 fps (slika u sekundi).

Pokusi su provedeni na aluminijskoj gredi na koju je pričvršćeno 3, 5 pa 7 utega na pravilnim razmacima (Slika 1). Ukupna masa utega je cijelo vrijeme jednaka, a variran je njihov raspored i masa pojedinog utega.



Slika 3. Skice grede s različitim brojem masa [5]

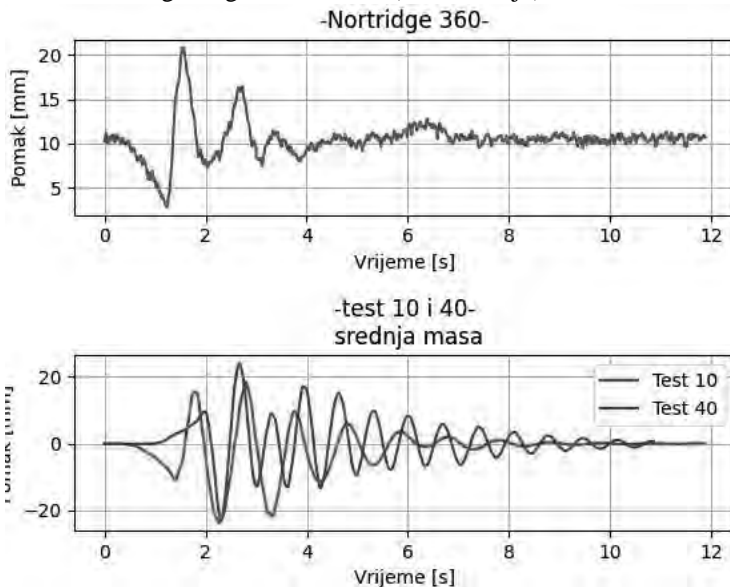
Greda je pričvršćena na dva oslonca koji ne dopuštaju pomake u uzdužnom smjeru ali dopuštaju kut zaokreta oko vertikalne osi. Statički sustav je slobodno oslonjena greda između dva nepomična oslonca (slika 2.). Materijalne karakteristike grede, kao što je Youngov modul elastičnosti, su dobivene eksperimentalno. Pobuda je nanjena u horizontalnom smjeru, okomito na uzdužnu os grede.



Slika 4. Eksperimentalni postav grede s 5 masa [5]

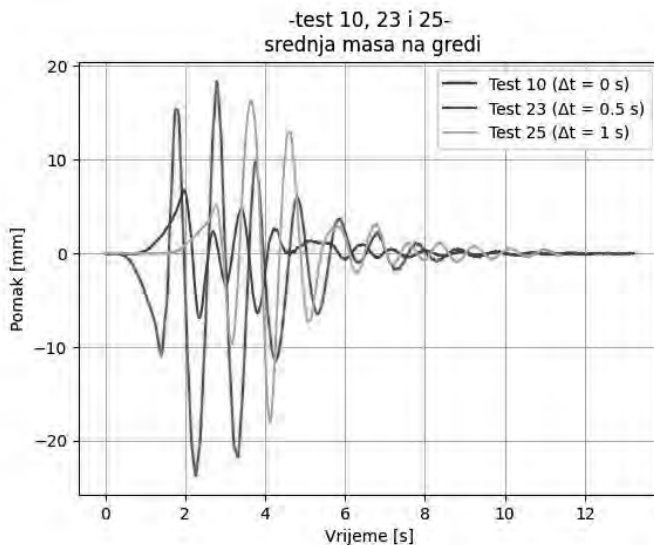
## 4 Rezultati

Ukupno je provedeno 56 ispitivanja s različitim potresnim zapisima te različitim kašnjenjima pobude između potresnih stolova. Također, jednake potresne pobude su nanosene na gredu s različitim brojem utega da vidimo kako će različito raspoređena masa duž grede utjecati na njen dinamički odgovor (Slika 1.). Na Slici 3 je prikazana jedna usporedba dinamičkog odgovora grede podvrgnute istom potresnom zapisu ali s različitim brojem masa na gredi. Radi se o Norridge 360 potresu koji je nanosen na oba potresna stola istovremeno. Vidimo kako se za isti potres kod grede s 5 masa (zeleni linija) ostvaruju veći pomaci u svim vremenskim koracima nego za gredu s 3 mase (crvena linija).



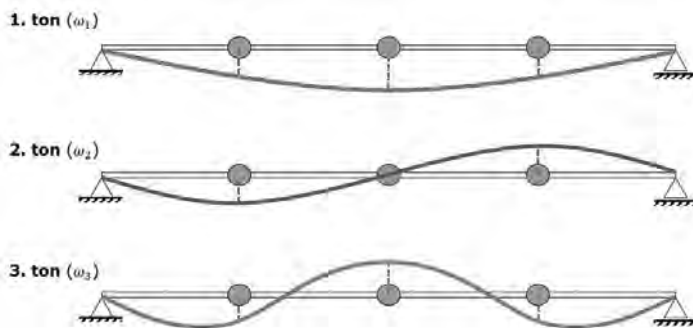
Slika 5. Usporedba dinamičkog odgovora grede s 3 (crvena linija na donjem grafu) i 5 masa (zeleni linija na donjem grafu) podvrgnute istom potresnom zapisu (gornji graf) [5]

Također je prikazana usporedba ponašanja grede s istim brojem masa podvrgnute istoj potresnoj pobudi ali s različitim kašnjenjima pobude između oslonaca (Slika 4.). Pobuda je ponovno Norridge 360 zapis, gredi ima 3 dodane mase, a kašnjenje između potresne pobude na desnom osloncu je: 0 sekundi (test 10, crvena linija), 0.5 sekundi (test 23, zelena linija) te 1 sekunda (test 25, žuta linija).



Slika 4. Usporedba pomaka srednje mase na gredi s 3 dodane mase podvrgnute potresnom zapisu Norridge 360 bez kašnjenja i s kašnjenjem od 0.5 i 1 s na desni oslonac [5]

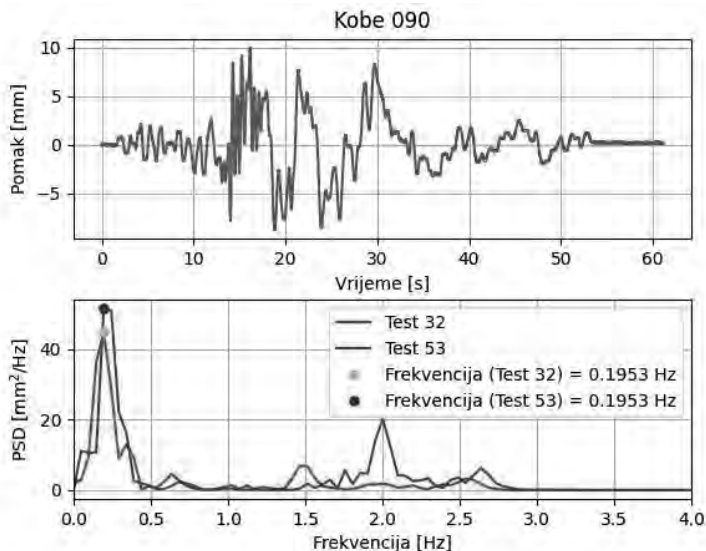
Može se vidjeti da su maksimalni pomaci za test 23 puno manji u odnosu na maksimalne pomake u testu 10 i 25. Pošto su na Slici 4 prikazani pomaci srednje mase na gredi, rezultati pokazuju da su kod testa 10 i 25 pobuđeni simetrični tonovi (slika 5.), kod kojih se ostvaruju veći pomaci srednje mase, a kod testa 23 to nije slučaj te se iz toga razloga ostvaruju manji pomaci.



Slika 5. Oblici i tonovi osciliranja grede s 3 mase [5]

Provedena je i spektralna analiza rezultata svih ispitivanja [6]. Slika 4. prikazuje usporedbu grafova dobivenih spektralnom analizom pomaka iz ispitivanja 32 i 53, u kojima je model grede s dodane 3, odnosno 5, masa podvrgnut Kobe 090 potresnom zapisu gdje je pobuda nanosena na oba potresna stola ali sa zakašnjenjem od 0.5 sekundi. Vidimo kako se unatoč povećanju broja masa na gredi maksimalna vrijednost frekvencije ne mijenja. Oblik

grafova je većim dijelom ostao isti, osim oko vrijednosti frekvencije od 2 Hz. U tom dijelu test 53 pokazuje skok u rezultatima koji je moguće da se pojavio zbog pobuđivanja nekih tonova koji nisu prisutni kod grede s 3 mase.



Slika 6. Usporedba grafova dobivenih spektralnom analizom ispitivanja grede s dodane 3 i 5 masa (donji graf) podvrgnute Kobe 090 zapisu (gornji graf) [5]

## 5 Zaključak

Na temelju odabranih eksperimentalnih ispitivanja je pokazano da broj masa na gredi igra manju ulogu u dinamičkom odgovoru konstrukcije, no kašnjenje potresne pobude između oslonaca kao jedini izvor nejednolike potresne pobude promatran u ovom radu, značajno mijenja ukupno dinamički odgovor grede. Daljnjim istraživanjem se želi poboljšati numerički model te kroz detaljnija eksperimentalna ispitivanja validirati isti.

Također, jednostavni fizikalni model će se nadograditi dodavanjem stupova, čime će u obzir biti uzeti i neki dinamički efekti koje ovdje prikazani model ne može zahvatiti.

## Zahvale

Rad je napravljen u sklopu bilateralne hrvatsko-kineske znanstvene suradnje između Građevinskog Fakulteta Sveučilišta u Rijeci i Dalian University of Technology „Experimental study of bridge structures considering the asymmetric effect under multiple support excitation“, financirane od strane Ministarstva znanosti i obrazovanja RH i Ministarstvo znanosti i tehnologije Narodne Republike Kine. Korištena oprema je nabavljena u sklopu projekta „Razvoj istraživačke infrastrukture na kampusu Sveučilišta u Rijeci“ (RC.2.2.06-0001).

### Literatura

- [1] Dobrilla, S., Čeh, N., Tuhtan, M., & Jelenić, G.; Eksperimentalna analiza odziva grednog nosača na nejednoliku pobudu oslonaca. Zbornik Radova (Građevinski Fakultet Sveučilišta U Rijeci), 20(1), 175-188, 2019. <https://doi.org/10.32762/zr.20.1.11>
- [2] Qin, H.; Li, L.; Error Caused by Damping Formulating in Multiple Support Excitation Problems. Appl. Sci. 2020, 10, 8180, 2020. <https://doi.org/10.3390/app10228180>
- [3] Chopra, A. K.; Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering, 2nd edition; 1995.
- [4] Wilson, E. L.; Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures, University of California at Berkeley, 1995.
- [5] Fabijan, P.; Utjecaj višestruke seizmičke pobude oslonaca na vitke dugačke konstrukcije; završni rad, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, 2021.
- [6] [https://matplotlib.org/stable/api/\\_as\\_gen/matplotlib.pyplot.psd.html](https://matplotlib.org/stable/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.psd.html)



# Tročvorni membranski konačni elementi s rotacijskim stupnjevima slobode

Grbac, M.<sup>1</sup> i Ribarić, D.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovom radu ukratko je opisana problematika razvoja membranskih konačnih elemenata s rotacijskim stupnjevima slobode te su predstavljene interpolacijske funkcije za razvoj novih tročvornih elemenata. Predložene interpolacijske funkcije za polja pomaka su kvadratne razine te uključuju rotacijske stupnjeve slobode, a element čine stabilnim i pogodnim za spajanje s elementima ploča koji bi onda zajedno činili elemente ljuski za opću namjenu. Uz to, elementi s predloženim interpolacijskim funkcijama prolaze *patch test* u kojem se očekuju konstantne deformacije, a ujedno imaju sposobnost ostvariti stanje čistog savijanja u posebnim slučajevima neovisno o gustoći mreže konačnih elemenata.

**Ključne riječi:** metoda konačnih elemenata, membranski konačni elementi, rotacijski stupanj slobode, čisto savijanje, vezana interpolacija, metoda usvojenih deformacija

---

<sup>1</sup> **Marin Grbac, mag. ing. aedif.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: marin.grbac@uniri.hr

<sup>2</sup> **Izv. prof. dr. sc. Dragan Ribarić, dipl. ing. građ.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: dragan.ribaric@uniri.hr

## 1 Uvod

Membranski konačni elementi posjeduju krutost samo unutar svoje ravnine te u skladu s time prihvaćaju i prenose sile unutar iste, za razliku od ploča koje prihvaćaju i prenose sile okomito na svoju ravninu. Membranski konačni elementi spojeni s konačnim elementima ploča zajedno obično grade konačne elemente ljuski. Prema klasičnoj teoriji kontinuuma, za određivanje deformacija unutar ravnine potrebno je poznavati komponente pomaka u dva međusobno okomita smjera. U tom pogledu dovoljna su dva stupnja slobode u svakom čvoru membranskog konačnog elementa. Međutim, ukoliko membranski element čini dio elementa ljuske, potrebno je uvesti rotacijske stupnjeve slobode u formulaciju kako bi se osigurala nesingularnost matrice krutosti globalnog sustava u svim slučajevima te kompatibilnost s drugim tipovima elemenata.

Allman [1] je prvi uspješno uveo rotacijske stupnjeve slobode u formulaciju membranskog elementa, no samo za rješavanje ravninskih problema budući da su rotacijski stupnjevi slobode procesom minimizacije ukupne potencijalne energije problema zauzimali vrijednosti koje nisu od fizikalnog značaja, što rezultira time da je element nepogodan činiti dio elementa ljuske. Rotacijski stupnjevi slobode uvedeni su u interpolacije polja pomaka u kvadratnu razinu na način kakav je danas poznat pod nazivom *vezana interpolacija*. Iako je predloženi element sposoban proći *patch test* u kojemu se očekuju konstantne deformacije te je vrlo efektivan u rješavanju ravninskih problema, element posjeduje i tzv. „spurious zero-energy modes“, odnosno *lažne* modove čija je energija deformiranja jednaka nuli što u određenim slučajevima zahtjeva uvođenje dodatnog rubnog uvjeta u model koji se odnosi na rotacije. Navedene probleme Allman je riješio uvodeći kubnu razinu u interpolaciju polja pomaka [2], no element je time postao manje učinkovit te računarski zahtjevniji.

Problem stabilnosti elementa te dobivanje fizikalno korektnih vrijednosti za rotacije, uz istodobni razvoj učinkovitog membranskog konačnog elementa s rotacijskim stupnjevima slobode predmet je istraživanja već dugi niz godina. Bogat pregled, kao i problematiku razvoja membranskih konačnih elemenata s rotacijskim stupnjevima slobode nedavno je dao Boutagouga [3].

U ovom radu predstavljaju se interpolacijske funkcije polja pomaka kvadratne razine koje osiguravaju stabilnost elementa te dobivanje fizikalno korektnih vrijednosti za rotacije, a dodatno imaju sposobnost ostvariti stanje čistog savijanja u posebnim slučajevima neovisno o gustoći mreže konačnih elemenata.

## 2 Interpolacijske funkcije

Interpolacijske funkcije za polja pomaka  $u$  (horizontalni smjer  $x$ ) i  $v$  (vertikalni smjer  $y$ ) su kvadratne razine te se mogu zapisati u tzv. *area* koordinatama za trokutne površine ( $\xi_1$ ,  $\xi_2$  i  $\xi_3$ ) kao

$$u = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_1 \xi_2 c_{3u} + \xi_2 \xi_3 c_{1u} + \xi_3 \xi_1 c_{2u} \quad (1)$$

$$v = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \xi_3 v_3 + \xi_1 \xi_2 c_{3v} + \xi_2 \xi_3 c_{1v} + \xi_3 \xi_1 c_{2v}. \quad (2)$$

Koeficijenti  $c_{iu}$  te  $c_{iv}$  ( $i=1,2,3$ ) se dobivaju na način da zadovolji izraz za rotacije prema teoriji kontinuuma

$$\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3)$$

u čvorovima elementa što osigurava dobivanje fizikalno korektnih rotacija te da se usvoje izrazi za deformacije  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\gamma_{xy}$  u težištu elementa što se u konačnici svodi na

$$\begin{Bmatrix} c_{1u} \\ c_{2u} \\ c_{3u} \\ c_{1v} \\ c_{2v} \\ c_{3v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & -a_2 & 0 & b_3 & b_2 \\ -a_3 & 0 & -a_1 & b_3 & 0 & b_1 \\ -a_2 & -a_1 & 0 & b_2 & b_1 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{c} \quad (4)$$

gdje je

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} 4A(\theta_1 - \theta_r) \\ 4A(\theta_2 - \theta_r) \\ 4A(\theta_3 - \theta_r) \\ (\theta_2 - \theta_3)b_1^2 + (\theta_3 - \theta_1)b_2^2 + (\theta_1 - \theta_2)b_3^2 \\ (\theta_2 - \theta_3)a_1^2 + (\theta_3 - \theta_1)a_2^2 + (\theta_1 - \theta_2)a_3^2 \\ \frac{3}{2}[(\theta_2 - \theta_3)a_1b_1 + (\theta_3 - \theta_1)a_2b_2 + (\theta_1 - \theta_2)a_3b_3] \end{Bmatrix} \quad (5)$$

u kojem je

$$\theta_r = \frac{1}{4A}(v_1b_1 + v_2b_2 + v_3b_3 - u_1a_1 - u_2a_2 - u_3a_3) \quad (6)$$

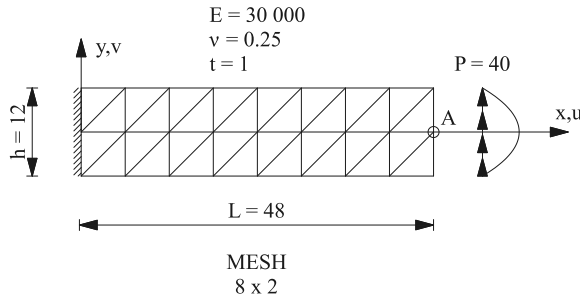
što predstavlja krutu rotaciju elementa. U gornjim izrazima  $a_i$  i  $b_i$  su projekcije stranica elementa, dok je  $A$  površina elementa. Matrica koja se invertira u izrazu (4) uvijek je regularna budući da joj je determinanta jednaka  $16A^3$ . Druga varijanta je da se umjesto izraza (5) usvoji

$$\mathbf{c} = \begin{Bmatrix} 4A(\theta_1 - \theta_r) \\ 4A(\theta_2 - \theta_r) \\ 4A(\theta_3 - \theta_r) \\ (\theta_2 - \theta_3)b_1^2 + (\theta_3 - \theta_1)b_2^2 + (\theta_1 - \theta_2)b_3^2 + \frac{v}{2}[(\theta_2 - \theta_3)a_1^2 + (\theta_3 - \theta_1)a_2^2 + (\theta_1 - \theta_2)a_3^2] \\ (\theta_2 - \theta_3)a_1^2 + (\theta_3 - \theta_1)a_2^2 + (\theta_1 - \theta_2)a_3^2 + \frac{v}{2}[(\theta_2 - \theta_3)b_1^2 + (\theta_3 - \theta_1)b_2^2 + (\theta_1 - \theta_2)b_3^2] \\ \frac{3}{2}[(\theta_2 - \theta_3)a_1b_1 + (\theta_3 - \theta_1)a_2b_2 + (\theta_1 - \theta_2)a_3b_3] \end{Bmatrix} \quad (7)$$

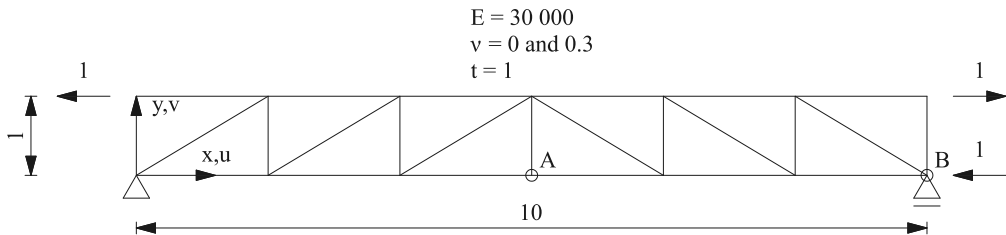
gdje je  $\nu$  Poissonov koeficijent.

### 3 Numerički primjeri

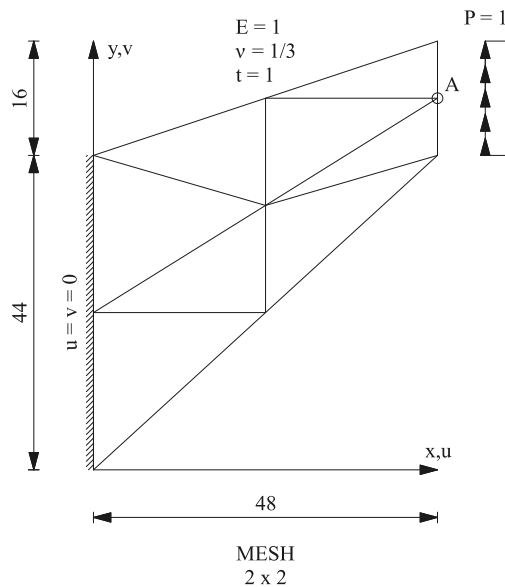
Konačni element razvijen koristeći izraz (5) biti će u numeričkim primjerima prikazan oznakom PB, dok će element razvijen koristeći izraz (7) biti prikazan oznakom PBv. Oba elementa prolaze *patch test* u kojemu se očekuju konstantne deformacije. Numerički primjeri uz *patch test* uključuju slijedeće standardne ravninske probleme: Timošenkova konzolna greda (slika 1.), greda izložena čistom savijanju (slika 2.) te Cookov problem (slika 3.). Uz to, elementi su uspoređeni s CST (Constant Strain Triangle) [4] i Allmanovim elementima [1, 2].



Slika 1. Model Timošenkove konzolne grede

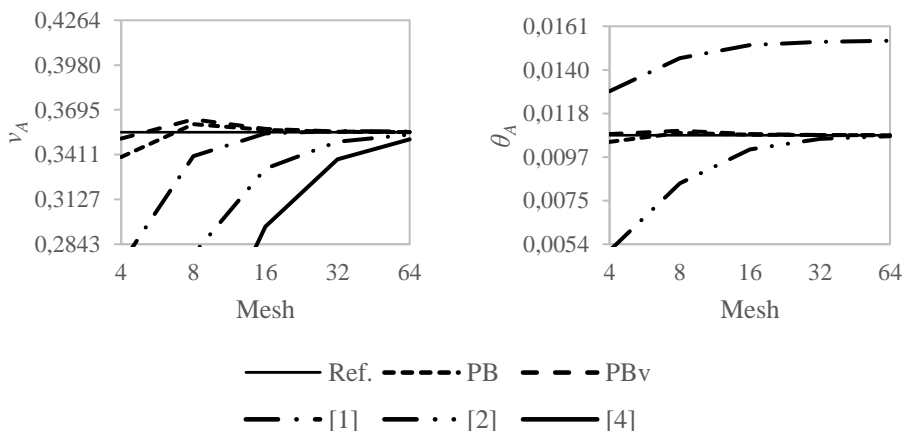


Slika 2. Model grede izložen čistom savijanju



Slika 3. Model Cookovog problema

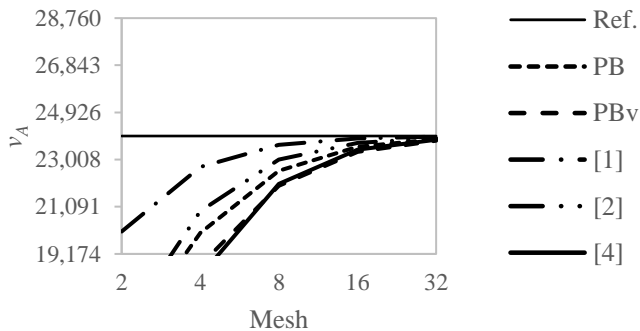
Izvršna učinkovitost predloženih elemenata može se primijetiti na problemu Timošenkovke konzole (slika 4.), dok se za problem grede izložene čistom savijanju (tablica 1.) može zamijetiti sposobnost predloženih elemenata da ostvare stanje čistog savijanja (iako nije prikazano u radu, navedeno vrijedi neovisno o veličini mreže konačnih elemenata), i to za element PBv neovisno o vrijednosti  $\nu$ , a za element PB samo ako je  $\nu=0$ . Ukoliko se mreža konačnih elemenata izobliči, predloženi elementi gube tu sposobnost te im opada učinkovitost, kao što se to može vidjeti na rezultatima modela Cookovog problema (slika 5.).



Slika 4. Rezultati modela Timošenkovke konzolne grede

Tablica 1. Rezultati modela grede izložene čistom savijanju

| $v = 0$          | CST [4] | Allman [1] | Allman [2] | PB     | PBv  | Exact       |
|------------------|---------|------------|------------|--------|------|-------------|
| $u_B$            | -0,087  | -0,370     | -0,186     | -0,6   | -0,6 | <b>-0,6</b> |
| $v_A$            | 0,212   | 0,920      | 0,463      | 1,5    | 1,5  | <b>1,5</b>  |
| $\theta_B$       |         | -0,893     | -0,194     | -0,6   | -0,6 | <b>-0,6</b> |
| Greška ( $u_B$ ) | 86%     | 38%        | 69%        | 0%     | 0%   |             |
| Greška ( $v_A$ ) | 86%     | 39%        | 69%        | 0%     | 0%   |             |
| Greška ( $q_B$ ) |         | 49%        | 68%        | 0%     | 0%   |             |
| $v = 0,3$        | CST [4] | Allman [1] | Allman [2] | PB     | PBv  | Exact       |
| $u_B$            | -0,100  | -0,393     | -0,191     | -0,584 | -0,6 | <b>-0,6</b> |
| $v_A$            | 0,242   | 0,970      | 0,472      | 1,443  | 1,5  | <b>1,5</b>  |
| $\theta_B$       |         | 0,321      | -0,196     | -0,583 | -0,6 | <b>-0,6</b> |
| Greška ( $u_B$ ) | 83%     | 35%        | 68%        | 3%     | 0%   |             |
| Greška ( $v_A$ ) | 84%     | 35%        | 69%        | 4%     | 0%   |             |
| Greška ( $q_B$ ) |         | 153%       | 67%        | 3%     | 0%   |             |



Slika 5. Rezultati modela Cookovog problema

## 4 Zaključak

Predložene su interpolacijske funkcije za polja pomaka kvadratne razine koje uključuju rotacijske stupnjeve slobode. Elementi s predloženim interpolacijskim funkcijama su stabilni te prolaze *patch test* u kojem se očekuju konstantne deformacije tako da se konvergencija ka rješenju može pouzdano očekivati u svim slučajevima, a ujedno daju i fizikalno korektne vrijednosti za rotacije što ih čini pogodnim za spajanje s elementima ploča koji bi onda zajedno činili elemente ljuski za opću namjenu. Kod izobličjenih mreža konačnih elemenata

učinkovitost elemenata je niža, no elementi posjeduju sposobnost ostvariti stanje čistog savijanja u posebnim slučajevima neovisno o gustoći mreže konačnih elemenata.

### **Zahvale**

Ovaj članak je rezultat rada u okviru projekta „Metoda usvojenih deformacija za konačne elemente slojevitih ploča i ljuski i njena primjena na probleme delaminacije - ASDEL” (IP-06-2016-4775), koji je u cijelosti financiran sredstvima Hrvatske zaklade za znanost.

### **Literatura**

- [1] Allman, D.J.; A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis; *Computers & Structures*; 1984.; 19; 1-8.
- [2] Allman, D.J.; Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 1988.; 26; 2645-2655.
- [3] Boutagouga, D.; A Review on Membrane Finite Elements with Drilling Degree of Freedom; *Archives of Computational Methods in Engineering*; 2021.; 28; 3049-3065.
- [4] Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C. i Topp, L.J.; Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures; *Journal of the Aeronautical Sciences*; 1956.; 23; 805-823.



# Analiza geometrijski nelinearnog mikropolarnog kontinuuma metodom konačnih elemenata u 3D

Grbčić Erdelj, S.<sup>1</sup>, Jelenić, G.<sup>2</sup>

## Sažetak

Osnovu rada čini alternativna teorija kontinuuma poznata kao mikropolarna (Cosseratova) teorija kontinuuma koja je razvijena kako bi opisala fenomene koje nije moguće opisati klasičnom teorijom. Osim nezavisnog polja pomaka poznatog iz klasične teorije, u mikropolarnoj teoriji se pojavljuje i dodatno nezavisno polje mikrorotacije koje predstavlja rotaciju točke. Kako bi se ponašanje takvog materijala u potpunosti opisalo potrebno je definirati ukupno šest materijalnih parametara. U sklopu rada izveden je geometrijski nelinearan analitički mikropolarni model i implementiran na metodu konačnih elemenata u tri dimenzije. Razvijeni su geometrijski nelinearni šesterostranični 3D konačni elementi prvog i drugog reda s Lagrangeovom interpolacijom polja pomaka i polja mikrorotacija. Izvedeni elementi testirani su na tri numerička primjera koja se sastoje od problema čistog savijanja, kombinacije savijanja i torzije i pravog 3D problema u literaturi poznatog kao '45° bend' problem. Uočeno je da izvedeni konačni elementi konvergiraju ka referentnim rješenjima. Nadalje, predložen je novi pristup u kojem je slaba forma ravnotežnih jednadžbi mikropolarnog kontinuuma u 3D zapisana na alternativnom nelinearnom prostoru poznatom pod nazivom SE(3) Lie-jeva grupa s helikoidalnom interpolacijom.

**Ključne riječi:** mikropolarna teorija, geometrijska nelinearnost, metoda konačnih elemenata, Lijeve grupe

---

<sup>1</sup> **dr.sc. Sara Grbčić Erdelj**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: sara.grbcic@uniri.hr

<sup>2</sup> **prof.dr.sc. Gordan Jelenić**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

## 1 Uvod

Promatranjem ponašanja materijala s izraženom mikrostrukturom uočene su značajne razlike u odnosu na analitički opis ponašanja materijala pomoću klasične teorije kontinuuma. S ciljem stvaranja unificirane teorije kontinuuma razvile su se različite alternativne teorije među kojima je i mikropolarna teorija kontinuuma. Za razliku od klasične teorije, gdje je interakcija između dvije čestice tijela opisana samo vektorom sile, mikropolarna teorija kontinuuma pretpostavlja da na površini djeluje dodatni vektor sprega (eng. *couple-stress vector*) koji rezultira dodatnim momentnim naprezanjima (eng. *couple stresses*). Nadalje, osim nezavisnog polja pomaka poznatog iz klasične teorije, u mikropolarnoj teoriji pojavljuje se i dodatno nezavisno polje mikrorotacije koje svakoj točki tijela dodjeljuje orijentaciju i potpuno je neovisno o makrorotaciji, koja proizlazi iz rotacijskog dijela gradijenta deformiranja. Kako bi se ponašanje takvog materijala u potpunosti opisalo potrebno je definirati ukupno šest materijalnih parametara, što ujedno predstavlja i glavnu prepreku u daljnjem razvoju teorije i njenoj praktičnoj primjeni u proračunu ponašanja materijala. Kako bi bolje razumjeli fenomene koji se pojavljuju u mikropolarnoj teoriji i kako bi se unaprijedio postojeći okvir za eksperimentalno određivanje mikropolarnih parametara, poželjno je provesti detaljnu numeričku analizu raznih testnih primjera u linearnom i nelinearnom režimu.

Postojeća literatura o trodimenzionalnoj numeričkoj analizi mikropolarnog kontinuuma u linearnom režimu je opsežna (vidi [1]), međutim linearan opis često nije zadovoljavajući odabir za realističan opis ponašanja strukture. Za razliku od linearne analize, u slučaju konstitutivne i geometrijske nelinearnosti, u postojećoj literaturi teorija prednjači nad numerikom. Kako bi došli do novih spoznaja o značenju mikropolarnih parametara u nelinearnom režimu, razvili smo geometrijski nelinearne šesterostranične 3D konačne elemente prvog i drugog reda. U našem radu fokusiramo se isključivo na geometrijsku nelinearnost i promatramo linearno elastična tijela, koja prilikom deformacije doživljavaju velike pomake i velike rotacije u trodimenzionalnom prostoru. Velike rotacije u 3D nisu aditivne i ne komutiraju poput pomaka, stoga je njihov tretman značajno kompleksniji od tretmana pomaka. S obzirom da u postojećoj literaturi ne postoji referentno analitičko nelinearno mikropolarno rješenje za validaciju geometrijskih nelinearnih konačnih elemenata, u našem radu izveli smo nelinearnu generalizaciju linearnog mikropolarnog analitičkog rješenja za problem konzole opterećene na čisto savijanje [1].

U sklopu metode konačnih elemenata razvijeni su šesterostranični geometrijski nelinearni konačni elementi prvog i drugog reda. Razvijeni konačni elementi interpolirani su konvencionalnom Lagrangeovom interpolacijom i testirani na tri numerička primjera koja se sastoje od problema čistog savijanja, kombinacije savijanja i torzije i pravog 3D problema s velikim deformacijama i velikim rotacijama, u literaturi poznatog kao  $45^\circ$  bend problem (vidi [1,2]).

Kako bi se otklonio problem različitog tretmana pomaka i rotacija u 3D obzirom na njihovu različitu prirodu, u radu je predložen novi zapis slabe forme ravnotežnih jednadžbi na tzv. SE(3) Lie-jevoj grupi. Ovaj alternativni zapis prirodno dovodi do međusobne ovisnosti pomaka i rotacija što je u kontradikciji s osnovnom srži metode konačnih

elemenata. Motivacija za ovim pristupom proizašla je iz rada autora Sonevillea i ostalih [3] gdje je ova metodologija primijenjena na jednodimenzionalnim grednim konačnim elementima prvog reda. Izvedeni gredni konačni elementi pokazali su se izuzetno robusnima, bez fenomena 'lockinga' i uspješno reproduciraju analitičko rješenje za slučaj čistog savijanja s mrežom od samo jednog konačnog elementa prvog reda.

## 2 Nelinearni mikropolarni analitički model

Kada promatramo geometrijski nelinearno tijelo, prilikom njegove deformacije dolazi do velikih pomaka i velikih rotacija. Posljedično, razlika između deformirane i nedeformirane konfiguracije nije zanemariva, kao što je to slučaj u linearnoj analizi. Stoga ravnotežne jednadžbe u nelinearnoj analizi ne možemo jednoznačno definirati nego odabiremo određenu referentnu konfiguraciju za daljni opis. U ovom odlomku prikazat ćemo set ravnotežnih, kinematičkih i konstitutivnih jednadžbi geometrijski nelinearnog mikropolarnog kontinuuma, a detaljan opis izvođenja jednadžbi prikazan je u [1].

### 2.1 Ravnotežne jednadžbe u materijalnom opisu

Jaka forma ravnotežnih jednadžbi izraženih u materijalnom opisu jednaka je

$$\text{DIV}(\mathbf{QB}) + \mathbf{Pv} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\text{DIV}(\mathbf{QG}) + \text{ax}(\mathbf{QBF}^T - \mathbf{FB}^T\mathbf{Q}^T) + \mathbf{Mv} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

s pripadajućim rubnim uvjetima:

$$(\mathbf{QB})\mathbf{N} = \mathbf{Ps} \text{ i } (\mathbf{QG})\mathbf{N} = \mathbf{Ms}, \quad (3)$$

gdje je  $\mathbf{Q}$  ortogonalni mikrorotacijski tenzor koji pripada tzv. posebnoj ortogonalnoj  $SO(3)$  Lie-jevoj grupi za koju vrijedi  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ ,  $\det \mathbf{Q} = +1$  i  $\mathbf{Q} = \exp \hat{\boldsymbol{\varphi}}$ , (gdje je  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$  antisimetrični tenzor koji pripada tzv. Liejevoj algebri  $so(3)$ , odnosno za koji vrijedi  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}$  za svaki 3D vektor  $\mathbf{v}$ , a  $\boldsymbol{\varphi}$  predstavlja mikrorotacijski vektor). Odnos između infinitezimalne promjene vektora pomaka opisan je tzv. gradijentom deformiranja  $\mathbf{F} = \text{GRAD}\mathbf{x}$ , koji također opisuje transformaciju infinitezimalne površine i transformaciju infinitezimalnog volumena. Tenzori  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{G}$  predstavljaju tenzore analogne Biotovom tenzoru naprezanja i Biotovom tenzoru momentnih naprezanja (*eng. Biot-like stress tensor* i *eng. Biot-like couple-stress tensor*), a  $\mathbf{Pv}$ ,  $\mathbf{Mv}$ ,  $\mathbf{Ps}$ ,  $\mathbf{Ms}$  predstavljaju vanjsko volumno i površinsko opterećenje po jedinici volumena ili površine.

### 2.2 Nelinearne kinematičke jednadžbe

Nelinearne kinematičke jednadžbe izvedene su pomoću tzv. Reissnerovog principa i jednake su

$$\mathbf{E} = \mathbf{Q}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}, \quad (4)$$

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbf{Q}^T \text{GRAD} \mathbf{Q}), \quad (5)$$

gdje je  $\mathbf{E}$  tenzor analogan Biotovom tenzoru deformacija (*eng. Biot-like strain tensor*),  $\mathbf{K}$  tenzor analogan Biotovom tenzoru zakrivljenosti (*eng. Biot-like curvature tensor*) i  $\boldsymbol{\varepsilon}$  permutacijski tenzor trećeg reda. Za više detalja vidi [1].

### 2.3 Konstitutivne jednadžbe

S obzirom da se u našem radu ograničavamo isključivo na geometrijsku nelinearnost, konstitutivne jednadžbe su linearne i zapisane u tenzorskom obliku glase:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \lambda(\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + (\mu + \nu) \mathbf{E} + (\mu - \nu) \mathbf{E}^T, \\ \mathbf{G} &= \alpha(\text{tr} \mathbf{K}) \mathbf{I} + (\beta + \gamma) \mathbf{K} + (\beta - \gamma) \mathbf{K}^T, \end{aligned} \quad (6)$$

gdje  $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma$  predstavljaju mikropolarne materijalne parametre koji se mogu izraziti preko tzv. inženjerskih (mjerljivih) materijalnih parametara  $E, n, N, l_b, l_t, \psi$  (vidi [1]).

## 3 Implementacija na metodu konačnih elemenata

Slaba (integralna) formulacija zapisana pomoću principa virtualnog rada glasi

$$\int_V (\bar{\mathbf{E}} : \mathbf{B} + \bar{\mathbf{K}} : \mathbf{G}) dV - \int_V (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{P} \mathbf{v} + \bar{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{M} \mathbf{v}) dV - \int_{Sp} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{P} \mathbf{s} + \bar{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{M} \mathbf{s}) dS = 0, \quad (8)$$

gdje  $\bar{\mathbf{u}}$  i  $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$  predstavljaju virtualno polje pomaka i mikrorotacije, a  $\bar{\mathbf{E}}$  i  $\bar{\mathbf{K}}$  predstavljaju virtualni tenzor deformacija i virtualni tenzor zakrivljenosti. Kako bi proveli diskretizaciju i dobili traženi rezidual (vektor neuravnoteženih sila), virtualno polje pomaka i virtualno polje mikrorotacije moramo interpolirati. U našem radu odabiremo dva šesterostranična konačna elementa prvog i drugog reda i odabiremo konvencionalnu Lagrangeovu interpolaciju za oba polja. Razvijene konačne elemente nazivamo Hex8NL i Hex27NL. Nakon uvođenja interpolacije i niza matematičkih manipulacija dobivamo nelinearnu jednadžbu reziduala na razini elementa:

$$\mathbf{g}^e = \mathbf{q}^{int,e} + \mathbf{q}^{ext,e} \quad (9)$$

gdje  $\mathbf{q}^{int,e}$  predstavlja vektor unutarnjih sila na razini elementa, a  $\mathbf{q}^{ext,e}$  vektor vanjskih sila na razini elementa. Kako bi riješili ovaj nelinearni problem, potrebno je nelinearnu jednadžbu (9) linearizirati i riješiti kao niz linearnih jednadžbi, odnosno

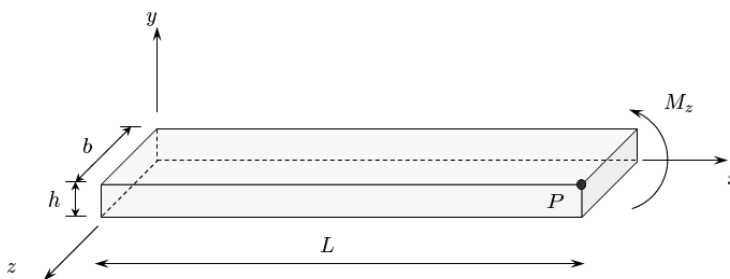
$$\text{Lin}[\mathbf{g}^e(\mathbf{u}, \mathbf{Q})] = \mathbf{g}^e(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) + \Delta \mathbf{g}^e = \mathbf{q}^{int,e} + \mathbf{q}^{ext,e} + \mathbf{K}^e \Delta \mathbf{d}^e = \mathbf{0}, \quad (10)$$

gdje  $\mathbf{K}^e$  predstavlja tangentnu matricu krutosti elementa i u nelinearnoj analizi se sastoji od dva djela, tj.  $\mathbf{K}^e = \mathbf{K}_M^e + \mathbf{K}_G^e$  gdje je  $\mathbf{K}_M^e$  materijalna matrica krutosti elementa, a  $\mathbf{K}_G^e$  geometrijska matrica krutosti elementa i karakteristična je isključivo za nelinearne probleme. Kompleksni postupak linearizacije reziduala na razini elementa, eksplicitni izrazi za tangentnu matricu krutosti elementa, kao i metode ažuriranja polja pomaka i rotacije prilikom iteriranja detaljno su prikazani u [1].

#### 4 Numerički primjer – čisto savijanje konzole

Stanje čistog savijanja predstavlja stanje naprezanja u kojem vanjsko momentno opterećenje ne uzrokuje unutarnju uzdužnu i/ili poprečnu silu, odnosno uzdužna se os grede deformira u obliku kružne krivulje. U sklopu našeg rada izvedena je nelinearna generalizacija linearnog mikropolarnog analitičkog rješenja za primjer konzole opterećene čistim momentom i razvijeni Hex8NL i Hex27NL elementi testirani su spram izvedenog analitičkog rješenja (vidi [1,2]).

Modeliramo tanku konzolu prikazanu na slici 1. s pripadajućom geometrijom:  $L = 10$  m,  $h = 0.1$  m i  $b = 1$  m. Na neopterećenoj strani uzorka pomaci i mikrorotacije su spriječene. Odabrano resultantno vanjsko momentno opterećenje jednako je  $M_z = 0.01\pi$  Nm. Vanjsko momentno opterećenje nanosimo pomoću linearno promjenjivog površinskog opterećenja  $P_{S1}$  i konstantnog površinskog momentnog opterećenja  $M_{S3}$  u odgovarajućem omjeru (vidi [1,2]). Odabrani su sljedeći mikropolarni materijalni parametri:  $\mu = 600$  N/m<sup>2</sup>,  $\lambda = 0$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu = 200$  N/m<sup>2</sup>. Kako bi se opisao tzv. *size-effect* fenomen, u ovom numeričkom primjeru variramo vrijednost karakteristične duljine za savijanje  $l_b \in [0.01, 0.08]$  (i posljedično vrijednost mikropolarnog parametra  $\alpha + \beta$ ).



Slika 1. Tanka konzola opterećena koncentriranim momentom



Slika 2. Nedeformirana i deformirana konfiguracija konzole za  $l_b=0.01$ , s mrežom od  $64 \times 1 \times 1$  Hex27NL elemenata

Primjer je modeliran s mrežom od  $64 \times 1 \times 1$  Hex8NL i Hex27NL konačna elementa koji propagiraju u  $x$  smjeru te je dobiveni rezultat uspoređen s izvedenim nelinearnim mikropolarnim analitičkim rješenjem. Utvrđeno je da Hex27NL reproducira izvedeno generalizirano analitičko rješenje, dok Hex8NL očekivano daje slabije rezultate, naročito za slučaj malih mikropolarnih efekata. Međutim, progušćavanjem mreže konačnih elemenata oba elementa konvergiraju ka izvedenom rješenju [1,2].

#### 4 Zaključak i motivacija za buduće istraživanje

Dodatnim numeričkim analizama utvrđeno je da oba konačna elementa uspješno reproduciraju velike pomake i velike rotacije koje se pojavljuju u 3D mikropolarnom kontinuumu. Također, uočeno je da se modeliranjem pomoću razvijenih konačnih elementa dobiva realističan prikaz utjecaja mikropolarnih parametara na krutost konstrukcije [1,2].

Kako bi se postojeća formulacija dodatno poboljšala i kako bi se izbjegao nužno drugačiji tretman polja pomaka i rotacija, pa uzoru na rad od autora Sonnevileea i ostalih [3], u daljnjem istraživačkom radu postojeću geometrijski nelinearnu mikropolarnu formulaciju želimo zapisati preko tzv. SE(3) Liejeve grupe koja opisuje nama neintuitivni, nelinearni prostor. Takav zapis, zajedno s odabirom tzv. helikoidalne interpolacije [3], implicira da pomaci i rotacije nisu međusobno nezavisna polja, već ovisna jedna o drugom, što je u skladu s numeričkim i eksperimentalnim zapažanjima i analitičkim modelima (npr. Timoshenkova greda). Jednodimenzionalni gredni konačni element razvijen u [3] pokazao se kao izuzetno robusan, 'locking-free' i sposoban reproducirati stanje čistog savijanja s mrežom od samo

jednog konačnog elementa. Impresionirani rezultatima u [3], razvijeni koncept želimo pokušati generalizirati na slučaj geometrijski nelinearnog mikropolarnog kontinuuma u 3D.

### **Zahvale**

Rezultati prikazani u ovom radu dobiveni su u sklopu rada na projektu IP 1732 Hrvatske zaklade za znanost (Fixed-Pole Concept in Numerical Modelling of Cosserat Continuum).

### **Literatura**

- [1] Grbčić, S.; Linked interpolation and strain invariance in finite-element modelling of micropolar continuum, doktorska disertacija, 2018.
- [2] Grbčić Erdelj, S.; Jelenić, G.; Ibrahimbegović, A.; Geometrically non-linear 3D finite-element analysis of micropolar continuum; *International Journal of Solids and Structures*, 202 (2020), 745-764.
- [3] Sonnevile, V.; Cardona, A., Brüls, O.; Geometrically exact beam finite element formulated on the special Euclidean group SE(3); *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 268 (2014), 451-474.



# Fronta pukotine na lijepljenom spoju aluminijskih ploča

Hlača, I.<sup>1</sup>, Ribarić, D.<sup>2</sup> i Škec, L.<sup>3</sup>

## Sažetak

U ovome radu će se analizirati delaminacija u modu-I na testu dvostruke konzole s plošnom geometrijom uzorka gdje duljina nije značajno veća od širine uzorka. U takvim slučajevima se prilikom savijanja pojavljuje antiklastični efekt te je fronta pukotine krivulja, a na ravna linija kako je uobičajeno pretpostaviti u teoriji mehanike loma. Uzorak se sastavi od dvije lijepljene aluminijske ploče na kojem se početna pukotina formira umetanjem folije na početku uzorka kako bi se spriječila adhezija. Ljepilo se modelira diskretnim nelinearnim elementom opruge čiji konstitutivni zakon ima eksponencijalni oblik. Element je ograničen na delaminaciju u modu-I što je dovoljno za simulaciju testa dvostruke konzole. Ploče su modelirane četveročvornim konačnim elementom koji prolazi *patch test* čistog savijanja. Identifikacija parametara ljepila se provodi direktnom metodom pomoću J-integrala i regresijom virtualnih eksperimenata. Prikazati će se usporedba eksperimentalnih rezultata delaminacije aluminijskih ploča i numeričkih rješenja dobivenih modeliranjem problema konačnim elementima.

**Ključne riječi:** mehanika loma, delaminacija, model kohezivne zone, metoda konačnih elemenata

---

<sup>1</sup> **Ivan Hlača, mag. ing. aedif.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: ivan.hlaca@uniri.hr

<sup>2</sup> **Doc. dr. sc. Dragan Ribarić, dipl. ing. građ.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: dragan.ribaric@uniri.hr

<sup>3</sup> **Doc. dr. sc. Leo Škec, mag. ing. aedif.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: leo.skec@uniri.hr

## 1 Uvod

Delaminacija je najopasniji oblik sloma kompozita ili lijepljenih spojeva. Otpornost na lom se naziva lomna žilavost te se iskazuje parametrima iz teorije mehanike loma poput kritične promjene oslobođene energije  $G_C$  (eng. *critical energy release rate*). Iako postoji tri oblika tj. moda delaminacije te njihove kombinacije, u ovome radu će se razmatrati samo mod I.

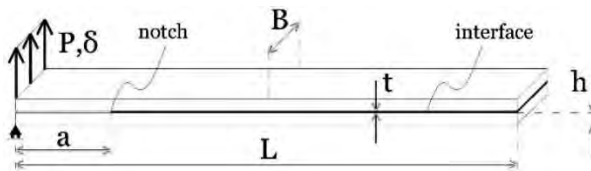
Mehanika loma za razliku od proračuna po dozvoljenim naprezanjima dozvoljava modeliranje pada nosivosti sustava, npr. modelom kohezivne zone koju su uveli Dugdale i Barenblatt [1,2]. Ravnoteža testa dvostruke konzole se traži iterativno jer je kohezivna zona opisana nelinearnom vezom naprezanja i pomaka, a statički sustav se mijenja širenjem pukotine.

## 2 Definicija problema i test dvostruke konzole za plošne uzorke

Test dvostruke konzole (eng. *double cantilever beam test*) je standardan test za ocjenu lomne otpornosti u modu I. Naneseno opterećenje, pomak i duljina pukotine se kontinuirano mjere tijekom eksperimenta. Geometrijski i materijalni parametri testa su prikazani u Tablici 1.

Tablica 1. Geometrijski i materijalni parametri

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| Aluminijske ploče           | $L = 250 \text{ mm}$ , $B = 120 \text{ mm}$ , $h = 6 \text{ mm}$ , $a_0 = 45 \text{ mm}$<br>$E = 70 \text{ GPa}$ , $\nu = 0.33$ |
| SikaPower®-4720<br>lijepilo | $t = 0.5 \text{ mm}$ , $G_{IC} = 1.15 \text{ N/mm}^2$<br>$\delta_0 = 0.02 \text{ mm}$ , $\sigma_{max} = 21.15 \text{ MPa}$      |



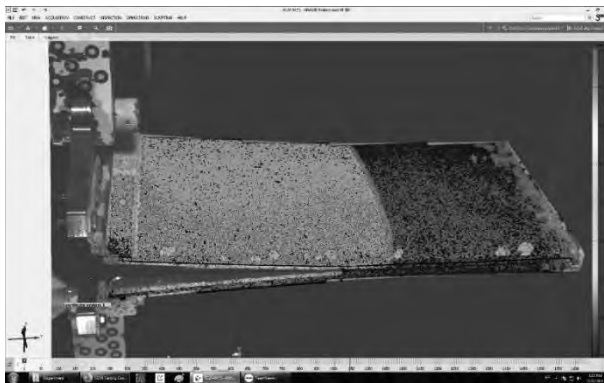
Slika 1. Geometrija testa dvostruke konzole te pripadajući rubni uvjeti i opterećenje

Propagacija pukotine nastane kada  $G$  dosegne kritičnu vrijednost  $G_C$  tj. kritičnu promjenu oslobođene energije,

$$G_C = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da} \quad (1)$$

Koristeći izraze iz gredne teorije za progib konzole može se izraziti podatljivost  $C$  (inverz krutosti) odnosno derivacija podatljivosti obzirom na promjenu površinu pukotine kako bi se dobio izraz za kritičnu promjenu oslobođene energije  $G_C$ , sve prema uputama iz međunarodnog standarda [3]. Lomna žilavost je parametar u modelu kohezivne zone.

Kod plošnih uzoraka gredna teorija nije primjenjiva i fronta pukotine nije ravna linija tj.  $dA \neq B \cdot da$  pa izraz (1) ne vrijedi. Ovim radom je pokazano da je fronta pukotine zakrivljena (parabola) i da je pukotina kraća na rubovima nego na sredini (Slika 2.). Međunarodni standardi upućuju na mjerenje duljine pukotine uzduž ruba uzorka. Koristeći tehniku korelacije digitalnih slika i simetriju testa, moguće je odrediti pukotinu bez ograničavanja samo na rub uzorka.



Slika 2: Test dvostruke konzole i fronta pukotine iz DIC mjerenja (spojeni dio tamno)

### 3 Modeliranje delaminacije

#### 3.1 Model kohezivne zone spoja i plošni konačni element sloja

U modelu kohezivne zone se koristi nelinearna veza relativnih pomaka lijepljenog spoja i pripadajućih napona. Na početku se materijal ponaša elastično kao kod linearnih proračuna pa nakon postizanja maksimalnog napona spoj počinje popuštati.

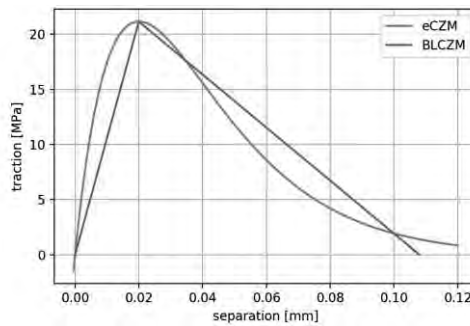
U ovome radu će se pokazati rezultati za spojni element 1D opruge s materijalom opisanim eksponencijalnim i bi-linearnim [4] zakonom. Korišteni eksponencijalni zakon je sličan Needleman-ovom za kombinirani mod I i II, ali opruga može opisati samo mod I pa su autori konstitutivni zakon definirali jednostavnije,

$$\sigma(\delta) = \frac{G_C}{\delta_0^2} \delta \cdot e^{-\frac{\delta}{\delta_0}} \quad (2)$$

$$K(\delta) = \frac{G_C}{\delta_0^2} \cdot e^{-\frac{\delta}{\delta_0}} \cdot \left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) \quad (3)$$

Površina ispod grafa oba konstitutivnog zakona (Slika 3) je po samoj definiciji jednaka kritičnoj promjeni oslobođene energije  $G_{IC}$ . Ostali parametri poput inicijalne krutosti, maksimalnog napona i maksimalnog izduženja se mogu preuzeti iz jednostavnih mehaničkih eksperimenata, ali taj pristup nije pouzdan radi efekta utjecaja veličine (*eng. size effects*).

Identifikacija parametara kohezivne zone je provedena direktnom metodom pomoću J-integrala [5] i regresijom virtualnih eksperimenata. Parametri su dobiveni iz eksperimenata na grednim testovima dvostruke konzole [6] i isti su ranije navedeni u Tablici 1. Bi-linearni zakon ima više parametara pa je posebno odabran da maksimalni napon odgovara eksponencijalnom zakonu na način da se integrira izraz (2) i preko dobivenog izraza definira  $\sigma_{MAX}$ .



Slika 3. Eksponencijalni (eCZM) i bi-linearni (BLCZM) konstitutivni zakon

Q4-U3 je ravni element ljuske razvijen za generalnu analizu ljuski [7]. Složen je od spojenih elemenata ploče i membrane. Element ploče je baziran na kubnoj vezanoj interpolaciji za lateralne pomake i rotacije prosjeka, te u interpolacijama koristi materijalne parametre  $E$ ,  $\nu$  i debljinu  $t$  ovisne o problemu. Membranski dio interpolacija ima kubnu formu s izrazima višeg reda koji ovise o čvornim rotacijama na sličan način kao kod Allman-ove kubne interpolacije.

### 3.2 Model delaminacije

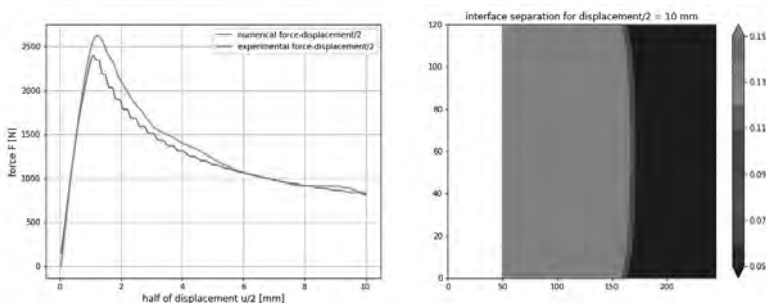
Predloženi numerički model čine ranije opisani spojni element opruge s eksponencijalnim kohezivnim zakonom i četveročvorni plošni element. Pred-procesiranje i post-procesiranje je napravljeno u Python-u dok je problem riješen u FEAP-u [8] gdje su kodirani korisnički elementi. Modelira se samo polovica uzorka za test dvostruke konzole radi simetrije. Varijabla povijesti oštećenja koja pamti vrijednost maksimalnog relativnog pomaka nije potrebna jer ne dolazi do rasterećenja ni ponovnog opterećenja.

Jedan od glavnih problema prilikom modeliranja je potreba za odabirom jako guste mreže konačnih elemenata kako bi se postigla konvergencija u iterativnom minimiziranju reziduala. Veća duktilnost spojnih elemenata (veći  $\delta_0, \delta_c$ ) i gušća mreža su neki od jednostavnijih načina za poboljšanje konvergencije. Naprednije procedure rješavanja

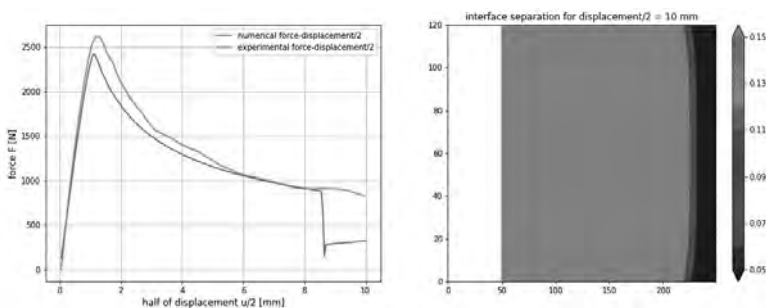
sustava, poput metode lučne duljine, nisu korištene u ovome radu. Osim toga, odabir konstitutivnog zakona i konačnog elementa može imati značajan utjecaj na konvergenciju, a isto će se pokazati rezultatima u sljedećem poglavlju.

## 4 USPOREDBA REZULTATA

Za eksponencijalni konstitutivni zakon i odabrane parametre najrjeđa mreža konačnih elemenata je  $50 \times 10$ , odnosno jedan element ima dimenzije  $5 \times 12$  mm. S druge strane, za bi-linearni konstitutivni zakon i odabrane parametri najrjeđa mreža konačnih elemenata je  $250 \times 24$  (ili veća), što znači da jedan element ima dimenzije  $1 \times 5$  mm. Regularnost mreže bi se mogla poboljšati za oba slučaja, ali tada bi se dodatno produljilo vrijeme izračuna, posebice za bi-linearni zakon.



Slika 4. Rezultati za eksponencijalni konstitutivni zakon, graf s lijeve strane pokazuje usporedbu s ekperimentalnim sila-pomak grafom, a s desne strane je delaminacija slojeva gdje siva boja pokazuje raspucali spoj, bijelom bojom je prikazana početna pukotina



Slika 5. Rezultati za bi-linearni konstitutivni zakon  
(Komentar autora: Gubitak konvergencije se dogodio prije kraja virtualnog eksperimenta)

### 4.1 Ocjena performansi

Pokazalo se da eksponencijalni zakon može postići konvergenciju i uz oscilatorno ponašanje i veliki broj iteracija, dok je bi-linearni zakon izgubio konvergenciju prije kraja virtualnog eksperimenta (Slika 5.) što sugerira da je potrebna gušća mreža konačnih elemenata.

Rezultati za konvergentnu mrežu nisu prikazani kako bi se ilustrirali nedostaci bi-linearnog zakona.

Tablica 2. pokazuje bolje performanse eksponencijalnog zakona po pitanju trajanja izračuna. Iako je prosječan potreban broj iteracija po inkrementu sličan za dva promatrana slučaja, eksponencijalni zakon je prema izrazima (2) i (3) kontinuiran i ne zahtjeva IF petlje u kodu.

Tablica 1. Geometrijski i materijalni parametri

|                         | eCZM       | BLCZM      |
|-------------------------|------------|------------|
| Minimalni broj čvorova  | 1012       | 11300      |
| Iteracija po inkrementu | 4.75       | 4.68       |
| Vrijeme izračuna        | 33 sekundi | 47+ minuta |

Kada se uzme u obzir posmična deformacija ploče (ili grede) problemi delaminacije teže konvergiraju. Ipak, autori očekuju da elementi slojeva koji uzimaju u obzir posmičnu deformaciju mogu pokazati bolje ponašanje u nekim slučajevima s manje gustim mrežama kao što se to pokazalo na jednostavnijim testovima [7].

## 5 ZAKLJUČCI

Eksperimentalno i numerički je dobivena zakrivljena fronta pukotine na testu dvostruke konzole širokih uzoraka. Napravljena je usporedba eksperimentalnih i numeričkih rješenja grafa sile i pomaka te je time validiran model. Ne-linearni elementi opruge koji spajaju plošne elemente slojeva se bolje ponašaju po svim kriterijima ukoliko se koristi eksponencijalni zakon umjesto bi-linearnog. Konačni elementi s višim redom interpolacije nisu efikasni za promatrani problem jer uzimaju u obzir posmične deformacije.

### Zahvale

Ovaj je članak rezultat rada u okviru projekta „Metoda usvojenih deformacija za konačne elemente slojevitih ploča i ljuski i njena primjena na probleme delaminacije - ASDEL” (IP-06-2016-4775) koji je u cijelosti financiran sredstvima Hrvatske zaklade za znanost.

### Literatura

- [1] Dugdale DS. Yielding of steel sheets containing slits. *JMech Phys Solids* 1960;8:100–4.
- [2] Barenblatt GI. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Adv Appl Mech* 1962;7:55–129.

- [3] British Standards Institution BS ISO 25217. (2009) “Adhesives – Determination of the mode I adhesive joints using double cantilever beam and tapered double cantilever beam specimen”. British Standard.
- [4] Alfano, G. (2006) ‘On the influence of the shape of the interface law on the application of cohesive-zone models’, *Composites Science and Technology*, 66(6), pp. 723–730. doi: 10.1016/j.compscitech.2004.12.024.
- [5] Gorman, J. M. and Thouless, M. D. (2019) ‘The use of digital-image correlation to investigate the cohesive zone in a double-cantilever beam, with comparisons to numerical and analytical models’, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 123, pp. 315–331. doi: 10.1016/j.jmps.2018.08.013.
- [6] Hlača, I., Grbac, M. and Škec, L. (2019) ‘Determining Fracture Resistance of Structural Adhesives in Mode-I Debonding Using Double Cantilever Beam Test’, *Zbornik radova*, 22(1), pp. 59–74. doi: 10.32762/zr.22.1.4.
- [7] Ribarić, D. (2016) ‘Problem-dependent cubic linked interpolation for Mindlin plate four-node quadrilateral finite elements’, *Structural Engineering and Mechanics*, 59(6), pp. 1071–1094. doi: 10.12989/sem.2016.59.6.1071.
- [8] Taylor, R.L. FEAP - Finite Element Analysis Program Published: 2014 Publisher: University of California, Berkeley URL: <http://www.ce.berkeley/feap>



# Polužni mehanizmi s konstantnom pogonskom silom

Hoić, M.<sup>1</sup>, Miler, D.<sup>2</sup>, Birt, D.<sup>3</sup> i Kostelac, M.<sup>4</sup>

## Sažetak

Polužni mehanizmi primjenjuju se kao osnova podizača tereta pogonjenih linearnim izvorom snage pri čemu je značajan nedostatak ovakvih sustava izrazito nelinearni odnos pogonske i radne sile što rezultira potrebom za predimenzioniranim pogonskim sustavom. Prethodno je ovaj nedostatak uspješno otklonjen formiranjem aktuatora kao inverzne verzije osnovnog mehanizma za dva specifična mehanizma. U ovom radu, na temelju istovjetnosti kinematskih odnosa aktuatora i osnovnog mehanizma za dva prethodna primjera, predložene su strukture mehanizama za 9 primjera podizača uključujući tri podizača na temelju škarastog podizača, tri na temelju Scott-Russell mehanizma, te tri na temelju polužnih mehanizama bez linearnog člana.

**Ključne riječi:** podizna platforma, polužni mehanizam, aktuator, konstantna sila

---

<sup>1</sup> **Doc. dr. sc. Matija Hoić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagreb, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: matija.hoic@fsb.hr

<sup>2</sup> **Dr. sc. Daniel Miler, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagreb, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: daniel.miler@fsb.hr

<sup>3</sup> **Dominik Birt, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagreb, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: dominik.birt@fsb.hr

<sup>4</sup> **Izv. prof. dr. sc. Milan Kostelac, dipl. ing.**, Sveučilište u Zagreb, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: milan.kostelac@fsb.hr

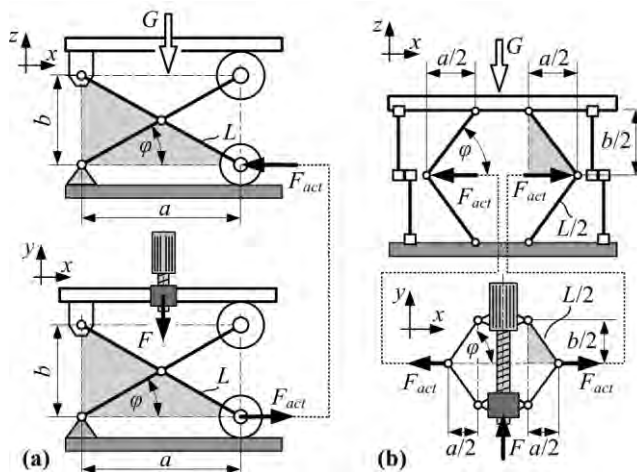
## 1 Uvod

Polužni mehanizmi tipično su u primjeni za formiranje podiznih platformi pri čemu se kao značajan nedostatak postojećih izvedbi može navesti izrazito nelinearan odnos pogonske sile ( $F$ ) i radne sile ( $G$ ) za podizanje tereta na platformi [1] koji rezultira u prvom redu nužnošću ugradnje pogonskog uređaja čija je snaga značajno veća od srednje snage potrebne za podizanje tereta.

Kao rješenje problema predložene su strukture aktuatora koji sadrže izvor mehaničke snage s linearnim gibanjem (npr. hidraulički cilindar ili rotacijski elektromotor i navojno vreteno) te mehanizma čije gibanje opisuje inverznu funkciju u odnosu na prijenosnu funkciju osnovnog polužnog mehanizma. Predložena su dva specifična rješenja u [1, 2]. U ovom radu razmatraju se i predlažu druge mogućnosti za formiranje polužnih mehanizama namijenjenih primjeni u podiznim platformama sa konstantnim omjerom pogonske i podizne sile te dodatnim karakteristikama koje se pokazuju kao prednosti u pojedinim primjenama.

## 2 Prethodno predložena rješenja

U [1] predložena je podizna platforma bazirana na škarastom mehanizmu gdje je aktuator smješten u bazi platforme i djeluje na os kotača pomičnog kraja poluge s ciljem ostvarenja kompaktnijeg mehanizma (slika 1a). Aktuator se sastoji od linearnog pogonskog cilindra te škarastog mehanizma na kojem su zamijenjene točke djelovanja pogonske i radne sile u odnosu na glavni mehanizam podizača čime je ostvaren linearni odnos pogonske i radne sile. Realna izvedba predloženog sustava predstavljena je u [3, 4].



Slika 1. Prethodno predložena rješenja – škarasti podizač (a) i platforma na bazi Sarrusovog mehanizma (b)

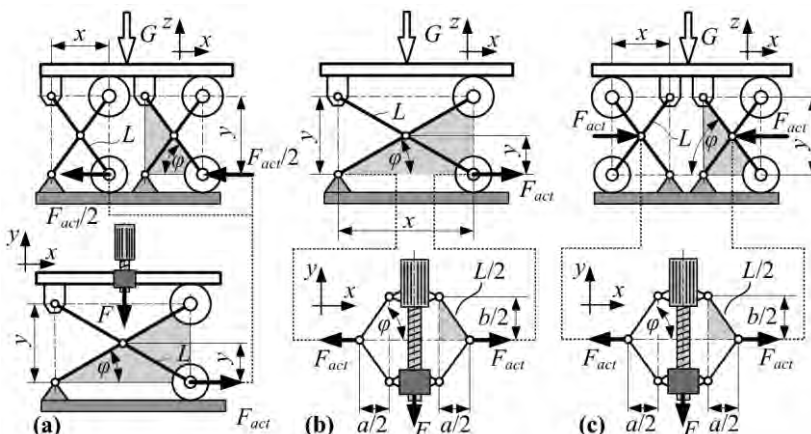
$$\frac{F}{\tan \varphi} = F_{act} = \frac{G}{\tan \varphi} \quad (1)$$

U [2] predložen je mehanizam aktivnog ovjesa automobilskog sjedala na bazi Sarrusovog mehanizma (slika 2a). Pogonski cilindar pogoni osnovni mehanizam podizanja preko dijamantnog polužnog mehanizma koji predstavlja inverzni mehanizam u odnosu na Sarrusov mehanizam čime se, kao i kod prvog primjera, ostvaruje konstantni omjer  $F/G$ . Ponovo, aktuator je smješten u horizontalnu ravninu radi ostvarenja kompaktnosti cijelog sustava.

Može se primijetiti kako se, zbog istih kinematskih odnosa, mogu zamijeniti aktuatori na ova dva primjera, a da se pritom zadrži konstantni omjer  $F/G$ . Važno je napomenuti kako realne izvedbe ne bi nužno rezultirale mehanizmima s identičnim karakteristikama po pitanju krutosti, kompaktnosti ili cijene. Međutim, same mogućnosti zamjene ukazuju na mogućnosti formiranja velikog broja mehanizama.

### 3 Podizne platforme bazirane na škarastom mehanizmu

Za platforme s malom visinom dizanja spram duljine platforme, sustav mora raditi pri malim kutovima nagiba kod kojih omjer  $F_{act}/G$  teži beskonačnosti. Iako će struktura aktuatora u konačnici ostvariti konstantni  $F/Q$ , sile na spoju aktuatora i osnovnog mehanizma mogu rezultirati potrebnim dimenzijama mehaničkih dijelova koje nisu tehnički izvedive i/ili praktične. Za ovakve slučajeve predlaže se preoblikovanje sustava u dva paralelna škarasta mehanizma pogonjena istim aktuatorom (Slika 2a). Svaki škarasti mehanizam sada radi u rasponu kutova nagiba polužja za koje su odnosi  $F_{act}/Q$  praktično izvedivi.



Slika 2. Predložena rješenja podiznih platformi baziranih na škarastom mehanizmu.

Moguće je i zamijeniti aktuator na bazi škarastog mehanizma aktuatorom na bazi dijamantnog mehanizma (Slika 2b) koji ima mehaničku vezu isključivo prema škarastom

mehanizmu. Ovime se smanjuje broj komponenti i oslonaca prema podlozi, ali je potrebno voditi računa o tome da se pogonska jedinica aktuatora (pogonski cilindar) sada giba u prostoru.

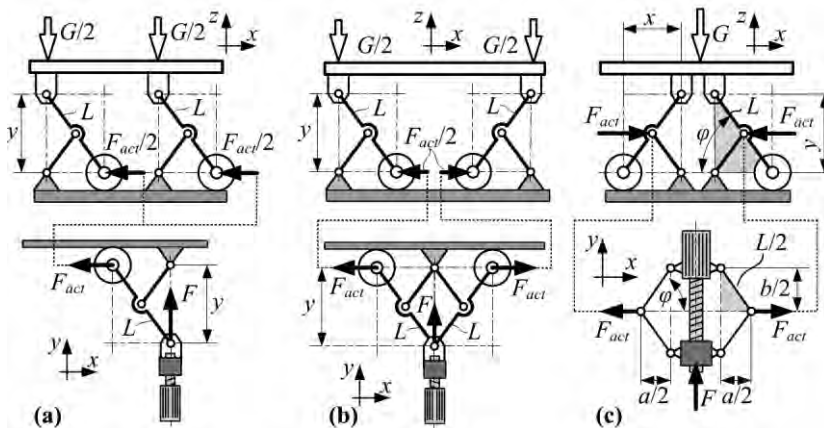
Konačno, moguće je kombinirati paralelne škaraste mehanizme podizača s dijamantnim aktuatorom (Slika 2c). Može se primijetiti kako dana shema prikazuje alternativu kod koje je aktuator vezan na središnji zglob svakog škarastog mehanizma iako je moguća i varijanta u kojoj se aktuator veže na osi kotača na podlozi. Pritom je potrebno obratiti pozornost na duljinu poluga aktuatora kako bi se zadržao konstantni prijenosni omjer ( $L/2$  za slučaj veze na središnju os i  $L$  za slučaj veze prema kotačima).

### 3 Podizne platforme bazirane na Scott-Russell mehanizmu

Kod dvostrukih škarastih mehanizama (slika 2a i 2c) platforma je oslonjena u četiri oslonca što je čini statički neodređenom. Statička određenost može se ostvariti zamjenom škarastog mehanizma Scott-Russell mehanizmom [5]. Konstantni omjer  $F/Q$  pritom je moguće ostvariti primjenom istog principa inverzne strukture aktuatora u odnosu na osnovni mehanizam, tj. primjenom Scott-Russell mehanizma sa zamijenjenim ulazom i izlazom (Slika 3a).

Jedan od krajeva platforme pritom ostaje bez oslonca, što daje nesimetričnu formu konstrukcije. Simetričnost konstrukcije moguće je ostvariti zrcalnim postavljanjem jednog od Scott-Russell mehanizma podizača. Ukoliko se zrcale tako da podupiru vanjske rubove platforme (Slika 3b) aktuator je također potrebno preoblikovati dodavanjem simetričnog inverznog Scott-Russell mehanizma, tj. kako je zrcaljen osnovni mehanizam, tako je zrcaljen i aktuator.

Ukoliko se pak osnovni Scott-Russell mehanizmi postave tako da podupiru središnji dio nosive ploče (Slika 3c), predlaže se primjena dijamantnog aktuatora, po uzoru na rješenje sa škarastim mehanizmom na Slici 2c. Alternativno, primjena simetričnog inverznog Scott-Russell mehanizma je kinematski moguća, ali bi zbog potrebnog smjera sila „lijevi“ krak aktuatora morao djelovati na „desni“ krak mehanizma podizanja i obrnuto, što bi u realnoj izvedbi bilo problematično realizirati.



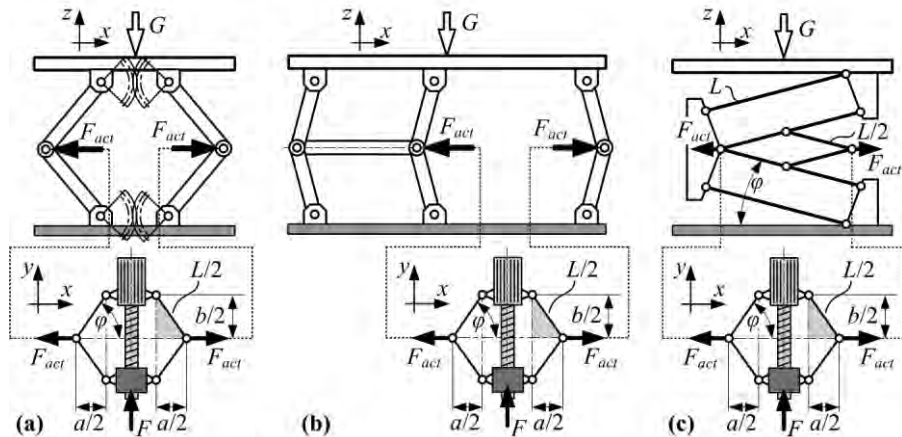
Slika 3. Predložena rješenja podiznih platformi baziranih na Scott-Russell mehanizmu

### 3 Podizne platforme bazirane na polužnim mehanizmima bez translacijskih članova

U primjeni se mogu naći i rješenja bazirana na polužnim mehanizmima koji nemaju član s linearnim gibanjem. Jedan primjer je dijamantni mehanizam s razdvojenim zglobovima gdje je paralelnost gibanja polovica mehanizma osigurana zupčanicima, a koji se učestalo koristio kao dizalica za podizanje osobnog automobila kod zamjene gume (Slika 4a). Očito rješenje za ostvarenje konstantnog omjera  $F/Q$  je dodavanje dijamantnog aktuatora.

Pored zupčanika, paralelnost gibanja moguće je ostvariti i dodavanjem još jednog (ili više) setova „polovica“ dijamantnog mehanizma te horizontalne poluge koja spaja središnja zglobove (Slika 4b), [6]. Kao i u slučaju ostvarenja paralelnosti zupčanicima, primjena dijamantnog aktuatora na zrcalnim središnjim zglobovima ostvaruje konstantni  $F/Q$ . Pritom, da bi se zadržala paralelnost platforme i podloge, aktuator mora biti vezan na horizontalne zglobove na način koji će osigurati paralelnost ravnine aktuatora i osi horizontalne poluge.

Mehanizmi na bazi paralelnih poluga omogućavaju krute i jednostavne podizne platforme čija je negativna karakteristika horizontalni pomak uz podizanje kao posljedica rotacije poluga. Postavljanjem dodatnog zrcalnog seta paralelnih poluga u serijski spoj s osnovnim setom paralelnih poluga (Slika 4c) moguće je ostvariti mehanizam podizanja gdje se neželjeni horizontalni pomaci pojedinih setova paralelnih poluga međusobno poništavaju. Ukoliko se na sredini jedne poluge iz prvog i jedne poluge drugog seta postave zglobovi te dodatne poluge, formira se dijamantni mehanizam na koji je moguće postaviti dijamantni aktuator. Ovakvom dogradnjom ostvaruje se konstantni omjer  $F/G$ .



Slika 4. Predložena rješenja podiznih platformi baziranih na polužnim mehanizmima bez linearnih članova

## 5 Zaključak

U radu su predložena proširenja polužnih mehanizama koje rješavaju značajni nedostatak u primjeni osnovnih mehanizama - nelinearnost odnosa pogonske i radne sile. Predložena rješenja generirana su primjenom principa formiranja aktuatora kao inverzne verzije osnovnog mehanizma.

Očekivana prednost predloženih sustava očituje se prvenstveno u smanjenju potrebne snage pogonskog cilindra, hidrauličnog ili elektromehaničkog. Također, iz predloženih rješenja može se zaključiti kako je princip formiranja aktuatora kao inverzne verzije osnovnog mehanizma moguće primijeniti na veliki broj mehanizama. Očiti nedostaci očituju se u povećanju kompleksnosti mehanizma što će zahtijevati detaljniju konstrukcijsko-tehnološku razradu i potencijalno složenu geometriju komponenata kako bi se mogla formirati realna rješenja. Posljedično, ušteda u troškovima proizvodnje realnih sustava možda neće biti dovoljna da opravda uvođenje ovakvih sustava u primjenu.

## Literatura

- [1] Hoić, M., Sinovčić, M., Miler, D. i Kostelac, M.; Škarasti mehanizam s konstantnim omjerom pogonske i radne sile, 10. susret Hrvatskog društva za mehaniku, 01. i 02. listopada 2020., Slavonski Brod
- [2] Hoić, M., Kranjčević, N., Herold, Z., Kostelac, M.; Design of an Active Seat Suspension for a Passenger Vehicle // Proceedings of the Design Society: DESIGN Conference, Dubrovnik, Hrvatska, 2020. str. 2511-2520
- [3] Sinovčić, M., Miler D., Hoić, M.; Konstrukcija škarastog podizača s konstantnim prijenosnim omjerom, 7. Međunarodni kongres Dani inženjera strojarstva, 22. – 24. rujna 2021., Vodice, Hrvatska

- [4] Sinovčić M.; Škarasta teretna platforma s konstantnim prijenosnim omjerom, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2020.
- [5] Bilas, K., Miler, D., Hoić., M.; Konstrukcija podizača na temelju Scott Russell mehanizma, 7. Međunarodni kongres Dani inženjera strojarstva, 22. – 24. rujna 2021., Vodice, Hrvatska
- [6] Sclater N.; Mechanisms and Mechanical devices Sourcebook, 5th edition, 2011, McGraw-Hill Education, New York



## Numeričko modeliranje deformiranja mikrostrukture sinteriranog čelika (12pt)

Jalušić, B.<sup>1</sup>, Tomić, Z.<sup>2</sup>, Pavlović, B.<sup>3</sup> i Tonković, Z.<sup>4</sup>

### Sažetak

U današnje vrijeme svjedočimo sve većoj primjeni sinteriranih materijala zbog njihovih prednosti u odnosu na klasičnu metalurgiju. Kao neke od prednosti mogu se spomenuti niži troškovi proizvodnje, visoka iskoristivosti materijala, ekološka prihvatljivost te smanjenje buke i vibracija tijekom eksploatacije. S druge strane, sinterirani materijali imaju i negativne karakteristike. Karakteristična poroznost njihove mikrostrukture uzrokuje pojavu koncentracije naprezanja oko granica zrna čime je pospješšen nastanak i razvoj oštećenja u materijalu. Iz tog razloga, za što točniju procjenu ponašanja materijala numeričko modeliranje ovog tipa materijala vrši se na mikrorazini. U ovom radu detaljno je analizirano deformiranje mikrostrukture sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C za slučaj monotonog vlačnog opterećenja i elastičnog ponašanja materijala. Sve korištene mikrostrukture dobivene su iscrpnim metalografskim analizama. Analizirane su dvije različite varijante geometrijskih modela mikrostrukture. Diskretizacija modela provedena je primjenom metode konačnih elemenata, te je simuliran proces deformiranja svih korištenih modela. Na kraju su izvedeni važni zaključci oko utjecaja poroznosti i heterogenosti modela na njihov deformacijski odziv.

**Ključne riječi:** koncentracija naprezanja, metalografska analiza, mikrostruktura, metoda konačnih elemenata, numerička analiza, Abaqus, sinterirani čelik.

---

<sup>1</sup> **Dr.sc. Boris Jalušić**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: boris.jalusic@fsb.hr

<sup>2</sup> **Zoran Tomić, mag. ing. mech**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: zoran.tomic@fsb.hr

<sup>3</sup> **Benjamin Pavlović**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: bp212419@stud.fsb.hr

<sup>4</sup> **Prof. dr. sc. Zdenko Tonković**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: zdenko.tonkovic@fsb.hr

## 1 Uvod

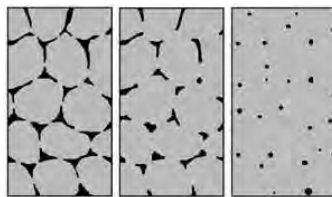
Sinterirani materijali sve su više u upotrebi u sustavima prijenosa snage i gibanja u odnosu na one dobivene klasičnom metalurgijom. Stoga je ovaj rad posvećen numeričkoj analizi deformiranja mikrostrukture sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C za slučaj monotonog vlačnog opterećenja i elastičnog ponašanja materijala. Numerički modeli izrađeni su na temelju izrađenih metalografskih analiza. Pritom je bilo potrebno raspoznati sastavne dijelove mikrostrukture materijala koja se sastoji od pora, ferita i bainita. Veličine modela odabrane su tako da raspored pora bude što ravnomjerniji po cijelom modelu te da na rubovima modela nema pora. Također, modelirani su uzorci s dva različita uvećanja, 200x i 500x. Za izradu geometrije i naknadno prebacivanje u programski paket za numeričku analizu konačnim elementima [1] korišten je software AutoCAD. Pritom su pomoću opcije *spline* ručno definirane granice između pora, bainita i ferita koje su naknadno pretvorene radi jednostavnosti u polinome prvog reda. Za svaki uvećani model analizirane su dvije varijante mikrostrukture materijala. Prva varijanta je heterogeni model koji se sastoji od zrna ferita, bainita i pora, dok je druga varijanta homogeni model koji se sastoji od homogenizirane matrice materijala i pora. Za matricu materijala je napravljena homogenizacija materijalnih svojstava ferita i bainita preko volumenskih (površinskih) udjela u modelu, dok su svojstva ferita i bainita preuzeta iz rezultata mikroindentacije. Za analizu deformiranja mikrostrukture korišteni su četverokutni osnovni konačni elementi za ravninsko stanje naprezanja CPS4 [2] iz programskog paketa Abaqus. Dobivena numerička rješenja analizirana su i uspoređena za heterogeni i homogeni model mikrostrukture. Rad sadrži 5 poglavlja. U prvom poglavlju dan je kratki uvod s općenitim podacima o izrađenim analizama. Postupak metalurgije praha i proces dobivanja sinteriranog materijala ukratko je opisan u drugom poglavlju. U trećem poglavlju prikazani su spomenuti numerički modeli korišteni za analizu metodom konačnih elemenata. Četvrto poglavlje sadrži dobivene numeričke rezultate i pripadnu diskusiju. U petom poglavlju izvedeni su zaključci koji slijede iz interpretacije dobivenih numeričkih rezultata.

## 2 Metalurgija praha

Metalurgija praha danas postaje sve važnija grana moderne industrije. Razlog tome su prednosti koje posjeduje u usporedbi s klasičnim proizvodnim postupcima. Naprimjer, ona omogućava proizvodnju legura iz metala koji nisu međusobno topljivi jedan u drugome. Nadalje, u novije vrijeme metalurgija praha postala je osnova za proizvodnju reznih alata ekstremno visoke tvrdoće i metala otpornih na visoke temperature. U ovoj tehnologiji proizvodi se prah ili gotovi dijelovi zagrijavanjem prethodno kompaktiranog praha ispod temperature taljenja. Pritom komponente željenih dimenzija nastaju spajanjem čvrstog metala, legura ili keramika koje su u obliku sitnih čestica. Sama procedura proizvodnje dijelova postupkom metalurgije praha sadrži četiri osnovne tehnološke operacije: proizvodnja praha, stvaranje mješavine prahova, kompaktiranje praha i sinteriranje. Detaljne informacije o metalurgiji praha mogu se pronaći u [1]. Ovdje ćemo se ukratko opisati i prikazati svojstva samo završne tehnološke operacije u postupku metalurgije praha.

## 2.1 Sinteriranje

Pod pojmom sinteriranje misli se na postupak konsolidacije praha ili otpreska na temperaturi nižoj od temperature tališta glavnog konstituenta. Cilj ove tehnološke operacije je bolje povezivanje praha i poboljšanje čvrstoće. Operacija se provodi pri visokoj temperaturi i tlaku kod kojih se ubrzavaju difuzijski procesi između atoma čestica praha. Pritom dolazi do njihovog povezivanja i nastaju kruti komadi. Povoljnije je da su čestice praha što je moguće manje jer pritom imaju veću površinsku energiju što omogućava brže povezivanje. Poznato je da na proces sinteriranja uvelike utječu: temperatura i vrijeme, geometrijska struktura čestica praha, sastav smjese praha, gustoća kompakta te sastav zaštitne atmosfere u peći za sinteriranje. Za sam proces karakteristične su dvije pojave, adhezija (zavarivanje površina čestica) i promjena oblika čestica. Obje pojave su ključne u procesu s obzirom da bez adhezije čestica nema sinteriranja, dok bez promjene oblika čestica ne dolazi do zgušnjavanja. Glavni cilj postupka sinteriranja je smanjenje udjela pora, postizanje gustoće kao kod konvencionalnih metoda i željenih materijalnih svojstava. Na slici 1. prikazane su faze procesa sinteriranja i dobivene pripadne mikrostrukture.



Slika 1. Faze procesa sinteriranja (s lijeva na desno) [1]

U ovom radu korišteni materijal je sinterirani čelik. Nakon provedenog postupka sinteriranja u čelicima se javlja karakteristična rezidualna poroznost. Na konačnu dobivenu poroznost čelika uvelike utječu parametri kao gustoća kompakta, vrijeme i temperatura sinteriranja, veličina čestica praha. Dobiveni postotak poroznosti ima velik utjecaj na mehaničko ponašanje i deformiranje sinteriranih čelika. Nadalje, gustoća i dobivena poroznost su od iznimne važnosti s obzirom da imaju utjecaj na mehanička svojstva.

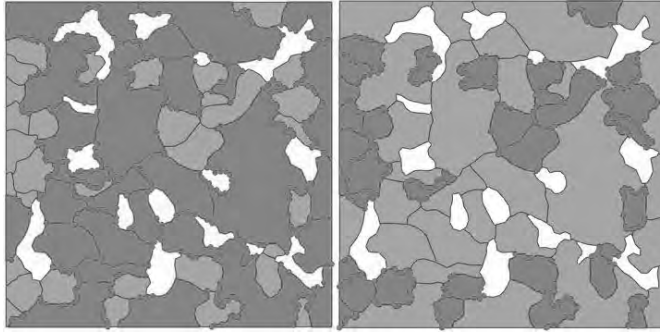
## 3 Numerička analiza primjenom metode konačnih elemenata

Sve numeričke analize provedene su na modelima izrađenima pomoću metalografskih analiza sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C. U tablici 1. dane su karakteristike korištenih modela.

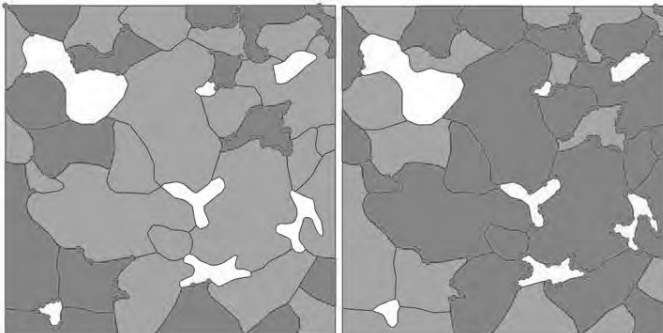
Tablica 1. Dimenzije i poroznosti izrađenih modela

|                | 200x      | 500x          |
|----------------|-----------|---------------|
| Dimenzije [mm] | 0,23x0,23 | 0,0843x0,0843 |
| Poroznost [%]  | 12%       | 9%            |

Također, u svrhu vizualizacije mikrostrukture materijala na slikama 2 i 3 prikazane su geometrije heterogenih modela s uvećanjem 200x i 500x. Pritom je također prikazan način dodjeljivanja materijalnih svojstava različitim zrnima (lijevo bainit, desno ferit). Na obje slike bijelom bojom su označene pore unutar mikrostrukture materijala.



Slika 2. Geometrije mikrostrukture modela s uvećanjem 200x



Slika 3. Geometrije mikrostrukture modela s uvećanjem 500x

S gornjih slika jasno je vidljivo da su mikrostrukture materijala geometrijski različite stoga bi se modeli trebali drugačije deformirati prilikom opterećivanja. Nadalje, u svim modelima pretpostavljeno je monotono vlačno opterećenje i elastično ponašanje materijala. Korištena materijalna svojstva su dobivena iz procesa mikroindentacije te su prikazana u tablici 2.

Tablica 2. Materijalna svojstva ferita i bainita

|           | Ferit  | Bainit |
|-----------|--------|--------|
| $E$ [MPa] | 185000 | 259000 |
| $\nu$     | 0,28   | 0,28   |

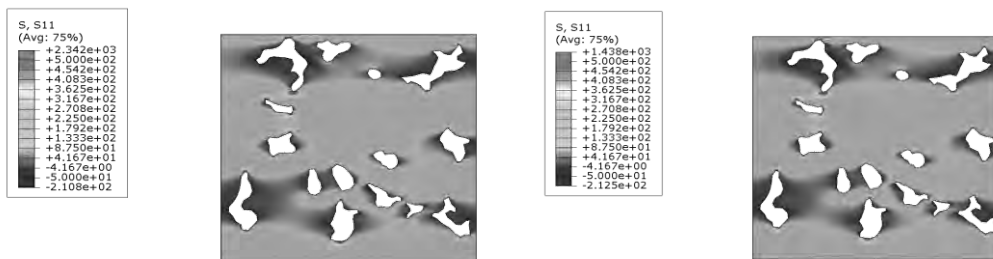
Zadani rubni uvjeti po modelu jednaki su u svim izračunatim simulacijama. Lijevi rub modela uzet je kao nepomičan u smjeru horizontalne osi. Također, da bi se spriječilo gibanje modela

središnja točka lijevog ruba modela uzeta je kao nepomična i u smjeru vertikalne osi. Po cijelom desnom rubu zadan je pomak u smjeru horizontalne osi koji iznosi 0,1% ukupne duljine stranice modela. Za slučaj modela uvećanog 200x to iznosi 0,00023mm, dok je to za model uvećan 500x jednako 0,0000843mm. Potrebno je spomenuti ovdje da su pri analizi korišteni samo osnovni četverokutni konačni elementi za ravninsko stanje naprezanja CPS4 iz programskog paketa Abaqus. Prije odabira konačnih diskretizacijskih mreža napravljeni su testovi konvergencije rješenja za modele za oba uvećanja. Također, za svako od uvećanja modelirana su dvije verzije mikrostrukture: heterogena koja se sastoji od bainita, ferita i pora, te homogena koja se sastoji samo od homogenizirane matrice materijala i pora. Mreža za heterogeni model uvećan 200x sastojala se od 101233, dok se mreža za homogeni model sastojala od 92554 konačna elementa. S druge strane, mreže za model uvećan za 500x imale su 36744 za homogenu, odnosno 52734 konačna elementa za heterogenu mikrostrukturu.

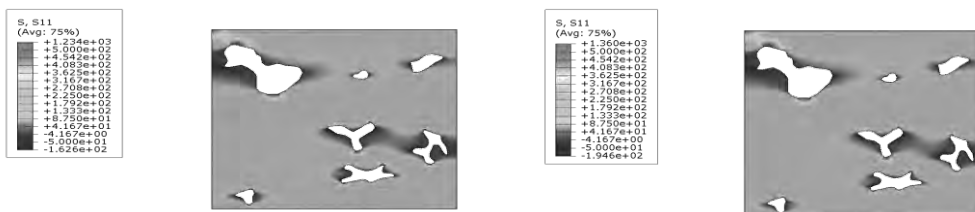
#### **4 Numerički rezultati**

U svrhu usporedbe modela s heterogenom i homogenom strukturom na slikama 4 i 5 prikazane su dobivene raspodjele kontura normalnog naprezanja u smjeru horizontalne osi za oba uvećanja modela.

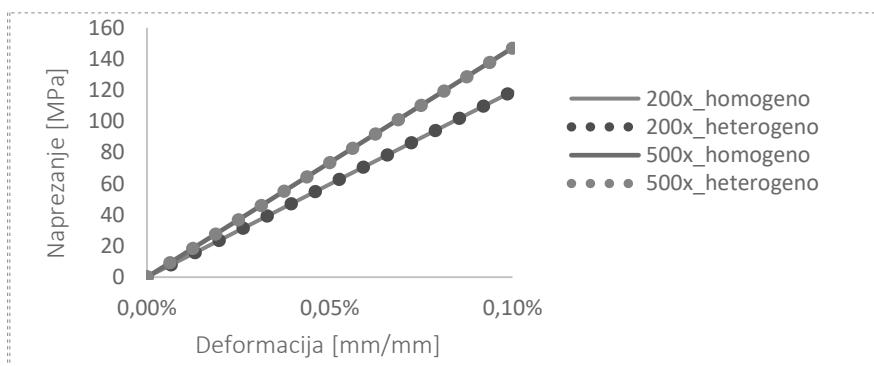
Analizom dobivenih rezultata lako se može uočiti da nema velikih razlika između kontura dobivenih računanjem heterogenim ili homogenim modelom. Također, može se uočiti da na rubovima pora dolazi do pojave koncentracije naprezanja. Nadalje, nema vidljivih promjena u naprezanja na spoju zrna ferita i bainita. Razlog tome je vjerojatno premala razlika u iznosu modula elastičnosti između spomenutih zrna, moduli elastičnosti su istog reda veličine. U svrhu usporedbe svih modela s različitim mikrostrukturama prikazani su dijagrami naprezanje-deformacija na slici 6. Dijagram ovisnosti normalnog naprezanja u smjeru horizontalne osi i pripadne deformacije u smjeru iste osi dobiven je na način da su sumirane sve reaktivne sile na desnom rubu modela i podijeljene s duljinom vertikalne stranice što predstavlja naprezanje, a deformacija je jednaka promjeni pomaka desnog ruba modela podjeljeno s duljinom horizontalne stranice uzorka.



Slika 4. Raspodjele kontura normalnog naprezanja u smjeru horizontalne osi za model uvećan 200x (lijevo heterogena struktura, desno homogena struktura)



Slika 5. Raspodjele kontura normalnog naprezanja u smjeru horizontalne osi za model uvećan 500x (lijevo heterogena struktura, desno homogena struktura)



Slika 6. Usporedba rezultata svih modela na dijagramu ovisnosti normalnog naprezanje u smjeru horizontalne osi i pripadne deformacije u smjeru iste osi

Sukladno očekivanjima nema neke posebne razlike u dijagramima uspoređujući heterogene i homogene modele za jednaka uvećanja. Međutim, postoji razlika između modela s uvećanjima 200x i 500x. Može se pokazati da modeli s uvećanjem 500x imaju pri deformaciji 0,1% naprezanje veće za oko 24%. Posljedica toga je naravno ne samo uvećanje već i različita poroznost i drugačija raspodjela pora unutar mikrostrukture.

## 4 Zaključak

U sklopu rada numerički je modelirana i analizirana mikrostruktura sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C. Geometrijski modeli uvedeni u programski paket za analizu metodom konačnih elemenata dobiveni su na temelju metalografske analize. Glavni dio rada temeljen je na analizi usporedbe deformiranja heterogenog i homogenog modela mikrostrukture. Pritom se heterogeni model mikrostrukture sastoji od ferita, bainita i pora dok se homogeni model sastoji od matrice materijala i pora. U radu su korišteni modeli s različitim uvećanjima (200x i 500x). Analizom rješenja dobivenih metodom konačnih elemenata u programskom paketu Abaqus može se zaključiti da su dijagrami ovisnosti normalnog naprezanje u smjeru osi  $x$  i pripadne deformacije za modele s oba uvećanja vrlo bliski. Razlog tome je razmjerno mala razlika u modulu elastičnosti između bainita i ferita. Analizom kontura naprezanja pokazalo se da heterogeni i homogeni model mikrostrukture također daju slična rješenja, što je u skladu s očekivanjima.

### Zahvala

Istraživanje je u potpunosti financirano sredstvima Hrvatske zaklade za znanost u okviru projekta PZS-2019-02-4177 "Višerazinsko numeričko modeliranje i eksperimentalno istraživanje procesa starenja u sinteriranim konstrukcijskim komponentama".

### Literatura

[1] Sorić, J., Metoda konačnih elemenata, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb 2004.

Abaqus/CAE 6.14-1 Documentation.

[2] Slokar, Lj., Metalurgija praha i sinter materijali, Sveučilište u Zagrebu, Metalurški fakultet, Sisak, 2015.



# Adaptivna metoda faznog polja za analizu krhkog loma

Jukić, K.<sup>1</sup>, Jarak, T.<sup>2</sup>, Seleš, K.<sup>3</sup> i Tonković, Z.<sup>4</sup>

## Sažetak

Metoda faznog polja (MFP) za probleme krhkog loma je izrazito svestrana metoda koja elegantno rješava probleme složenih topologija pukotina, ali kao nedostatak metode ističu se izrazito veliki računalni troškovi, koji proizlazi iz potrebe za upotrebom izrazito gustih mreža oko pukotina. U ovom radu prikazan je jednostavan algoritma za adaptivno promrežavanje za MFP s ciljem smanjenja računalnog vremena. Progušćenje mreže temelji se na algoritmu bisekcije elemenata koji dijeli elemente po najduljoj stranici elementa, dok se pri prorjeđenju mreže koristi hijerarhijsko uređenje mreže. U ovom radu rješavanje sustava jednadžbi provedeno je upotrebom raspregnutog algoritma. Pri tome se koriste 2 kriterija za automatsku promjenu mreža: Zienkiewicz-ev kriterij za pomake, i kriterij gustoće energije deformiranja za fazno polje. Dobiveni rezultati ukazuju da predloženi adaptivni algoritam postiže jednaku točnost u usporedbi s MPF bez adaptivnog promrežavanja uz smanjeno vrijeme računanja.

**Ključne riječi:** metoda faznog polja, krhki lom, adaptivna analiza

---

<sup>1</sup> **Krešimir Jukić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: kresimir.jukic@fsb.hr

<sup>2</sup> **Izv. prof. dr. sc. Tomislav Jarak, dipl. ing. stroj.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: tomislav.jarak@fsb.hr

<sup>3</sup> **Dr. sc. Karlo Seleš, mag. ing. mech.**, Rimac Automobili, Ljubljanska ul. 7, 10431, Sveta Nedelja, e-mail: karlo.seles@rimac-automobili.com

<sup>4</sup> **Prof. dr. sc. Zdenko Tonković, dipl. ing. stroj.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: zdenko.tonkovic@fsb.hr

## 1 Uvod

Tradicionalno, krhki lom materijala se predviđa metodama linearno-elastične mehanike loma (LEFM), a realni problemi često se danas rješavaju numeričkim metodama u kojima se geometrija pukotine opisuje egzaktno kao geometrijski diskontinuitet, poput proširene metode konačnih elementa (X-FEM). Te metode imaju ozbiljne probleme kod rješavanja problema sa složenim topologijama oštećenja, koje mogu uključivati fenomene poput iniciranja pukotina, grananja pukotina, spajanja pukotina, itd. Pokazalo se da je metoda faznog polja (MFP), koja se temelji na aproksimativnom opisu pukotine pomoću kontinuiranog skalarnog faznog polja, pogodnija za rješavanje takvih problema. U MFP proces loma opisan je varijacijskom formulacijom, a površina pukotine pri tome se aproksimira volumnim integralom. Uza sve prednosti, velika mana metode je dugačko vrijeme računanja, do čega dolazi zbog potrebe za izrazito gustom mrežom oko pukotine. Ovaj problem može se ublažiti primjenom adaptivnog promrežavanja, što je primijenjeno i u ovom radu. Na području primjene adaptivnog promrežavanja za MFP trenutno je dostupan mali broj radova. U [1] se prvi puta spominje adaptivnost u kontekstu MFP. U [2] se opisuje anizotropno promrežavanje, dok se u [3] daje matematički striktna procjena greške pri adaptivnoj analizi. U literaturi se često koriste kriteriji temeljeni na gustoći energije deformiranja [4], [5], ili tzv. Zienkiewicz-ev kriterij [6], temeljen na polju naprezanja.

U ovom radu prikazan je jednostavan algoritam za adaptivno promrežavanje za probleme MFP. Algoritam se temelji na jednostavnim operacijama dijeljenja i spajanja elemenata. S obzirom da se dijeljenje elemenata provodi strogo po najduljoj stranici elementa, očuvani su omjeri stranica elementa pa naknadne operacije zaglađenja mreže nisu potrebne. S obzirom da pri izmjeni mreža ne dolazi do pomicanja čvorova, prijenos podataka na novu mrežu svodi se na računanje novih vrijednosti direktno pomoću čvornih vrijednosti i funkcija oblika postojećih čvorova i elementa. Dijeljenjem elemenata nastaju mreže s hijerarhijom, koja se koristi pri prorjeđivanju mreže. U ovom radu koriste se kriteriji za promjenu mreže temeljeni na gustoći energije deformiranja [5] i naprezanjima [6].

U poglavlju 2 ukratko je opisana MFP, dok su u poglavljljima 3 i 4 ukratko opisani algoritam za adaptivno promrežavanje njegova implementacija. Nakon toga, u poglavlju 5 predstavljen je numerički primjer, a u poglavlju 6 izložen je zaključak rada.

## 2 Metoda faznog polja

MFP se temelji na varijacijskoj formulaciji loma [7], koja je generalizacija Griffithove teorije i opisuje problem loma kao problem minimizacije ukupne energije. Pritom, pukotina raste tako da nastala konfiguracija ima najmanju moguću energiju od svih konfiguracija pukotina, uz ograničenje da prethodna pukotina mora biti sadržana u novoj pukotini. Ukupna energija dana je kao

$$\Psi = \Psi_e + \Psi_f - P = \int_{\Omega} \psi \, d\Omega + \int_{\Gamma} G_c \, d\Gamma - P, \quad (1)$$

gdje je  $\Psi_e$  energija deformiranja,  $\Psi_f$  je energija loma,  $P$  je potencijal vanjskih sila,  $\psi$  je gustoća energije deformiranja, i  $G_c$  je kritična brzina oslobađanja energije.  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  je  $n$ -

dimenzijska domena, a  $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n-1}$  je površina pukotine. Pukotina je aproksimirana faznim poljem  $0 = \phi < 1$ , prema [8], koje poprima vrijednost 0 za neoštećeni materijal i vrijednost 1 za potpuno oštećeni materijal. Površina pukotine aproksimirana je odgovarajućim funkcionalom [8], pa se energija loma može izračunati kao

$$\Psi_f = G_c \int_{\Gamma} d\Gamma \approx \int_{\Omega} G_c \gamma d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2} G_c \left( \frac{1}{l} \phi^2 + l(\nabla\phi)^2 \right) d\Omega, \quad (2)$$

gdje je  $\gamma$  funkcija gustoće površine pukotine, koja je ovdje uzeta kao u [8].

U modeliranju loma pomoću MFP degradira se gustoća energije deformiranja s porastom faznog polja. Pri tome se provodi dekompozicija gustoća energije deformiranja

$$\psi = g \cdot \psi_0^+ + \psi_0^-, \quad (3)$$

gdje je  $g$  degradacijska funkcija,  $\psi_0^+$  je „pozitivni“, a  $\psi_0^-$  je „negativni“ dio energije deformiranja, definirani u ovom radu prema [9] kao

$$g = (1 - \phi)^2, \quad (4)$$

$$\psi_0^{\pm} = \frac{1}{2} \lambda \cdot \langle \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle_{\pm}^2 + \mu \cdot \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}^2), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\pm} = \sum_{i=1}^3 \langle \boldsymbol{\varepsilon}_i^* \rangle_{\pm} \mathbf{n}_i^* \otimes \mathbf{n}_i^*. \quad (5)$$

U gornjim formulama,  $\langle x \rangle_{\pm} = \frac{1}{2}(x \pm |x|)$ ,  $\lambda$  i  $\mu$  su Lamé-ove konstante, a  $\boldsymbol{\varepsilon}$  je tenzor deformacije, čiji su pozitivni i negativni dio  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\pm}$  definirani izrazom (6.2), gdje su  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^*$  svojstvene vrijednosti tenzora, a  $\mathbf{n}_i^*$  su pripadajući vlastiti vektori. Ovakva dekompozicija omogućava realističan opis ponašanja pukotina prilikom zatvaranja pukotine. Dobar pregled dostupnih degradacijskih funkcija, definicija funkcija energije deformiranja dan je u [10].

### 3 Adaptivna analiza

Korišteni algoritam za prognošenje temelji se na algoritmu bisekcije elemenata po najduljoj stranici elementa. U prvom koraku algoritma potrebno je za svaki aktivni konačni element provjeriti je li zadovoljen neki od kriterija za usitnjavanje elementa. Ako je kriterij zadovoljen, najdulja stranica elementa označava se za dijeljenje. U tom slučaju, također se rekurzivno provjerava da li treba podijeliti i susjedni element koji posjeduje označenu stranicu. Na taj način dolazi se do pravilnih mreža. Nakon toga, svi elementi označeni za dijeljenje dijele se na manje po najduljoj stranici, pri čemu se uspostavlja odgovarajuća hijerarhija među starim i novim elementima. Svaki podijeljeni element je nadelement podelementa koji su nastali dijeljenjima. Ta hijerarhija koristi se prilikom prorjeđivanja mreže. Mreža se prorjeđuje spajanjem podelementa jednog nadelementa. Spajanjem elemenata mogu nastati 'viseći čvorovi', koji se eliminiraju daljnjim odgovarajućim dijeljenjem elemenata.

U ovom radu koriste se 2 kriterija za promjenu mreža:

Prvi kriterij je temeljen na naprezanjima i definiran je s jednadžbama [11]:

$$\mu_i = \frac{\|e_i\|}{\|\alpha_{mean}\|_2}, \|e_i\|_2 = \sqrt{\int_{V_i} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{rec})^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{rec}) dV},$$

$$\|\alpha_{mean}\|_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \|\alpha_i\|_2^2}{N}}, \|\alpha_i\|_2 = \sqrt{\int_{V_i} (\boldsymbol{\sigma}_{rec})^T (\boldsymbol{\sigma}_{rec}) dV}. \quad (8)$$

Do dijeljenja  $i$ -tog elementa dolazi ako je  $\mu_i > \mu_{tol}$ .

Drugi kriterij temelji se na gustoći energije deformiranja. Do progušćenja elementa dolazi ako je  $\psi_{max}^+ > \frac{kG_c}{2l}$ , tj. ako je najveća vrijednost pozitivnog dijela gustoće energije deformiranja  $\psi_{max}^+$  proračunata u integracijskim točkama elementa veća od dijela kritične gustoće energije deformiranja. Do progušćenja dolazi jedino ako je duljina najveće stranice elementa veća od  $h_{min}$ .

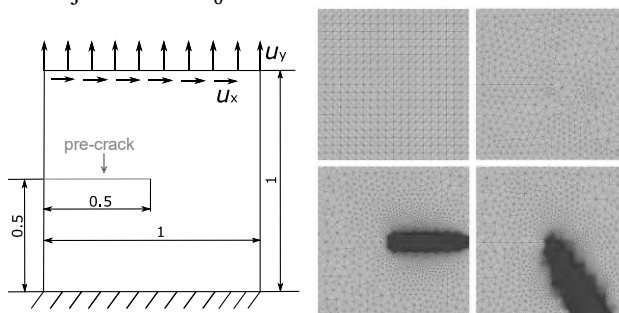
Do dijeljenja elementa dolazi ako element zadovolji bilo koji od gornjih kriterija, dok do spajanja elementa dolazi ako element zadovoljava oba dva analogno definirana kriterija.

## 4 Numerička implementacija

Jednadžbe za polje pomaka (jednadžbe ravnoteže) i jednadžbe za fazno polje izvedene su metodom virtualnih radova i diskretizirane su metodom konačnih elemenata primjenom Bubnov-Galerkinovog principa [12]. Korišteni su trokutni elementi drugog reda. Ireverzibilnost faznog polja nametnuto je na tzv. implicitni način [13]. Dobivene jednadžbe se rješavaju raspregnutim inkrementalno-iterativnim postupkom [14], pri čemu se u svakoj iteraciji prvo rješavaju jednadžbe ravnoteže uz konstantno fazno polje, a zatim jednadžbe faznog polja s konstantnom novom vrijednosti pomaka, proračunatom u prethodnom koraku. Ovakav iterativni postupak se ponavlja sve dok se ne zadovolje kriteriji konvergencije, nakon čega se pokreće novi inkrement. Kod adaptivnih proračuna, promjena mreža se izvršava nakon rješavanja problema faznog polja.

## 5 Primjer

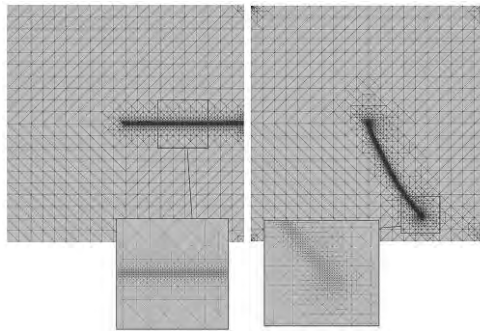
U ovom potpoglavlju prikazano je ponašanje pravokutnog uzorka sa zarezom. Dimenzije, rubni uvjeti i početne mreže modela prikazane su na slici 1. Parametri materijala su modul elastičnosti  $E = 210000$ , Poissonov koeficijent  $\nu = 0.3$ , kritična brzina oslobađanja energije  $G_c = 2.7$  i duljinska skala  $l_0 = 0.0075$ .



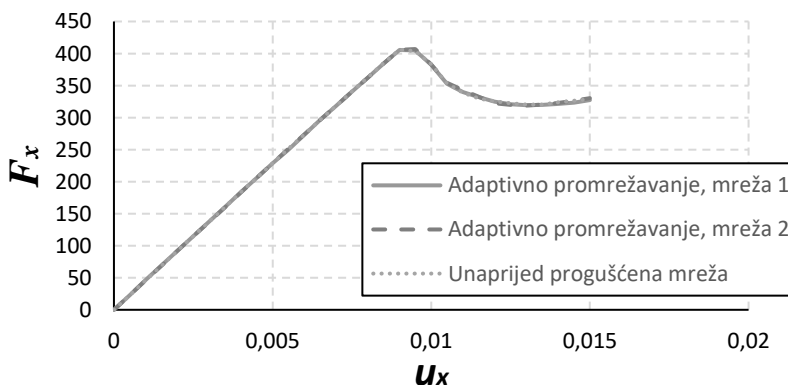
Slika 1. Uzorak sa zarezom (lijevo) i korištene početne mreže (desno)

Parametri algoritma za promrežavanje su  $\mu_{tol} = 0.05$ ,  $k_3 = 0.15$  i  $h_{min} = 0.5l$ . Razmatrano je vlačno opterećenje ( $u_x = 0, u_y = 0.0075$ ) i smično opterećenje ( $u_x = 0.015, u_y = 0$ ). Adaptivni proračuni su provedeni su upotrebom različitih početnih mreža: pravilne strukturirane mreže (mreža 1) i nepravilne nestrukturirane mreže (mreža 2), a rezultati su uspoređeni s onima dobivenima upotrebom unaprijed progušćene mrežom bez korištenja adaptivnog promrežavanja.

Dobiveni sila-pomak dijagrami za slučaj smičnog opterećenja prikazani su na slici 3. Može se uočiti da su, neovisno o topologiji početne mreže, razlike u rezultatima izrazito male. To ukazuje na robusnost predloženog adaptivnog algoritma. Vremena računanja za različite primjere prikazana su u tablici 1. Može se uočiti ušteda u vremenu od čak 90%, iako treba napomenuti da ovakav zaključak nije objektivan jer kod proračuna bez adaptivnosti konačno vrijeme uvelike koristi o unaprijed pripremljenoj početnoj mreži.



Slika 2. Primjeri mreža generiranih adaptivnim postupkom: vlačno opterećenje (lijevo), smično opterećenje (desno)



Slika 3. Dijagrami sila-pomak za slučaj smičnog opterećenja za dvije različite početne mreže s adaptivnim promrežavanjem i za unaprijed progušćenu mrežu bez adaptivnog promrežavanja

Tablica 1. Vremena računanja

|               | Vrijeme računanja (s)   |                       |         | Gusta mreža, bez adaptivnosti | Ušteda vremena računanja |
|---------------|-------------------------|-----------------------|---------|-------------------------------|--------------------------|
|               | Adaptivno promrežavanje |                       |         |                               |                          |
|               | Vrijeme računanja       | Vrijeme promrežavanja | Ukupno  |                               |                          |
| Vlak, mreža 1 | 718.77                  | 245.57                | 964.34  | 5625.41                       | 82.85%                   |
| Vlak, mreža 2 | 974.93                  | 349.94                | 1324.87 |                               | 76.44%                   |
| Smik, mreža 1 | 5066.59                 | 980.50                | 6047.09 | 59329.95                      | 88.39%                   |
| Smik, mreža 2 | 5690.50                 | 1196.63               | 6887.13 |                               | 89.80%                   |

## 5 Zaključak

U ovom radu prikazana je jednostavna procedura za adaptivno promrežavanje za metodu faznog polja (MFP) za lom materijala koje se temelji na algoritmu bisekcije elemenata. U postupku se koriste dva jednostavna i intuitivna kriterija promrežavanja. Dobiveni rezultati ukazuju da se upotrebom predloženog adaptivnog promrežavanja mogu postići značajne uštede u vremenu računanja bez kompromitiranja točnosti rješenja. Budući rad uključivat će proširenje trenutnog algoritma na anizotropno promrežavanje te implementaciju takao dobivenih algoritama u MFP za duktilni lom i zamor.

### Zahvala

Ovaj rad je sufinanciran od strane Europske Unije kroz Europski Fond za Regionalni Razvoj, Operativni program 'Konkurentnost i kohezija' 2014-2020, projekt „Zaštita cjelovitosti konstrukcija u energetici i transportu“ (Zacjel, KK.01.1.1.04.0056)

### Literatura

- [1] Burke S., Ortner C., Suli E.; An adaptive finite element approximation of a variational model of brittle fracture; *Siam Journal on Numerical Analysis*; 2010;48(3):980-1012
- [2] Artina M., Fornasier M., Micheletti S., Perotto S.; Anisotropic mesh adaptation for crack detection in brittle materials; *Siam Journal on Scientific Computing*; 2015;37(4):B633-B59.
- [3] Mang K., Walloth M., Wick T., Wollner W.; Mesh adaptivity for quasi-static phase-field fractures based on a residual-type a posteriori error estimator; *GAMM-Mitteilungen*; 2019; 43.
- [4] Klinsmann M., Rosato D., Kamlah M., McMeeking R.M.; An assessment of the phase field formulation for crack growth; *CMAME*; 2015;294:313-30.
- [5] Hirshikesh H., Jansari C., Kannan K., Annabattula R.K., Natarajan S.; Adaptive phase field method for quasi-static brittle fracture using a recovery based error indicator and quadtree decomposition; *Engineering Fracture Mechanics*; 2019;220:19.
- [6] Hirshikesh H., Pramod A.L.N., Waisman H., Natarajan S.; Adaptive phase field method using novel physics based refinement criteria; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 2021;383

- [7] Francfort G.A.; Marigo J.J.; Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem; *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*; 1998;46(8):1319-42.
- [8] Bourdin B., Francfort G.A., Marigo J.J.; Numerical experiments in revisited brittle fracture; *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*; 2000;48(4):797-826
- [9] Miehe C., Welschinger F., Hofacker M.; Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: Variational principles and multi-field FE implementations; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 2010;83(10):1273-311.
- [10] Wu J.-Y., Nguyen V.P., Nguyen C.T., Sutula D., Sinaie S., Bordas S.P.A.; Phase-field modeling of fracture; In: Bordas S.P.A., Balint D.S, editors.; *Advances in Applied Mechanics*; Elsevier; 2020.; p.1-183.
- [11] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.; A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis; *Int. J. Numer. Methods Eng*; 1987; 24(2)
- [12] Zienkiewicz, O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.; *The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals (Seventh Edition)*; Butterworth-Heinemann; 2013.
- [13] Miehe C., Hofacker M., Welschinger F.; A phase field model for rate-independent crack propagation: Robust algorithmic implementation based on operator splits; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 2010;199(45-48):2765-78.
- [14] Seles K., Lesicar T., Tonkovic Z., Soric J.; A residual control staggered solution scheme for the phase-field modeling of brittle fracture; *Engineering Fracture Mechanics*; 2019;205:370-86.



## Višerazinsko modeliranje vlačnog testa nodularnog lijeva

Jurčević, A.<sup>1</sup>, Lesičar, T.<sup>2</sup>, Tonković, Z.<sup>3</sup> i Sorić, J.<sup>4</sup>

### Sažetak

Mehanička svojstva heterogenih materijala u velikoj su mjeri uvjetovana njihovom mikrostrukturom. Raspodjela, udio, ali i mehanička svojstava mikrokonstituenta koji čine materijal diktiraju njegovo ponašanje prilikom eksploatacije. Eksperimentalno određivanje mehaničkih svojstava pojedinog mikrokonstituenta nije trivijalan postupak, a sama vjerodostojnost i objektivnost rezultata često je upitna. Iz tog razloga pribjegava se upotrebi numeričkih simulacija i višerazinskih metoda kojima se može doći do mehaničkih svojstava razmatranog mikrokonstituenta. U radu je provedena višerazinska analiza vlačnog testa nodularnog lijeva oznake EN-GJS-400-18-TL, pri čemu su razmatrani ljevovi iz dvije serije lijevanja – Tundish i Inmould. Korištenjem mikrostrukturnih snimaka spomenutog materijala te metode konačnih elemenata i metode homogenizacije s reduciranim brojem stupnjeva slobode, određena su mehanička svojstava dominantnog mikrokonstituenta – ferita. Analiza je provedena u dva koraka: (1) u kojem su određena linearno-elastična svojstava – modul elastičnosti i Poisson-ov faktor; (2) u kojem je određena granica tečenja.

**Ključne riječi:** Nodularni lijev, Tundish postupak, Inmould postupak, metoda homogenizacije s reduciranim brojem stupnjeva slobode, ferit, mikrostruktura

---

<sup>1</sup> **Mag. Ing. Ante Jurčević, asistent**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: ante.jurcevic@fsb.hr

<sup>2</sup> **Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar, docent**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: tomlislav.lesicar@fsb.hr

<sup>3</sup> **Prof. dr. sc. Zdenko Tonković, redoviti profesor**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: [zdenko.tonkovic@fsb.hr](mailto:zdenko.tonkovic@fsb.hr)

<sup>4</sup> **Prof. dr. sc. Jurica Sorić, professor emeritus**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: [jurica.soric@fsb.hr](mailto:jurica.soric@fsb.hr)

## 1 Uvod

Za kvalitetno opisivanje mehaničkog ponašanja heterogenih materijala prilikom eksploatacije, nužno je poznavanja njihove mikrostrukture. Različitim postupcima proizvodnje moguće je mijenjati raspodjelu, udio, mehanička svojstva i sam oblik pojedinih mikrokonstituenata koji tvore mikrostrukturu materijala i time doći do optimalnih svojstava. Naknadnom eksperimentalnom analizom nužno je utvrditi u kojoj mjeri spomenute promjene utječu na mehaničko ponašanje materijala te do koje granice ih se isplati provoditi. Međutim, provođenje različitih serija proizvodnje, ali i eksperimentalnih analiza vremenski i financijski predstavlja velik trošak. Također, eksperimentalno određivanje mehaničkih svojstava mikrokonstituenata predstavlja relativno novo područje znanosti o materijalima, a sama vjerodostojnost i objektivnost rezultata često je upitna.

Zbog složene mikrostrukture i prisustva dvaju ili više mikrokonstituenata, numeričkom modeliranju mehaničkog ponašanja heterogenih materijala sve više se pristupa sa stajališta višerazinskih (*multiscale*) metoda. Ove metode omogućuju razmatranje ponašanja materijala na više razina, a najčešće se razmatraju dvije razine – mikro i makrorazina. Nakon rješavanja problema rubnih vrijednosti na mikrorazini, koja je definirana preko reprezentativnog volumenskog elementa (RVE-a), rezultate analize je potrebno homogenizirati, tj. uprosječiti. Uprosječeni rezultati se zatim koriste kao ulazni podaci za rješavanje problema rubnih vrijednosti na makrorazini. Opisanim postupkom, iz poznatih informacija o ponašanju mikrorazine materijala, moguće je doći do materijalnih parametara materijala na makrorazini, kao što su modul elastičnosti, Poisson-ov faktor ili granica tečenja. Uz to, provođenjem većeg broja računalnih simulacija s različitim vrijednostima raspodjele, udjela, mehaničkih svojstava i samog oblika mikrokonstituenta na jednostavan način se može utvrditi utjecaj pojedinih parametara mikrostrukture na svojstva materijala na makrorazini. Time se izbjegava potreba za proizvodnjom različitih serija materijala, ali i eksperimentalnom analizom. Međutim, vrijedi i obrnuti pristup, tj. iz poznatih svojstava materijala na makrorazini, višerazinskom analizom moguće je doći do mehaničkih svojstava pojedinih mikrokonstituenata koji tvore materijal.

U ovom je radu provedena višerazinska analiza vlačnog testa nodularnog lijeva oznake EN-GJS-400-18-LT [1] koji se sastoji od tri materijalne faze – grafitnih nodula, perlita i ferita, a cilj rada bio je određivanje mehaničkih svojstava dominantnog mikrokonstituenta, tj. ferita. Proračun je proveden za dva tipa nodularnog lijeva, točnije dvije različite serije lijevanja – Tundish i Inmould. Cjelokupni postupak sastojao se od dva koraka: (1) u kojem su određena linearno-elastična svojstva feritne faze – modul elastičnosti i Poisson-ov faktor; (2) u kojem je određena granica tečenja ferita. S ciljem dobivanja što točnijih rezultata korištene su stvarne snimke mikrostrukture materijala, dok se numerički proračun vršio pomoću metode konačnih elemenata i novorazvijene metode homogenizacije s reduciranim brojem stupnjeva slobode [2].

## 2 O nodularnom lijevu

Nodularni lijev pripada ljevovima na bazi željeza koja ostvaruju širok spektar svojstava kontroliranom mikrostrukturom sastavljenom od tri konstituenta – grafitnih nodula (u idealnom slučaju kuglica), perlita i ferita. Promjenom određenih parametara mikrostrukture, moguće je doći do optimalnih mehaničkih svojstava lijeva nužnih za siguran i pouzdan rad konstrukcija. Tako se npr. povećanjem udjela ferita u mikrostrukтури može postići visoka istezljivost (do 30 %), dok se povećanjem perlitne materijalne faze postiže visoka vrijednost vlačne čvrstoće (do 825 MPa) s posljedicom smanjenja žilavosti, tj. duktilnosti. S druge strane, oblik i veličina grafitnih nodula imaju značajan utjecaj na lomnu žilavost materijala i mogu povećati, tj. smanjiti otpornost materijala na zamor, što je detaljno istraženo u [1].

Lijev koji je predmet ovog rada ima, prema europskoj normi EN 1563, oznaku EN-GJS-400-18-LT, što znači da mu je minimalna vlačna čvrstoća 400 MPa, minimalna istezljivost 18 % te da se ispitivanje udarne radnje izvodi pri niskim temperaturama. S gledišta mikrorazine, dominantni konstituent je ferit, dok je udio grafitnih nodula i perlita približno jednak. Istraživanje provedeno u [1] pokazalo je utjecaj mikrostrukture na zamorno ponašanje nodularnog lijeva, pri čemu su različite mikrostrukture proizašle iz različitih postupaka (serija) lijevanja, tj. Tundish, Inmould, Flotret i nestandardni postupak. U ovom radu razmatrati će se Tundish i Inmould postupak lijevanja.

### 2.1 Mehaničke karakteristike nodularnog lijeva EN-GJS-400-18-LT

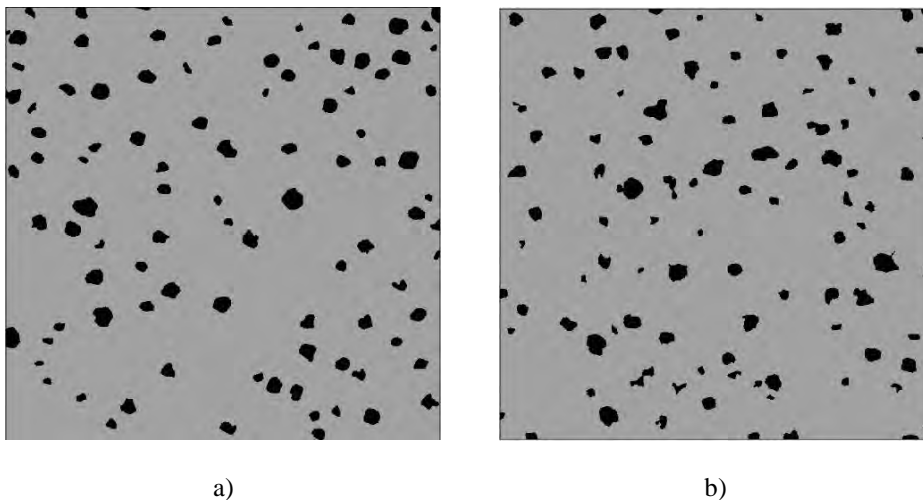
U Tablici 1 su prikazana mehanička svojstva i sastav mikrostrukture nodularnog lijeva za različite postupke lijevanja. Iz tablice nije teško zaključiti da se upotrebom različitih postupaka proizvodnje dobiva različit sastav mikrostrukture a samim time i drugačija mehanička svojstva. Tako se npr. nestandardnim postupkom postiže najviša vrijednost granice tečenja, dok se maksimalna vrijednost modula elastičnosti ostvaruje Tundish postupkom. Zbog najmanjeg udjela perlita, Flotret postupak lijevanja ostvaruje najmanju vrijednost modula elastičnosti ali i granice tečenja.

Tablica 1. Sastav mikrostrukture i mehanička svojstva nodularnog lijeva [1]

| Postupak lijevanja | Udio ferita, % | Udio perlita, % | Udio grafita, % | Faktor kružnosti grafitnih nodula, - | Modul elastičnosti, GPa | Granica tečenja, MPa |
|--------------------|----------------|-----------------|-----------------|--------------------------------------|-------------------------|----------------------|
| Tundish            | 85,69          | 7,64            | 6,67            | 0,71                                 | 215,9                   | 250,0                |
| Inmould            | 86,98          | 6,97            | 6,05            | 0,66                                 | 199,9                   | 255,8                |
| Flotret            | 86,94          | 4,99            | 8,07            | 0,57                                 | 180,0                   | 244,0                |
| nestandardni       | 82,18          | 9,09            | 8,73            | 0,70                                 | 163,4                   | 286,4                |

### 3 Višerazinska analiza

Kao što je već rečeno u uvodu, višerazinska je analiza provedena za dvije različite serije lijevanja, tj. Tundish i Inmould. Za obje serije lijevanja, reprezentativni volumenski elementi, preko kojih je definirana mikrorazina materijala, odabrani su direktno iz mikrostrukturnih snimaka [1]. Iako se mikrostruktura nodularnog lijeva razmatranog u ovom radu sastoji od tri mikrokonstituenta, ovdje će se zbog jednostavnosti i dominantne feritne faze zanemariti perlit, tj. RVE-ovi će se sastojati od dvije materijalne faze – grafitnih nodula i ferita. Ukupno su definirana dva RVE-a (dimenzija  $1 \times 1$  mm) – jedan za svaku seriju lijevanja, pri čemu je kod odabira bilo nužno zadovoljiti udio grafita definiran tablicom 1. RVE-ovi za Tundish, tj. Inmould seriju lijevanja prikazani su slikom 1, gdje siva boja predstavlja feritnu materijalnu fazu, dok su crnom bojom prikazane grafitne nodule. Za obradu i analizu mikrostrukturnih snimaka te definiranje RVE-ova, korišteni su programski paketi *ImageJ* [5] i *Matlab* [4].



Slika 1. Reprezentativni volumenski elementi: a) Tundish postupak lijevanja, b) Inmould postupak lijevanja

Iz slike 1 je vidljivo da grafitne nodule za Tundish seriju lijevanja posjeduju veću sličnost s kružnicama nego što je to slučaj kod Inmould serije proizvodnje. Ta se sličnost definira preko faktora kružnosti koji može poprimiti vrijednosti od 0 do 1, gdje 1 predstavlja savršenu kružnicu, a 0 beskonačno izdužen poligon. U tablici 1 je moguće vidjeti u kojoj mjeri se vrijednosti faktora kružnosti razlikuju za različite serije lijevanja.

Nakon definiranja RVE-ova, provedena je višerazinska analiza s ciljem određivanja vrijednosti modula elastičnosti, Poisson-ovog faktora i granice tečenja ferita. Analiza je provedena u dva koraka: (1) u kojem je putem metode konačnih elemenata određena vrijednost modula elastičnosti i Poisson-ovog faktora; (2) u kojem je putem metode

homogenizacije s reduciranim brojem stupnjeva slobode [2, 3] određena granica tečenja. Cjelokupna analiza provedena je uz pretpostavku ravninskog stanja deformacija.

### 3.1 Linearno-elastična analiza

Prvi korak višerazinske analize odnosi se na određivanje modula elastičnosti i Poisson-ovog faktora ferita. Ferit, kao samostalni materijal ne postoji, već predstavlja kristalnu fazu i u materijalima se uvijek pojavljuje uz prisutnost jednog ili više materijalnih konstituenata. S druge strane grafit, koji tvori nodule nodularnog lijeva, postoji kao zasebna materijalna faza te se može tretirati kao linearno-elastični materijal. Za potrebe ovog rada vrijednosti modula elastičnosti i Poisson-ovog faktora grafita su prema [6]  $E = 25,5 \text{ GPa}$  i  $\nu = 0,313$ , dok je Poisson-ov faktor nodularnog lijeva (za oba postupka lijevanja) prema [7] jednak 0,28.

Primjenom metode konačnih elemenata i homogenizacije, tj. uprosječavanja tenzora naprezanja i deformacije na mikrorazini te korištenjem konstitutivnog zakona

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl}^e \bar{\epsilon}_{kl}^e, \quad (1)$$

moguće je doći do materijalnih parametara materijala na makrorazini. U jednadžbi (2)  $\bar{\sigma}_{ij}$ , tj.  $\bar{\epsilon}_{kl}^e$  predstavljaju homogeniziranu vrijednost naprezanja, odnosno elastične deformacije, dok je  $\bar{C}_{ijkl}^e$  homogenizirana elastična matrica krutosti. Međutim, može se primijeniti i inverzni pristup, tj. provođenjem većeg broja numeričkih proračuna pri različitim vrijednostima modula elastičnosti i Poisson-ovog faktora određenog mikrokonstituenta, te aproksimacije funkcija makro-svojtava materijala, dolazi se do mehaničkih svojstava razmatranog mikrokonstituenta. Stoga se određivanje materijalnih parametara (modula elastičnosti i Poisson-ovog faktora) ferita svodi na rješavanje sustava dvije jednadžbe s dvije nepoznanice,

$$\bar{E} = a_0 + a_1 E + a_2 \nu, \quad \bar{\nu} = a_3 + a_4 E + a_5 \nu, \quad (2)$$

gdje je  $\bar{E}$ , tj.  $\bar{\nu}$  modul elastičnosti, odnosno Poisson-ov faktor nodularnog lijeva,  $E$ , tj.  $\nu$  modul elastičnosti, odnosno Poisson-ov faktor ferita koje je potrebno odrediti. Koeficijenti  $a_0$  do  $a_5$  koeficijenti su 2D polinoma prvog stupnja koji su određeni aproksimacijom primjenom metode najmanjih kvadrata. Nakon provođenja odgovarajućeg broja numeričkih proračuna na mikrorazini koji su obuhvaćali vlak u horizontalnom, tj. vertikalnom smjeru te homogenizacije tenzora naprezanja i deformacije i rješavanja sustava jednadžbi (2) dobivene su vrijednosti modula elastičnosti i Poisson-ovog faktora ferita, koje su prikazane u tablici 2.

Tablica 2. Izračunate vrijednosti modula elastičnosti i Poisson-ovog faktora ferita

| Postupak lijevanja | Modul elastičnosti , GPa | Poisson-ov faktor, - |
|--------------------|--------------------------|----------------------|
| Tundish            | 249,2                    | 0,280                |
| Inmould            | 226,9                    | 0,281                |

Iz tablice 2 je vidljivo da je razlika između Poisson-ovog faktora za dvije serije lijevanja minimalna, a sama vrijednost odgovara vrijednosti lijeva. S druge strane, moduli elastičnosti u relativnoj su razlici od približno 10 %, što proizlazi iz razlike modula elastičnosti na makrorazini – vidjeti tablicu 1.

### 3.3 Elasto-plastična analiza

Cilj drugog koraka analize bilo je određivanje granice tečenja ferita, tj. one vrijednosti koja će nakon višerazinskog proračuna osigurati 0,2 % ekvivalentne plastične deformacije  $\bar{\epsilon}_{eq}^P$  na makrorazini pri vrijednosti von Mises-ovog naprežanja  $\bar{\sigma}_{eq}$  od 250, tj. 255,8 MPa – vidjeti tablicu 1. Budući da je u ovom koraku prisutan nelinearni proračun, upotreba metode konačnih elemenata dovela bi do dugotrajnog vremena računanja i potrebe za velikim računalnim resursima. Stoga će se za određivanje granice tečenja iskoristiti novorazvijena metoda homogenizacije s reduciranim brojem stupnjeva slobode, čiji je izvod i numerička učinkovitost pokazana u [2, 3].

Postupak određivanja granice tečenja svodi se na provođenje višerazinskog konkurentnog pristupa pri različitim vrijednostima granice tečenja ferita te praćenja vrijednosti homogenizirane ekvivalentne plastične deformacije pri homogeniziranoj vrijednosti von Mises-ovog naprežanja od 250, tj. 255,8 MPa. Vrijednosti granica tečenja ferita za obje serije lijevanja prikazane su tablicom 3.

Tablica 3. Izračunate vrijednosti granice tečenja ferita

| Postupak lijevanja | Granica tečenja, MPa |
|--------------------|----------------------|
| Tundish            | 251,1                |
| Inmould            | 254,6                |

Iz tablice 3 je vidljivo da nema značajne razlike između vrijednosti granica tečenja ferita i samog nodularnog lijeva, što proizlazi iz činjenice da je udio ferita u RVE-ovima, zbog zanemarivanja perlitne faze, veći od 90 %. Također je korisno istaknuti da je relativna razlika između granica tečenja ferita za Inmould, tj. Tundish seriju lijevanja manja od 2 %.

## 4 Zaključak

U radu je provedena višerazinska analiza vlačnog testa nodularnog lijeva oznake EN-GJS-400-18-TL dobivenog s Tundish, tj. Inmould postupkom lijevanja. Cilj analize bilo je određivanje mehaničkih svojstava dominantnog mikrokonstituenta – ferita. Proračun je proveden u dva koraka: (1) u kojem su primjenom metode konačnih elementa određene vrijednosti modula elastičnosti i Poisson-ovog faktora; (2) u kojem je pomoću metode homogenizacije s reduciranim brojem stupnjeva slobode određena vrijednost granice tečenja. Za potrebe numeričkog proračuna i što točnijih rezultata korištene su stvarne mikrostrukturne snimke nodularnog lijeva.

### Literatura

- [1] Predrag, Č.; Eksperimentalno i numeričko modeliranje zamornog ponašanja nodularnog lijeva; Sveučilište u Zagrebu; 2012; doktorska disertacija; Hrvatska.
- [2] Jurčević, A., Lesičar, T., Tonković, Z. i Sorić, J.; Homogenizacija s reduciranim brojem stupnjeva slobode; Zbornik radova desetog susreta Hrvatskog društva za mehaniku; 2020; 95-100.
- [3] Liu, Z., Bessa, M. A. i Liu, W. K.; Self-consistent clustering analysis: An efficient multi-scale scheme for inelastic heterogeneous materials; *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*; 2016; 306; 319-341.
- [4] <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.
- [5] <https://imagej.nih.gov/ij/>.
- [6] Cost, J. R., Janowski, K. R. i Rosst, R. C.; Elastic Properties of Isotropic Graphite; *Philosophical Magazine*; 1968; 17; 851-854.
- [7] <https://www.azom.com/properties.aspx?ArticleID=797>.



## **Analiza naprezanja u elementima cilindričnog zgloba: različite opcije rubnih uvjeta u MKE**

Kačmarčik, J.<sup>1</sup>, Konjatić, P.<sup>2</sup>, Turk, D.<sup>3</sup> i Radojičić, S.<sup>4</sup>

### **Sažetak**

Analiza naprezanja u elementima cilindričnog zgloba je urađena uz primjenu različitih rubnih uvjeta u dva različita komercijalna softvera s primjenom metode konačnih elemenata. Razmatrana su tri numerička modela: cijeli sklop uz numerički modeliran kontakt između elemenata, sklop gdje je svornjak zamijenjen numerički definiranom vezom i samo jedan element sklopa gdje je utjecaj drugih elemenata zamijenjen numerički definiranim kontaktnim opterećenjem. Analizirani su rezultati za normalno naprezanje i njihovi maksimumi uslijed koncentracije naprezanja oko otvora, te kontaktna naprezanja. Dobiveni rezultati su uspoređeni međusobno, te s rezultatima analitičkog proračunom razmatranih naprezanja prema dostupnoj literaturi.

**Ključne riječi:** MKE, cilindrični zglob, koncentracija naprezanja, kontaktno naprezanje, rubni uvjeti

---

<sup>1</sup> **Doc. dr. sc. Josip Kačmarčik, dipl. ing. maš.,** Univerzitet u Zenici, Mašinski fakultet, Fakultetska 1, 72000 Zenica, e-mail: josip.kacmarcik@unze.ba

<sup>2</sup> **Izv. prof. dr. sc. Pejo Konjatić, dipl. ing. stroj.,** Sveučilište u Slavonskom Brodu, Strojarski fakultet, Trg. I. B. Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: pkonjatic@unisb.hr

<sup>3</sup> **Asist. Dorian Turk, mag. ing. mech.,** Sveučilište u Slavonskom Brodu, Strojarski fakultet, Trg. I. B. Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: dturk@unisb.hr

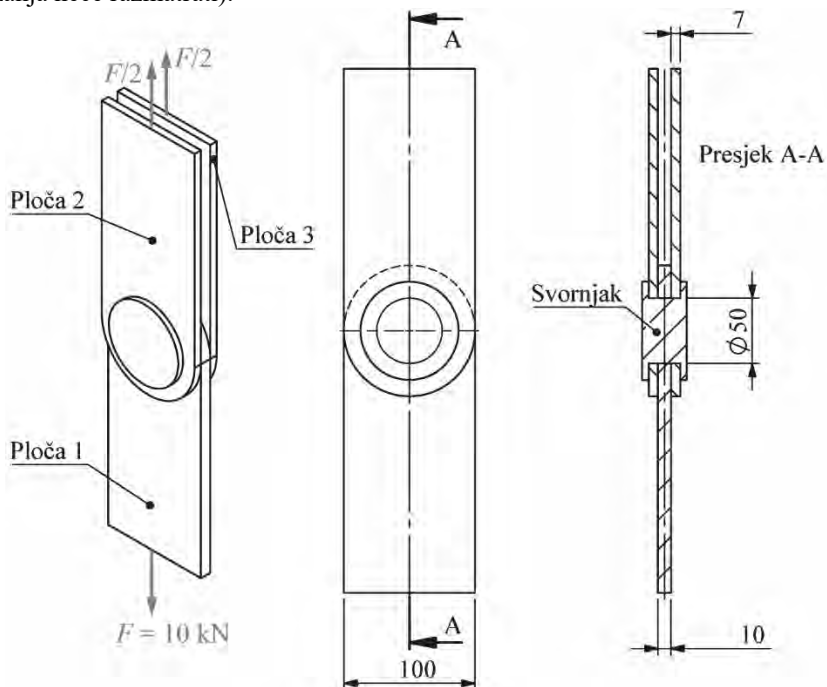
<sup>4</sup> **Asist. Sara Radojičić, mag. ing. mech.,** Sveučilište u Slavonskom Brodu, Strojarski fakultet, Trg. I. B. Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: sradojicic@unisb.hr

## 1 Uvod

Razvoj komercijalnih softvera zasnovanih na metodi konačnih elemenata (MKE) doveo je do njene široke i gotovo neizostavne primjene u konstruiranju u 21. stoljeću. Uporabom MKE softvera inženjer relativno jednostavno dolazi do rezultata, ali ti rezultati mogu sadržavati velike greške ukoliko se ovaj alat ne koristi ispravno. Definiranja modela i njegovih rubnih uvjeta je dio koji najviše utiče na točnost konačnog rezultata numeričke simulacije primjenom MKE. U ovom radu će se na jednostavnom primjeru sklopa cilindričnog zgloba, koji se vrlo često susreće u raznim konstrukcijama, pokazati kako različiti pristupi pri definiranju modela i njegovih graničnih uvjeta, svi na izgled inženjerski korektni, mogu dovesti do značajnih razlika i grešaka u konačnim rezultatima.

## 2 Opis analiziranog problema

Sklop elemenata vezanih cilindričnim zglibom, tj. veza tri ploče (1, 2 i 3) pomoću svornjaka se može vidjeti na slici 1. Elementi su opterećeni proizvoljno usvojenom vlačnom silom od 10 kN. U radu će se analizirati samo naprezanja koji se javljaju u ploči 1, kako je ona najviše napregnuta od svih ploča, te predstavlja kritični element u ovom sklopu uz svornjak (čija se naprezanja neće razmatrati).



Slika 1. Sklop 3 ploče vezane cilindričnim zglibom (svornjakom) opterećen vlačnom silom, dimenzije u mm

Analitički i numerički pomoću MKE će se odrediti analiza naprezanja u ploči 1. Analizirati će se kontaktna naprezanja između svornjaka i ploče 1, te normalno naprezanje u ploči uslijed vlačnog opterećenja. Kod numeričkog proračuna će se primijeniti različite postavke rubnih uvjeta, te će se ta analiza sprovesti i primjenom dva različita komercijalna MKE softvera.

### 3 Analitički proračun naprezanja u ploči 1

Normalno naprezanje na dovoljnom rastojanju od otvora u ploči se može smatrati ravnomjerno raspoređenim po poprečnom presjeku i izračunati prema općepoznatom izrazu:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{10000}{100 \cdot 10} = 10 \text{ MPa} \quad (1)$$

Oko otvora se javlja koncentracija naprezanja i maksimalno naprezanje može izračunati na osnovu faktora koncentracije naprezanja koji ovisi o dimenzijama ploče i zračnosti između ploče i svornjaka. Za točni dosjed (nultu zračnost) i dimenzije ploče prema slici je na osnovu grafikona i izraza iz literature [1] određen faktor koncentracije naprezanja  $K_{te} = 2,775$  (s  $e$  se označava vrijednost za određenu zračnost). Na osnovu srednje vrijednosti naprezanja na poprečnom presjeku kod otvora:

$$\sigma_o = \frac{F}{A_o} = \frac{10000}{(100 - 50) \cdot 10} = 20 \text{ MPa} \quad (2)$$

može se pomoću odrediti maksimalno naprezanje uslijed koncentracije naprezanja:

$$\sigma_{max} = K_{te} \cdot \sigma_o = 2,775 \cdot 20 = 55,5 \text{ MPa} \quad (3)$$

Srednja vrijednost kontaktnog naprezanja (pritiska) između ploče i svornjaka (nosivo naprezanje) je:

$$p = \frac{F}{A_n} = \frac{10000}{50 \cdot 10} = 20 \text{ MPa} \quad (4)$$

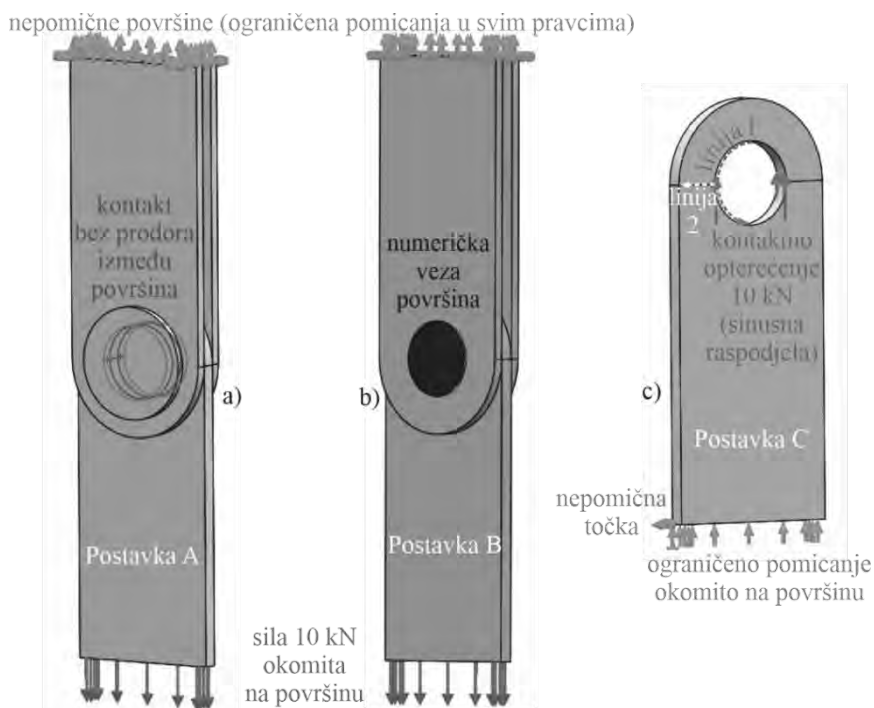
Uz točan dosjed i pretpostavku sinusne raspodjele maksimalna vrijednost pritiska prema [2] je:

$$p_{max} = \frac{4}{\pi} \cdot p = \frac{4}{\pi} \cdot 20 = 25,465 \text{ MPa} \quad (5)$$

### 4 Numerička analiza pomoću MKE

U numeričkom proračunu su urađene tri različite postavke rubnih uvjeta u dva MKE softvera, Ansys (Ansys Mechanical modul) i SolidWorks (Solidworks Simulation modul). U oba

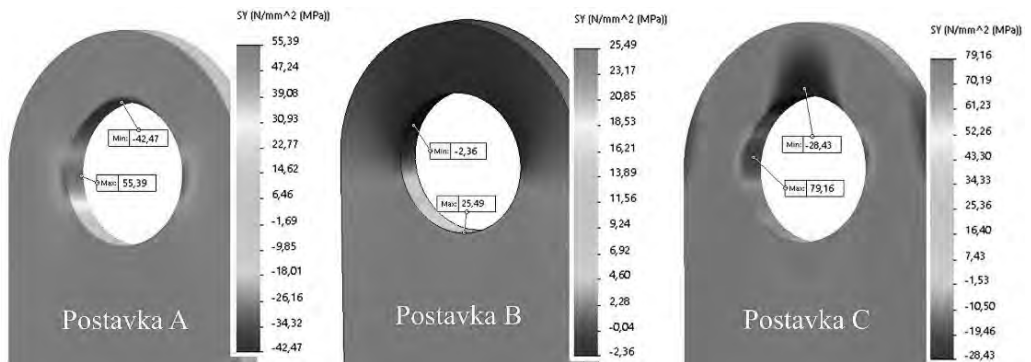
softvera se trudilo da rubni uvjeti za iste postavke budu što je moguće više istovjetni. Postavka A je najkompletnija i mehanički najrealnija, gdje su u MKE modelirani svi elementi, te numerički modeliran kontakt bez prodora između površina (engl. *no penetration contact*) uz zanemarivanje trenja, vidjeti sliku 2a. U postavci B je urađeno pojednostavljenje modela izbacivanjem svornjaka čiji utjecaj je zamijenjen s numeričkom vezom između elemenata, vidjeti sliku 2b. U softveru Solidworks je to urađeno pomoću opcije za vezu između elemenata pomoću svornjaka (engl. *pin connector*), i slično u softveru Ansys, pomoću opcije za spoj elemenata, s dodatnim odabirom obrtni za tip spoja (engl. *revolute joint*). U postavci C je modelirana samo ploča, gdje je kontakt između svornjaka i otvora na ploči numerički modeliran s opcijom za kontaktno (nosivo) opterećenje (engl. *bearing load*), vidjeti sliku 2c. Opcija za kontaktno opterećenje postoji u oba primijenjena softvera i u njoj se pretpostavlja sinusna raspodjela pritiska po opterećenoj površini.



Slika 2. Rubni uvjeti u različitim postavkama u MKE: a) sklop s kontaktom - postavka A, b) sklop s numeričkom vezom svornjakom - postavka B i c) izdvojena ploča s kontaktnim opterećenjem - postavka C

U oba softvera su korišteni elementi 2. reda s međučvorovima, s sitnijom mrežom na kontaktnim površinama, tj. na površinama otvora na pločama i odgovarajućom površinom na svornjaku, veličine elemenata 1mm. Osnovna veličina mreže na preostalim dijelovima modela (sa postepenim prijelazom od površina s finom mrežom) je bila oko 4 mm. Materijal

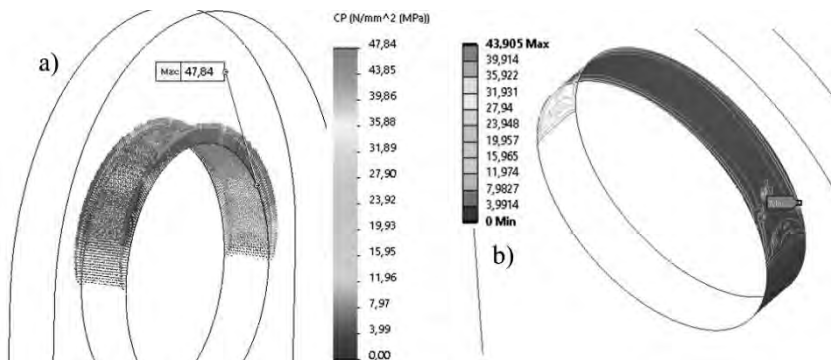
svih elemenata sklopa je konstruktivni čelik, s modulom elastičnosti  $E = 210 \text{ GPa}$  i Poissonovim omjerom  $\nu = 0,28$ . U oba softvera su razmatrani rezultati za normalna naprezanja u pravcu djelovanja sile i kontaktna naprezanja za postavku A (jedino za nju i moguće). Grafički prikazi raspodjele normalnih naprezanja na karakterističnom području modela, oko otvora na ploči 1, dobivena u oba softvera primjenom tri različite postavke je na slikama 3 i 4. Na slici 5 se može vidjeti raspodjela kontaktnih naprezanja iz oba softvera. Radi zornije usporedbe rezultata dodatno je očitana raspodjela normalnih naprezanja duž odabranih karakterističnih linija 1 i 2 (vidjeti sliku 2c), što je prikazano na slikama 6 i 7. Smjer očitavanja rezultata duž linije je prikazan na slici 2c.



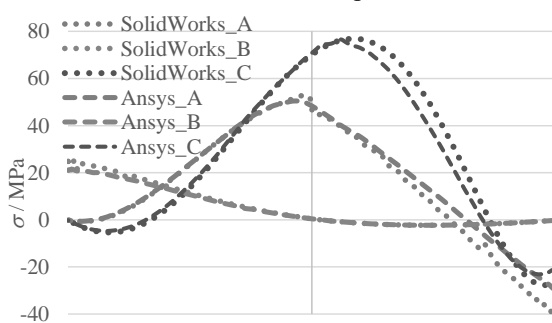
Slika 3. Rezultati za normalna naprezanja dobiveni pomoću SolidWorksa uz različite postavke rubnih uvjeta u MKE.



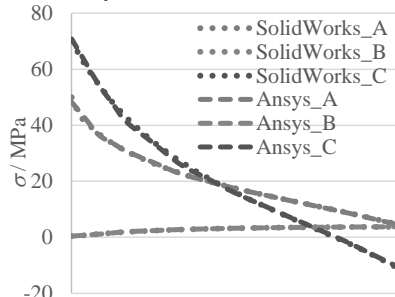
Slika 4. Rezultati za normalna naprezanja dobiveni pomoću Ansysa uz različite postavke rubnih uvjeta u MKE.



Slika 5. Rezultati za kontaktne pritisake između ploče 1 i svornjaka za postavku A dobiveni pomoću Solidworks-a a) i Ansys-a b)



Slika 6. Normalnih naprezanja duž linije 1 iz dva softvera i s tri postavke A, B i C



Slika 7. Normalna naprezanja duž linije 2 iz dva softvera i s tri postavke A, B i C

## 5 Zaključna analiza rezultata

U svim postavkama i u oba softvera, na dovoljnom rastojanju od otvora na ploči 1 su očitana naprezanja od 10 MPa koja odgovaraju i teorijskoj vrijednosti prema izrazu (1). Međutim, uočljiva su znatna odstupanja rezultata ako se promatra raspodjela naprezanja oko otvora, tj. ako se razmatra koncentracija naprezanja. Očekivano, najbolja suglasnost s vrijednosti 55,5 MPa prema izrazu (3), koji je zasnovan na eksperimentalnim istraživanjima, ostvarena je s najrealističnijom postavkom A (SolidWorks 55,39 MPa i Ansys 54,79 MPa). Raspodjela naprezanja oko otvora prema postavci B je nerealna uslijed krute numeričke veze između čitavih površina otvora dok se u stvarnom kontaktu ostvaruje samo veza dijela površina. Na osnovu ovog se zaključuje kako primjena ovakvog tipa numeričke veze daje netočne rezultate u blizini vezanih površina. Raspodjele naprezanja dobivene na osnovu postavke C prema obliku odgovaraju rezultatima prema postavci A, međutim postoje znatna odstupanja u maksimalnim i minimalnim vrijednostima. Razlog za ova odstupanja se može vidjeti ako se pogleda slika 5 i uoči trodimenzionalni karakter raspodjele kontaktnih naprezanja. Nasuprot

tome, primijenjeno numeričko kontaktno opterećenje predviđa dvodimenzionalni karakter raspodjele naprezanja, kao i teorijski izraz (5). Ovo je razlog za odstupanje rezultata između postavke C i A, kao i razlike između teorijske maksimalne vrijednosti pritiska 25,465 MPa prema izrazu (5) i numerički određenih (47,84 MPa SolidWorks i 43,905 Ansys). Svi rezultati numeričkih analiza s istim postavkama iz dva korištena softvera su suglasni i s malim odstupanjima, potvrđujući kvalitetu i praktičnu primjenjivost softvera. Ali, kako i ovaj rad prikazuje, za uspješnu primjenu MKE softvera u konstruiranju i točne rezultate numeričkih proračuna, neophodna su temeljna teorijska znanja korisnika o samom razmatranom problemu, kao i o principima MKE i različitim opcijama u korištenom softveru.

### **Literatura**

- [1] Pilkey W. D i Pilkey D. F.; Peterson's Stress Concentration Factors, Third Edit; John Wiley & Sons, Inc.; 2008
- [2] Norton, R. L.; Machine Design, An Integrated Approach, 4ed; Prentice Hall; 2011



# 1D štapni konačni elementi generirani dubokim učenjem

Košmerl, V.<sup>1</sup>, Čanađija, M.<sup>2</sup>

## Sažetak

Mehaničko ponašanje naprednih materijala neadekvatno je opisano konvencionalnim modelima. Pristupi strojnom učenju su potencijalni alat za karakterizaciju svojstava kompleksnih materijala. Matrica krutosti sadrži informacije o mehaničkim svojstvima materijala, a čija je ključna komponenta matrica deformacija-pomak. U ovom istraživanju korištene su metode dubokog učenja da bi se generirala ista u Gaussovima točkama. Za dobivanje matrice deformacija-pomak i jednadžbi, korištena je izoparameterska formulacija temeljena na prirodnom koordinatnom sustavu. Skup podataka obuhvaćao je čvorne koordinate, čvorne pomake i deformacije konačnog elementa. Za dobivanje najbolje izvedivog modela predviđanja korišteno je nekoliko setova podataka.

**Ključne riječi:** strojno učenje, duboke neuronske mreže, konačni elementi, izoparameterska formulacija

---

<sup>1</sup> **Valentina Košmerl, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: vkosmerl@riteh.hr

<sup>2</sup> **Prof. dr. sc. Marko Čanađija, dipl. ing.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: marko.canadija@riteh.hr

## 1 Uvod

Novi i napredni materijali imperativ su brojnim tehnološkim inovacijama koje pružaju jasne koristi koje su društvu zaista prijeko potrebne. Jedinstveno mehaničko ponašanje tih materijala neprikladno je opisano tradicionalnim modelima i stoga je slabo istraženo.

Metoda konačnih elemenata jedna je od najčešće korištenih numeričkih metoda za rješavanje problema matematičke fizike. Kao posljedica tehnološkog napretka, postoji potreba za unapređenjem iste. Umjetne neuronske mreže nastoje oponašati ljudski mozak kombinacijom ulaznih podataka, težinskih veza i pristranosti. Duboke neuronske mreže sastoje se od više slojeva međusobno povezanih čvorova, od kojih se svaki nadovezuje na prethodni sloj zbog poboljšanja i optimizacije predviđanja. Duboko učenje koristilo se kao surogatni model za analizu mehaničkih naprezanja [1] te za generiranje matrica krutosti konačnih elemenata [2]. Pretpostavlja se da bi razvijeni konačni element temeljen na strojnom učenju mogao bolje opisati ponašanje kompleksnih materijala.

## 2 Generiranje podataka

Procedura generiranja podataka bazira se na izoparametarskoj formulaciji 1D konačnih elemenata. Jednodimenzionalni štapni element je izoparametarski u slučaju da se pomaci interpoliraju na isti način kao i koordinate geometrije, pomoću jednakih funkcija oblika. U Gausovim točkama integracije, računa se matrica deformacija-pomak, pa tako i matrica krutosti. Generiraju se štapni konačni elementi II. reda.

Geometrija i pomaci interpolirani su prema:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \mathbf{X}_i, \quad \mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \\ U &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \mathbf{U}_i, \quad \mathbf{U} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-\xi + \xi^2) & 1 - \xi^2 & \frac{1}{2}(\xi + \xi^2) \end{bmatrix}$$

gdje je  $\mathbf{X}$  vektor čvornih koordinata u Kartezijevom koordinatnom sustavu,  $\mathbf{U}$  vektor čvornih pomaka, a  $\mathbf{N}$  vektor interpolacijskih funkcija u prirodnom koordinatnom sustavu. Za konstrukciju matrice deformacija-pomak potrebna je Jacobijeva matrica:

$$J = \frac{d}{d\xi} \mathbf{N} \mathbf{X} \quad (2)$$

te se konačno dobiva matrica deformacija-pomak prema:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{J} \frac{d}{d\xi} \mathbf{N} \quad (3)$$

Geometrija svakog štapnog elementa određena je pozicijom čvorova. Srednji čvor postavljen je na sredinu konačnog elementa. Također, geometrija je normalizirana tako da je udaljenost prvog i trećeg čvora normalno distribuirana na intervalu od 0 do 1.

Rubni čvorni pomaci također su generirani nasumično, uniformnom distribucijom na intervalu od -0.25 do 0.25. Zatim, svi unutarnji čvorovi elementa dobiveni su pomoću statičke kondenzacije, prema:

$$\mathbf{u}_u^{(n)} = -(\mathbf{K}_{uu})^{-1} \mathbf{K}_{uv} \mathbf{u}_v^{(n)} \quad (4)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  matrica krutosti, a  $\mathbf{u}_v^{(n)}$  vektor rubnih čvornih pomaka elementa  $n$ . Pomoću pomaka dobivenih iz (4) dobiveno je polje deformacija, iz kojeg se vrijednosti deformacija izdvajaju upravo na pozicijama Gaussovih točaka elementa  $n$ .

### 3 Konfiguracija neuronske mreže

Podaci koji ulaze u trening su čvorne koordinate, čvorni pomaci i deformacije. Čvorne koordinate su ulaz u neuronsku mrežu, a čvorni pomaci i deformacije koriste se u prilagođenoj funkciji cilja prema:

$$C(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{3M} \sum_{n=1}^M \sum_{i=1}^3 i_w \left| \frac{\sum_{l=1}^3 ({}_{out}^i b_l^{(n)}(\boldsymbol{\theta}) u_l^{(n)}) - i_{\mathcal{E}}^{(n)}}{i_{\mathcal{E}}^{(n)}} \right| \quad (5)$$

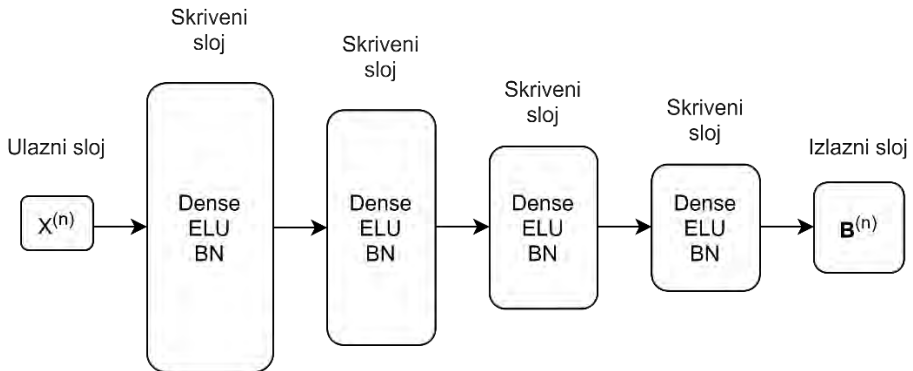
gdje je  $M$  broj podataka za trening,  ${}_{out}^i b_l^{(n)}(\boldsymbol{\theta})$  je komponenta  ${}_{out}^i \mathbf{B}^{(n)}(\boldsymbol{\theta})$ , a  $i_w$  predstavlja težinski faktor odgovarajućih Gaussovih točaka  $i$ .

Izlaz neuronske mreže je matrica deformacija-pomak koja zadovoljava sljedeći uvjet:

$${}_{out}^i \mathbf{B}^{(n)}(\boldsymbol{\theta}) \Delta \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

prema kojem je deformacija jednaka nuli u slučaju gibanja kao krutog tijela.

Struktura modela prikazana je na slici 1. Potpuno povezana neuronska mreža sastoji se od ulaznog, izlaznog i 4 skrivena sloja. Na svaki sloj uvodi se normalizacija serije podataka. ELU aktivacijska funkcija primijenjena je na svakom sloju, osim na izlaznom. Korišten je Adam optimizacijski algoritam, te je korištena normalizirana inicijalizacija. Mreža je trenirana na sveukupno 5000 podataka podijeljenih na dva podskupa: 80% za treniranje, 20% za testiranje. Prosječna greška na podskupu za treniranje iznosi 0.016, a za testiranje 0.018. Mreža je implementirana pomoću Kerasa, aplikacijskog programskog sučelja otvorenog koda namijenjenog manipulaciji neuronskim mrežama, napisanog u programskom jeziku Python.



Slika 1. Arhitektura modela neuronske mreže

### 3 Zaključak

Predstavljena je metodologija generiranja matrica deformacija-pomak 1D konačnih elemenata pomoću dubokog učenja. Opisan je koncept generiranja podataka i referentnog modela potrebnog za treniranje.

#### Zahvale

Ovaj je rad financirala Hrvatska zaklada za znanost projektom IP-2019-04-4703.

#### Literatura

- [1] Liang, L., Liu, M., Martin, C., & Sun, W. A deep learning approach to estimate stress distribution: a fast and accurate surrogate of finite-element analysis. *Journal of The Royal Society Interface*, 2018., 15(138), 20170844.
- [2] Jung, J., Yoon, K., & Lee, P. S. Deep learned finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020., 372, 113401.

## Derivacijske matrice u mehanici – analitički pristup

Kožar, I.<sup>1</sup>, Plovanić, M.<sup>2</sup>, Sulovsky, T.<sup>3</sup>

### Sažetak

Derivacijska matrica omogućuje deriviranje i rješavanje (linearnih) diferencijalnih jednadžbi putem postupaka linearne algebre te su dobivene upotrebom numeričkih metoda u matričnom zapisu, poput sheme konačnih razlika.

U ovom radu razvijena je nova formulacija upotrebom Lagrangeovih polinoma gdje se posebna pažnja na graničnim točkama kako bi se održala ujednačena preciznost. Glavna prednost pristupa je jednostavna formulacija, jasan inženjerski uvid u proces i gotovo proizvoljna preciznost kroz odabir interpolacijskog intervala. Rezultat ovog postupka je derivacijska matrica dimenzija  $[n \times n]$  gdje je 'n' broj točaka. Derivacijska matrica je singularna (reda 'n-1') dok se ne uvedu početni uvjeti, međutim to nas ne sprječava da uspješno deriviramo nepoznatu funkciju koju smo dobili iz rezultata mjerenja.

Derivacijska matrica se jednostavno primjenjuje na široki rapon inženjerskih problema. Ova metodologija može se primijeniti na dinamičke sisteme s više stupnjeva slobode i prilagoditi kad se, umjesto pomaka, mjere brzina ili ubrzanje.

**Ključne riječi:** derivacijska matrica, rubni uvjeti, HP Prime kalkulator

---

<sup>1</sup> **Prof. Ivica Kožar, prof. u trajnom zvanju**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za modeliranje, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: ivica.kozar@gradri.uniri.hr

<sup>2</sup> **mag.ing.aedif. Marina Plovanić, znanstveni novak**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za modeliranje, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: marina.plovanic@gradri.uniri.hr

<sup>3</sup> **mag.ing.aedif. Tea Sulovsky, znanstveni novak**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za modeliranje, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: tea.sulovsky@gradri.uniri

## 1 Formiranje derivacijske matrice

Shema konačnih razlika je osnovni element postupka numeričke derivacije. Jedan način formiranja sheme je putem interpolacijskih polinoma temeljenih na Lagrangeovim polinomima. Derivacija  $w_j$  interpolacijskog polinoma  $p_j$  u točki  $x_j$  dat će nam shemu za interpolaciju derivacije u točki  $x_j$ . Ovaj način dobivanja interpolacijske sheme nije uobičajen ali ima nekoliko prednosti. Prvo, jasno se vidi da shema nije točna nego samo interpolira vrijednost derivacije; drugo, lako se dobivaju sheme za rubne točke; treće, lako se dobivaju sheme višeg reda točnosti.

Shema deriviranja u rubnim točkama treba zadovoljiti rubne uvjete. Razlikujemo Dirichletove rubne uvjete (znamo vrijednost funkcije u rubnoj točki), Neumannove rubne uvjete (znamo vrijednost derivacije u rubnoj točki) i cirkularne rubne uvjete (funkcija je periodička, lijeva i desna rubna točka imaju istu vrijednost). U određenim slučajevima moguće su kombinacije ovih osnovnih rubnih uvjeta (preko neke funkcije koja ih povezuje), taj slučaj nećemo razmatrati.

Shemom konačnih razlika 2. reda točnosti u centralnoj točki dobivamo

$$w_j(x_j) = \frac{-u_{j-1} + u_{j+1}}{2h} \quad (1)$$

Shemu za derivaciju u rubnim točkama dobijemo tako da izračun Lagrangeovih polinoma načinimo u rubnoj, umjesto u središnjoj, točki te izrazi glase

$$w_j(x_1) = \frac{-u_1 + u_2}{h} \quad w_j(x_n) = \frac{-u_{n-1} + u_n}{h} \quad (2)$$

Vidimo da rubne točke u shemi za deriviranje uključuju samo dvije točke, sebe i prvu susjednu točku. Posljedica je da je točnost derivacije na rubu samo 1. reda a ne 2. reda kao u ostatku domene. Točnost možemo popraviti tako da korigiramo prvotni izraz za parabolu i uključimo Lagrangeove polinome za dvije susjedne točke s iste strane. Naime, prvotni izraz za interpolacijsku parabolu točaka funkcije uključivao je samu točku i po jednu točku sa svake strane. Novi izraz uključivat će samu točku i dvije točke s iste strane

$$w_j(x_1) = \frac{-3u_1 + 4u_2 - u_3}{2h} \quad (3)$$

$$w_j(x_n) = \frac{-3u_n + 4u_{n-1} - u_{n-2}}{2h}$$

Vidimo da sada u izračunu rubne derivacije sudjeluju 3 točke i točnost je 2. reda.

Prema dobivenim shemama možemo formirati derivacijsku matricu, kojom možemo derivirati istovremeno sve točke neke funkcije i tako dobiti njenu numeričku derivaciju; dovoljno je pomnožiti vektor koji sadrži vrijednosti funkcije, s derivacijskom matricom. Za derivacijsku matricu 2. reda točnosti u svim točkama imamo sheme za lijevi i desni rub i za sve druge točke te derivacijska matrica izgleda

$$\frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

i ona je singularna, tj. njena determinanta je nula.

To što smo načinili derivacijsku matricu umjesto da koristimo shemu deriviranja omogućuje nam da cijeli vektor točaka vrijednosti neke funkcije pretvorimo u vektor točaka derivacija te funkcije, ne moramo računati točku po točku kad koristimo shemu za deriviranje. Dakle,

$$w = M \cdot p \quad (5)$$

gdje je  $w$  vektor točaka s vrijednostima derivacije,  $M$  je derivacijska matrica (operator koji transformira vektor točaka u vektor derivacija),  $p$  je vektor točaka s vrijednostima funkcije.

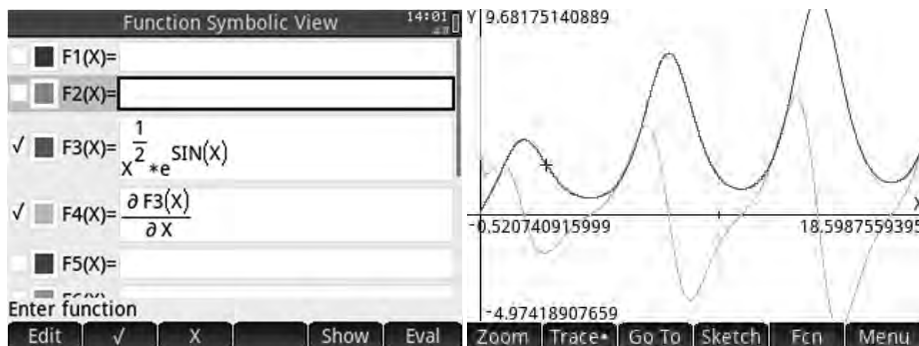
## 2 Primjer upotrebe derivacijske matrice

Numerička rješenja svih primjera načinjena su na HP Prime kalkulatoru kao ilustracija upotrebljivosti sofisticiranog kalkulatora u nastavi na tehničkim fakultetima [1].

Za primjer ćemo uzeti neku funkciju i izračunati njenu derivaciju analitički i numerički, preko derivacijske matrice. Neka je funkcija za primjer

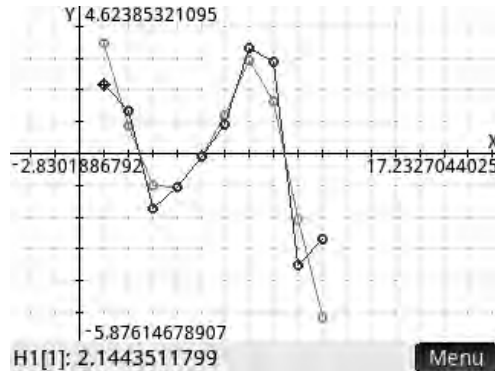
$$\sqrt{x} * \exp(\sin(x)) \quad (6)$$

a zanimaju nas vrijednosti derivacije u intervalu  $x \in [0.5, 9.5]$ . Definiramo funkciju u njenu derivaciju.

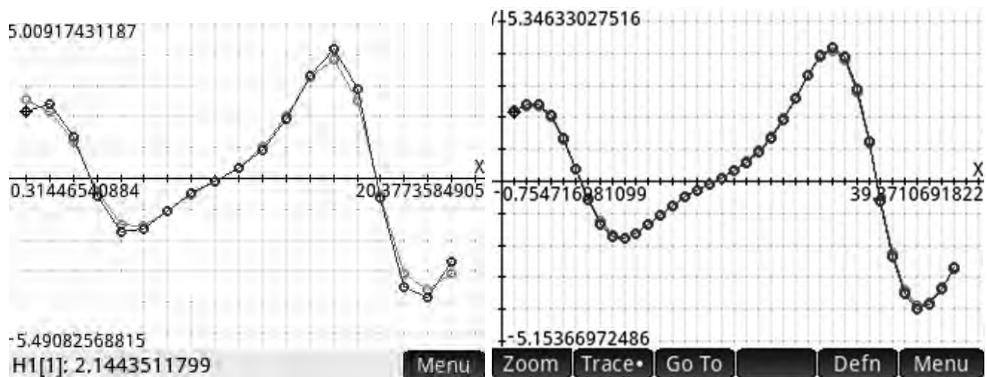


Slika 1. Prikaz zadavanja funkcije i grafički prikaz funkcije i analitičke derivacije te funkcije

Interval ćemo podijeliti u 10, 19 i 37 točaka da vidimo utjecaj podjele na točnost interpolacije. Označit ćemo numeričku derivaciju crvenom bojom te analitičku derivaciju plavom bojom.



Slika 2. Grafički prikaz numeričke i analitičke derivacije podjelom na 10 točaka



Slika 3. Grafički prikaz numeričke derivacije podjelom na 19 (lijevo) i 37 (desno) točaka

Vidimo da su najveće greške na rubovima, zato je važno imati dobru razinu interpolacije na rubovima. Možemo reći rezultati jako dobri za podjelu na 37 točaka; zaključujemo da je maksimalna podjela na 50 točaka sasvim zadovoljavajuća. S druge strane, trajanje izračuna je zanemarivo pa je sasvim moguće imati podjelu na 100 i više točaka.

### 3 Rješavanje diferencijalne jednadžbe putem diferencijalske matrice

Diferencijalna jednadžba je jednadžba kod koje znademo derivaciju i želimo naći polaznu funkciju. Problem ćemo ilustrirati na prethodnom primjeru koji ćemo formulirati kao diferencijalnu jednadžbu, gdje nam je nepoznanica polazna funkcija. Da naglasimo razliku

prema prethodnom problemu, odredit ćemo derivaciju prethodne funkcije (6). Analitička derivacija je funkcija

$$\frac{\sqrt{x}(2x\cos(x) + 1)\exp(\sin(x))}{2x} \quad (7)$$

Odmah vidimo da nije definirana za  $x=0$  što nije odmah bilo jasno prilikom parcijalne derivacije, izraz  $f_4(x)$  (slika 1.); to je prednost poznavanja analitičkog izraza.

Mi se ne bavimo analitičkim tehnikama rješavanja diferencijalnih jednadžbi, nego numeričkim, što znači da znademo samo vrijednosti neke funkcije u diskretnim točkama (na pr., kada imamo rezultate mjerenja i sl.). Rješavanje diferencijalne jednadžbe u terminima numeričke matematike znači da znademo vrijednosti derivacije u određenim točkama, a tražimo vrijednosti funkcije (u tim istim točkama) čije derivacije poznajemo. Rješenje problema možemo dobiti polazeći od prije definirane jednadžbe (6) za izračun derivacija (kada poznajemo vrijednosti funkcije  $\mathbf{p}$ ).

U slučaju diferencijalne jednadžbe, poznajemo vrijednosti derivacija  $w$ , a tražimo vrijednosti funkcije  $\mathbf{p}$ . Dovoljno je invertirati derivacijsku matricu  $\mathbf{M}$  i dobit ćemo nepoznati vektor

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}^{-1} \cdot w \quad (8)$$

Ova jednadžba predstavlja postupak dobivanja vrijednosti funkcije kada znamo vrijednosti derivacije i ujedno je najjednostavniji postupak numeričkog rješavanja diferencijalne jednadžbe 1.reda.

## Rubni problem

Prije smo spomenuli da je determinanta derivacijske matrice  $\mathbf{M}$  jednaka nuli, tj., matrica je singularna i njena inverzna matrica nije definirana. Rješenje tog problema se sastoji u dodavanju tkz., rubnih ili početnih uvjeta. Naime, da bismo jednoznačno (numerički) riješili diferencijalnu jednadžbu moramo poznavati vrijednost funkcije koju tražimo u barem jednoj točki. Obično poznajemo vrijednost u rubnoj točki (prvoj ili zadnjoj), od tuda naziv 'rubni uvjeti'. Naziv 'početni uvjeti' se odnosi na diferencijalne jednadžbe koje opisuju problem u vremenu kada trebamo znati što je bilo na početku jednadžbe, u trenutku od kojeg nadalje opisujemo promjene u vremenu procesa koji nas zanima.

Kada u derivacijsku matricu ugradimo 'rubni uvjet' ona više neće biti singularna i moće će se izračunati njena inverzna matrica. Ima više načina kako se mogu ugraditi rubni uvjeti u derivacijsku matricu, na pr., metoda Lagrangeovih multiplikatora, 'penalty' metoda i dr. Mi ćemo rubnu uvjet ugraditi tako da modificiramo prvu ili zadnju jednadžbu sistema (taj postupak zapravo smanjuje broj jednadžbi, odnosno, točaka u kojima računamo vrijednosti). Postupak ćemo prikazati na promjeni prve jednadžbe, a za druge je analogan. Pretpostavimo da u linearnom sistemu (5) želimo da je  $w_1 = p_1$  (jer je  $p_1$  rubni uvjet koji je zadan). Tada prvu jednadžbu sistema mijenjamo jednadžbom  $w_1 = 1 \cdot p_1$ ; to znači da derivacijsku matricu treba modificirati u

$$\frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 2h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

#### 4 Primjer rješavanja diferencijalne jednadžbe derivacijskom matricom

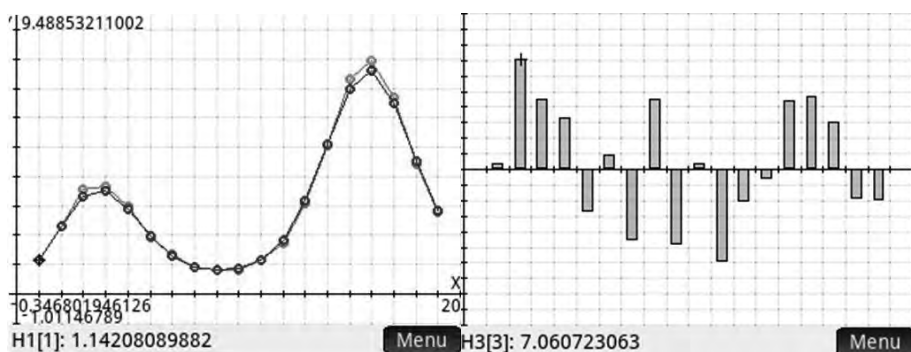
Na početku, spomenimo da invertiranjem matrice, iz derivacije funkcije dobivamo točne vrijednosti funkcije u odabranim točkama, jedino trebamo znati vrijednost te funkcije u jednoj točki (jer uvrštavanjem tog uvjeta matrica prestaje biti singularna). Vrijednosti funkcije koje dobijemo u točkama su one koje odgovaraju interpolaciji funkcije, ne točne vrijednosti funkcije.

Rješavanje diferencijalne jednadžbe je različito od prijašnjeg primjera jer želimo rekonstruirati vrijednosti funkcije u točkama, ali ne iz interpoliranih derivacija, nego iz točnih derivacija. Zbog velike razlike vektora interpoliranih i točnih derivacija, nećemo niti pokušati riješiti diferencijalnu jednadžbu uz podjelu intervala na 10 točaka. Za usporedbu, načinit ćemo primjere sa 19 i 37 točaka.

Bolji uvid u veličinu greške možemo dobiti ako točne i računске vrijednosti usporedimo numerički. Pri tome nije dobro samo oduzeti brojeve nego ih treba skalirati na samo veličinu broja, tako da grešku dobijemo kao relativnu veličinu (na pr., u postocima ili promilima).

Razlika u %  $\Delta p$  između dvije veličine  $X$  i  $Y$ , ako vrijedi  $X = Y \cdot (1 + \Delta p)$  je

$$\Delta p\% = \left( \frac{X}{Y} - 1 \right) \cdot 100 \quad (10)$$

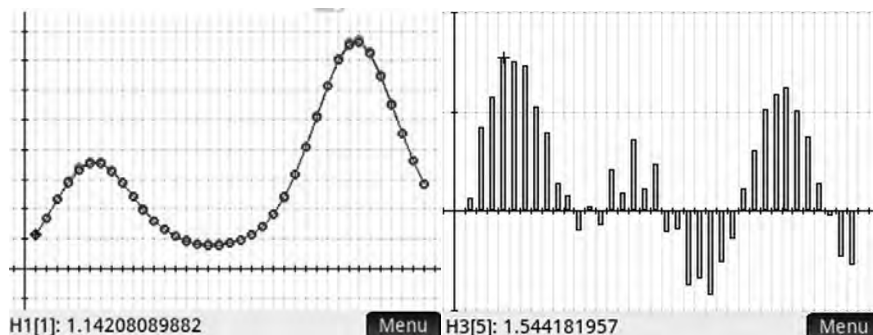


Slika 4. Grafički prikaz numeričkog rješenja diferencijalne jednadžbe i prikaz greške za 19 točaka

Raspon na ordinati (os  $Y$ ) je od  $-10\%$  do  $+10\%$ . Vidimo da je najveća greška u 3. točki i iznosi oko  $7\%$ . Također, vidimo da su neke greške pozitivne (računska je vrijednost

veća od točne), a neke negativne (računska je vrijednost manja od točne).

Primjer ponavljamo uz podjelu na 37 intervala.



Slika 5. Grafički prikaz numeričkog rješenja diferencijalne jednadžbe i prikaz greške za 37 točaka

Raspon na ordinati (os Y) je od -1% do +2%. Vidimo da je sada najveća greška oko 1.5% u točki 5 (prije 7% u točki 3).

## 5 Zaključak

Prikazana je metoda izračuna derivacijske matrice i njena upotreba kada poznajemo vrijednosti funkcije samo u diskretnim točkama. Ako poznajemo vrijednosti neke funkcije u točkama, tada derivacijskom matricom možemo dobiti vrijednosti derivacije te funkcije (u tim istim točkama). Ako poznajemo vrijednosti derivacije neke funkcije u točkama, tada imamo numeričku diferencijalnu jednadžbu. Derivacijskom matricom možemo riješiti diferencijalnu jednadžbu i dobiti vrijednosti nepoznate funkcije (u istim tim točkama).

Za praktičnu upotrebu možemo uzeti podjelu intervala na 30 do 50 točaka. Dobro je ponoviti izračun uz dvije različite podjele jer tako možemo procijeniti uticaj veličine podjele intervala na grešku rezultata.

U slučaju kada su vrijednosti u točkama rezultati mjerenja, bilo funkcije, bilo njene derivacije, problem je druge vrste. Naime, kad nemamo točne vrijednosti, nepoznate veličine određujemo tako da prvo postavimo inverzni model i prema njemu računamo veličine koje nas zanimaju. Primijetimo da u slučaju mjerenja broj jednadžbi i broj nepoznanica, u pravilu, nije isti i matrica nije kvadratna nego pravokutna.

## Zahvale

Autori se zahvaljuju na potpori za izradu ovog rada: projekt MZO i SAFU KK.01.1.1.04.0056 "Zaštita cjelovitosti konstrukcija u energetici i transportu", projekt HRZZ 7926 "Separation of parameter influence in engineering modelling and parameter identification".

**Literatura**

- [1] Kožar, I; *Uvod u upotrebu i programiranje HP Prime kalkulatora*; Rijeka; 2020.

# Numerička analiza sudara osobnog automobila u deformabilnu barijeru

Kulić, V.<sup>1</sup>, Damjanović, D.<sup>2</sup>, Kozak, D.<sup>3</sup>, Konjatić, P.<sup>4</sup>

## Sažetak

U radu se numeričkim putem analizira sudar osobnog automobila u barijeru. Provedena je usporedba numeričkih rezultata sa stvarnim testom sudara automobila u barijeru na osnovu dostupnih eksperimentalnih podataka. U radu je opisano predmetno vozilo kao i eksperimentalni rezultati koji su služili za potvrdu pouzdanosti numeričkog modela. Utvrđena je vrlo dobra podudaranost numeričkih i eksperimentalnih rezultata te je time potvrđena pouzdanost numeričkog modela.

**Ključne riječi:** metoda konačnih elemenata, sudar, automobil, barijera

---

<sup>1</sup>**mag. ing. mech Vlatko Kulić**, dipl. ing. stroj., Žabljak bb. 74230. Usora, e-mail: vkulic@unisb.hr

<sup>2</sup>**doc. dr. sc. Darko Damjanović**, docent, Sveučilište u Slavanskom Brodu, Strojarski fakultet u Slavanskom Brodu, Zavod za mehaniku i čvrstoću, Trg Ivane Brlić Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: damjanovic@unisb.hr

<sup>3</sup>**prof. dr. sc. Dražan Kozak**, redoviti profesor u trajnom zvanju, Sveučilište u Slavanskom Brodu, Strojarski fakultet u Slavanskom Brodu, Zavod za mehaniku i čvrstoću, Trg Ivane Brlić Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: dkozak@unisb.hr

<sup>4</sup>**Izv. prof. dr. sc. Pejo Konjatić**, dipl. ing. stroj., Sveučilište u Slavanskom Brodu, Strojarski fakultet u Slavanskom Brodu, Trg. I. B. Mažuranić 2, 35000 Slavonski Brod, e-mail: pkonjatic@unisb.hr

## Uvod

Zbog potrebe za povećanjem sigurnosti na prometnicama proizvođači automobila neprestano razvijaju različite konstrukcije vozila i sigurnosne sustave. Za svaki novi model vozila koji se planira proizvoditi i koristiti na prometnicama, potrebno je provesti određene testove sudara.

Test sudara većinom je razorno ispitivanje vozila u kojem se određuje sigurnost dizajna vozila za putnike i ostale sudionike u prometu. Ovakva ispitivanja su rekonstrukcija sudara vozila s drugim vozilom ili objektom, preprekom, pješakom itd. Osim eksperimentalnog provođenja testa sudara isti je moguće provesti i putem numeričkih simulacija.

Prednost simulacije je u tome što se modeli mogu ponovno koristiti iznova, a korisnik također ima slobodu mijenjati bilo koji parametar testa, mijenjati svojstva materijala kao i vrstu materijala, dijelova u vozilu, itd.

## Prikaz razmatranog modela i dostupnih eksperimentalnih rezultata

Cijeli računalni model vozila koji je korišten pri simulaciji preuzet je s NHTSA web stranice. Ovaj trodimenzionalni računski model razvijen je procesom obrnutog inženjeringa od strane istraživača Nacionalnog centra za sigurnost i analizu sudara (SAD), prema ugovoru sa Saveznom upravom za autoceste.

Pregledom preuzetog modela uočeno je da se isti sastoji od mnoštva detalja kao što su plastični dijelovi, unutrašnjost vozila, mehanizam brisača, osvjetljenje itd. Kako ovi dijelovi ne utječu značajno na deformaciju same konstrukcije vozila, isti se mogu zanemariti. Izrađeni računski model temelji se na vozilu Dodge Neon. Većina konstrukcije stvarnog vozila izrađena je od lima debljine 0,5 do 1 mm, koji su različito oblikovani i raspoređeni kako bih osigurali krutost vozila i mogućnost deformacije pri sudaru. Unutar računalnog modela limovi karoserije kao i većina drugih panela modelirani su kao ljuskasti model.

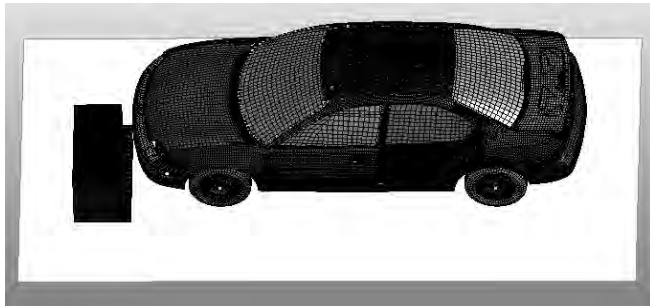
## Eksperimentalni rezultati frontalnog sudara vozila u deformabilnu barijeru

Eksperimentalni rezultati koji su korišteni za usporedbu preklapnog frontalnog sudara vozila u deformabilnu barijeru proveo je Veridian Engineering centar na modelu Dodge Neon. Rezultati su opisani unutar izvještaja broj CAL-00-2-4. Kako je eksperiment proveden prema standardima, unutar izvještaja nalaze se informacije koje se kasnije koriste za definiranje numeričke simulacije i usporedbu rezultata deformacije vozila prije i poslije testa sudara. Neke od glavni informacija za izradu simulacije je kretanje vozila brzinom od 60,3 km/h i način pozicioniranja vozila u odnosu na barijeru.

### 3 Numerička simulacija frontalnog sudara vozila u deformabilnu barijeru

Prvo je izvršeno pozicionirana barijere u odnosu na automobil. Barijera je postavljena na visini od 200 mm od najnižeg čvora numeričkog modela vozila i s 40% preklopa odnosno 684,8 mm dužine barijere se preklapa s vozilom. Najisturenija točka prednjeg dijela branika vozila udaljena je 5 mm od barijere. Iza barijere postavljena je nepomična geometrijska prizma koja onemogućava kretanje barijere. Zatim je postavljena ravnina na kojoj leže kotači, slika 1.

Ostali podaci potrebni za provođenje simulacije definirani su pomoću kartica *INITIAL\_VELOCITY\_GENERATION*, *CONTROL\_TERMINATION*, *CONTROL\_TIMSTEP* itd.



Slika 1. Vizualni prikaz numeričkog modela prije samog testa sudara

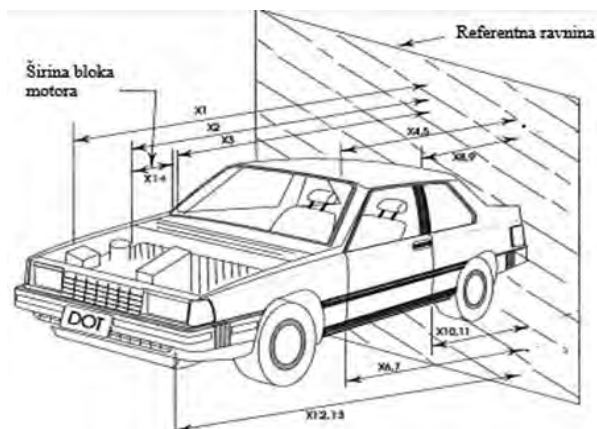
### 4 Usporedba numeričkih i eksperimentalnih rezultata za sudar vozila u deformabilnu barijeru

Nakon provedbe simulacije, vizualnom usporedbom stvarnog i numeričkog modela uočava se sličnost između istih tj. pomicanje prednjeg desnog kotača prema putničkom prostoru, način deformacije krova, poklopca motora itd.



Slika 2. Vizualni prikaz deformacije vozila nakon testa sudara

Nadalje, usporedba izmjera eksperimentalnog vozila i numeričkog modela prije testa sudara izvršena je kako bi se utvrdila dimenzijska odstupanja modela. Izmjere su zabilježene od referentne ravnine, kako je prikazano na slici 3, iste su prikazane u tablici 1.



Slika 3. Prikaz pozicija izmjera za numeričko i eksperimentalno vozilo[1]

Tablica 1. Usporedba izmjera na eksperimentalnom vozilu i numeričkom modelu vozila prije testa sudara

| Nazivne izmjere | Eksperimentalno vozilo, mm | Numeričko vozilo, mm | Razlika, mm | Razlika, % |
|-----------------|----------------------------|----------------------|-------------|------------|
| X1              | 4351                       | 4355,65              | -4,65       | -0,11      |
| X2              | 3610                       | 3626,86              | -16,86      | -0,47      |
| X3              | 3405                       | 3405,31              | -0,31       | -0,01      |
| X4              | 2965                       | 2968,61              | -3,61       | -0,12      |
| X5              | 2969                       | 2968,66              | 0,34        | 0,01       |
| X6              | 3021                       | 3026,25              | -5,25       | -0,17      |
| X7              | 3027                       | 3026,41              | 0,59        | 0,02       |
| X8              | 1960                       | 1969,02              | -9,02       | -0,46      |
| X9              | 1965                       | 1969,05              | -4,05       | -0,21      |
| X10             | 1957                       | 1959,15              | -2,15       | -0,11      |
| X11             | 1963                       | 1959,31              | 3,69        | 0,19       |
| X12             | 4282                       | 4281,46              | 0,54        | 0,01       |
| X13             | 4284                       | 4280,88              | 3,12        | 0,07       |
| X14             | 372                        | 380,79               | -8,79       | -2,36      |

Pomoću slike 3 i tablice 1 prikazana je razlika dimenzijskih odstupanja između numeričkog i eksperimentalnog vozila prije testa sudara. Moguće je uočiti da većina odstupanja (osim X14) ne prelazi 0,5%, time se može potvrditi da su dimenzije numeričkog modela zadovoljavajuće. Zatim je izvršena usporedba nakon testa sudara, a rezultati su prikazani u tablici 2. Najveće odstupanje javlja se na ukupnoj dužini vozila, što je i očekivano.

Tablica 2. Usporedba izmjera eksperimentalnih i numeričkog vozila poslije testa sudara

| Nazivne izmjere | Eksperimentalno vozilo, mm | Numeričko vozilo, mm | Razlika, mm | Razlika, % |
|-----------------|----------------------------|----------------------|-------------|------------|
| X1              | 3983                       | 3850,52              | 132,48      | 3,33       |
| X2              | 3785                       | 3743,35              | 41,65       | 1,1        |
| X3              | 3329                       | 3315,07              | 13,93       | 0,42       |
| X4              | 2975                       | 2954,08              | 20,92       | 0,7        |
| X5              | 2916                       | 2923,82              | -7,82       | -0,27      |
| X6              | 3040                       | 3015,14              | 24,86       | 0,82       |
| X7              | 2936                       | 2942,29              | -6,29       | -0,21      |
| X8              | 1977                       | 1948,13              | 28,87       | 1,46       |
| X9              | 1946                       | 1936,53              | 9,47        | 0,49       |
| X10             | 1974                       | 1952,26              | 21,74       | 1,1        |
| X11             | 1939                       | 1897,91              | 41,09       | 2,12       |
| X12             | 4222                       | 4227,79              | -5,79       | -0,14      |
| X13             | 3751                       | 3685,05              | 65,95       | 1,76       |
| X14             | 372                        | 380,79               | -8,79       | -2,36      |

## 5 Zaključak

Postignuta je vrlo dobra podudaranost numeričkih i eksperimentalnih rezultata, čime je dokazana pouzdanost numeričkog modela i proračuna. Osim izmjera prikazanih u ovome radu i sve ostale izmjere unutra izvještaja (CAL-00-2-4) u vrlo su dobroj korelaciji s numeričkim vrijednostima. Kako je time dokazana pouzdanost numeričkog modela, na istom je moguće izvršiti ostale standardne testove sudara i time doći do vizualnih i deformacijskih rezultate prije provedbe eksperimentalnog testa.

S druge strane, metoda konačnih elemenata daje mogućnost dosta brže provedbe testa sudara i daleko jednostavnija ispitivanja konstrukcijski modifikacija i unapređenja. Velika je prednost što je moguće ispitati vozilo na bilo koju vrstu sudara prije izrade prototipa i u skladu s time izvršiti poboljšanje konstrukcije.

---

**Literatura**

- [1] Czarnecki, J. i Travale, J.D. ; *FRONTALN BARRIER 40% OFFSET IMPACT TEST*; VERIDIAN ENGINEERING TRANSPORTATION SCIENCES CENETER;2001.; 390. str.
- [2] Shigeki, K, i Tsuyosh, Y.; Development of Aluminium Honeycomb Model Using Shell Elements; LS-DYNA konferencija; 2006.; .10. str.
- [3] Thacker, G. i Reagan, S.W. Pelletiere, J.A. Pilkey, J.R. i Crandall, E.M.; Experiencesduring development of a dynamiccrashresponse automobile mode; Automobile Safety Laboratory Universitet Virginia;1998.; 17. str.
- [4] Hellström, J. i Lindblom, A.; Development ofSimulation Model ofan ODB; Luleå University of Technology; 2007.; 91. str.

## Gredni model za numeričku analizu toplinskog izvijanja FG grednih nosača

Kvaternik Simonetti, S.<sup>1</sup>, Lanc, D.<sup>2</sup> i Turkalj, G.<sup>3</sup>

### Sažetak

Rad predstavlja konačnoelementni model za analizu toplinskog izvijanja FG greda. Model se bazira na Euler-Bernoullijevoj teoriji savijanja i Vlasovoj teoriji uvijanja. Materijal se kontinuirano mijenja po debljini stijenke nosača. Za različite rubne uvjete i različite funkcije promjene materijala po visini stijenke dane su kritične temperature izvijanja. Model je verificiran na testnim primjerima.

**Ključne riječi:** toplinsko izvijanje, kritična temperatura izvijanja, FGM, tankostjeni pravokutni zatvoreni profili, MKE

---

<sup>1</sup> **Sandra Kvaternik Simonetti, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički Fakultet, Zavod za Tehničku Mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: skvaternik1@riteh.hr

<sup>2</sup> **prof. dr. sc. Domagoj Lanc, dipl. ing.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički Fakultet, Zavod za Tehničku Mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: dlanc@riteh.hr

<sup>3</sup> **prof. dr. sc. Goran Turkalj, dipl. ing.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički Fakultet, Zavod za Tehničku Mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: goran.turkalj@riteh.hr

## 1 Uvod

FG materijali su novija klasa kompozitnih materijala koja se u posljednja tri desetljeća počela intenzivno razvijati i primjenjivati u različitim područjima tehnike. Tankostjeni FG gredni elementi zbog svoje male mase, a relativno visoke krutosti, poboljšanih toplinskih svojstava i visoke otpornosti na lom privlače veliku pažnju zadnjih godina te je mnogo radova koji studiraju analizu stabilnosti i utjecaj temperature, no samo su neki navedeni ovdje [1-4].

Konstruktivski su dijelovi vrlo često izloženi različitoj temperaturnoj distribuciji što prenošenjem topline uzduž nosača i po debljini stijenke dovodi do pojave toplinskog opterećenja. Pri promjeni temperature, uzdužna se vlakna nastoje produljiti u aksijalnom smjeru. U slučaju onemogućenog produljenja nastaju aksijalna naprezanja u uzdužnim vlaknima što može uzrokovati izvijanje nosača. Pri tome je gubitak stabilnosti definiran kritičnom temperaturom izvijanja.

U ovom radu dan je numerički algoritam koji omogućava analizu stabilnosti tankostjenih FG grednih nosača pri uniformnoj i linearnoj distribuciji temperature. Numerički rezultati dobiveni su za tankostijeni zatvoreni pravokutni profil, za različite tipove oslonaca i definiranja materijala. To je nadogradnja grednog konačnolementnog modela koji je već duže vrijeme razvijan od strane autora [5-7] pa će ovdje biti ukratko prikazana samo teoretska osnova implementacije.

## 2 Numerički model

Mehaničke značajke se kontinuirano mijenjaju po debljini stijenke nosača prema zakonu potencija te ovise o temperaturi [8]:

$$P(n, T) = [P_o(T) - P_i(T)] \cdot V_c(n) + P_i(T), \quad (1)$$

gdje  $P$  predstavlja karakteristike materijala kao što su modul elastičnosti, smični modul, koeficijent toplinske rasteljivosti i sl., a indexi  $o$  i  $i$  predstavljaju vanjsku i unutarnju površinu tankostjenog pravokutnog poprečnog presjeka. Pretpostavlja se da je Poissonov koeficijent  $\nu$  konstantan.  $V_c$  volumni je udio keramike pri čemu se materijal kontinuirano mijenja od jednog do drugog materijala, primjerice od čiste keramike do čistog metala:

$$V_c = \left( \frac{1}{2} + \frac{n}{t} \right)^p, \quad (2)$$

pri čemu  $t$  predstavlja debljinu stijenke, a  $p$  potenciju. Kako bi se simulirao FG materijal, poprečni je presjek modeliran kroz slojeve pri čemu se unutar sloja svojstva materijala linearno mijenjaju.

Uzimajući u obzir termičke dilatacije, konstitutivne jednadžbe za tankostjene FG grede mogu se napisati kao:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= E(n, T) \cdot [\varepsilon_z - \alpha(n, T) \Delta T], \\ \tau_{zs} &= G(n, T) \cdot \gamma_{zs}\end{aligned}\quad (4)$$

pri čemu  $\alpha$  označava toplinski koeficijent rastezanja dok  $\Delta T$  predstavlja prirast temperature.

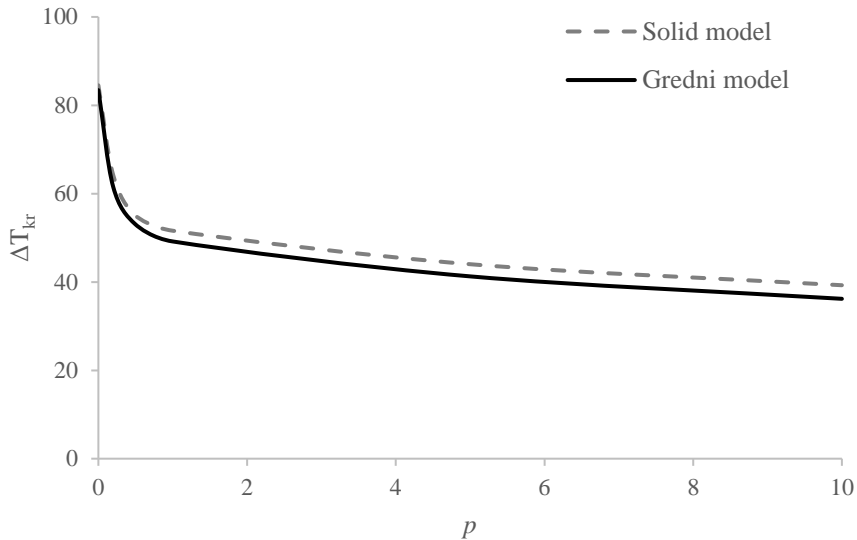
### 3 Primjeri

Analizira se toplinsko izvijanje grede duljine  $L = 8$  m. Dimenzije pravokutnog zatvorenog poprečnog presjeka su  $b = 0,1$  m,  $h = 0,2$  m i  $t = 0,005$  m. Materijalne značajke su:  $E_i = 70$  GPa,  $E_o = 380$  GPa,  $\alpha_i = 2,3 \cdot 10^{-5}$   $1/C^\circ$ ,  $\alpha_o = 7,2 \cdot 10^{-6}$   $1/C^\circ$ ,  $\nu = 0,3$ .

Toplinsko izvijanje grede analizirano je za tri različita rubna uvjeta (obostrano uklještenje, obostrani zglobni oslonci te kombinacija) i različite vrijednosti potencije  $p$ . Rezultati autorskog grednog modela verificirani su s numeričkom modelom temeljenim na *solid* konačnim elementima. FG materijal je simuliran kroz homogene slojeve. Model je izrađen u programu FEMAP, a numeričke analize provedene su pomoću rješavača MSC.Nastran. U tablici 1 prikazana je usporedba kritičnih temperatura dobivenih grednim i *solid* modelom za obostrano uklještenu gredu i različite vrijednosti potencije  $p$ .

Tablica 1. Usporedba kritičnih temperatura za obostrano uklještenu gredu pri linearnoj raspodjeli temperature

| $p$                 | 0     | 0,2   | 0,5   | 1     | 5      | 10     |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| <b>Gredni model</b> | 337,5 | 256,0 | 219,6 | 204,5 | 175,72 | 156,74 |
| <b>Solid model</b>  | 335,0 | 247,0 | 211,3 | 198,1 | 166,0  | 145,0  |



Slika 1. Usporedba kritičnih temperatura za zglobno oslonjenu gredu pri linearnoj raspodjeli temperature

Na slici 1 može se vidjeti grafička usporedba kritičnih temperatura za zglobno oslonjenu gredu i različite funkcije promjene materijala. Usporedbom rezultata vidljivo je dobro poklapanje i niže vrijednosti kritičnih temperatura kod grednog modela što može biti posljedica različitog simuliranja FG materijala.

## 4 Zaključak

Izrađen je gredni konačnoelementi model za analizu toplinskog izvijanja FG grednih nosača. Izrađeni računalni program verificiran je na primjeru toplinskog izvijanja jednostavne grede s različitim rubnim uvjetima i funkcijama promjene materijala po debljini stijenke te su rezultati uspoređeni s numeričkim modelom.

U budućem radu planira se analizirati geometrijski nelinearno ponašanje FG kompozitnih grednih nosača i okvira izloženih okolišu s promjenjivom temperaturom.

## Zahvale

Autori se velikodušno zahvaljuju financijskoj potpori Hrvatskoj zakladi za znanost (IP-2019-04-8615) i Sveučilištu u Rijeci (uniri-tehnic-18-107 i 18-139).

## Literatura

- [1] Librescu, L., Oh, S. Y., Song, O.: „Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: Vibration and stability“, *J. Therm. Stress.*, 28 (2005), No. 6–7, str. 649–712.
- [2] Nguyen, T-T, Kim, N., Lee, J.: „Analysis of thin-walled open-section beams with functionally graded materials; *Composite Structures*; 2016;138; str. 75-83.
- [3] Trinh, L. C., Vo, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K.: „An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads“, *Compos. Part B Eng.*, 100 (2016), str. 152–163.
- [4] Ziane, N., Meftah, S. A., Ruta, G., Tounsi, A.: „Thermal effects on the instabilities of porous FGM box beams“, *Eng. Struct.*, 134 (2017), str. 150–158.
- [5] Turkalj, G., Brnić, J.; Nonlinear stability analysis of thin-walled frames; *Journal of Structural Stability and Dynamics*; 2004; No. 1; Vol.4, str. 45-67.
- [6] Turkalj, G., Brnić, J., Kravanja, S.; A beam model for large displacement analysis of flexibly connected thin-walled beam type structures; *Thin-walled structures*; 2014.; Vol.111; str. 371-380.
- [7] Lanc, D., Vo, T. P., Turkalj, G., Lee, J.: „Buckling analysis of thin-walled functionally graded sandwich box beams“, *Thin-Walled Struct.*, 86 (2015), str. 148–156.
- [8] Yang, YB., Kuo, SR.; *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*; New York; Prentice Hall; 1994.



# Numeričko istraživanje interakcije malih vodnih turbina i dinamike riječnog sedimenta

Lisac, A.<sup>1</sup>, Jasak, H.<sup>2</sup> i Uroić, T.<sup>3</sup>

## Sažetak

Tema rada je numeričko istraživanje interakcije malih vodnih turbina i dinamike riječnog korita pomoću računalne dinamike fluida. Turbulentno strujanje vode iza turbine utječe na pjeskovito dno rijeke, što može imati značajan utjecaj na ekosustav rijeke, ali i na stabilnost podvodnih struktura. Za rješavanje problema strujanja i interakcije strujanja fluida sa sedimentom i slobodnom površinom korišten je OpenFOAM.

Proučavana je aksijalna turbina s tri lopatice, a simulacije su provedene za tri konfiguracije turbina u kanalu: jedna turbina na sredini kanala, dvije turbine postavljene koaksijalno na sredini kanala, na međusobnoj udaljenosti od četiri promjera rotora turbine te dvije turbine postavljene koaksijalno na sredini kanala, na međusobnoj udaljenosti od sedam promjera rotora turbine.

**Ključne riječi:** računalna dinamika fluida, vodna turbina, sediment, Exnerova jednadžba, metoda kontrolnih površina, automatska metoda pomicanja proračunske mreže

---

<sup>1</sup> **Ana Lisac, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Katedra za mehaniku i čvrstoću, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, e-mail: ana.lisac45@gmail.com

<sup>2</sup> **prof. dr. sc. Hrvoje Jasak, dipl. ing.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i okoliš, Katedra za turbostrojeve, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, e-mail: hrvoje.jasak@fsb.hr

<sup>3</sup> **dr. sc. Tessa Uroić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za energetska postrojenja, energetiku i okoliš, Katedra za turbostrojeve, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, e-mail: tessa.uroic@fsb.hr

## 1 Uvod

Obnovljivi izvori energije postali su učestali i preferirani izvor električne energije, a jedna od ovih tehnologija, koja je ujedno i proučavana u ovom radu, je mala vodna turbina koja se može postaviti direktno u tok rijeke. Konstrukcija turbine te turbulentna strujanja iza nje aktivno utječu na dinamiku sedimenta na dnu, uzrokujući eroziju i taloženje, što može dovesti do oštećenja stupova turbina i ostalih podvodnih konstrukcija te negativno utjecati i na sam rotor i lopatice turbine.

U ovom radu proučavana je interakcija između aksijalne turbine s tri lopatice i sedimenta, pri čemu je u obzir uzet i utjecaj slobodne površine. Matematički model implementiran je u OpenFOAM-u, softveru za računalnu dinamiku fluida (eng. *Computational Fluid Dynamics*, CFD) otvorenog koda i validiran je pomoću eksperimentalnih podataka.

Cilj ovog rada je pokazati primjenjivost softvera otvorenog koda za procjenu pogodnih lokacija za mala postrojenja za iskorištavanje energije vode, kao i njihov utjecaj na okoliš.

## 2 Matematički model

Matematički model opisan u nastavku temelji se na radu Sattara i Škurića (2017) [1].

Hidrodinamički numerički model temelji se na Reynoldsovom osrednjavanju Navier-Stokesovih jednadžbi, prema izrazima (1) – (3):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\alpha) = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = \nabla \cdot \mu_{eff} - \nabla p_d - (\mathbf{g} \cdot \nabla \rho), \quad (3)$$

gdje je  $p_d$  polje dinamičkog tlaka,  $\mu_{eff}$  je efektivna dinamička viskoznost, a  $\alpha$  volumni udio vode, odnosno zraka, koji određuje linearnu promjenu polja brzine  $\mathbf{u}$ , gustoće  $\rho$  i viskoznosti  $\mu$  za obje faze.

Turbulentno strujanje modelirano je Reynoldsovim osrednjavanjem Navier-Stokesovih jednadžbi i  $k - \omega SST$  modelom turbulencije [2].

Slobodna površina modelirana je pomoću tzv. *Volume of Fluid* (VOF) metode koju su razvili Hirt i Nichols (1981) [3], koja cijelu domenu tretira kao mješavinu dvaju fluida, a volumni udio pojedinog fluida koristi kao težinski faktor pri određivanju svojstava mješavine. Jednadžbe su diskretizirane koristeći pristup tzv. *Ghost Fluid* metode (GFM), koja rješava velike gradijente na granici između dva fluida gdje se javlja nagla promjena dinamičkog tlaka i gustoće [4].

Transport taloga sedimenta opisan je izrazom koji su predložili Engelund i Fredsøe (1976) [5], a distribucija koncentracije sedimenta u sloju suspenzije definirana je izrazom (4):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} - \omega_s \delta_{j3})c = \nabla \cdot \left( \frac{v_t}{\sigma_c} \nabla C \right), \quad (4)$$

gdje je  $\mathbf{u}$  vektor brzine vode,  $c$  koncentracija lokalno suspendiranog sedimenta,  $\omega_s$  brzina taloženja sedimenta,  $\delta_{j3}$  Kroneckerov delta simbol, gdje  $j = 3$  definira vertikalni smjer, a  $\sigma_c$  je turbulentan Schmidtov broj, vezan uz turbulentnu difuzivnost  $v_t$  sedimenta. Promjena visine sedimenta na dnu rijeke  $\eta$  opisuje se Exnerovom jednačom, izraz (5), koja uzima u obzir taloženje  $D_b$  i eroziju  $E_b$ :

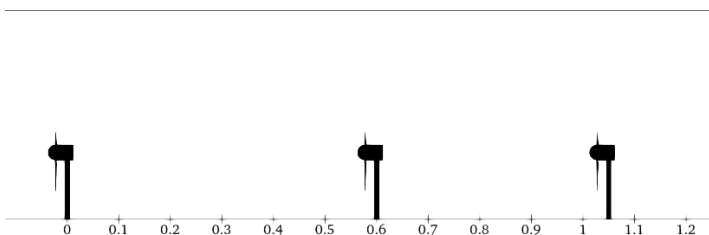
$$(1 - n) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_s \cdot \mathbf{q}_b - D_b + E_b = 0, \quad (5)$$

gdje je  $n$  poroznost materijala na dnu, a  $\mathbf{q}_b$  stopa transporta sedimenta u raznim smjerovima. Ova jednačba diskretizirana je pomoću metode kontrolnih površina (eng. *Finite Area Method*, FAM), opisane u Tuković (2005) [4].

Kako bi ispravno opisali promjene morfologije dna rijeke, u ovom radu korištena je automatska metoda pomicanja proračunske mreže temeljena na čvorovima [4], koja uvodi raščlanjivanje poliedarskih kontrolnih volumena na tetraedre, a gibanje mreže opisuje Laplaceovom jednačom.

### 3 Geometrija i proračunska mreža

U ovom radu korištena je geometrija aksijalne vodne turbine s tri lopatice, preuzeta iz [6]. Promjer lopatica turbine je  $d_t = 0,15$  m, a kućište turbine nalazi se na visini od  $h_k = 0,13$  m. Turbine su postavljene na dno kanala korita oblika kvadra, prema [7]. Proučavane su tri konfiguracije turbine u kanalu (slika 1.): (i) jedna turbina nasred kanala, (ii) dvije turbine postavljene koaksijalno na sredini kanala, međusobno udaljene  $4d_t$ , odnosno 0,6 m te (iii) dvije turbine postavljene koaksijalno na sredini kanala, međusobno udaljene  $7d_t$ , odnosno 1,05 m. Širina kanala u svim konfiguracijama iznosi  $B = 0,9$  m, a visina  $H = 0,31$  m. Domena je podijeljena na dio s vodom i dio sa zrakom, razdvojenima slobodnom površinom.



Slika 1. Bočni prikaz smještaja turbina u kanalu. Položaj prve turbine s lijeva odgovara konfiguraciji (i), položaj prve i druge turbine s lijeva konfiguraciji (ii), a položaj prve i treće turbine s lijeva konfiguraciji (iii). Dimenzije su u metrima.

Za sve konfiguracije napravljene su trodimenzionalne strukturirane mreže s heksaedarskim ćelijama. Oko rotora napravljena je gušća mreža, povezana s mrežom kanala pomoću *General Grid Interface* (GGI) rubnog uvjeta. Efekti okretanja turbine ostvareni su pomoću *Multiple Reference Frame* (MRF) zone, zanemarujući tranzijentne pojave.

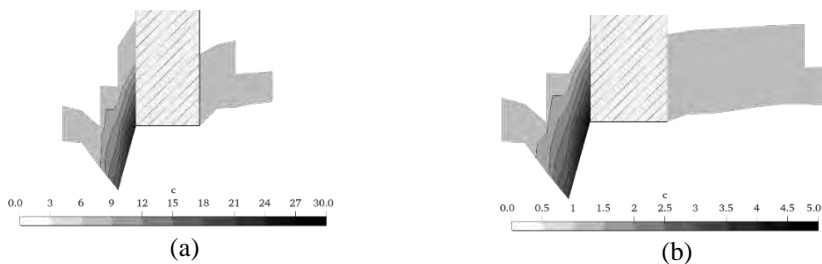
## 4 Rezultati

Srednja vrijednost veličine čestica pijeska korištenih u simulaciji je  $D_{50} = 0,0018$  m [8], gustoća pijeska  $\rho_S = 2650$  kg/m<sup>3</sup>, koeficijent statičkog trenja čestica pijeska  $\mu_S = 0,63$ , a poroznost tla  $n = 0,65$ , koja je pretpostavljena zbog nedostupnosti podataka. Za konstantu utjecaja lokalnog nagiba dna  $C$  uzeta je vrijednost 1,5 [9]. Voda struji aksijalno na turbinu te brzina strujanja iznosi  $u = 0,45$  m/s, prema podacima iz [8], a kutna brzina iznosi  $\omega = 37,8$  s<sup>-1</sup>. Vremenski korak simulacija je 0,1 s.

Iako slobodna površina može imati značajan utjecaj na rad turbine, simulacije u ovom radu pokazuju da je turbina dovoljno daleko od slobodne površine pa ona ne utječe na njen rad.

### 4.1 Suspendirani sediment

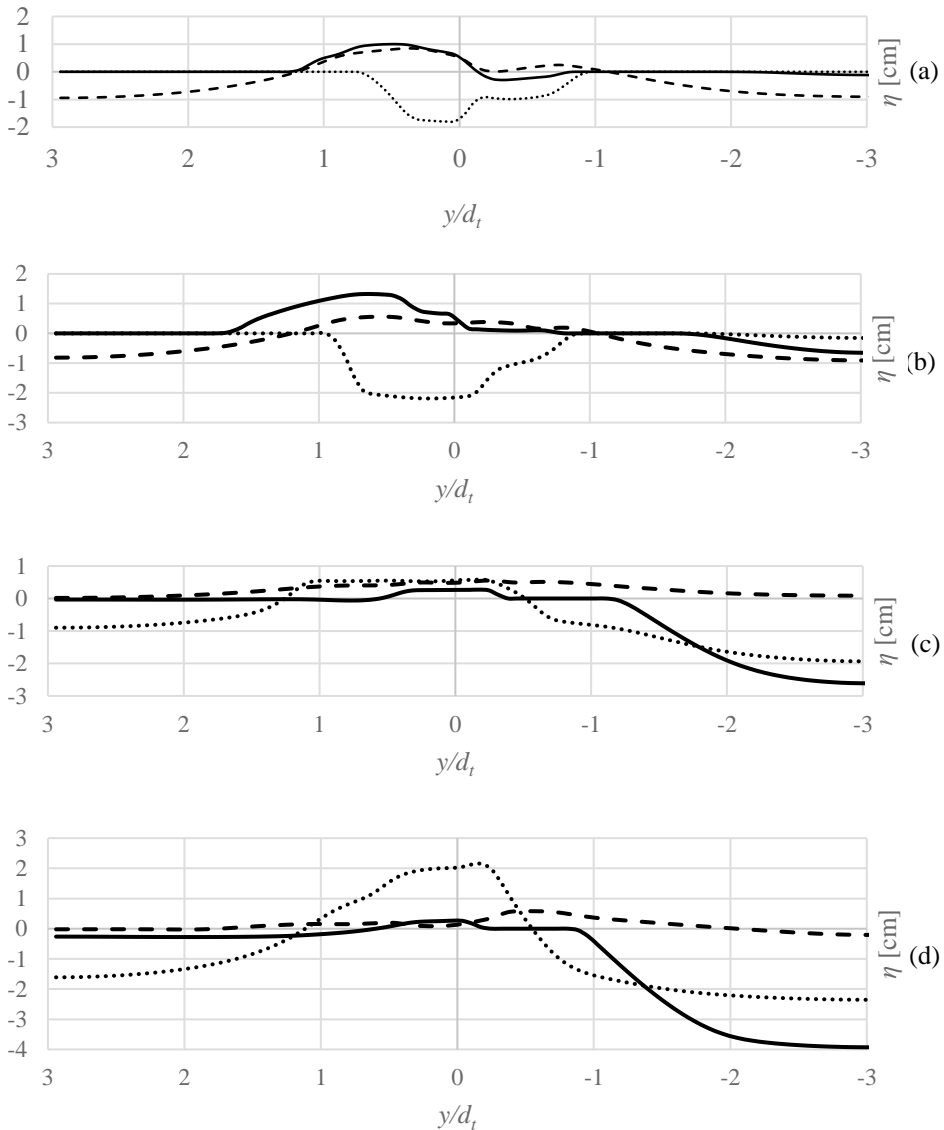
Erodirane čestice sedimenta koje čine suspendirani sediment javljaju se samo oko stupova turbina, jer je u simulacijama pretpostavljen šljunak većih dimenzija na dnu kanala koji, zbog svoje težine, slabije erodira i brže pada na dno. Do značajnije erozije dolazi u konfiguracijama s koaksijalnim turbinama, što je prikazano na slici 2.



Slika 2. Prikaz detalja koncentracije erodiranog sedimenta oko stupa turbina za konfiguraciju (iii) za (a) prvu turbinu, (b) drugu turbinu.

### 4.2 Morfološke promjene dna

Dijagram 1. pokazuje usporedbu u elevaciji dna za sve tri konfiguracije na određenim udaljenostima iza turbine, odnosno turbina. Vidljivi su lokalni utjecaji turbina na sediment, koji su izraženiji u blizini prve turbine. Također, fluktuacije u promjeni visine kod koaksijalnih konfiguracija su veće kada su turbine postavljene bliže jedna drugoj (ii).



Dijagram 1. Elevacija dna sedimentnog korita na udaljenosti od (a)  $1d_t$  iza turbine, (b)  $2d_t$  iza turbine, (c)  $5d_t$  iza turbine, odnosno turbina, (d)  $8d_t$  iza turbine, odnosno turbina.

Konfiguracija (i) prikazana je punom linijom, konfiguracija (ii) točkastom linijom, a konfiguracija (iii) crtkanom linijom.

Nadalje, može se primijetiti utjecaj nepropusne stijenke koja je definirana na bočnim stranama korita, koji je izraženiji daleko od turbine. Promjene na sedimentnom dnu dobivene

simulacijom uočene su i u eksperimentalnim istraživanjima [8], a kvalitativnom usporedbom s rezultatima simulacija za konfiguracije (ii) i (iii) može se primijetiti kako dolazi istih obrazaca ponašanja sedimenta.

## 5 Zaključak

Cilj ovog rada bio je kvalitativno usporediti rezultate numeričkih simulacija utjecaja malih vodnih turbina na sediment rijeke s dostupnim rezultatima eksperimenata iz [7] i [8], uz napomenu da fokus nije bio na samim karakteristikama turbine, već interakciji sa sedimentom.

Na temelju provedenih simulacija i njihovom usporedbom s dostupnim eksperimentalnim podacima, može se zaključiti da korišteni model kojeg su razvili Sattar i Škurić (2017) [1] dovoljno dobro opisuje utjecaj malih vodnih turbina na sedimentno dno rijeke. Međutim, još uvijek nema dovoljno dostupnih rezultata eksperimentalnih istraživanja s kojima bi mogli kvantitativno usporediti dobivene rezultate.

Konačno, može se zaključiti da turbine imaju znatan utjecaj na morfologiju dna, a računalna dinamika fluida može se koristiti u daljnjim istraživanjima tog problema.

## Literatura

- [1] Sattar, A., Jasak, H. i Škurić, V.; Three dimensional modeling of free surface flow and sediment transport with bed deformation using automatic mesh motion; *Environmental Modelling & Software*; 2017; 97; 303–317.
- [2] Menter, F.; Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications; *AIAA Journal*; 1994; 32; 1598–1605.
- [3] Hirt, C. W. i Nichols, B. D.; Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries; *Journal of Computational Physics*; 1981; 39; 201–225.
- [4] Tuković, Ž.; Metoda kontrolnih volumena na domenama promjenjivog oblika, doktorat; Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu; 2005.
- [5] Engelund, F. i Fredsoe, J.; A sediment transport model for straight alluvial channels; *Nord Hydrol*; 1976; 7.
- [6] Song, M., Kim, M.-C., Do, I.-R., Rhee, S. H., Lee, J. H. i Hyun, B.-S.; Numerical and experimental investigation on the performance of three newly designed 100 kW-class tidal current turbines; *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*; 2012; vol. 4, no. 3; 241–255.

- [7] Hill, C., Musa, M., Chamorro, L. P., Ellis, C. i Guala, M.; Local scour around a model hydrokinetic turbine in an erodible channel; *Journal of Hydraulic Engineering*; 2014; vol. 140, no. 8.
- [8] Hill, C. S.; *Interactions Between Channel Topography and Hydrokinetic Turbines: Sediment Transport, Turbine Performance, and Wake Characteristics*, PhD thesis; University of Minnesota; 2015.
- [9] Brørs, B.; Numerical modeling of flow and scour at pipelines; *Journal of Hydraulic Engineering*; 1999; 125; 511-523.



# Ispitivanje kompozitnog panela na savijanje s ciljem utvrđivanja svojstva prionjivosti obloge i jezgre panela

Lukačević, L.<sup>1</sup>, Krolo, P.<sup>2</sup> i Čeh, N.<sup>3</sup>

## Sažetak

U članku je dan osnovni pregled teorije kompozitnih (sendvič) panela s naglaskom na ponašanje takvih konstrukcija i njihovu efikasnost. Opisani su mehanizmi sloma, a jedan od njih je i glavni fokus članka. Cilj je eksperimentalno ispitati prionjivost između komponenti sendvič panela koji je izrađen od Fermacell Firepanel A1 gips-vlaknastih ploča i poliuretanske (PUR) pjene, koristeći Američku normu ASTM C393/C393M. Normom su pokrivena i nestandardna ispitivanja za uzorke posebnih dimenzija, a prionjivost se ispituje savijanjem uzorka u tri ili četiri točke. Za praćenje ispitivanja uz LVDT uređaje, primijenjena su i 3D optička mjerenja s dvije ARAMIS 12M kamere. Prikazani su rezultati i usporedba normalnih i posmičnih naprezanja dvaju ispitanih uzoraka te njihove deformacije i dijagram odnosa sile i pomaka.

**Ključne riječi:** sendvič paneli, mehanizmi sloma, prionjivost, 3D optička mjerenja, eksperimentalno istraživanje

---

<sup>1</sup> **Lazar Lukačević, bacc. ing. aedif.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavoda za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: llukacevic@student.uniri.hr

<sup>2</sup> **Doc.dr.sc. Paulina Krolo, dipl.ing.grad.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavoda za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: paulina.krolo@gradri.uniri.hr

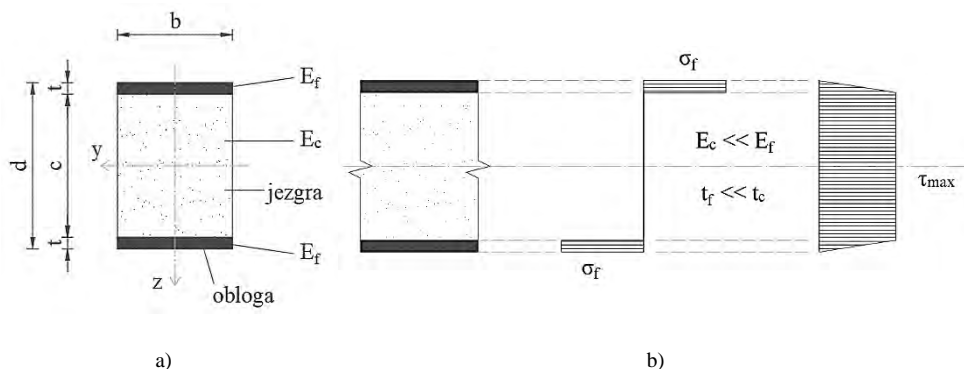
<sup>3</sup> **Doc.dr.sc. Nina Čeh, mag.ing.aedif.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavoda za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: nina.ceh@uniri.hr

## 1 Uvod

Sendvič konstrukcija je visoko učinkovita kompozitna konstrukcija s velikom nosivosti u odnosu na vlastitu težinu, što se ostvaruje uporabom laganih materijala male gustoće ili učinkovitih oblika na mjestu jezgre, obloženom materijalima velike gustoće i nosivosti.

Nosive panelne sustave izvedene od sendvič panela možemo pronaći u avionskoj industriji, industriji brodova, prirodi, skijama, svemirskim letjelicama te u građevinarstvu. Zbog sve veće potrebe za energetske učinkovitošću, brzo i ekonomičnom gradnjom, sendvič konstrukcijama pridaje se sve više pažnje kao i njihovom istraživanju. Tako se u građevinarstvu kod primjene u stambenim objektima nastoji jezgru istovremeno učiniti i toplinskom izolacijom kako bi poboljšali energetske učinkovitost te samu kvalitetu života. U tom slučaju skupocjeni materijali zamjenjuju se ekonomičnijim rješenjima i materijalima koji imaju širu primjenu. Bilo da je riječ o skupocjenim, prirodnim ili komercijalnim sendvič panelima, da bi se oni ponašali kao jedna spregnuta konstrukcija potrebno je zadovoljiti dobro prianjanje između jezgre i vanjskih obloga sendvič panela.

Poprečni presjek nosivih kompozitnih panela (Slika 1a) može se usporediti s poprečnim presjekom I grede gdje vanjske nosive ploče preuzimaju vlačna i tlačna naprezanja uzrokovana savijanjem, a kruta izolacijska jezgra preuzima posmična naprezanja i sprječava izbočivanje vanjskih nosivih slojeva (Zeckert, 1997). Prema teoriji sendvič panela vanjske nosive obloge uvijek imaju puno veće gustoće, a time i module elastičnosti u odnosu na jezgru panela, a debljine obloga puno manje od debljina jezgre. Iz tog razloga aproksimacijama se može pretpostaviti da se sva posmična naprezanja prenose jezgrom dok se sva tlačna i vlačna naprezanja uslijed savijanja prenose nosivim oblogama sendvič panela (Slika 1 b)) [2]. U pravilu se kod homogenih poprečnih presjeka doprinos deformacija od posmičnog opterećenja zanemaruje jer su uvijek dominantne deformacije od savijanja, no to kod sendvič konstrukcija, zbog nedovoljno krute jezgre, nije primjenjivo (Zeckert, 1997), što će biti vidljivo u rezultatima ispitivanja. Kompozitni paneli mogu doživjeti slom na nekoliko načina, a to su: vlačni slom ili plastifikacija obloge u vlaklu, lokalno izbočivanje obloge u tlaku, posmični slom jezgre, odvajanje obloge od jezgre i utiskivanje zbog prekoračenja tlačne čvrstoće jezgre [2].



Slika 1. a) Tipični poprečni presjek sendvič panela i b) raspodjela naprezanja po visini poprečnog presjeka (Zeckert, 1997)

## 2. Eksperimentalno istraživanje prionjivosti kompozitnih panela

Laboratorijskim ispitivanjem savijanja kompozitnih panela cilj je istražiti svojstvo prionjivosti između komponenata panela. Osim prionjivosti testom savijanja moguće je odrediti naprezanja i krutosti u oblogama i jezgri te ukupnu savojnu krutost sendvič panela. Laboratorijska ispitivanja provedena su u laboratoriju za konstrukcije na Građevinskom fakultetu u Rijeci prema američkoj normi ASTM C393/C393M [3]. Prionjivost između obložnih ploča i poliuretanske pjene ostvarena je ekspanzijom pjene pri čemu se jezgra i obložne ploče prirodno lijepe. Nikakvi adhezivi i prethodno premazivanje nije korišteno za ostvarivanje prionjivosti. Norma preporučuje ispitivanje savijanjem u 3 i u 4 točke ovisno o veličini uzorka i posmičnom naprezanju koje se mora postići. Za ispitivanje uzorka odabran je test savijanjem u 4 točke radi velikih dimenzija uzorka i potrebnog raspona oslonaca. Zbog male vlačne čvrstoće obloga nije korišten standardni test čije su dimenzije u normi već je preliminarno određena potrebna udaljenost sile od oslonca

### 2.1. Komponente i dimenzije ispitanih uzoraka

Laboratorijska ispitivanja su provedena na kompozitnim uzorcima s jezgrom izvedenom od PUR pjene gustoće  $45\text{kg/m}^3$  i nosivih obložnih Fermacell Firepanel A1 gips-vlaknastih ploča s pojačanim svojstvima vatrootpornosti debljine 15mm. Uzorci su izrađeni u obliku prizmi, dimenzije su sljedeće: P2-Fp2-45, duljina, l: 149,29 cm, širina, b: 39,83 cm, debljina, d: 15,96 cm, debljina jezgre, c: 12,96 cm, debljina obloga, t: 1,5 cm i masa od 26,00 kg. P3-Fp2-45, duljina, l: 149,27 cm, širina, b: 39,67 cm, debljina, d: 15,93 cm, debljina jezgre, c: 12,93 cm, debljina obloga, t: 1,5 cm i masa od 25,98 kg.

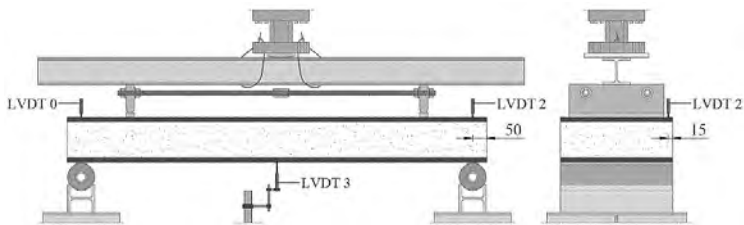
Prema izmjerenim dimenzijama uzorak je definiran kao nestandardni test. Prema normi ASTM C393/C393M za nestandardne uzorke dani su nuputci koji su ovdje bili zadovoljeni. Potrebna udaljenost djelujućeg opterećenja od oslonca preliminarnim proračunom određena je da mora biti manja od 285.71 mm, stoga je odabrana udaljenost osmine raspona oslonaca ili 175 mm.

Neposredno prije ispitivanja, vizualnim pregledom uzoraka utvrđena su oštećenja koja su nastala prije ispitivanja. Tijekom proizvodnje sendvič panela pri jakoj ekspanziji jezgre došlo je do odvajanja dijela jezgre, na način da se cijelom duljinom uzorka s jedne strane proteže pukotina širine nekoliko milimetara i dubine između 150 mm i 200 mm.

### 2.2. Ispitivanje i oprema za mjerenje

Ispitivanje je provedeno na čeličnom okviru pomoću Zwick/Roell hidrauličnog aktuatora kapaciteta od 250kN, kontrolom sile s brzinom prirasta od 6 mm/min. Pomaci uzorka mjere se na dva načina, 3D optičkim mjerenjem i pomoću LVDT-a proizvođača OMEGA LD320-25. Postava ispitivanja s mjernom opremom prikazana je na Slici 2. Na mjestima iznad oslonaca postavljeni su LVDT-0 i LVDT-2 s nominalnim hodom od +/- 25 mm, dok je na sredini raspona s donje strane postavljen LVDT-2 s nominalnim hodom od +/- 50 mm.

3D optička mjerenja provedena su uz pomoć ARAMIS 12M optičkog mjernog sustava s dvije kamere rezolucije 4096 x 3000 piksela. Mjerni volumen u našem slučaju iznosi  $1405 \times 1405 \times 1730 \text{ mm}^3$ . Za obradu slika se korišten je softver ARAMIS i GOM correlate 2020.

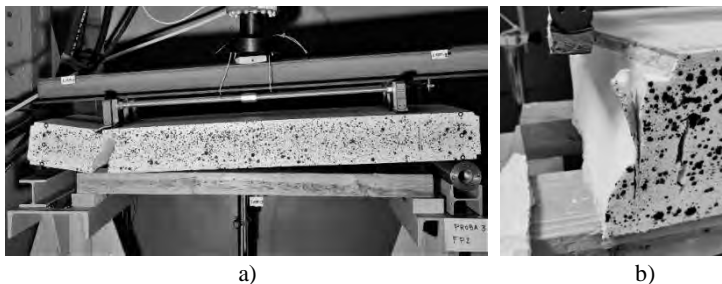


Slika 2. Sustav ispitivanja s pozicijama LVDT uređaja u frontalnom i bočnom pogledu [4]

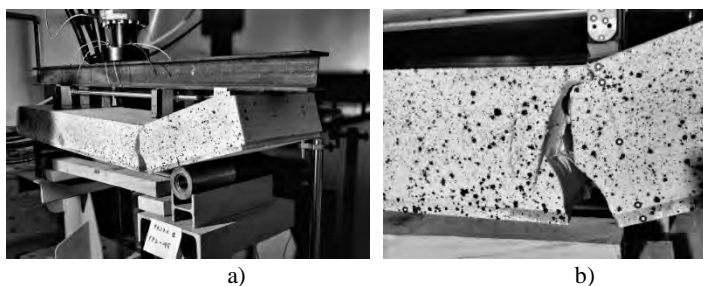
### 2.3. Rezultati ispitivanja

Kao rezultat ispitivanja prikupljene su sile u aktuatoru. Za uzorak P3-Fp2-45, izmjerena sila neposredno prije sloma iznosi 10,495 kN, dok za uzorak P2-Fp2-45 iznosi 11.13 kN. Iz sila je izuzeto opterećenje od težine alata za prijenos opterećenja.

Slom uzorka P3-Fp2-45 (slika 3) nastao je uslijed savijanja, gdje je prvo došlo do sloma donje obloge uslijed dosezanja vlačne čvrstoće, nakon čega je nastupio slom jezgre i gornje obloge. Na iniciranje pukotine utjecali su kartonski i plastični umeci koji služe kao distanceri između dviju gips-vlaknastih ploča u fazi izrade uzorka. Obzirom da je očekivani mehanizam sloma bio posmični slom u jezgri, a do kojeg nije došlo, prionjivost između komponenti sendvič panela je svejedno ostala očuvana ako se zanemari komadić koji se odlomio. Kako bi na uzorku P2-Fp2-45 dobili posmični slom u jezgri, odlučeno je dodatno smanjiti udaljenost oslonca u odnosu na djelujuće opterećenje za 45 mm te udaljenost od oslonca iznosi 130 mm.



Slika 3. Prikaz a) sloma uzorka P3-Fp2-45 i b) kartonskih umetaka [4]



Slika 4. Prikaz a) sloma uzorka P2-Fp2-45 i b) kose pukotine [4]

Slom uzorka P2-Fp2-45 je i ovoga puta uzorkovana savijanjem (slika 4.). Možemo zaključiti kako

zbog obloga relativno male otpornosti na vlak i savijanje od 2.4 MPa i 5.8 MPa koje su pritom i krte, nije došlo do čistog posmičnog sloma u pjenu te bi raspon oslonaca morao biti jako mali. Ponašanje jezgre pokazalo se bolje od očekivanog te jezgra sigurno ima veću posmičnu čvrstoću od pretpostavljene. Slomu uzorka P2-Fp2-45 također je doprinijela kosa pukotina pozicionirana s desne strane uzorka ispod alata za prijenos opterećenja. Pukotina je također bila prisutna prije ispitivanja, a nastala je tijekom proizvodnje.

#### 2.4. Usporedba i rezultati ispitivanja

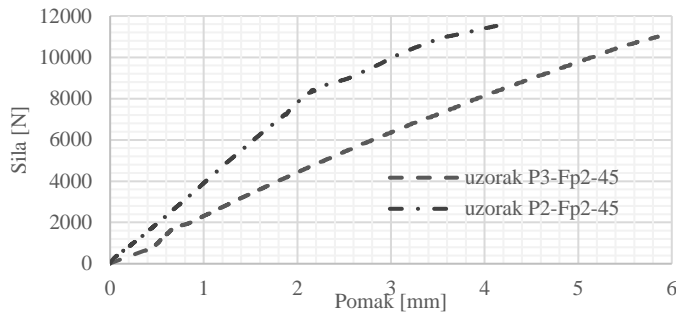
Usporedba dobivenih rezultata prikazana je u Tablici 2 za uzorke P3-Fp2-45 i P2-Fp2-45. Iz rezultata naprezanja vidljivo je kako se smanjenjem raspona djelujućeg opterećenja i raspona oslonaca dobivaju 27% veća posmična naprezanja, no zbog obloga relativno male vlačne čvrstoće to nije bilo dovoljno. Naprezanje je manje od vlačne čvrstoće od 2.4 MPa, ali u primjedbi 10 norme ASTM C393/C393M [3] je navedeno da izračunato naprezanje u oblogama  $\sigma$ , ne predstavlja maksimalnu čvrstoću obloge, stoga su ovakvi rezultati mogući. Proračunski progibi se razlikuju od izmjerenih progiba za 8.9% u slučaju uzorka P3-Fp2-45 i 2.3% kod uzorka P2-Fp2-45 zbog pretpostavki o modulu posmika jezgre.

Tablica 2. Usporedba rezultata za uzorke P3-Fp2-45 i P2-Fp2-45

| Uzorak  |                               | P3-Fp2-45 | P2-Fp2-45 |
|---|-------------------------------|-----------|-----------|
| Vlačno naprezanje u oblogi $\sigma$ [MPa]         |                               | 1,14      | 1,05      |
| Posmično naprezanje u jezgri $\tau$ [MPa]         |                               | 0,096     | 0,122     |
| Mehanizam sloma                                   |                               | savijanje | savijanje |
| ASTM C393   | Progib uslijed savijanja [mm] | 1,04      | 0,37      |
|   | Progib uslijed posmika [mm]   | 5,33      | 3,93      |
|   | Ukupni progib [mm]            | 6,37      | 4,30      |
| Progib na sredini uzorka (LVDT-3) [mm]            |                               | 5,85      | 4,23      |
| Progib na sredini uzorka 3D optičko mjerenje [mm] |                               | 5,82      | 4,09      |

Na slici 5. je prikazan dijagram odnosa između sile i pomaka za uzorke P3-Fp2-45 i P2-Fp2-45. Uzorak P3-Fp2-45 ponaša se gotovo linearno jer su naprezanja u jezgri dosta

niska te nisu iskorištena hiper-elastična svojstva polimerne pjene. Uzorak P2-Fp2-45 ima manji progib zbog manjeg raspona oslonaca i djelujućeg opterećenja od oslonaca, no zbog većih napreznja u jezgri vidljiva je blaga nelinearnost u ponašanju.



Slika 5. Dijagram sila – pomak [4]

## Zaključak

U radu je prikazano eksperimentalno istraživanje kompozitnog panela izvedenog s oblogama od vatrootpornih gips-vlaknastih ploča i jezgrom od polimerne pjene. Provedeni su testovi savijanjem uzoraka s ciljem utvrđivanja svojstva prionjivosti između komponenata panela. Analizom laboratorijskih rezultata pokazalo se da je način ostvarivanja veze između komponenata kompozitnog panela, bez primjene adheziva, efikasan način u slučaju s gips-vlaknastim oblogama. Iako nije došlo do čistog posmičnog sloma jezgre što se željelo postići, nakon postignutih mehanizama loma nije došlo do odvajanja između komponenti sendvič panela. Zbog načina ugradnje polimerne pjene ne koristi se komercijalan proizvod uniformne gustoće, stoga mehanička svojstva uzoraka mogu varirati. 3D optička mjerenja daju jednako točne rezultate kao mjerenja LVDT uređajima, ali s puno više podataka uz kalibraciju i postavljanje samo jednog sustava te kraću obradu podataka. Poželjno je provesti dodatna laboratorijska ispitivanja na dodatnim uzorcima kako bi se potvrdili navedeni rezultati.

## Literatura

- [1] D. Zeckert, The Handbook of Sandwich Construction, 1997.
- [2] L. Gibson, »Cellular Solids: Structure, Properties and Applications,« Massachusetts, 2015.
- [3] ASTM International, C393/C393M - Standard Test Method for Core Shear Properties of Sandwich Constructions by Beam Flexure, United States, 2012.
- [4] L. Lukačević, »Ispitivanje kompozitnog panela na savijanje s ciljem utvrđivanja svojstva prionjivosti obloge i jezgre panela,« Rijeka, Građevinski fakultet u Rijeci, 2021.

- [5] F. C. Campbell, Manufacturing Processes for Advanced Composites, 2004.
- [6] DIAB, DIAB SANDWICH HANDBOOK, Laholm.
- [7] GOM, »correlate,« 2020.



# Uključivanje praktične komponente u nastavu iz topološkog optimiranja nosivih konstrukcija

Miler, D.<sup>1</sup>, Birt, D.<sup>2</sup>, Hoić, M.<sup>3</sup> i Jokić, A.<sup>4</sup>

## Sažetak

U radu je prikazana organizacija praktične komponente u nastavu topološkog optimiranja nosivih konstrukcija koja je održana u okviru kolegija Optimiranje mehaničkih konstrukcija na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu. Grupama studenata je zadan seminarski zadatak koji uključuje izradu nosača za koji je, uz zadanu količinu dostupnog materijala, potrebno ostvariti što manju podatljivost. Kako bi se postupak rješavanja ovog zadatka olakšao, izrađeni su prikladni nastavni materijali te je prilagođen računalni kod dostupan u otvorenom pristupu. Topološki optimirane konstrukcije koje studenti izrade se potom proizvode postupkom aditivne proizvodnje (3D printanje), nakon čega se provodi radionica. Na radionici studenti prezentiraju svoja konstrukcijska rješenja i provode izmjere progiba na posebno izrađenom ispitnom postavu. Svi nastavni materijali potrebni za provedbu zadataka kao i tehnička dokumentacija ispitnog postolja su dostupni na upit.

**Ključne riječi:** Topološko optimiranje nosivih konstrukcija, Organizacija nastave, Praktična nastava

---

<sup>1</sup> **Dr. sc. Daniel Miler, poslijedoktorand**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: daniel.miler@fsb.hr

<sup>2</sup> **Dominik Birt, mag. ing. mech., asistent**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: dominik.birt@fsb.hr

<sup>3</sup> **Doc. dr. sc. Matija Hoić, docent**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za motore i transportna sredstva, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: matija.hoic@fsb.hr

<sup>4</sup> **Prof. dr. sc. Andrej Jokić, redoviti profesor**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: andrej.jokic@fsb.hr

## 1 Uvod

Topološko optimiranje je metoda oblikovanja strojnih dijelova koristeći metodu konačnih elemenata. Provedba postupka uključuje definiranje domene, odnosno volumena unutar kojeg je dopušteno razmjestiti materijal [1]. Osim domene, definiraju se i položaji i svojstva oslonaca te opterećenja. U prvom koraku se dopuštena količina materijala ravnomjerno raspoređi po domeni te se rezultati evaluiraju metodom konačnih elemenata, koja služi za izračun funkcije cilja, što je u pravilu podatljivost konstrukcije. Valja napomenuti da je prikazano objašnjenje skraćeno te da su izostavljeni međukoraci poput filtriranja i penaliziranja mehaničkih svojstava elemenata polovične gustoće.

U novije vrijeme, topološko optimiranje se sve češće koristi prilikom konstruiranja elemenata strojeva [2]. Iako je njegovo područje primjene široko, u industriji se ono najčešće koristi kod oblikovanja složenih proizvoda ograničene mase ili volumena. Kod tih proizvoda se provedbom topološkog optimiranja može poboljšati njihove radne karakteristike, a time i vrijednost. Iz toga je vidljivo da, u moderno vrijeme, dobro poznavanje topološkog optimiranja značajna prednost inženjera te se sve češće uključuje u studentske programe [3]. Upravo iz tog razloga je predloženo uključivanje dodatnog praktičnog dijela iz topološkog optimiranja u nastavu kolegija Optimiranje mehaničkih konstrukcija (diplomska razina studija, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu).

U okviru rada je prikazan ranije provedeni postupak organizacije praktičnog dijela. Prikazana je ideja polaganja dijela gradiva kolegija kroz praktični rad u grupama, kao i ishodi učenja. Praktični rad je planirano provesti kroz završnu radionicu, za koju je bilo potrebno osigurati opremu potrebnu za provedbu eksperimenta. Nadalje, kratko su opisani i programski zadaci dodijeljeni studentima, očekivanja, kao i radni materijali izrađeni za kolegij. Valja napomenuti da je u otvorenom pristupu dostupan već broj programskih rješenja za provedbu topološkog optimiranja, od kojih su neka posebno prilagođena nastavi [4,5]. Naposljetku, cilj rada je bio prikazati ideju i rješenje praktičnog dijela nastave iz topološkog optimiranja, što bi moglo pomoći drugim nastavnicima kolegija. Sve opisane nastavne materijale je moguće dobiti kroz upit autorima.

## 2 Praktični rad u okviru topološkog optimiranja

Optimiranje mehaničkih konstrukcija je kolegij druge godine diplomske razine studija koji slušaju studenti konstrukcijskog smjera, usmjerenje motori i vozila te inženjerskog modeliranja i računalnih simulacija. U okviru kolegija studenti uče formalno (u matematičkom smislu) zapisati inženjerski problem, pronaći uvjete optimalnosti te primijeniti metode matematičkog programiranja za pronalazak rješenja. Posljednji dio gradiva iz kolegija se odnosi na topološko optimiranje.

Kolegij se u pravilu polaže kroz seminar, nakon kojeg obavezno dolazi usmeni ispit. Seminari se sastoje od tri zadatka, posljednji od kojih je vezan za 2D topološko optimiranje. Cilj je radionicom zamijeniti zadatak iz topološkog optimiranja, koja bi uključivala samostalnu izradu jednostavnog nosača koji bi potom bio izrađen. Za tako izrađeni nosač bi studenti u

okviru radionice provjerili progibe, što bi omogućilo i organizaciju svojevrsnog natjecanja između studenata, koji bi bili podijeljeni u grupe.

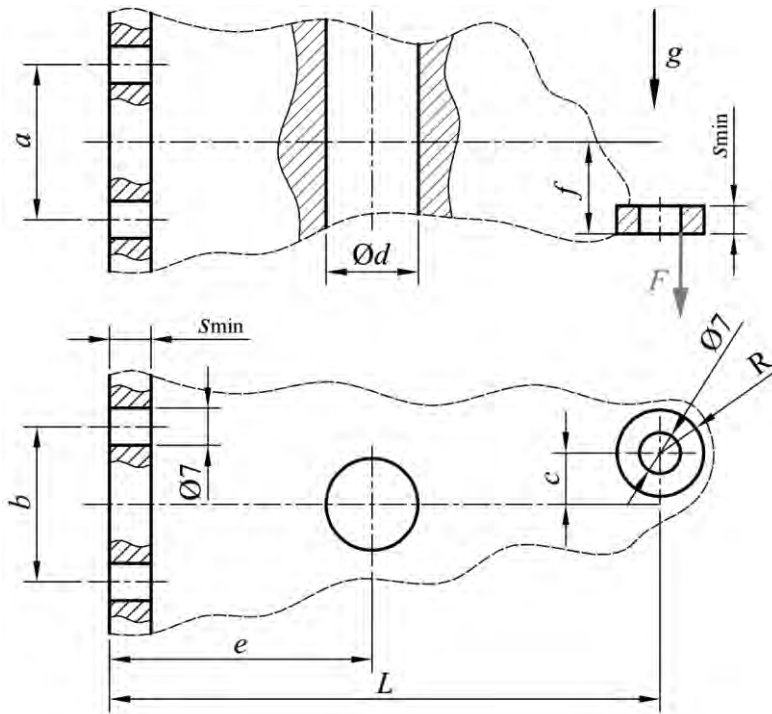
Za provedbu topološkog optimiranja koristio bi se Matlab kod prikazan u [5], koji je doraden kako bi bio pogodniji za ovu svrhu. Također, za navedeni kod su izrađeni popratni nastavni materijali. Tako dobiven topološki optimiran nosač bi se izradio koristeći opremu Katedre, što bi uključivalo 3D printer i potrošni materijal.

## 2.1 Programski zadatak

Kako bi se studenti pobliže upoznali s metodom, predviđena je izrada programskog zadatka. U okviru programskog zadatka potrebno je izraditi nosač pomoću topološkog optimiranja. Programski zadaci se međusobno razlikuju u vidu položaja prihvata, hvatišta opterećenja te ograničenja vezanih za domenu. Osnovna ideja je da svaka grupa za cilj ima minimizirati podatljivost konstrukcije uz zadanu najveću dopuštenu količinu materijala koji se smije utrošiti.

Prilikom izrade zadatka studenti mogu odabrati dimenziju domene, uzimajući u obzir pritom računalno vrijeme potrebno za traženje optimalnog rješenja. Također, nije dovoljno samo optimirati konstrukciju predloženom metodom, već je nužno omogućiti spajanje takvog nosača na ispitni postav (na mjestu oslonaca u modelu), kao i ovješnje tereta u točki (hvatište zadane aktivne sile). Na taj način će se studenti, uz savladavanje same metode, na jednostavnom primjeru suočiti sa skupom problema vezanih za eksperimentalni rad.

Studentima će geometrija ispitnog postava biti zadana, uključujući čeličnu nosivu konstrukciju i uteg, kao i karakteristike i geometrija senzora (digitalni komparator). Sheme programskih zadataka i pripadajuće varijable prikazane su na slici 1.



Slika 1. Shema programskog zadatka

## 2.2 Izrada programskog zadatka

Savladavanje i primjena nove metode na konkretan inženjerski problem zahtijevaju mnogo vremena. Stoga je, uzimajući u obzir obujam rada i opterećenje studenata na drugim kolegijima istog semestra, izrada programskog zadatka planirana u grupama. Također, sama izrada konstrukcija koristeći aditivnu proizvodnju iziskuje mnogo vremena; probne konstrukcije su se izrađivale između pet i deset sati, ovisno o potrebnoj količini materijala i složenosti geometrije.

Iz tog razloga se svaka grupa se sastoji od tri studenta. Planirano je da studenti zajedno izrađuju programski zadatak, koji sadržava:

*Konstruktivno rješenje* – izraditi 3D model nosive konstrukcije izrađen u skladu s zadanim parametrima. Rješenje je potrebno dostaviti u .stl formatu, kako bi se omogućila izrada koristeći 3D printer.

*Popratnu dokumentaciju* – sadržava kratke opise provedenog postupka optimiranja, kao što su razmatranja grupe, korištene metode, probleme koji su se pojavili tijekom rješavanja te kratak osvrt na rješenje. Planirano je da popratna dokumentacija sadržava oko 2000 riječi.

*Prezentaciju* – vezana uz popratnu dokumentaciju. Zamišljeno je da grupa u kratkim crtama objasni svoje rješenje kao i zapažanja i probleme koje su susreli. Prezentacija ne bi trebala trajati duže od 10 minuta.

*Ispitivanje* – topološki optimirana konstrukcija se spaja na ispitno postolje te se opterećuje utegom, nakon čega se senzor pažljivo dovodi u radni položaj. Više o ispitivanju prikazano je u Poglavlju 3.

### **2.3 Nastavni materijali**

Kako bi se pospješila izrada programskog zadatka, izrađena je literatura koja prati korake izrade programskog zadatka. Za svaki korak potreban za izradu topološki optimirane konstrukcije u skladu sa zadanim specifikacijama, osim teorijske podloge, priloženi su i kratki primjeri. Tako su uključeni primjeri odabira rezolucije (odnosa veličine elementa i domene), definiranje oslonaca i hvatišta sila, način izrade prihvata za ispitno postolje te oblikovanje prihvata tereta.

Nadalje, iako su studenti slobodni koristiti bilo koji alat, preporučena je primjena Matlab-a, za koji je priložen programski kod (prema [5]).

## **3 Provedba praktičnog dijela**

Praktični dio uključuje provedbu mjerenja progiba topološki optimiranog nosača. Kako bi se omogućilo mjerenje, bilo je nužno izraditi modele koje su studenti modelirali. Korištena je aditivna proizvodnja kao najpogodniji tehnološki postupak za izradu topološki optimiranih konstrukcija, koje u pravilu poprimaju organske oblike s brojnim šupljinama u unutrašnjosti [6]. Dijelovi su izrađeni koristeći ranije nabavljenu opremu (Prusa i3 MK3S) i potrošni materijal (PLA filament). Nakon što su dobili geometriju konstrukcije, studenti moraju izraditi 3D model koji je moguće otvoriti u CAD software-u. Nakon eventualnih sitnih dorada u CAD software-u, dokument se sprema u .stl formatu i šalje asistentu, koji započinje izradu. Nakon što su izrađeni 3D modeli za sve grupe studenta, moguće je organizirati radionicu na kojoj će studenti provjeriti krutost i tehnološkičnost svoje konstrukcije.

### **3.1 Organizacija radionice i potrebna oprema**

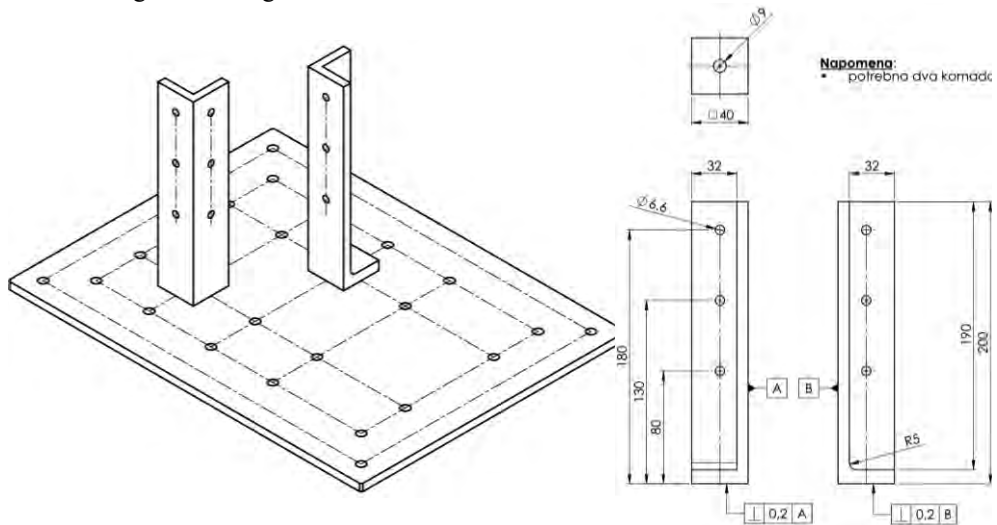
Prije održavanja radionice izrađuju se nosači za sve grupe studenata; zbog trajanja postupka, ali i njegove osjetljivosti, rok za predaju rješenja je pet dana prije same radionice. Na radionici se okupljaju svi studenti, te prema ranije određenom redu izlažu svoja rješenja. Svako izlaganje uključuje kratku prezentaciju, u skladu s okvirom izloženim u Poglavlju 2.2, te provedbu praktičnog dijela ispitivanja. Kako je kao funkcija cilja odabrana podatljivost konstrukcije, mjeri se progib u hvatištu koncentriranog opterećenja.

Praktični dio ispitivanja uključuje montažu nosača na ispitno postolje (prikazano u Poglavlju 3.2), ovješene tereta te mjerenje progiba. Za mjerenje progiba se koristi digitalni komparator, a izmjere izvršavaju studenti uz pomoć nastavnika u statičkim uvjetima. Za svako rješenje će se dobiti statička karakteristika sila-pomak. Izmjereni rezultati donose mogućnosti za daljnji rad, kao što su promatranje odnosa opterećenja i progiba te usporedba eksperimentalnih vrijednosti s vrijednostima dobivenim analitički ili korištenjem metode konačnih elemenata.

### 3.2 Eksperimentalni postav

Eksperimentalni postav je izrađen od nehrđajućeg čelika (Aisi 304) koji se sastoji od podnožne ploče, dva vertikalna nosača te četiri stope pomoću kojih se podešava položaj podnožne ploče. Postav je izveden na način da je moguće postići mnogo varijanti razmještaja prihvatâ, kao i veće dimenzije, u slučaju da bi se zadao zadatak gdje je konstrukciju potrebno sastaviti od dva segmenta. Na podnožnoj ploči je načinjeno 20 prolaznih rupa za vijke M8 raspoređenih tako da je moguće ostvariti što više različitih vrijednosti razmaka između vertikalnih nosača. Svaki od dva vertikalna nosača sadrži dva puta po tri rupe (u dvije ravnine), prema slici 2.

Zbog velike razlike u vrijednosti Young-ova modula elastičnosti za čelik i PLA (od kojeg će biti izrađeni nosači), prilikom mjerenja su zanemareni utjecaji deformacija ploče i vertikalnih nosača. Također, debljina stijenke vertikalnog nosača je u pravilu deblja od onih dobivenih topološkim optimiranjem, ponajprije zbog toga što je količina materijala koji studenti mogu utrošiti ograničena.



Slika 2. Nosiva konstrukcija eksperimentalnog postava

## 4 Zaključak

U radu je prikazan postupak uvođenja praktičnog dijela u nastavu iz kolegija Optimiranje mehaničkih konstrukcija. Predloženi dio se odnosi na topološko optimiranje i od studenata bi iziskivao samostalnu izradu topološki optimiranog nosača, koji bi se potom eksperimentalno evaluirao. Dopušteni utrošak materijala je zadan, kao i funkcija cilja, za koju je odabrana podatljivost konstrukcije. Stoga bi se nakon montaže na ispitno postolje digitalnim komparatorom mjerili progibi. Predviđeno je više dobiti uključivanja ovakvog tipa praktičnog rada u redovnu nastavu, ponajprije:

Česta primjedba studenata je nedostatak praktične komponente rada, koja je relativno malo zastupljena. Uvođenjem samostalnog praktičnog rada, ovaj problem bi se djelomično umanjio.

Izrada dijelova korištenjem aditivne proizvodnje je specifičan tehnološki postupak na koji utječu brojni okolišni faktori. Prezentiranjem svih poteškoća koje su se dogodile tijekom izrade studentima se približava kompleksnost postupka.

Tijekom provedbe praktičnog dijela, studenti će se susresti s problemima vezanim za eksperimentalni rad, pri čemu se primarno misli na poteškoće vezane za sastavljanje i ponovljivost mjerenja.

### **Literatura**

- [1] Bendsøe, M.P. i Sigmund, O; Topology optimization: Theory, Methods and Applications (2. izd.); Springer-Verlag, Berlin; 2004.
- [2] Bendsøe, M.P., Lund, E., Olhoff N. i Sigmund, O; Topology optimization – broadening the areas of application; Control and Cybernetics; 2005; 34(1); 8-35.
- [3] Sangree, R., Carstensen, J.V., Gaynor, A.T., Zhu, M. i Guest, J.K; Topology Optimization as a Teaching Tool for Undergraduate Education in Structural Engineering; ASCE Structural Congress 2015; 2015; 2632-42.
- [4] Sigmund, O; A 99 line topology optimization code written in Matlab; Structural and Multidisciplinary Optimization; 2001; 21; 120-7.
- [5] Liu, K. i Tovar, A; An efficient 3D topology optimization code written in Matlab; Structural and Multidisciplinary Optimization; 2014; 50; 1175-96.
- [6] Zhu, J., Zhou, H., Wang, C., et al; A review of topology optimization for additive manufacturing: Status and challenges; Chinese Journal of Aeronautics; 2021; 34(1); 91-110.



# Metodologija određivanja krivulja potresne ranjivosti kamenih zidanih zgrada

Nikolić, Ž.<sup>1</sup>

## Sažetak

U radu se izlaže metodologija za određivanje krivulja potresne ranjivosti kamenih zidanih zgradau gradskim središtima temeljena na indeksu potresne ranjivosti i nelinearnoj statičkoj metodi postupnog guranja.

Potresna ranjivost zgrada najprije se analizira metodom indeksa potresne ranjivosti temeljem izračunavanja 11 parametara koji opisuju glavne karakteristike koje utječu na globalni i lokalni slom zgrade kao što su vrsta i organizacija konstruktivnog sustava, materijalne karakteristike, tlocrtna i visinska pravilnost, nekonstrukcijski elementi te stanje očuvanosti. Zatim se vrši detaljna analiza kapaciteta nosivosti zgrada pomoću nelinearne statičke metode postupnog guranja. Iz krivulja kapaciteta zgrada određuju se vršna ubrzanja koja odgovaraju granici popuštanja i slomu, te se uspostavljaju odgovarajuće relacije s indeksima oštećenja. Temeljem izračunatih indeksa potresne ranjivosti i karakterističnih vršnih ubrzanja definiraju se krivulje potresne ranjivosti koje predstavljaju ovisnost oštećenja, indeksa potresne ranjivosti i vršnog ubrzanja tla za analizirani uzorak zgrada.

Krivulje potresne ranjivosti su određene za kamene zidane zgrade u povijesnoj jezgri Kaštel Kambelovca, izgrađene između 15. i 19. stoljeća. Mogu se koristiti za definiranje stupnja oštećenja zgrada za potres s određenim vršnim ubrzanjem tla. Dobivene krivulje mogu se primijeniti i u drugim naseljima sa zgradama sličnih konstrukcijskih i materijalnih karakteristika.

**Ključne riječi:** potresna ranjivost, kamene zidane zgrade, indeks potresne ranjivosti, nelinearnastatička metoda postupnog guranja

---

<sup>1</sup> Prof. dr. sc. Željana Nikolić, dipl. ing. građ., Sveučilište u Splitu, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Matice hrvatske 15, 21000 Split, e-mail: zeljana.nikolic@gradst.hr

## 1 Uvod

S ciljem podizanja potresne otpornosti i sigurnosti građana i društva u cjelini potrebno je razviti mehanizme i metodologije sprječavanja, upravljanja i prevladavanja potresnih rizika na razini pojedinačnih zgrada, naselja, lokalnoj razini gradova i šire. Ovakve metodologije bi pomogle gradskim, županijskim i državnim institucijama da učinkovito upravljaju procesima vezanim za opasnost od potresa, što uključuje kapitalizaciju postojećeg znanja u području upravljanja potresnom opasnošću, definiranje mogućih scenarija i detaljnu analizu teritorijalnih ranjivosti, utvrđivanje prioriteta i poduzimanje mjera za sanaciju i povećanje otpornosti ugroženih zgrada.

Potresna otpornost kamenih zidanih građevina u povijesnim gradskim središtima smještenima u seizmički aktivnim područjima važna je za sigurnost stanovnika u slučaju potresnog djelovanja. Procjena potresne ranjivosti i kapaciteta, kao i stanja oštećenja, složen je zadatak čak i za jednu građevinu. Zahtijeva skupe eksperimente [1, 2] ili složene nelinearne metode koje precizno modeliraju disipaciju energije u potresu [3, 4]. Analiza cjelovitih zgrada provodi se nelinearnom statičkom metodom postupnog guranja, u kojoj se zgrada postupno opterećuje do sloma prema jednolikoj ili modalnoj raspodjeli opterećenja, ili inkrementalna dinamička analiza, u kojoj se ubrzanje tla povećava do sloma konstrukcije. Obje vrste analiza omogućuju praćenje razine oštećenja i određivanje slomnog opterećenja. Procjena potresne otpornosti velikog broja zgrada u gradovima mnogo je zahtjevnija jer nije moguće provesti nelinearnu analizu za sve zgrade. Zbog toga se s ciljem učinkovitog upravljanja potresnim rizikom često vrši analiza potresne ranjivosti pomoću empirijskih metoda kao što su metode indeksa vjerojatnosti oštećenja i metode indeksa ranjivosti [5].

U ovome radu primijenjena je metoda izračuna indeksa potresne ranjivosti izvedena iz talijanskog GNDT pristupa [5,6], s nekim izmjenama koje su rezultat specifičnih karakteristika zgrada i građevinskih materijala tipičnih za istraživano područje. Umjesto određivanja veze između indeksa ranjivosti i oštećenja na osnovu stanja oštećenja zgrada uzrokovanih prošlim potresima, veza između oštećenja, ranjivosti i vršnog ubrzanja tla određena je na osnovu proračuna nelinearnom metodom postupnog guranja. Indeks oštećenja prikazuje se u rasponu 0-1 pomoću tri-linearnog zakona definiranog vršnim ubrzanjem tla na granici popuštanja,  $PGA_y$ , koji predstavlja početak oštećenja, i vršnim ubrzanjem pri slomu zgrade,  $PGA_c$ . Temeljem dobivenih rezultata izvode se krivulje potresne ranjivosti za analizirane zgrade.

## 2 Primjena metode indeksa ranjivosti na odabranom području

Metoda indeksa ranjivosti sastoji se u izračunavanju indeksa ranjivosti zgrade na osnovu 11 parametara [6, 7]. Glavni parametri vrednuju vrstu i organizaciju konstrukcijskog sustava, njegovu kvalitetu, posmičnu otpornost u dva međusobno okomita smjera, položaj zgrade i temelje, izvedbu stropnih konstrukcija, tlocrtnu i visinsku pravilnost, najveću udaljenost između zidova, tipologiju i težinu krova, prisutnost nekonstrukcijskih elemenata i stanje očuvanosti. Svakom parametru dodjeljuje se ocjena od "A", koja odgovara optimalnom stanju, do "D", koja znači loše stanje. Svakom od navedenih ocjena dodjeljuje se numerički

rezultat. Za vrednovanje utjecaja pojedinih parametara na ukupni indeks ranjivosti koriste se težinski koeficijenti koji uzimaju u obzir relativnu važnost svakog parametra. Indeks ranjivosti  $I_V$  izračunava se u obliku:

$$I_V = \sum_i s_{vi} w_i \quad (1)$$

gdje su  $s_{vi}$  numerički rezultati za svaku klasu, a  $w_i$  težina svakog parametra. Zatim se ovaj indeks ranjivosti normalizira u rasponu 0–100%. Nizak indeks znači da konstrukcija nije osobito ranjiva i ima visoku potresnu otpornost, dok visoki indeks pokazuje da je konstrukcija ranjiva i ima niskupotresnu otpornost. Kako bi se metoda prilagodila stanju zgrada na test području, izvršene su određene modifikacije koje uvažavaju zamjenu fleksibilnih stropnih konstrukcija krutimarmirano-betonskim pri rekonstrukcijama zgrada te specifičnosti upotrijebljenih materijala [7-9].

U ovom radu, analizira se potresna ranjivost zgrada u povijesnoj jezgri Kaštel Kambelovca (Slika 1). Zgrade su izgrađene između 15. i 19. stoljeća (Slika 2). Zidane su od kamenih blokova s mortom u sljubnicama, debljine zidova između 45 i 75 cm. Međukatne konstrukcije i krovovi se uglavnom sastoje od drvenih greda i drvene podne obloge koje su pri rekonstrukcijama mjestimično zamijenjene armirano-betonskim pločama. Indeksi potresne ranjivosti za zgrade u povijesnom centru su prikazane na mapi (Slika 3).



Slika 1. Pogled na povijesnu jezgru Kaštel Kambelovca



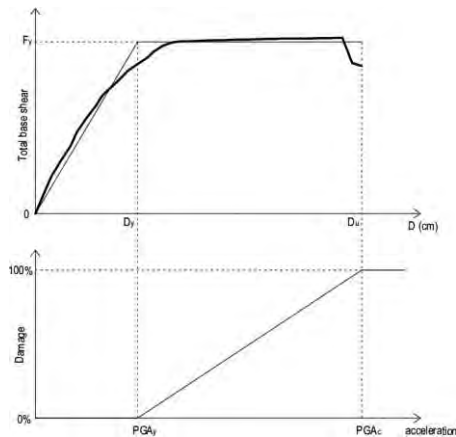
Slika 2. Tipične zgrade u povijesnoj jezgri Kaštel Kambelovca: kula Kambi, crkva Sv. Mihovila, knjižnica, Pučki kaštel, Dudanova palača, Veslački klub



Slika 3. Indeksi potresne ranjivosti zgrada u povijesnom centru

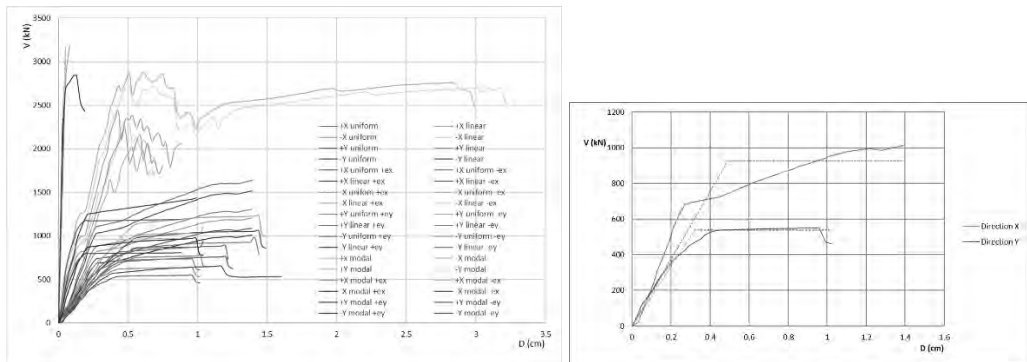
### 3 Statička nelinearna metoda postupnog guranja

Indeks oštećenja odredit će na osnovu statičke nelinearne metode postupnog guranja. Prikazat će se u rasponu 0-1 pomoću tri-linearnog zakona definiranog vršnim ubrzanjem tla na granici popuštanja,  $PGA_y$ , koji predstavlja početak oštećenja, i vršnim ubrzanjem pri slomu zgrade,  $PGA_c$  (Slika 4). Navedena vršna ubrzanja za svaku zgradu odredit će se metodom postupnog guranja prema Eurokodu 8 [10] pomoću računalnog programa TREMURI [11] analizirajući krivulje kapaciteta nosivosti dobivene postupnim povećanjem horizontalnog opterećenja do sloma. Raspodjela opterećenja može biti jednolika, linearna i modalna. Kako su zgrade uglavnom nepravilne u tlocrtu i po visini, koristi se višemodalna analiza koja uzima raspodjelu opterećenja definiranu većim brojem vlastitih vektora.



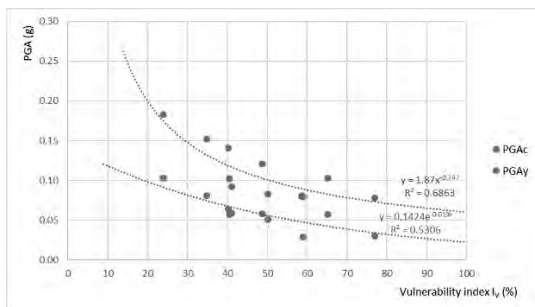
Slika 4. Krivulja postupnog guranja i tri-linearni zakon ubrzanje/oštećenje

Na slici 5 prikazan je primjer dobivenih krivulja postupnog guranja i bilinearna idealizacija najkritičnijih krivulja za smjer x i y za zgradu knjižnice.



Slika 5. Krivulje postupnog guranja i bilinearna idealizacija najkritičnijih krivulja za smjer x i y za zgradu knjižnice

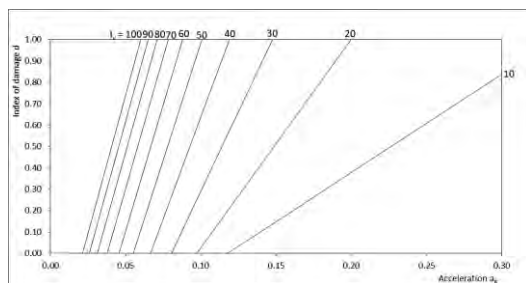
Za 11 odabranih zgrada na test području određena su kritična ubrzanja za početak oštećenja  $PGA_y$  i pri slomu  $PGA_c$ . Svaka zgrada predstavljena je s dvije točke u dijagramu na slici 6, jedna je veza indeksa ranjivosti  $I_v$  i vršnog ubrzanja  $PGA_y$ , a druga indeksa ranjivosti  $I_v$  i vršnog ubrzanja  $PGA_c$ . Određene su krivulje koje definiraju ubrzanje za početak oštećenja i za slom koje najbolje reprezentiraju dobivene diskretne točke.



Slika 6. Veza indeksa ranjivosti i vršnih ubrzanja

Indeksi ranjivosti i krivulje ubrzanja na slici 6 mogu se koristiti za izračunavanje vršnih ubrzanja za početak oštećenja i slom zgrada na analiziranom području. Krivulje potresne ranjivosti predstavljene su tri-linearnim zakonom (Slika 7) i određene na osnovu vršnih ubrzanja početak oštećenja  $PGA_y$  i slom  $PGA_c$ . Kako su  $PGA_y$  i  $PGA_c$  funkcije indeksa ranjivosti  $I_v$ , vrijednosti  $PGA_y$  pridružuje se indeks oštećenja  $d = 0$ , a  $PGA_c$  indeks  $d = 1$ , što se izračunava zasvaki  $I_v$ . Krivulje su prikazane na slici 7. Dobivene krivulje ranjivosti koriste se za određivanje indeksa oštećenja zgrada za koje nije provedena detaljna nelinearna analiza.

Prikazani postupak i krivulje potresne ranjivosti mogu se upotrijebiti za određivanje mapa kritičnih vršnih ubrzanja tla za stanje početka oštećenja i sloma te mape indeksa oštećenja za odgovarajuća povratna razdoblja potresa. Kombinacija metode indeksa ranjivosti s nelinearnom metodom postupnog guranja učinkovita je u procjeni potresnog rizika i oštećenja zgrada na teritorijalnoj razini.



Slika 7. Krivulje potresne ranjivosti kamenih zgrada

## Zahvala

Istraživanje je financirano projektom Europske unije “Preventing, managing and overcoming natural-hazards risks to mitigate economic and social impact” - PMO-GATE iz programa InterregItalija-Hrvatska. Parcijalna financijska potpora dobivena je i projektom Hrvatske vlade i Europske unije iz Operativnog programa kompetitivnosti i kohezije (Projekt

KK.01.1.1.02.0027).

### Literatura

- [1] Nikolić, Ž., Krstevska, L., Marović, P. i Smoljanović, H.; Experimental investigation of seismic behaviour of the ancient Protiron monument model; *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*; 2019; 48(6); 573-593.
- [2] Krstevska, L., Nikolić, Ž. i Kustura, M; Shake table testing of two historical masonry structures for estimation of their seismic stability; *Int. J. of Arch.Heritage*; 2021;15(1);45–63.
- [3] Nikolić, M.; Do, XN.; Ibrahimbegovic, A. i Nikolić, Ž.; Crack propagation in dynamics by embedded strong discontinuity approach: Enhanced solid versus discrete lattice model; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 2018; 340; 480-499.
- [4] Čarija, J.; Nikolić, M.; Ibrahimbegovic, A. i Nikolić, Ž.; Discrete softening-damage model for fracture process representation with embedded strong discontinuities; *Engineering Fracture Mechanics*; 2020; 236; 107211.
- [5] Benedetti, D. i Petrini, V; Vulnerability of masonry buildings: Proposal of a method of assessment (in Italian); *L'industria Costruzioni*; 1984; 149; 66–74.
- [6] GNDT-SSN; Scheda di Espozione e Vulnerabilita e di Rilevamento Danni di Primo e Secondo Livello (Murata e Cemento Armato); GNDT-SSN: Rome, Italy, 1994.
- [7] Nikolić, Ž., Runjić, L., Ostojić Škomrlj, N. i Benvenuti, E.; Seismic Vulnerability Assessment of Historical Masonry Buildings in Croatian Coastal Area; *Applied Sciences*; 2021;11; 5997.
- [8] Nikolić, Ž.; Estimation of the seismic capacity of civil engineering structures Proceedings of 1st Croatian Conference on Earthquake Engineering, 1CroCEE; Zagreb, Croatia - March 22nd to 24nd, 2021; Urednici: Lakušić, S. i Atalic, J.; 2021.
- [9] Nikolić, Ž., Runjić, L., Ostojić Škomrlj, N., Kozulić V., Grozdanić, G. i Benvenuti, E.; Seismic assessment of historical stone masonry buildings; Proceedings - ECOMAS MSF 2021 -5th Int. Conf. on Multi-scale Comp. Methods for Solids and Fluids; Urednici: Ibrahimbegović, A. i Nikolić, M.; Sarajevo: Građevinski Fakultet; 56-57; 2021.
- [10] EN 1998-1 Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance-Part 1: General Rules, Seismic Actions and Rules for Buildings; CEN: Brussels, Belgium, 2004.
- [11] TREMURI Software, Professional version; S.T.A. DATA: Torino, Italija, 2019.



# Modeliranje oštećenja u piezoelektričnim materijalima primjenom rešetkastog modela

Novak, M.<sup>1</sup>, Marenić, E.<sup>2</sup> i Jarak, T.<sup>3</sup>

## Sažetak

Razvijen je piezoelektrični štapni konačni element, čija će primjena biti u rešetkastim modelima. Dodavanjem diskontinuiteta u polje pomaka takvog elementa može se opisati omekšavanje materijala te se takav element koristi za proučavanje inicijacije i propagacije pukotine u piezoelektričnim materijalima.

**Ključne riječi:** piezoelektrični materijali, piezoelektrični štapni konačni element, rešetkasti model, diskontinuitet

---

<sup>1</sup> **Matija Novak, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, e-mail: matija.novak@fsb.hr

<sup>2</sup> **Dr. sc. Eduard Marenić, dipl. ing.**, *Institut Clément Ader, CNRS UMR 5312, Université Fédérale Toulouse MidiPyrénées, INSA/UPS/Mines Albi/ISAE, France*, e-mail: marenic@insa-toulouse.fr

<sup>3</sup> **Dr. sc. Tomislav Jarak, dipl. ing.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, e-mail: tomlslav.jarak@fsb.hr

## 1 Uvod

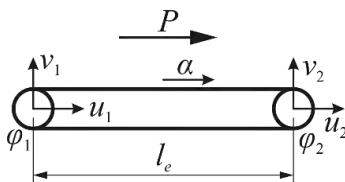
U moderno vrijeme, za mnoge se uređaje zahtjeva da budu sposobni osjetiti vanjske podražaje i reagirati na njih na način kako je to unaprijed određeno. Takvi se uređaji često nazivaju i „pametnim“ uređajima. Da bi mogli ispuniti te zahtjeve, opremljeni su nizom senzora i aktuatora. Senzori trebaju osjetiti taj vanjski podražaj i pretvoriti ga u električni signal, dok je zadaća aktuatora reagiranje na taj podražaj ovisno o signalu koji su dobili. U oba slučaja dolazi do pretvorbe mehaničke i električne energije. Piezoelektrični materijali imaju izraženu spregnutost mehaničkog i dielektričnog odaziva pa su zbog toga prikladni za izradu tih senzora i aktuatora.

Da bi se mogao procijeniti vijek trajanja takvih materijala, a time i cijelog uređaja, potrebno je poznavati njihovo ponašanje prilikom oštećenja i loma. Većina piezoelektričnih materijala su kvazi-krhki i postoji veliki broj numeričkih modela za opisivanje ponašanja takvih materijala, od kojih se većina zasniva na kontinuumskoj teoriji [1, 2]. Kao jednostavnija alternativa takvim modelima, pojavili su se rešetkasti modeli [3, 4]. U rešetkastim modelima je kontinuum podijeljen na krute čestice, koje su zatim povezane jednodimenzijskim konačnim elementima. Ti elementi predstavljaju kohezivne veze unutar materijala. Pucanje tih veza predstavlja širenje pukotine u materijalu, a ostvaruje se aktivacijom diskontinuiteta u polju pomaka u točki integracije elementa. Kad naprezanje u elementu dosegne neku graničnu vrijednost (npr. granicu tečenja), diskontinuitet se aktivira i počinje slabljenje veze, a posljedično s tim i omekšanje materijala.

U ovom radu će biti opisan izvod piezoelektričnog štapnog konačnog elementa s diskontinuitetom koji se koristi za opisivanje ponašanja piezoelektričnih materijala prilikom oštećenja i loma.

## 2 Piezoelektrični štapni konačni element s diskontinuitetom

Piezoelektrični štapni konačni element koji se koristi u rešetkastim modelima ima dva čvora i po tri stupnja slobode u svakom čvoru, pomake u smjeru uzdužne i poprečne osi štapa te električni potencijal, kao što je prikazano na slici 1. Veličina  $\alpha$  prikazana na slici 1. označava skok u polju pomaka na mjestu diskontinuiteta. Polarizacija štapnog elementa je u smjeru njegove uzdužne osi.



Slika 1. Piezoelektrični štapni konačni element s diskontinuitetom

Budući da u piezoelektričnim materijalima postoji spregnutost mehaničkog i dielektričnog odaziva, to treba biti prikazano i u konstitutivnim jednadžbama, koje za razmatrani jednodimenzijski slučaj naprezanja/deformacije i električnog pomaka/električnog polja u štapu glase:

$$\begin{aligned}\sigma &= E\varepsilon - eE_f, \\ D &= e\varepsilon + \kappa E_f,\end{aligned}\tag{1}$$

gdje je  $\sigma$  naprezanje u elementu,  $D$  električni pomak,  $\varepsilon$  uzdužna deformacija,  $E_f$  električno polje u smjeru uzdužne osi štapa,  $E$  modul elastičnosti,  $e$  koeficijent spregnutosti i  $\kappa$  permitivnost materijala. Kad naprezanje u elementu dosegne neku kritičnu vrijednost, dolazi do aktivacije diskontinuiteta, kojim se opisuje omekšavanje materijala.

Aktivacijom diskontinuiteta, dolazi do skoka u polju uzdužnog pomaka, koji se može zapisati kao:

$$u(x) = \bar{u}(x) + \alpha \cdot H,\tag{3}$$

gdje je  $\bar{u}$  regularni kontinuirani dio polja pomaka,  $\alpha$  skok u polju pomaka na mjestu diskontinuiteta, a  $H$  Heavisideova funkcija, koja ima vrijednost 0 za  $x \leq x_c$  i vrijednost 1 za  $x > x_c$ , gdje  $x_c$  označava položaj točke u kojoj dolazi do diskontinuiteta. Kod štapnih elemenata prikazanih u ovom radu, diskontinuitet je uvijek u točki integracije elementa.

Trenutak aktivacije diskontinuiteta se određuje izračunavanjem funkcije tečenja, koja uvijek treba biti manja ili jednaka nuli, a računa se preko izraza:

$$\Phi = \sigma - (\sigma_y - q) \leq 0,\tag{4}$$

gdje je  $\sigma_y$  početna granica tečenja materijala, a  $q$  funkcija koja opisuje ponašanje materijala prilikom omekšavanja. U predloženom modelu je to omekšavanje eksponencijalno pa ta funkcija ima oblik:

$$q = \sigma_y \left( 1 - e^{-\xi \frac{\sigma_y}{G_f}} \right),\tag{5}$$

gdje je  $G_f$  energija loma, a  $\xi$  parametar koji opisuje otvaranje pukotine.

Aktivacijom diskontinuiteta, dolazi i do promjena u dielektričnom odazivu materijala. To se ostvaruje degradacijom koeficijenta permitivnosti [1, 2], koji prije aktivacije diskontinuiteta ima vrijednost materijalnog parametra, a nakon aktivacije se računa prema izrazu:

$$\kappa = \kappa_v \cdot D_f + \kappa_0(1 - D_f),\tag{6}$$

gdje je  $\kappa_0$  zadani parametar materijala,  $\kappa$ , permitivnost vakuuma i  $D_f$  parametar oštećenja koji ima vrijednost 0 za neoštećeni materijal i vrijednost 1 za potpuno oštećeni materijal.

U predloženom modelu, parametar oštećenja se računa kao:

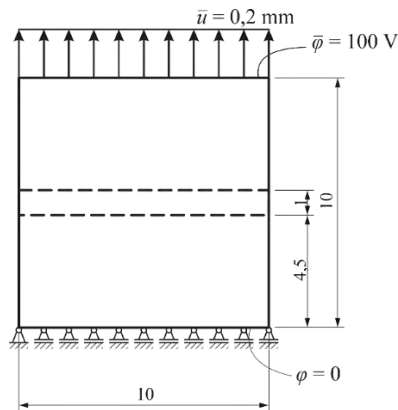
$$D_f = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_y}, \quad (7)$$

iz čega se može zaključiti da će i promjena permitivnosti biti eksponencijalna.

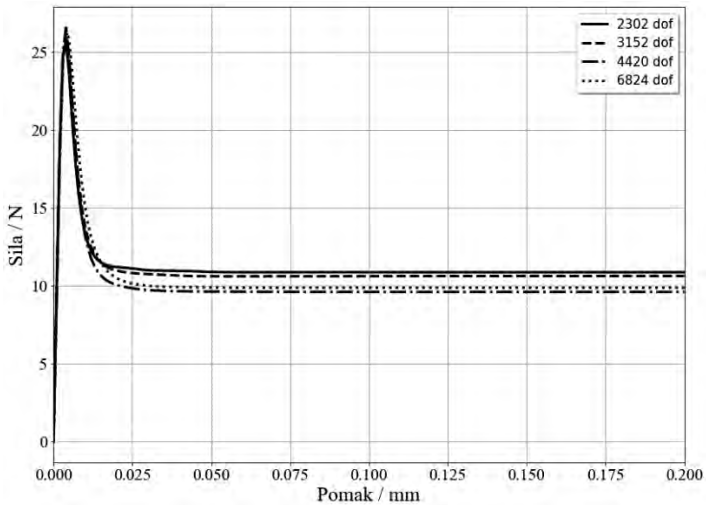
Opisani element je implementiran u nepravilni rešetkasti model, gdje se promatra može li se dobro opisati globalni odaziv modela prilikom pojave i propagacije pukotine u materijalu. Detaljniji opis izvoda elementa s diskontinuitetom pomaka te pripadni lokalni i globalni algoritmi računanja, mogu se pronaći u literaturi [4, 5].

### 3 Numerički primjer

Izvedeni štapni element se pokazao objektivnim s obzirom na promjenu gustoće mreže za primjenu na jednom štapu [8]. U ovom radu je element implementiran u rešetkasti model te je provjerena njegova objektivnost. Provedena je analiza ploče prikazane na slici 2. Ploča je diskretizirana štapnim elementima opisanim u prethodnom poglavlju, koji čine nepravilni rešetkasti model. Topologija rešetke je dobivena primjenom Delaunay triangulacije, nakon čega je napravljen Voronoi dijagram dualan toj triangulaciji. Stranice Voronoi dijagrama predstavljaju površine poprečnih presjeka elemenata. U [6] je pokazano da su vrijednosti materijalnih parametara za materijale koji se opisuju pomoću rešetkastih modela napravljenih od štapnih elemenata podložne nekim ograničenjima pa su tako odabrani i materijalni parametri štapova. Modul elastičnosti elemenata iznosi 100 GPa, energija loma 3 N/mm, a permitivnost materijala prije aktivacije diskontinuiteta  $1,65 \times 10^{-10}$  N/V<sup>2</sup> i ti parametri su jednaki za sve elemente. Koeficijent spregnutosti modela je odabran da iznosi 0,011 N/Vmm, a on za svaki element ovisi o njegovoj orijentaciji u odnosu na smjer polarizacije ploče [7]. Granica tečenja elemenata je 30 MPa, a elementi koji se nalaze u pojasu oko sredine ploče imaju nižu granicu tečenja od ostalih elemenata, kako bi se osiguralo da do pojave pukotine dođe u tom dijelu, a ne na rubovima ploče, gdje su elementi paralelni sa smjerom opterećenja pa bi u njima bilo i najveće naprezanje. Na slici 3. je prikazan dijagram ovisnosti ukupne reakcijske sile o pomaku gornjeg ruba ploče proveden za četiri mreže različite gustoće.



Slika 2. Model ploče s oslabljenim dijelom



Slika 3. Dijagram sila-pomak

## 4 Zaključak

Nakon provedene analize pojave oštećenja u piezoelektričnom materijalu primjenom rešetkastog modela sa štapnim piezoelektričnim konačnim elementom s diskontinuitetom u polju pomaka, što prikazuju rezultati na slici 3., može se zaključiti da je takav element objektivn s obzirom na promjenu gustoće mreže i može dobro opisati globalni odaziv modela prilikom pojave i propagacije pukotine.

Glavni nedostatak takvog modela je što prikazani štapni konačni element može opisati samo odcjepni način otvaranja pukotine pa je za dobivanje objektivnih rezultata

potrebno unaprijed oslabiti dio u kojem će doći do pojave oštećenja. Drugi nedostatak je taj što se pomoću štapnih elemenata ne može opisati bilo koji realni materijal, već postoje neka ograničenja materijalnih parametara koja je potrebno zadovoljiti.

U budućem istraživanju bit će izveden gredni piezoelektrični element s diskontinuitetom. U literaturi [3, 4, 5] je za pasivne materijale pokazano da korištenje grednih konačnih elemenata temeljenih na Timoshenkovoj teoriji može maknuti navedena ograničenja materijalnih parametara. Ograničenja materijala vezana uz dielektrični odaziv elemenata se mogu maknuti izvodom elementa s proizvoljnim smjerom polarizacije. Analogno izvodu pasivnog elementa, dodavanjem diskontinuiteta u polja uzdužnog i poprečnog pomaka, može se opisati i smični način otvaranja pukotine, čime se može dobiti dobar globalni odaziv modela bez znatnog oslabljivanja određenog dijela modela.

## Literatura

- [1] Linder, C., Rosato, D., Miehe, C.; New finite elements with embedded strong discontinuities for modeling of failure in electromechanical coupled solids; *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*; 2011.; 200; 141-161
- [2] Linder, C., Zhang, X.; Three-dimensional finite elements with embedded strong discontinuities to model failure in electromechanical coupled materials; *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*; 2014.; 273; 143-160
- [3] Ostoja-Starzewski, M.; Lattice models in micromechanics; *Applied Mechanical Reviews*; 2002.; 55(1); 35-60
- [4] Nikolic, M., Karavelic, E., Ibrahimbegovic, A., Miscevic, P.; Lattice Element Models and Their Peculiarities; *Archives of Computational Methods in Engineering*; 2017.; 25(3); 753-784
- [5] Benkemoun, N., Hautefeuille, M., Colliat, J.-B., Ibrahimbegovic, A.; Failure of heterogeneous materials: 3D meso-scale FE models with embedded discontinuities; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 2010; 82; 1671-1688
- [6] Novak, M., Marenić, E., Jarak, T.; 2D Piezoelectric Lattice Model; *Proceedings of the 9th International Congress of Croatian Society of Mechanics*; 2018.; 1-8
- [7] Novak, M., Marenić, E., Jarak, T.; Numerička analiza piezoelektričnih materijala primjenom rešetkastih modela; *Zbornik radova 9. susreta Hrvatskog društva za mehaniku*; 2019.; 239-244
- [8] Novak, M., Marenić, E., Jarak, T.; Piezoelektrični 1D element za rešetkaste modele; *Zbornik radova 10. susreta Hrvatskog društva za mehaniku*; 2020.; 177-184

# Čisto savijanje uzoraka sa unutarnjom strukturom

Papa Dukić, E.<sup>1</sup>, Žiković, L.<sup>2</sup> i Jelenić, G.<sup>3</sup>

## Sažetak

U radu će biti prikazana eksperimentalna analiza uzoraka sa umjetno proizvedenom unutarnjom strukturom koja je dobivena bušenjem kružnih rupa u aluminijskim prizmama različitih dimenzija. Uzorci su podvrgnuti tzv. *four point bending* testu s naglaskom na mjerenje uzdužnih deformacija u zoni čistog savijanja. Varijacije u mjerenjima na gornjem i donjem rubu u ovisnosti o proizvedenoj strukturi uzoraka biti će validirane standardnim numeričkim modelom po klasičnoj teoriji elastičnosti.

**Ključne riječi:** čisto savijanje, mikrostruktura, eksperimentalna analiza, deformacije

---

<sup>1</sup> **Doc.dr.sc. Edita Papa Dukić, dipl. ing. građ,** Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: edita.papa@uniri.hr

<sup>2</sup> **Laura Žiković, mag. ing. aedif,** Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: laura.zikovic@uniri.hr

<sup>3</sup> **Prof.dr.sc. Gordan Jelenić, redoviti profesor u trajnom zvanju,** Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

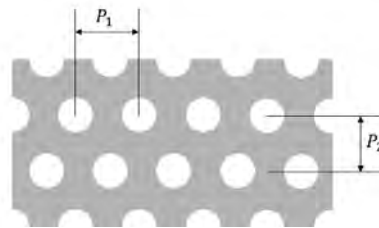
## 1 Uvod

Klasična Cauchyeva teorija elastičnosti uspješno reproducira brojne eksperimentalne rezultate na uzorcima proizvedenim od različitih materijala, poput čelika i aluminija. Međutim, u nekim slučajevima dolazi do značajnog odstupanja između eksperimentalnih i teorijskih rezultata. U slučajevima kada veličina mikrostrukture postaje značajna u odnosu na veličinu samog uzorka, prikaz klasičnom teorijom ne daje zadovoljavajuće rezultate. Ovo ponašanje je dokumentirano u istraživanjima zrnatih i vlaknastih struktura [1]. Takozvani utjecaj veličine (*size effect*) je uočen u materijalima gdje manji uzorci pokazuju kruće ponašanje u odnosu na veće uzorke, što ne može biti adekvatno modelirano klasičnom teorijom. Ovakvi eksperimentalni rezultati mogu biti opisani alternativnim teorijama kontinuuma kao što je Cosseratova mikropolarna teorija [2].

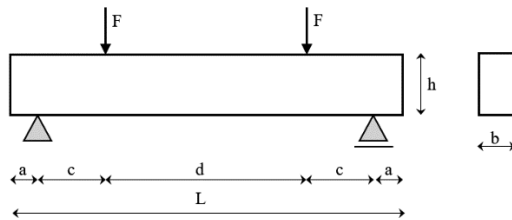
Da bismo bolje razumjeli ponašanje materijala sa izraženom mikrostrukturom, proveli smo eksperimentalna ispitivanja na uzorcima različitih veličina, izrađenim od materijala sa umjetnom proizvedenom strukturom. Uzorci su inspirirani radom autora Beveridge, Wheel i Nash [3].

## 2 Eksperimentalni postav

Eksperimenti su provedeni na metalnim uzorcima koji su dobiveni bušenjem rupa pravilnog rastera (slika 1.) u aluminijskim gredama. Za test čistog savijanja (slika 2.) na metalnim uzorcima odabrane su četiri veličine gređa čije dimenzije su dane u tablici 1. Prema slici 1, unutarnja struktura uzoraka je definirana vrijednostima  $P_1=16$  mm i  $P_2=12,7$  mm. Radijus šupljina iznosi 3,5 mm.



Slika 1. Unutarnja struktura uzoraka.

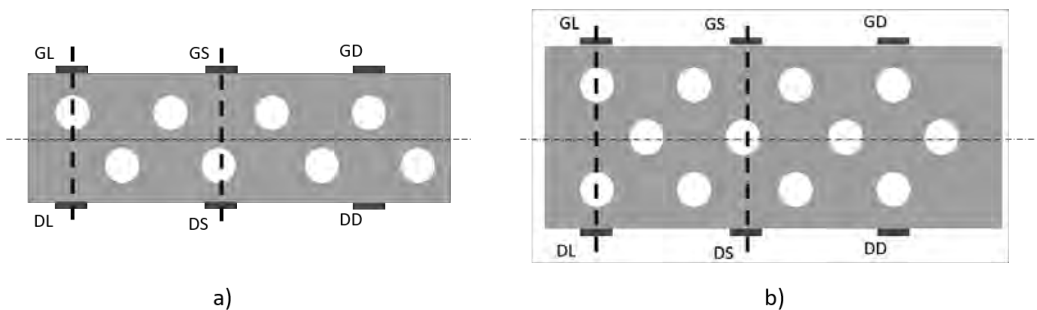


Slika 2. Dimenzije uzoraka i statički sustav.

Tablica 1. Dimenzije uzoraka.

| Greda | b [mm] | h [mm] | L [mm] | a [mm] | c [mm] |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|
| B1    | 12,7   | 12,7   | 150    | 5      | 35     |
| B2    | 12,7   | 25,4   | 280    | 10     | 66     |
| B3    | 12,7   | 38,1   | 400    | 10     | 66     |
| B4    | 12,7   | 50,8   | 530    | 10     | 66     |

U zoni čistog savijanja (dimenzija d na slici 1 i u tablici 1) svakog uzorka postavljen je određeni broj tenzometara za praćenje razvoja uzdužnih deformacija. Tako su na najmanjim uzorcima B1 postavljena dva tenzometra na gornjem i dva na donjem rubu uzorka a na svim ostalim uzorcima (B2, B3 i B4) su postavljena po tri tenzometra na oba ruba uzorka. Da bi se uzela u obzir lokalizacija deformacija u uzorcima sa mikrostrukturom, tenzometri su raspoređeni tako da se nalaze ili iznad rupe ili na sredini između dviju rupa, kako je prikazano na slici 3 za uzorke B2 i B3. Kratice na ovoj slici označavaju *GL*=gore lijevo, *GS*=gore sredina, *GD*=gore desno, *DL*=dolje lijevo, *DS*=dolje sredina, *DD*=dolje desno.



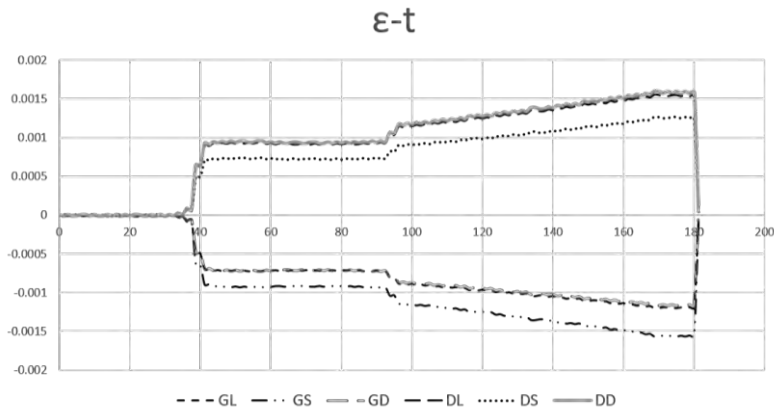
Slika 3. Raspored tenzometara na uzorcima B2 (a)) i B3 (b)).

### 3 Rezultati ispitivanja

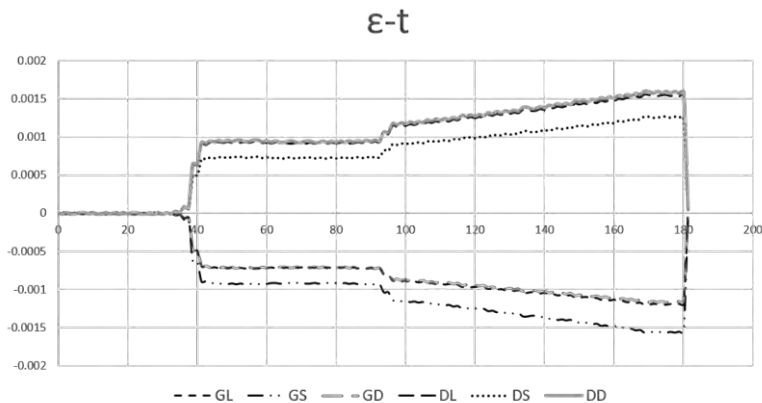
Uzorci pripremljeni na ovaj način su podvrgnuti tzv. four point bending testu na hidrauličnoj preši proizvođača Controls. Za najmanje uzorke ispitivanje je provedeno na uređaju Shimadzu Autograph AGS-X.

Ispitivanje je provedeno uz kontrolu sile brzinom od 10N/s do maksimalne vrijednosti od 1.5 kN, 2.8 kN, 4 kN i 5 kN redom za uzorke B1 do B4. Ispitivanje je provedeno samo u linearno elastičnoj zoni. Promjena deformacija na mjestima postavljenih tenzometara je prikazana na slikama 4 i 5 za uzorke B2 i B3.

Na ovim slikama se može uočiti da očitavanja na tenzometrima pokazuju veće deformacije na mjestima između rupa nego li tenzometri smješteni točno iznad rupa. Ovo ponašanje je suprotno očekivanom gdje bismo na mjestima gdje je manje materijala očekivali veće deformacije.



Slika 4. Izmjerene deformacije za uzorak B2.



Slika 5. Izmjerene deformacije za uzorak B3.

Ove rezultate treba potvrditi numerički te provesti detaljniju analizu.

## **Zahvale**

Ovaj rad je nastao u sklopu HRZZ projekta IP-2018-01-1732 (FIMCOS).

## **Literatura**

- [1] Lakes, R.S.; Experimental microelasticity of two porous solids; International Journal of Solids and Structures; 1986; 22(1); 55-63.
- [2] Cosserat, E. i Cosserat, F.; Theorie des corps deformables; Herma; Pariz; 1909.
- [3] Beveridge, A.J.; Wheel, M.A. i Nash, D.H.; The micropolar elastic behavior of model macroscopically heterogeneous materials ; International Journal of Solids and Structures; 2013; 50; 246-255.



## Oštećenja Dvora Trakošćan tijekom potresa $M \geq 5.5$ u Zagrebu i Petrinji u 2020. godini

Penava, D.<sup>1</sup>, Trajber, D.<sup>2</sup>, Markušić, S.<sup>3</sup>, Stanko, D.<sup>4</sup> i Kesedžić, M.<sup>5</sup>

### Sažetak

Dvor Trakošćan, sagrađen u drugoj polovici 13. stoljeća na stjenovitom vrhu planine, je kulturna baština zaštićena kao kulturno dobro od strane Republike Hrvatske. Dvor je izgrađen kao izrazito nepravilna zidana građevina od opeke, s međukatnim konstrukcijama od drvenih grednika ili plitkih zidanih svodova i lukova. Potresi M5.5 (VIII °EMS) i M6.2 (VIII-IX °EMS), koji su pogodili grad Zagreb 22. ožujka 2020. g. i Pokupsko-Petrinjsko područje 29. prosinca 2020. g., uzdrmali su konstrukciju Dvora Trakošćan. Oštećenja nastala uslijed potresa su pregledana i procjenjena vizualnim pregledom popraćenim mjerenjem ambijentalnih vibracija. Na Dvoru su zabilježena lakša oštećenja u obliku razvedenih tankih pukotina. Pojedine pukotine, iako tanke, su nastale na mjestima važnim za nosivost zidanih svodova. Rezultati mjerenja ambijentalnih vibracija su uspoređeni s rezultatima mjerenja iz 2016. godine. Usporedbom tih dvaju mjerenja uočeno je smanjenje osnovnog perioda centralnog tornja i drugog kata dvorca, što ukazuje na smanjenje krutosti konstrukcije uslijed oštećenja. Za određivanje odgovarajućih mjera popravaka i dogradnje dvorca, kako bi podnio buduće potrese, potreban je detaljni pregled konstrukcije Dvora.

**Ključne riječi:** Dvor Trakošćan, zaštićeno kulturno dobro, potresi, oštećenja, vizualni pregled, ambijentalne vibracije

---

<sup>1</sup> izv. prof. dr. sc. Davorin Penava, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek, Vladimira Preloga 3, 31000 Osijek, e-mail: dpenava@gfos.hr

<sup>2</sup> Domagoj Trajber, mag. ing. aedif., Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek, Vladimira Preloga 3, 31000 Osijek, e-mail: dtrajber@gfos.hr

<sup>3</sup> izv. prof. dr. sc. Snježana Markušić, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Horvatovac 102a, 10000 Zagreb, e-mail: markusic@irb.hr

<sup>4</sup> doc. dr. sc. Davor Stanko, Sveučilište u Zagrebu, Geotehnički fakultet, Hallerova aleja 7, 42000 Varaždin, e-mail: davor.stanko@gfv.unizg.hr

<sup>5</sup> Marina Kesedžić, univ. bacc. ing. aedif., Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek, Vladimira Preloga 3, 31000 Osijek, e-mail: marina.kesedzic@hotmail.com

## 1 Uvod

Dvor Trakošćan je zaštićen kao kulturna baština i bitna povijesna cjelina Republike Hrvatske. Smješten je na epicentralnom području Varaždin-Ivanščica-Kotjansko [1], te leži u Lepoglavskim sinklinalnim aluvijalnim sedimentima rijeke Bednje između planina Ivanščice i Ravne Gore (Geološka karta Hrvatske). Dvor je značajno obnovljen i dograđen u 16. i 18. stoljeću. Dvor je 16. ožujka 1982. godine pogođen potresom M4.5 (VII °EMS) s hipocentrom ispod planine Ivanščice (približno 20 km od Dvora), koji je uzrokovao znatna oštećenja tornja i drugog kata. Nakon tog događaja bio je podvrgnut popravcima i djelomičnoj nadogradnji i obnovi do 2000. godine.

Potresi, M5.5 (VIII °EMS) koji je pogodio grad Zagreb 22. ožujka 2020. g. i M6.2 (VIII-IX °EMS) koji je pogodio područje Pokupsko-Petrinja 29. prosinca 2020. g., su značajno potresli konstrukciju Dvora. Neposredno nako Petrinjskog potresa izvršen je vizualni pregled oštećenja nastalih na Dvoru Trakošćan te su provedena mjerenja ambijentalnih vibracija.

U radu su prikazani rezultati vizualnog pregleda oštećenja nastalih uslijed potresa 2020. godine, te usporedba izmjerenih ambijentalnih vibracija u ključnim točkama prije potresa (2016. g.) i nakon potresa (2021. g.). Pomoću izmjerenih ambijentalnih vibracija prije i nakon potresa moguće je utvrditi smanjenje krutosti kao posljedicu oštećenja (npr. skrivene pukotine unutar masivnih zidova) i potencijalne slabe točke složenih i nepravilnih konstrukcija.

Ovo istraživanje, kao i ranija istraživanja područja Trakošćana [2][3], su osnova za buduća istraživanja potresnog ponašanja i zaštite Dvora u svrhu pojačanja kako bi podnio buduće potrese. Očuvanje i zaštita povijesnih građevina od potresa jedan je od najizazovnijih problema s kojim je suočeno moderno društvo te on iziskuje multidisciplinarnu suradnju.

## 2 Mjerenja ambijentalnih vibracija

U [2] je korištena nedestruktivna metoda „Horizontal-to-Vertical-Spectral-Ratio“ (HVSr) za izradu procjene lokalnog seizmičkog odgovora i analize osjetljivosti Dvora Trakošćan. Mjerenja mikropodrtavanja su izvršene na otvorenom prostoru i tornju Dvora u svrhu uočavanja lokalnog seizmičkog odgovora i seizmičke osjetljivosti slabih točaka konstrukcije Dvora (slika 1.).



Slika 6. Lokacije mjerenja ambijentalnih vibracija

Mjerenja ambijentalnih vibracija 2016. i 2021. godine su izvršena na jednaka tri mjesta unutar Dvora. Provedena su na dva mjesta na drugom katu te na vrhu centralnog tornja (slika 1.). Svako je mjerenje trajalo 10 minuta s frekvencijom uzorkovanja od 128 Hz. U tablici 1. su prikazane osnovne frekvencije, dobivene iz mjerenja ambijentalnih vibracija 2016. i 2020. g., koje jasno ukazuju na smanjenje osnovne frekvencije centralnog tornja i drugog kata Dvora. Promjena osnovne frekvencije tornja i mjesta 1 na drugom katu Dvora nisu značajne kao promjena osnovne frekvencije (N/V komponente) mjesta 2 na drugom katu, gdje su zabilježene vidljive pukotine. Smanjenje frekvencije upućuje na gubitak krutosti konstrukcije kao posljedica oštećenja uzorkovanih potresom.

Tablica 2. Procjenjene osnovne frekvencije dobivene na temelju mjerenja ambijentalnih vibracija 2016. i 2021. godine

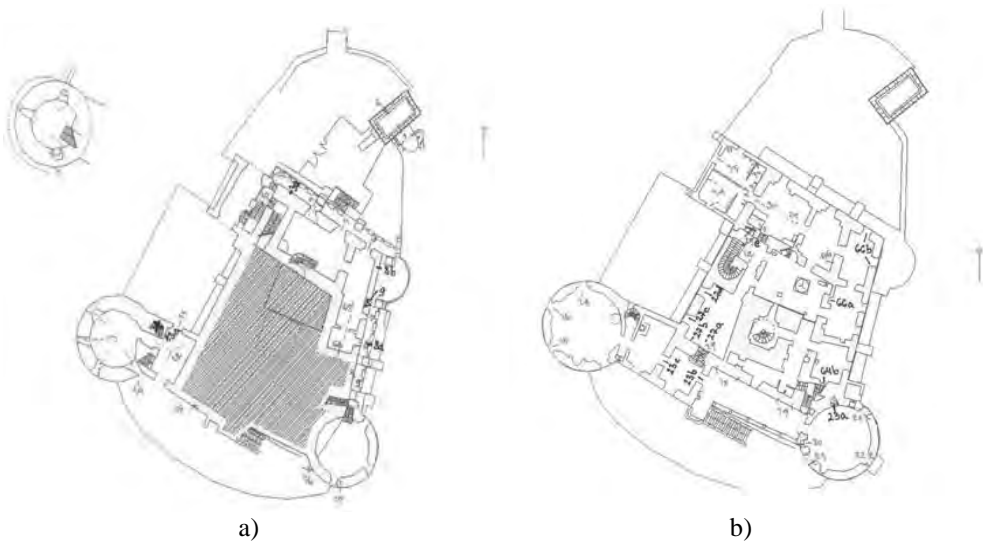
| <b>Godina</b> | <b>Centralni toranj</b>    |         |
|---------------|----------------------------|---------|
| <b>Smjer</b>  | NS/V                       | EW/V    |
| 2016          | 2.97 Hz                    | 3.13 Hz |
| 2020          | 2.77 Hz                    | 2.85 Hz |
|               | <b>Drugi kat, mjesto 1</b> |         |
| <b>Smjer</b>  | NS/V                       | EW/V    |
| 2016          | 4.52 Hz                    | 2.53 Hz |
| 2020          | 4.28 Hz                    | 2.46 Hz |
|               | <b>Drugi kat, mjesto 2</b> |         |
| <b>Smjer</b>  | NS/V                       | EW/V    |
| 2016          | 4.69 Hz                    | 4.19 Hz |
| 2020          | 3.84 Hz                    | 3.97 Hz |

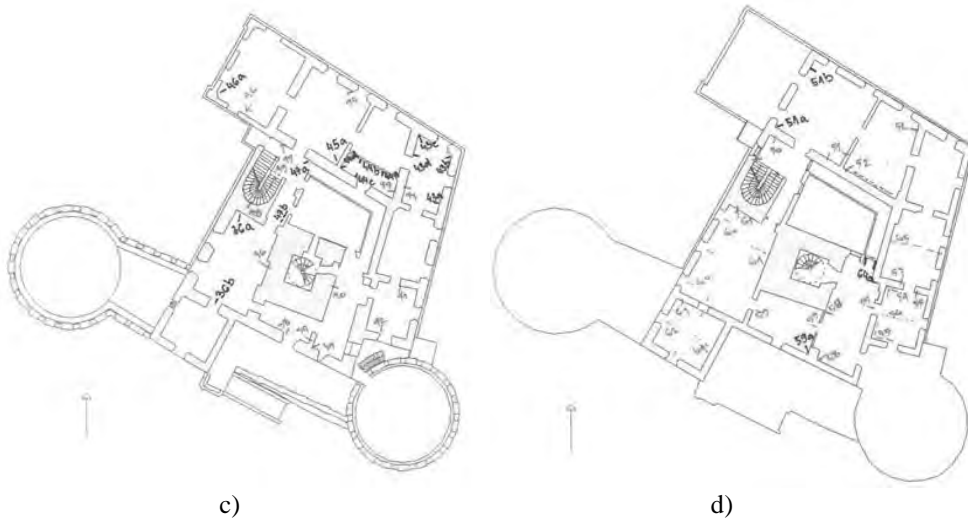
### 3 Vizualni pregled oštećenja

Osobine Dvora Trakošćan kao povijesnog kulturnog dobra, njegov konstrukcijski oblik i korišteni materijali, tijekom izgradnje, lokalni uvjeti, seizmička aktivnost u regiji i zakonski

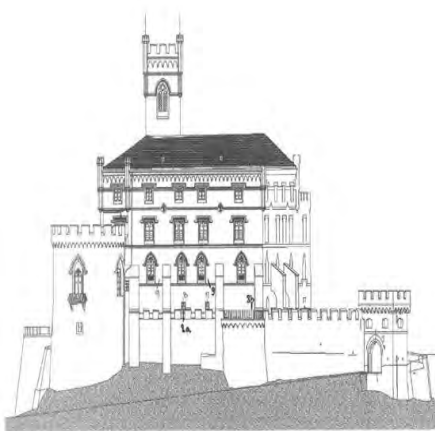
uvjeti (način obnove i dogradnje) su faktori koji su utjecali na razinu oštećenja uslijed potresa. Dvor je sagrađen kao izrazito nepravilna zidana građevina od opeke s međukatnom konstrukcijom od drvenih grednika ili plitkih zidanih lukova u stilu vojne arhitekture tog vremena.

Tijekom 2020. godine sjeverozapadno područje Hrvatske pogodila su dva značajna potresa, koji su potresli konstrukciju Dvora. Prvi potres M5.5 koji je pogodio grad Zagreb sa epicentrom udaljenim približno 40km od Dvora, uzrokovao je neznatna oštećenja na Dvoru. Drugi potres M6.2 koji je pogodio područje grada Petrinje sa epicentrom udaljenim približno 90km od Dvora, uzrokovao je nova oštećenja i proširenje nekih od postojećih oštećenja, u obliku razvedenih tankih pukotina. Nedugo nakon Petrinjskog potresa, u siječnju 2021. godine, izvršen je vizualni *in-situ* pregled oštećenja Dvora. Tijekom vizualnog pregleda na Dvora su zabilježene pukotine širine 1 do 4mm i dužine 2 do 6 m na pročeljima i u unutrašnjosti, zidanim nadvojima, lukovima, svodovima i zidovima. Na slikama 2. i 3. prikazane su mape pukotina zabilježenih tokom vizualnog pregleda.

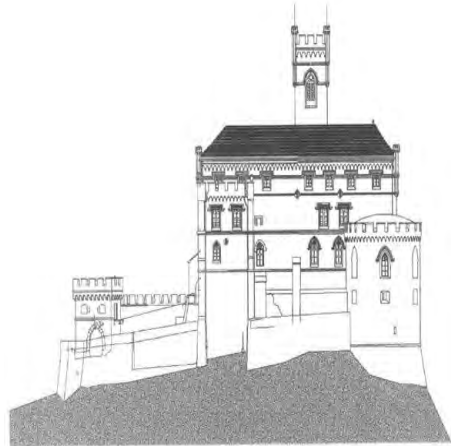




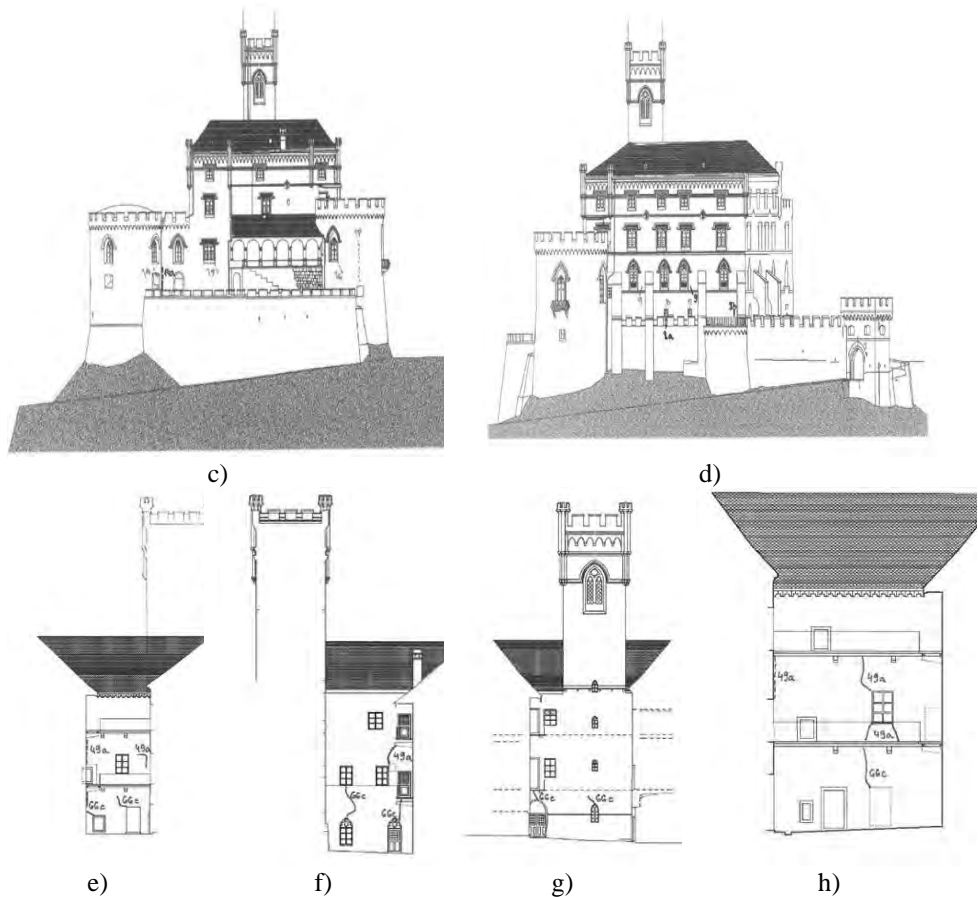
Slika 7. Mapa pukotina zabilježenih tokom vizualnog *in situ* pregleda  
a) podrum; b) prizemlje; c) prvi kat; d) drugi kat



a)



b)



Slika 8. Mapa pukotina zabilježenih tokom vizualnog *in situ* pregleda  
a) istočno pročelje; b) zapadno pročelje; c) južno pročelje; d) sjeverno pročelje; e) unutarnje istočno pročelje; f) unutarnje zapadno pročelje; g) unutarnje južno pročelje; h) unutarnje sjeverno pročelje

Pukotine su općenito nastajale u blizini kutova otvora ili krajeva zidova, odakle su se širile kroz konstrukciju. Pukotine na zidovima su većinom sitne dijagonalne posmične pukotine. Na temelju vrste pukotina, njihove raspodjele i karakteristika (širina, duljina, smjer i mjesto pojave), oštećenje građevine su svrstana u razred laganih oštećenja (stupanj 1: neznatna do lagana oštećenja) u skladu s EMS-89 ljestvicom [4].

Unatoč tome što su oštećenja nastala uslijed potresa opisana kao lagana oštećenja, zabilježene su dvije pukotine koje zbog mjesta nastanka mogu predstavljati opasnost (vidjeti sliku 4.). Pukotina na slici 4.a) (oznaka 12 na mapi pukotina) je vlačna pukotina širine < 1mm, koje je nastala pri vrhu plitkog luka raspona 4.35m. Ta pukotina se širi na susjedne svodove od koji plitki luk preuzima pripadni dio opterećenja. Zbog posebnosti mjesta nastanka pukotine (vrh plitkog luka), potrebno je poduzeti odgovarajuće mjere praćenja i kontrole pukotine. Pukotina na slici 4.b) (oznaka 52 na mapi pukotina) je pukotina širine <

3mm, te predstavlja blago oštećenje dijela zida drugog kata Dvora. Oštećeni zid se okomito spaja na vanjski zid koji preuzima opterećenje krovne konstrukcije, a to područje je također dodatno oslabljeno prisutstvom dimnjaka. Iznad spomenutog zida su provedene mjere ojačanja, izvođenjem horizontalnog armiranobetonskog serklaža. Međutim, prilikom izvedbe došlo je do prekida horizontalnog serklaža, što ga čini neefektivnim. Iz tog razloga potrebno je pratiti daljni razvoj te pukotine. Zanimljiv prostorni uzorak pukotina je zabilježen na svodu stropa u prizemlju, gdje se pukotine šire od otvora (prozora) prema središtu svoda (vidjeti sliku 5.) Ovakva vrsta oštećenja upućuje na moguću promjenu u nosivom sustavu konstrukcije, promjenu iz svoda na određeni broj pojedinačnih lukova, što uzrokuje preraspodjelu opterećenja i novu ravnotežu konstrukcije.

Vizualnim *in-situ* pregledom je zabilježena površinska manifestacija oštećenja uslijed potresa (pukotine u mortu). Općenito, građevina nije pretrpila značajna puknuća, te je vjerovatnost urušavanja konstrukcije izrazito mala. Međutim, detaljni pregled konstrukcije je potreban kako bi se odredile odgovarajuće mjere popravaka i dogradnje u svrhu smanjenja osjetljivosti na buduće potrese.



a) tanka pukotina širine  $< 1\text{mm}$  u vrhu luka; b) pukotina širine  $< 3\text{mm}$  na zidu drugog kata



Slika 10. Oštećenja stropnog svoda zapadnog tornja u razini prizemlja

#### 4 Zaključak

Dvor Trakošćan, posljednji put obnovljen 2000. g. i na drugom katu pojačan horizontalnim serklažom, je oštećen tijekom potresa koji su pogodili grad Zagreb 22. ožujka 2020. g. i Pokupsko-Petrinjsko područje 29. prosinca 2020. g. Pukotine uočene vizualnim in-situ pregledom su obzirom na širinu, duljinu, smjer i mjesto nastanka svrstane u razred neznatnih i laganih oštećenja u skladu s EMS-98 ljestvicom. Oštećenja uočena na drugom katu Dvora pojačanih horizontalnim serklažom posljedica su mogućeg neostvarenog spoja serklažima zbog čega je potreban detaljni pregled.

Usporedbom mjerenja ambijentalnih vibracija iz 2016. g. (prije potresa) i 2021. g. (nakon potresa), uočeno je opadanje krutosti (oslabljenje) konstrukcije Dvora, što upućuje na to kako su oštećenja uzrokovana potresom utječu na ponašanje konstrukcije

Oštećenja Dvora Trakošćan zahtijevaju detaljniji pregled i ugradnju uređaja za stalno praćenje ponašanja konstrukcije kako bi se utvrdile osnovne značajke odziva konstrukcije, ponašanje pri mogućem budućem potresu i predložile prikladne mjere pojačanja i obnove.

Građevine kulturne, sakralne ili općenito povijesne baštine, pretežno izgrađene iz nearmiranog zida i stropnih drvenih grednika zahtijevaju poseban pristup i mjere protupotresnih pojačanja s ciljem očuvanja nosivosti i uporabljivosti uslijed potresnih djelovanja ( $>M5$ ). One najčešće podliježu dodatnim uvjetima i zahtjevima konzervatora, što otežava izvedbu pojačanja, osobito kod posebno značajnih i zaštićenih građevina. Odabir mjera protupotresnih pojačanja, iako su određeni ustupci konzervatora prijeko potrebni, uvjetovan je nenarušavanjem njihovog postojećeg vanjskog izgleda s ciljem očuvanja ozračja prisutnog unutar povijesnih (urbanih) cjelina.

## Zahvale

Istraživanje je provedeno uz potporu i u okviru projekta ERASMUS+ programa Europske Unije pod nazivom „Environmental Risk Assessment and Mitigation on Cultural Heritage Assets in Central Asia – ERAMCA“ (projektni broj: 609574-EPP-1-2019-1-IT-EPPKA2-CBHE-JP) i programa i projekata Hrvatske zaklade za znanost (HrZZ) pod nazivom „Projekt razvoja karijera mladih istraživača – izobrazba novih doktora znanosti“ i „Procjena seizmičkog rizika građevina kulturne baštine u Hrvatskoj – SeisRICHerCRO“ (Projektni broj: IP-2020-02-3531).

## Literatura

- [1] Herak, D., Herak, M. i Tomljenović, B.; Seismicity and earthquake focal mechanisms in North-Western Croatia; Tectonophysics; 2009.; 465; 212-220
- [2] Stanko, D., Markušić, S., Strelec, S. i Gazdek, M.; Seismic response and vulnerability of historical Trakošćan Castle using HVSR method; Environmental Earth Sciences; 2016.; 75; 368
- [3] Stanko, D., Markušić, S., Strelec, S. i Gazdek, M.; Equivalent-linear site response analysis on the site of the historical Trakošćan Castle, Croatia using HVSR method; Environmental Earth Sciences; 2017.; 76; 642
- [4] Grünthal G, Musson RMW, Schwarz J, Stucchi M. European macroseismic scale 1998. Luxembourg; 1998.



## Tlačna čvrstoća tradicijskih zidova od nabijene zemlje: studija slučaja iz Aljmaša

Perić, A.<sup>1</sup>, Kraus, I.<sup>2</sup> i Krolo, P.<sup>3</sup>

### Sažetak

Ponašanje tradicijskih kuća od nabijene zemlje do danas je nedovoljno istraženo, a većina postojećih zemljanih građevina je u vrlo lošem stanju. Zbog nedostatka normi i smjernica za projektiranje zemljanih kuća, projektanti su često primorani koristiti norme za projektiranje zidanih i betonskih konstrukcija. Kako bi dobili saznanje o ponašanju tradicionalnih konstrukcija izgrađenih od nabijene zemlje, potrebno je utvrditi njihova osnovna mehanička svojstva. U ovom radu predstavljeno je laboratorijsko ispitivanje tlačne čvrstoće uzoraka prizme izrezanih iz većeg komada materijala prikupljenog na terenu. Prije ispitivanja provedena su preliminarna terenska istraživanja na području Istočne Hrvatske, u mjestu Aljmaš. Iz nekoliko zidova iste kuće od nabijene zemlje prikupljeni su materijali za pripremu ispitnih uzoraka. Provedbom ispitivanja uzoraka na tlak dobiveni su dijagrami odnosa sile i pomaka u smjeru tlačnog opterećenja. Na temelju najvećih tlačnih sila određene su tlačne čvrstoće, te je analiziran utjecaj udjela vlažnosti u materijalu na tlačnu čvrstoću.

**Ključne riječi:** nabijena zemlja, tlačna čvrstoća, udio vlažnosti, zemljana kuća, Istočna Hrvatska

---

<sup>1</sup> **Ana Perić, mag. ing. aedif.**, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek, Zavod za materijale i konstrukcije, Vladimira Preloga 3, 31000 Osijek, e-mail: [aperic@gfos.hr](mailto:aperic@gfos.hr)

<sup>2</sup> **Doc. dr. sc. Ivan Kraus, mag. ing. aedif.**, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek, Zavod za materijale i konstrukcije, Vladimira Preloga 3, 31000 Osijek, e-mail: [ikraus@gfos.hr](mailto:ikraus@gfos.hr)

<sup>3</sup> **Doc. dr. sc. Paulina Krolo, dipl. ing. građ.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: [paulina.krolo@uniri.hr](mailto:paulina.krolo@uniri.hr)

## 1 Uvod

Istočna Hrvatska je samo jedan primjer potresno aktivnog područja s mnogo kuća izrađenih tehnikom nabijanja zemlje. Postojeći fond zemljane arhitekture Slavonije i Baranje uglavnom se sastoji od kuća i gospodarskih objekata koji su napušteni i/ili u vrlo lošem stanju [1] – [4]. Iako stare i više od 100 godina, mnoge istočno hrvatske zemljane kuće izdržale su ratna razaranja i prirodne katastrofe. No, zbog nedostatka znanja o mogućnostima sanacije i/ili pojačanja, njihovi vlasnici su nerijetko primorani napustiti ih, srušiti ili, kada je moguće, prenamijeniti u gospodarske objekte.

Terenska istraživanja koja su proveli autori ([4] i [5]) ukazuju na postupno nestajanje zemljane arhitekture u Republici Hrvatskoj, a time i rizik od postupnog gubitka važnog dijela hrvatske kulturne baštine. Međutim, terenska istraživanja su ukazala i na želju za izgradnjom novih zemljanih kuća. Naime, primjena lokalno dostupnog građevnog materijala osigurava vrlo nizak ugljični otisak te direktno potiče i osigurava održivo građenje, a građenje zemljom je relativno jeftino i ne zahtjeva visoko napredne tehnologije [3]. Osim toga, dijelovi zemljanog zida, koji zbog djelovanja vanjskih utjecaja otpadnu na tlo, mogu se reciklirati i povratiti na oštećeno mjesto u kući.

Ipak, građenje novih te sanacije i pojačanja postojećih zemljanih kuća u Republici Hrvatskoj nisu moguća ili su otežana zbog nedostatka normi i smjernica za projektiranje zemljanih konstrukcija. U svijetu su projektanti zemljanih kuća često primorani koristiti se normama za projektiranje zidanih ili betonskih konstrukcija [3], [6]. No, Novi Zeland se može istaknuti kao zemlja koja je prva razvila vrlo detaljne norme za projektiranje zemljanih konstrukcija za stanovanje [3].

Nedavno je, prema spoznajama autora, provedeno prvo istraživanje potresnog ponašanja istočno hrvatske zemljane kuće primjenom računalnih simulacija ([6] i [7]). Međutim, fizikalna i mehanička svojstva materijala korištenog za izradu numeričkog modela preuzeta su iz dostupne strane literature. Naime, do sredine 2021. godine nisu bila poznata svojstva hrvatskih tradicijskih zemljanih mješavina. Nadalje, pregledom literature [3] ustanovljen je izrazito velik rasap fizikalnih i mehaničkih svojstava nestabilizirane zemlje korištene za izradu „nabijača“ (tj. kuća od nabijene zemlje).

Kako bi se omogućilo istraživanje potresnog ponašanja istočno hrvatskih zemljanih kuća kroz računalne simulacije, ali i eksperimentalna istraživanja, potrebno je poznavati svojstva lokalnih materijala i tradicijskih mješavina. Tek nedavno provedena su prva terenska i laboratorijska istraživanja fizikalnih i mehaničkih svojstava na uzorcima izdvojenih iz zidova od nabijene zemlje s područja Slavonije i Baranje ([4] i [5]). Ovaj rad je nastavak na spomenuta istraživanja, pri čemu je cilj ovoga rada, kao i prethodnih istraživanja popuniti prazninu u svjetskoj bazi fizikalnih i mehaničkih svojstava tradicijskih mješavina za izradu konstrukcija od nabijene zemlje.

U ovom radu predstavljeno je laboratorijsko ispitivanje tlačne čvrstoće na uzorcima zemljanog materijala prikupljenog tijekom terenskog istraživanja u Slavoniji i Baranji. Uz dopuštenje, iz iste ruševne kuće od nabijene zemlje prikupljen je materijal za pripremu ispitnih uzoraka. Provedbom ispitivanja uzoraka na tlak dobiveni su dijagrami odnosa sile i pomaka u smjeru tlačnog opterećenja. Na temelju najvećih tlačnih sila određene su tlačne čvrstoće, te je analiziran utjecaj udjela vlažnosti u materijalu na tlačnu čvrstoću.

## 2 Laboratorijsko ispitivanje

### 2.1 Prikupljanje materijala za izradu uzoraka i priprema uzoraka

Preliminarna terenska istraživanja provedena su na području Istočne Hrvatske, u mjestu Aljmaš. Cilj provedbe terenskih istraživanja bio je prikupljanje materijala za pripremu ispitnih uzoraka. Komadi materijala uzeti su iz dva vanjska zida kuće od nabijene zemlje (slika 1). Osim tehnikom nabijanja zemlje, dijelovi kuće su izrađeni primjenom nepečene opeke (tj. ćerpiča). Prikupljeni materijal (veći komadi zida) je odmah nakon prikupljanja pohranjen u plastične vrećice te čuvan u laboratorijskim uvjetima do pripreme ispitnih uzoraka. Mješavine materijala su označene kao mješavina A1 koja odgovara materijalu prikupljenom iz zida smještenog u sjeni, te mješavina A3 koja odgovara materijalu koji je prikupljen iz zida smještenog na osunčanoj strani kuće. Sav materijal prikupljen je s visine od oko 25 cm iznad razine terena.

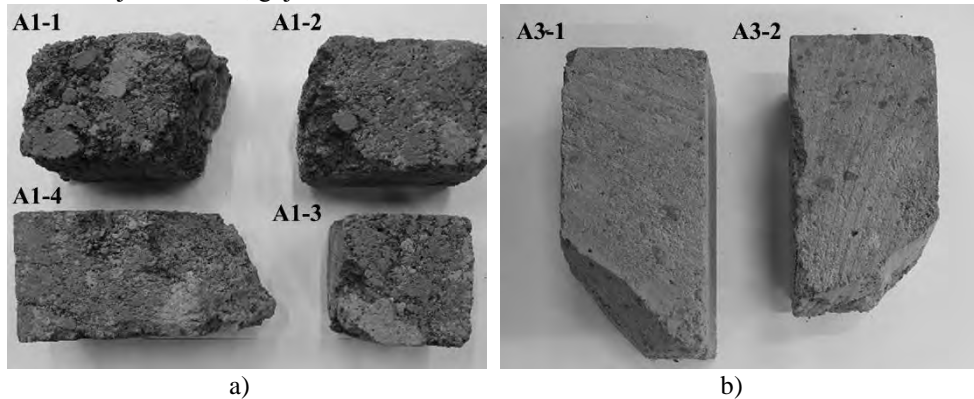
Udio vlažnosti u mješavinama određena je isti dan kada je provedeno prikupljanje materijala, te iznosi 3.87 % za mješavinu A1 i 2.90 % za mješavinu A3. Uzorci su potom kondicionirani u sobnim uvjetima u laboratoriju pri temperaturi od 20 °C i relativnoj vlažnosti zraka od 55 %. Trideset dana nakon prikupljanja uzoraka na terenu, provedeno je drugo mjerenje udjela vlažnosti. Utvrđeno je odstupanje od -27.13 % u odnosu na prvo mjerenje za mješavinu A1, te udio vlažnosti iznosi 2.82 %. Odstupanje udjela vlažnosti u mješavini A3 je -35.52 % u odnosu na prvo mjerenje, te ono iznosi 1.87 %. Udio vlažnosti u materijalu određen je prema normi BS 1377, dio 2 [8].



Slika 1. Tradicionalna kuća od nabijene zemlje u Aljmašu (Istočna Hrvatska)

Iz većih komada materijala, koji su prikupljeni na terenu, izrezani su ispitni uzorci poprečnog presjeka približno 40×40 mm. Duljina ispitnih uzoraka je varirala. Komadi materijala su

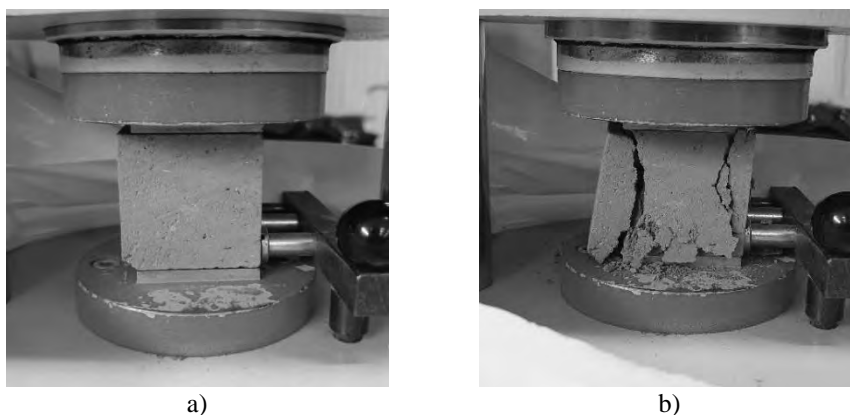
iskorišteni učinkovito koliko je to bilo moguće, s obzirom na oblik i veličinu. Iz mješavine materijala A1 izrezana su četiri ispitna uzorka, dok su iz mješavine A3 izrezana svega dva ispitna uzorka (slika 2). Uzorci su obilježeni oznakama A1-1, A1-2, A1-3 i A1-4, gdje prva oznaka definira mješavinu A1, a druga oznaka definira broj uzorka. Analogno vrijedi i za uzorke iz mješavine A3, gdje su uzorci označeni kao A3-1 i A3-2.



Slika 2. Ispitni uzorci izrađeni iz a) mješavine A1 i b) mješavine A3

## 2.2 Ispitivanje tlačne čvrstoće

Ispitivanja uzoraka od nabijene zemlje na jednoosni tlak provedena su u laboratoriju za materijale Građevinskog i arhitektonskog fakulteta Osijek, koristeći uređaj Shimatzu AG-X plus kapaciteta 50 kN. Budući da za zemljane materijale ne postoje norme s uputama za ispitivanje tlačne čvrstoće, autori su se vodili uputama danim u normi za ispitivanje čvrstoće cementnih uzoraka HRN EN 196-1 [9]. Uzorci nabijene zemlje (slika 2) promatrani su kao polovine slomljenih gredica za ispitivanje vlačne čvrstoće prema normi HRN EN 196-1. Međutim, grede za ispitivanje vlačne čvrstoće nije bilo moguće izraditi zbog oblika i ograničene veličine prikupljenih komada nabijene zemlje. Ispitivanje je provedeno sve do sloma uzorka uz konstantni prirast pomaka, sukladno preporukama u normi HRN EN 196-1. Postava uzorka za ispitivanje prikazana je na slici 3a) prije ispitivanja te na slici 3b) nakon sloma uzorka. Tijekom svakog testa, mjerene su sile i pomaci gornje ploče u smjeru tlačnog opterećenja. Za prikupljanje mjernih podataka korišten je program Trapezium X [10].



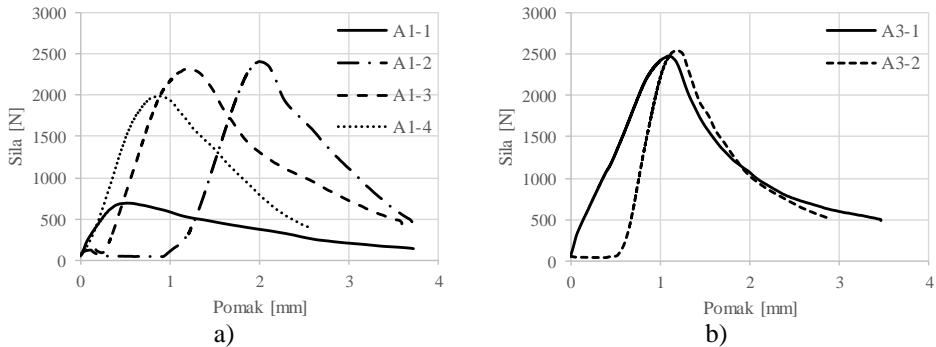
Slika 3. Postava uzorka A3-2 u ispitnom stroju Shimadzu AG-X 50 kN a) prije ispitivanja i b) nakon sloma uzorka

### 2.3 Rezultati ispitivanja

Kao rezultat ispitivanja uzoraka od nabijene zemlje na jednoosni tlak dobiveni su dijagrami odnosa sile i pomaka u smjeru tlačnog opterećenja, te su prikazani na dijagramima na slici 4a) za ispitne uzorke A1, te na slici 4b) za ispitne uzorke A3.

Budući da uzorci za ispitivanje tlačne čvrstoće nisu izrađeni u kalupima, nego su „krojjeni“ od većeg komada materijala, ne može se pretpostaviti da su svi istovjetno izvedeni, kao što bi bio slučaj da su izrađeni od vlažnog materijala u kalupu i zbijeni. Stoga je za očekivati da se vrijednosti nalaze u većem intervalu, kao što je to vidljivo iz samih dijagrama. Najveća tlačna sila za uzorak A1-1 iznosi 695 N, dok se za preostala tri uzorka iz mješavine A1, najveće tlačne sile kreću u rasponu od 2000 do 2500 N. Najveća tlačna sila izmjerena za uzorke iz mješavine A3 iznosi oko 2500 N.

Na temelju izmjerenih najvećih tlačnih sila, određene su tlačne čvrstoće za sve ispitne uzorke. Tlačna čvrstoća uzorka A1-1 iznosi 0.43 MPa, dok prosječna tlačna čvrstoća za preostala tri uzorka iznosi 1.4 MPa. Vizualnim pregledom uzorka A1-1 utvrđena je znatno veća poroznost materijala u odnosu na ostale uzorke, što je rezultiralo manjom tlačnom čvrstoćom. Stoga je uzorak A1-1 izuzet iz osrednjavanja rezultata. Prosječna tlačna čvrstoća uzoraka iz mješavine A3 je 1.57 MPa. Evidentno je da uzorci iz mješavine A1 s većim udjelom vlažnosti u materijalu (2.82 %) imaju za 10.83 % manju tlačnu čvrstoću u odnosu na uzorke A3 s manjim udjelom vlažnosti (1.87 %).



Slika 4. Dijagrami odnosa sile i pomaka za uzorke a) A1 i b) A3

### 3 Zaključak

Preliminarnim terenskim istraživanjem u mjestu Aljmaš, u Istočnoj Hrvatskoj, prikupljene su mješavine materijala od nabijene zemlje (mješavina A1 i A3). Potom je, odmah nakon prikupljanja materijala, određen udio vlažnosti. Svi uzorci su čuvani u zavezanim plastičnim vrećicama, u laboratorijskim uvjetima. Nakon 30 dana od prikupljanja materijala, provedena su laboratorijska ispitivanja uzoraka na djelovanje jedosnog tlaka nakon čega je provedeno drugo mjerenje udjela vlažnosti u materijalu. Na temelju provedenih istraživanja donose se sljedeći zaključci:

Materijal prikupljen u sjeni ima za gotovo 1 % veću vlažnost od materijala prikupljenog na osunčanoj strani kuće.

Udio vlažnosti u materijalu izmjeren neposredno nakon prikupljanja materijala prosječno iznosi 3.40 %, dok nakon ispitivanja tlačne čvrstoće (30 dana nakon prvog mjerenja) iznosi 2.30 %. Iz navedenog je vidljivo da se pri kondicioniranju uzoraka u sobnim uvjetima laboratorija javilo smanjenje udjela vlažnosti za oko 30 %.

Uzorak A1-1 pokazao je manju tlačnu čvrstoću u odnosu na ostale uzorke iz iste serije i to gotovo za 70 %. Vizualnim pregledom uzorka utvrđena je veća poroznost materijala u odnosu na ostale uzorke, što je rezultiralo smanjenu tlačnu čvrstoću.

Uzorcima iz mješavine A1 s većim udjelom vlažnosti u materijalu (2.82 %) imaju za 10.83 % manju tlačnu čvrstoću u odnosu na uzorke A3 s manjim udjelom vlažnosti (1.87 %).

### Zahvale

Ovaj rad sufinancirala je Hrvatska zaklada za znanost projektom UIP-2020-02-7363, pod nazivom „Nabijena zemlja za modeliranje i normizaciju u potresno aktivnim područjima“, te im se ovim putem zahvaljujemo.

---

## Literatura

- [1] Lončar-Vicković, S. i Stober, D.; Tradicijska kuća Slavonije i Baranje. Ministarstvo turizma Republike Hrvatske; Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Građevinski fakultet Osijek; 2011
- [2] Živković, Z.; Hrvatsko tradicijsko graditeljstvo. Ministarstvo kulture, Uprava za zaštitu kulturne baštine; 2013
- [3] Perić, A., Kraus, I., Kaluđer, J. i Kraus, L.; Experimental Campaigns on Mechanical Properties and Seismic Performance of Unstabilized Rammed Earth—A Literature Review; Buildings; 2021; 11; 1-21.
- [4] Perić, A. Charactzation of materials used for earth architecture in Eastern Croatia; 13th International Scientific Conference on Civil and Environmental Engineering – Mladi Vedec; High Tatras; Slovakia; 2021; 1-8 (in press)
- [5] Perić, A., Kraus, I. i Krstić, H.; Koeficijent toplinske provodljivosti tradicijske zemljane kuće iz Istočne Hrvatske: studija slučaja; Zajednički temelji; Mostar; Bosna i Hercegovina; 2021; 1-6 (under review)
- [6] Perić, A.; Potresno ponašanje zidova tradicijskih kuća od nabijene zemlje; Diplomski rad; Građevinski i arhitektonski fakultet Osijek; Osijek; Hrvatska; 2020
- [7] Kraus, I., Perić, A., Kaluđer, J. i Kraus, L.; Seismic behavior of traditional Croatian earth architecture: a case study; Proceedings of 1st Croatian Conference on Earthquake Engineering, 1CroCEE; University of Zagreb, Faculty of Civil Engineering; Zagreb; Croatia; 2021;1049-1058
- BS 1377-2:1990; Methods of test for soils for civil engineering purposes - Classification tests; 1990
- [8] HRN EN 196-1:2005; Metode ispitivanja cementa - 1. dio: Određivanje čvrstoće; 2005
- Shimadzu; Trapezium X Software Reference Manual; Tokyo; Japan; 2007



# Numeričko modeliranje procesa rupičenja metodom faznog polja

Polančec, T.<sup>1</sup>, Lesičar, T.<sup>2</sup>, Tonković, Z.<sup>3</sup> i Vučković, K.<sup>4</sup>

## Sažetak

Zupčanci se nalaze među najčešće korištenim strojnim elementima za prijenos snage i gibanja. Zubi zupčanika u zahvatu su podvrgnuti klizno-valjnom kontaktu u uvjetima elastohidrodinamičkog podmazivanja (EHL). Nakon određenog broja ciklusa na zubima zupčanika u zahvatu javljaju se različiti zamorni mehanizmi kao što su rupičenje, trošenje, zamor u korijenu zuba, itd...

Eksperimentalna istraživanja su pokazala da je rupičenje statistički najčešći oblik zamora koji se javlja na zubima zupčanika u klizno-valjnom kontaktu. Dosadašnje metode, koje su korištene za numeričko modeliranje rupičenja na boku zuba zupčanika, ne opisuju precizno taj zamorni mehanizam. Cilj ovog istraživanja je razvijanje novog numeričkog modela za opisivanje procesa rupičenja.

Raspodjela opterećenja, kao posljedica kontaktnog pritiska, modelirana je prema Hertzovoj teoriji. Za modeliranje zamornog opterećenja je korištena metoda faznog polja, koja uključuje dodatnu varijablu koja opisuje prelazak iz neoštećenog u potpuno oštećeno stanje materijala.

**Ključne riječi:** zupčanci, EHL, zamor, metoda faznog polja, rupičenje

---

<sup>1</sup> **Tomislav Polančec, mag. ing.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ulica Ivana Lučića V, 10000 Zagreb, e-mail: tomislav.polancec@fsb.hr

<sup>2</sup> **Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ulica Ivana Lučića V, 10000 Zagreb, e-mail: tomislav.lesicar@fsb.hr

<sup>3</sup> **Prof. dr. sc. Zdenko Tonković**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ulica Ivana Lučića V, 10000 Zagreb, e-mail: zdenko.tonkovic@fsb.hr

<sup>4</sup> **Prof. dr. sc. Krešimir Vučković**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ulica Ivana Lučića V, 10000 Zagreb, e-mail: kresimir.vuckovic@fsb.hr

## 1 Uvod

U inženjerskoj praksi, zupčanici su strojni elementi koji se najčešće koriste za prijenos snage i gibanja. Koriste se za promjenu momenta torzije, brzine i smjera gibanja. U ovom istraživanju razmatraju se zupčanici s ravnim zubima.

Zupčanici s ravnim zubima prenose snagu preko zuba zupčanika koji su paralelni s aksijalnom osi vratila. U radu su zupčanici podvrgnuti klizni-valjnom kontaktu u uvjetima elastohidrodinamičkog podmazivanja [1]. Nakon određenog broja ciklusa zupčanika u radu, na zubu zupčanika u zahvatu javljaju se različiti mehanizmi zamora kao što su trošenje, rupičenje, zamor u korijenu zuba, itd... Unutar ovog rada istražuje se proces rupičenja (pitting). Rupičenje se s obzirom na mjesto iniciranja pukotine u materijalu dijeli na površinsko i potpovršinsko rupičenje. Potpovršinsko rupičenje, koje se istražuje u ovom članku, je definirano kao odvajanje materijala od površine boka zuba na makro-razini [2]. Nakon određenog broja radnih ciklusa, pukotina se inicira na mjestu najvećeg ekvivalentnog Von Misesovog naprezanja i raste prema površini. Kad se pukotina poveže s površinom, mazivo pod tlakom ulazi u razvijenu pukotinu i dodatno pospješuje rast pukotine prema drugom dijelu površine. Nakon što pukotina dođe do drugog dijela površine, odvaja se dio materijala s boka zuba i nastaje rupica (pit) u materijalu.

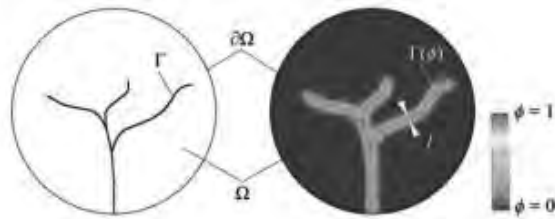
Matematičko opisivanje procesa rupičenja je predmet brojnih istraživanja i još uvijek nije jednoznačno riješeno. Korištene su razne empirijske i numeričke metode. Kumar i ostali su razmatrali inicijaciju pukotine po pristupu Američkog udruženja proizvođača zupčanika (AGMA) [3], gdje rupičenje nastaje kada kontaktno naprezanje između zuba u zahvatu dosegne vrijednost kritične čvrstoće na površini boka zuba. Metode za opisivanje rasta pukotine na boku zuba se najčešće temelje na principima linearno elastične mehanike loma (LEFM) koja pretpostavlja smjer rasta pukotine na temelju koeficijenta intenzivnosti naprezanja (SIF) primjenom metode konačnih elemenata [4]. Glodež i ostali su dokazali da putujuće opterećenje, koje simulira opterećenje u više dodirnih točaka dva zuba zupčanika u zahvatu uzduž boka zuba ima značajan utjecaj na rast pukotine [5]. Ghaffari i ostali su pratili inicijaciju i propagaciju pukotine na 3D modelu jednog zuba zupčanika uz razmatranje utjecaja jednolike raspodjele opterećenja i faktora trenja [6]. Podrug i ostali su istraživali utjecaj putujućeg opterećenja na inicijaciju i rast pukotine na 2D modelu 3 zuba zupčanika [7]. Niti jedna od gore navedenih metoda ne opisuje dovoljno precizno životni vijek zupčanika, stoga je cilj ovog istraživanja razviti novi pristup koristeći metodu faznog polja za opisivanje inicijacije i rasta pukotine.

## 2 Metoda faznog polja

Korištenje metode faznog polja omogućuje opisivanje inicijacije i rasta pukotine računanjem oštećenja pomoću varijable faznog polja  $\phi$ . Varijabla faznog polja aproksimira površinu nastalu uslijed loma odvajajući potpuno oštećeni materijal ( $\phi=1$ ) od neoštećenog ( $\phi=0$ ) glatkim prijelazom, bez potrebe za praćenjem pukotine (Slika 1). Pristup se temelji na Griffithovoj teoriji loma koja minimizira funkcional unutarnje energije  $\mathcal{W}$  [8]:

$$\Psi = \Psi^b + \Psi^s = \int_{\Omega/\Gamma} \Psi_\epsilon(\epsilon) d\Omega + \int_{\Gamma} G_c d\Gamma, \quad (1)$$

gdje  $\Psi^b$  predstavlja energiju elastične deformacije,  $\Psi^s$  energiju površinske raspodjele loma,  $\epsilon$  tenzor malih deformacija, a  $G_c$  lomnu žilavost.

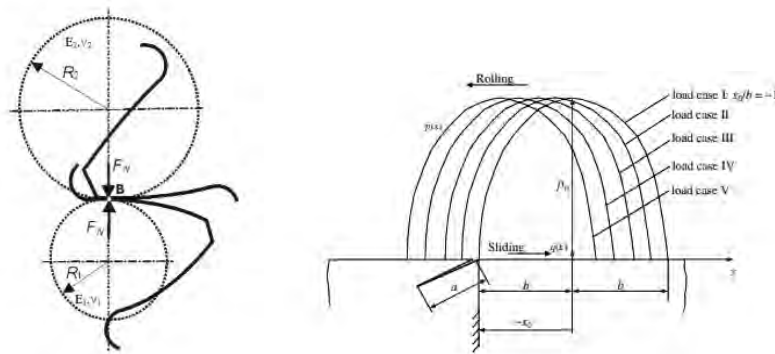


Slika 1. Prikaz elastičnog n-dimenzionalnog tijela  $\Omega$  sa diskretnom (lijeva slika) i difuznom (desna slika) površinom pukotine [9]

Metoda faznog polja je implementirana u metodu konačnih elemenata pomoću troslojnog algoritma programiranog u programskom jeziku FORTRAN, razvijenog od strane Seleša i ostalih [9], i povezana s programskim paketom ABAQUS pomoću UEL rutine.

### 3 Numerički primjer nastajanja rupičenja

Kao što je prije spomenuto zubi zupčanika u radu su podvrgnuti klizno-valjnom kontaktu uslijed čega se javlja Hertzova raspodjela kontaktnog pritiska [10]. S obzirom da dva zuba u zahvatu imaju više međusobnih dodirnih točaka, u numeričkim simulacijama se uzima nekoliko konfiguracija opterećenja (putujuće opterećenje) ovisno o utjecaju na mjesto nastajanja rupičenja. U literaturi je dokazano da se kontakt dva zuba zupčanika u zahvatu može zamijeniti kontaktom valjka ekvivalentnog radijusa i beskonačne ravne ploče [11]. Trenje je modelirano prema Coulombovom zakonu [10]. Na slici 2 su prikazani zubi zupčanika u zahvatu (lijevo) i raspodjela konfiguracija opterećenja (desno). O ovom primjeru numerički model je diskretiziran s 500000 mješovitih pravokutnih 2D konačnih elemenata programiranih pomoću UEL rutine u programskom jeziku FORTRAN koji sadrže varijablu faznog polja kao dodatni stupanj slobode. Putujuće opterećenje je programirano pomoću rutine DLOAD, dok je trenje programirano pomoću rutine UTRACLOAD.



Slika 2. Zubi zupčanika u zahvatu (lijevo)[12] i putujuće opterećenje (desno)[13]

Radijus ekvivalentnog valjka iznosi 85 mm. Ravna ploča je duljine 150 mm i visine 50 mm. Normalna sila koja djeluje na zub je jednaka 75 kN. Materijal koji se razmatra u ovom primjeru je nodularni lijev EN-GJS-400-18-LT. Svojstva materijala u primjeru su preuzeta iz [14] i prikazana u tablici 1. Plastično ponašanje materijala opisano je pomoću Von Misesovog plastičnog modela s nelinearnim izotropnim očvršćenjem:

$$\sigma_y(\varepsilon_{eqv}^p) = \sigma_y^0 + Q_\infty \left(1 - \exp[-b\varepsilon_{eqv}^p]\right) \quad (2)$$

i kinematičkim očvršćenjem:

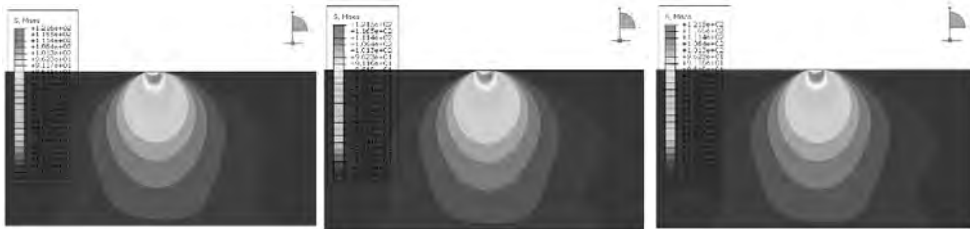
$$\dot{\alpha}_k = C_k \frac{1}{\sigma_y(\varepsilon_{eqv}^p)} (\sigma^* - \alpha) \dot{\varepsilon}_{eqv}^p - \gamma_k \alpha_k \dot{\varepsilon}_{eqv}^p, \quad \alpha = \sum_k \alpha_k. \quad (3)$$

Izotropno očvršćenje je definirano u funkciji akumulirane plastične deformacije s materijalnim parametrima  $\sigma_y^0$ ,  $Q_\infty$  i  $b$ . Kinematičko očvršćenje je definirano prema Chabocheovom modelu s materijalnim parametrima  $C_k$  i  $\gamma_k$  za svaki pojedinačni tenzor povratnog naprezanja.  $\sigma_y$  predstavlja granicu tečenja,  $\alpha$  tenzor povratnog naprezanja, a  $\dot{\varepsilon}_{eqv}^p$  ekvivalentnu plastičnu deformaciju. Kod modeliranja oštećenja, odabrani materijalni parametri faznog polja su parametar duljinske skale  $l = 0.25$  mm i lomne žilavosti  $G_c = 0.34$  N/mm. Na slici 3 je prikazano ekvivalentno Von Misesovo naprezanje koje se javlja uslijed djelovanja putujućeg opterećenja. Nakon 90 provedenih ciklusa došlo je do iniciranja pukotine na mjestu najvećeg ekvivalentnog Von Misesovog naprezanja ispod površine materijala što je u skladu s literaturom. Kao što je u uvodu opisano, nakon iniciranja pukotine, pukotina raste prema površini (Slika 5) i nakon što dosegne površinu u nju ulazi mazivo pod tlakom i širi pukotinu prema drugom dijelu površine. Kako bi simulirali ulazak maziva u pukotinu i njegovo ponašanje korišteni su fluidni elementi (F2D2) implementirani u programski paket ABAQUS. U fluidnim elementima je nametnut tlak jednak Hertzovom pritisku koji se nalazi na površini na mjestu pukotine. Rupičenje se u realnom radu zupčanika javlja kod visokog broja ciklusa, dok je u ovom numeričkom primjeru nametnuto povećano opterećenje zbog uštede vremena računanja, kako bi se oštećenje javilo pri niskocikličkom

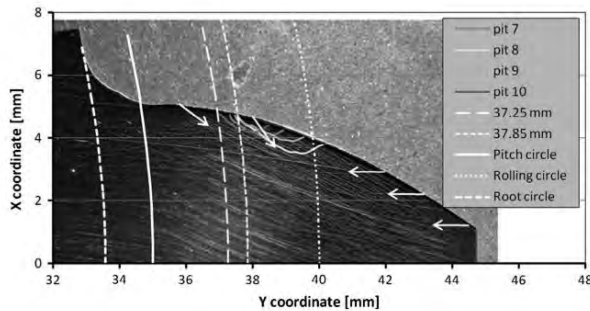
zamoru. Na slici 6 je prikazana pukotina s putanjom oštećenja. Kao što je vidljivo iz eksperimenta na slici 4 i pukotine sa putanjom oštećenja na slici 6 može se zaključiti da se proces rupičenja odvija fizikalno.

Tablica 1. Elastoplastična materijalna svojstva

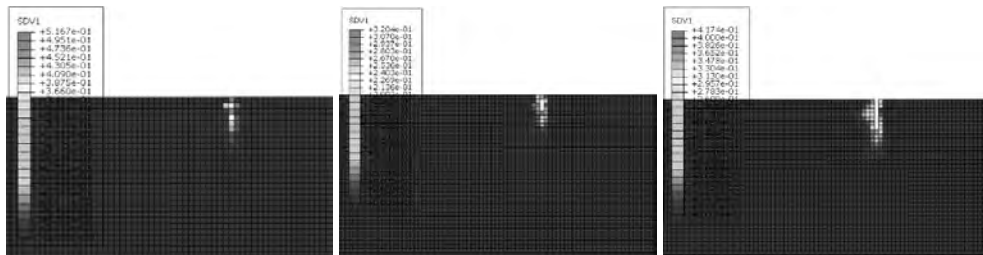
| $E$ [GPa] | $\nu$ [-] | $b$ [-] | $Q_\infty$ [MPa] | $\sigma_y^0$ [MPa] | $\gamma_1$ [-] | $C_1$ [MPa] | $\gamma_2$ [-] | $C_2$ [MPa] |
|-----------|-----------|---------|------------------|--------------------|----------------|-------------|----------------|-------------|
| 140       | 0,3       | 18      | 95               | 123                | 261,8          | 22,734      | 2113,5         | 136029      |



Slika 3. Prikaz ekvivalentnog Von Misesovog naprezanja koje se javlja u sve 3 konfiguracije putujućeg opterećenja



Slika 4. Prikaz eksperimentalnih rezultata putanja rupičenja [15]



Slika 5. Inicijacija i propagacija pukotine do ulaska maziva u pukotinu



Figure 6. Prikaz tendencije propagacije pukotine nakon ulaska maziva u pukotinu

## Zaključak

Kao što je vidljivo iz rezultata dobivenih u numeričkom primjeru i eksperimentu, iako je u numeričkom primjeru uzeto uvećano opterećenje, može se zaključiti da se metodom faznog polja integriranom u metodu konačnih elemenata može realno opisati proces inicijacije i rasta zamorne pukotine, odnosno proces rupičenja. Ovi rezultati će poslužiti za daljnje razvijanje okvira za modeliranje procesa rupičenja, gdje je nastavku istraživanja potrebno razviti do kraja model iniciranja i rasta pukotine kod visokocikličkog zamora i usporediti s eksperimentalnim rezultatima koji će se provesti na Fakultetu strojarstva i brodogradnje u Zagrebu.

## Zahvale

Istraživanje je u potpunosti financirano sredstvima Hrvatske zaklade za znanost u okviru projekta "Višerazinsko numeričko modeliranje i eksperimentalno istraživanje procesa starenja u sinteriranim konstrukcijskim komponentama".

## Literatura

- [1] S. Glodež, B. Aberšek, J. Flašker, and Z. Ren, "Evaluation of the service life of gears in regard to surface pitting," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 71, no. 4–6, pp. 429–438, 2004, doi: 10.1016/S0013-7944(03)00049-3.
- [2] M. Weibring, L. Gondecki, and P. Tenberge, "Simulation of fatigue failure on tooth flanks in consideration of pitting initiation and growth," *Tribol. Int.*, vol. 131, no. October 2018, pp. 299–307, 2019, doi: 10.1016/j.triboint.2018.10.029.
- [3] P. Kumar, H. Hirani, and A. Agrawal, "Fatigue failure prediction in spur gear pair using AGMA approach," *Mater. Today Proc.*, vol. 4, no. 2, pp. 2470–2477, 2017, doi: 10.1016/j.matpr.2017.02.099.
- [4] A. Belsak and J. Flašker, "Detecting cracks in the tooth root of gears," *Eng. Fail. Anal.*, vol. 14, no. 8 SPEC. ISS., pp. 1466–1475, 2007, doi: 10.1016/j.engfailanal.2007.01.013.
- [5] S. Glodež, S. Pehan, and J. Flašker, "Experimental results of the fatigue crack

- 
- growth in a gear tooth root,” *Int. J. Fatigue*, vol. 20, no. 9, pp. 669–675, 1998, doi: [https://doi.org/10.1016/S0142-1123\(98\)00040-1](https://doi.org/10.1016/S0142-1123(98)00040-1).
- [6] M. A. Ghaffari and S. Xiao, “Fatigue crack propagation analysis of gear tooth under various load conditions and repaired with Boron/Epoxy patch,” *Am. Soc. Mech. Eng. Power Div. POWER*, vol. 2, no. March 2016, 2013, doi: 10.1115/POWER2013-98270.
- [7] S. Podrug, D. Jelaska, and S. Glodež, “Influence of different load models on gear crack path shapes and fatigue lives,” *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, vol. 31, no. 5, pp. 327–339, 2008, doi: 10.1111/j.1460-2695.2008.01229.x.
- [8] A. A. Griffith, “The phenomena of rupture and flow in solids,” *Philos. Trans. R. Soc. London*, vol. 221, pp. 582–593, 1921, doi: 10.1098/rsta.1921.0006.
- [9] K. Seleš, T. Lesičar, Z. Tonković, and J. Sorić, “A residual control staggered solution scheme for the phase-field modeling of brittle fracture,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 205, pp. 370–386, 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.09.027>.
- [10] K. L. Johnson, “Contact Mechanics,” 1989, doi: 10.1201/b17110-2.
- [11] D. Hannes and B. Alfredsson, “Modelling of surface initiated rolling contact fatigue damage,” *Procedia Eng.*, vol. 66, pp. 766–774, 2013, doi: 10.1016/j.proeng.2013.12.130.
- [12] G. Fajdiga, S. Glodez, and J. Flas, “Numerical simulation of surface pitting due to contact loading,” vol. 23, pp. 599–605, 2001.
- [13] S. Glodež, R. Potočnik, J. Flašker, and B. Zafošnik, “Numerical modelling of crack path in the lubricated rolling-sliding contact problems,” *Eng. Fract. Mech.*, vol. 75, no. 3–4, pp. 880–891, 2008, doi: 10.1016/j.engfracmech.2007.02.001.
- [14] P. Čanžar, “Experimental and numerical modelling of fatigue behaviour of nodular cast iron,” p. 156, 2012.
- [15] J. Jurenka and M. Španiel, “Advanced FE model for simulation of pitting crack growth,” *Adv. Eng. Softw.*, vol. 72, pp. 218–225, 2014, doi: 10.1016/j.advengsoft.2013.06.018.



# Eksperimentalna analiza i numeričko modeliranje ponašanja asfaltnih mješavina

Pranjić, I.<sup>1</sup>, Torić Malić, N.<sup>2</sup> i Kožar, I.<sup>3</sup>

## Sažetak

U radu su prikazani rezultati eksperimentalne analize utjecaja odabranih parametara materijala i uvjeta ispitivanja na ponašanje asfaltnih mješavina. Provedena je parametarska numerička analiza na ponašanje materijala definirano Burgerovim reološkim modelom. Rezultati eksperimentalne i numeričke analize uspoređeni su kvalitativno kako bi se ustanovio utjecaj pojedinog parametra na ponašanje materijala definirano dijagramom sila-pomak.

**Ključne riječi:** asfaltnih mješavina, indirektni vlačni test, Burgerov model, parametarska analiza

---

<sup>1</sup> **Ivana Pranjić, mag.ing.aedif.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za prometnice, organizaciju i tehnologiju građenja i arhitekturu, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: [ivana.pranjic@uniri.hr](mailto:ivana.pranjic@uniri.hr)

<sup>2</sup> **doc.dr.sc. Neira Torić Malić, dipl.ing.grad.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za računalno modeliranje materijala i konstrukcija, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: [ntoric@gradri.uniri.hr](mailto:ntoric@gradri.uniri.hr)

<sup>3</sup> **prof.dr.sc Ivica Kožar, dipl.ing.grad.**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za računalno modeliranje materijala i konstrukcija, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: [ivica.kozar@gradri.uniri.hr](mailto:ivica.kozar@gradri.uniri.hr)

## 1 Uvod

Viskoelastični karakter asfaltnih mješavina proizlazi iz svojstava sastavnih elemenata ovog kompozitnog materijala – kamenog agregata elastičnih svojstava i bitumena koji se može okarakterizirati kao materijal viskoznih svojstava. Ponašanje asfaltnih mješavina uvjetovano je brzinom nanošenja opterećenja i temperaturama kojima su izložene, što je prepoznatljiva karakteristika viskoelastičnih materijala. Vremenska zavisnost naprezanja i deformacija u asfaltnim mješavinama učestalo se opisuje Burgerovim reološkim modelom, koji može dovoljno točno prikazati ponašanje takvoga materijala.

U radu su prikazani rezultati eksperimentalne analize utjecaja različitih svojstava asfaltne mješavine i uvjeta ispitivanja na ponašanje materijala pri indirektnom vlačnom testu. Varijacije svojstava materijala postignute su projektiranjem asfaltnih mješavina sa četiri različita udjela bitumena, kako bi se ispitao utjecaj viskoznosti na indirektnu vlačnu čvrstoću materijala. Ispitan je utjecaj različitih temperatura ispitivanja te brzine prirasta deformacije na ponašanje materijala. Za različite materijalne karakteristike i uvjete ispitivanja načinjeni su i međusobno uspoređeni dijagrami sila-pomak kako bi se usporedio utjecaj pojedinog parametra na ponašanje materijala. Numerička analiza ponašanja materijala Burgerovim reološkim modelom provedena je za različite parametre materijala preuzete iz prethodno provedenih ispitivanja. Iz rezultata dobivenih eksperimentalno i numerički cilj je ustanoviti jačinu utjecaja pojedinog parametra na ponašanje materijala i ispitati mogućnost usporedbe eksperimentalno i numerički dobivenih rezultata.

## 2 Eksperimentalna analiza asfaltnih mješavina

Analiza ponašanja asfaltnih mješavina različitog sastava pri različitim utjecajnim parametrima povezanim sa viskoelastičnim karakterom materijala provedena je eksperimentalno pomoću indirektnog vlačnog testa na pripremljenim asfaltnim uzorcima. Test je standardiziran normom HRN EN 12697-23:2003, a provodi se u svrhu određivanja indirektno vlačne čvrstoće ispitivanog uzorka te svojstava materijala važnih za ponašanje savitljive kolničke konstrukcije u eksploataciji – trajne deformacije odnosno puzanja i otpornosti na zamor odnosno pojave pukotina u materijalu [1,2]. Eksperimentalna analiza provedena je u dvije faze. U prvoj fazi pripremljeni uzorci ispitani su kako bi se odredio utjecaj sastava mješavine i temperature ispitivanja na iznos vršne sile pri kojoj se pojavio slom uzorka (vrijednost indirektno vlačne čvrstoće kao kontrolni parametar). U drugoj fazi odabrani su uzorci koji su u prvoj fazi pokazali ekstremno ponašanje – najmanju i najveću indirektnu vlačnu čvrstoću te su ispitani na različitim temperaturama i brzinama prirasta deformacije kako bi se ustanovio utjecaj svojstava mješavine uvjeta ispitivanja na ponašanje uzorka pri indirektnom vlačnom testu (analiza dijagrama sila-pomak).

Prilikom definiranja sastava asfaltne mješavine, variran je udio bitumena u pojedinoj mješavini s obzirom na njegov utjecaj na viskoelastične karakteristike mješavine. Pripremljeni su cilindrični uzorci jednake mase i granulometrijskog sastava agregata, a udjeli bitumena usvojeni su u iznosu 4%, 4.5%, 5% i 5.5% u odnosu na ukupnu masu materijala. Navedeni postoci su unutar propisanih graničnih vrijednosti za odabranu asfaltnu mješavinu

[3]. Prije početka ispitivanja uzorci su kondicionirani na temperature ispitivanja 5°C, 25°C i 40°C, koje su odabrane kao realne temperature materijala u eksploataciji u lokalnim uvjetima. Uzorci su ispitani u hidrauličnoj preši uz primjenu vanjskog opterećenja do sloma uzorka po vertikalnoj osi, pri brzini deformacije od 50 mm/min. Rezultat ispitivanja je vrijednost indirektna vlačne čvrstoće koja se za jedan set uzoraka određuje kao prosjek tri uzastopna ispitivanja.

Analizom rezultata prve faze eksperimenta (Tablica 1.) vidljivo je kako udio bitumena u mješavini značajno utječe na vrijednost indirektna vlačne čvrstoće uzorka na način da veći udio bitumena u mješavini u pravilu rezultira većom vrijednosti indirektna vlačne čvrstoće. Utjecaj udjela bitumena u mješavini na vrijednost indirektna vlačne čvrstoće veći je za niže temperature ispitivanja, a generalno mješavine postižu veću vrijednost indirektna vlačne čvrstoće za niže temperature ispitivanja. S obzirom da su mješavine sa najmanjim i najvećim udjelom bitumena pokazale i najrazličitija ponašanja s obzirom na temperaturu ispitivanja, odabrane su za nastavak eksperimentalne analize u drugoj fazi.

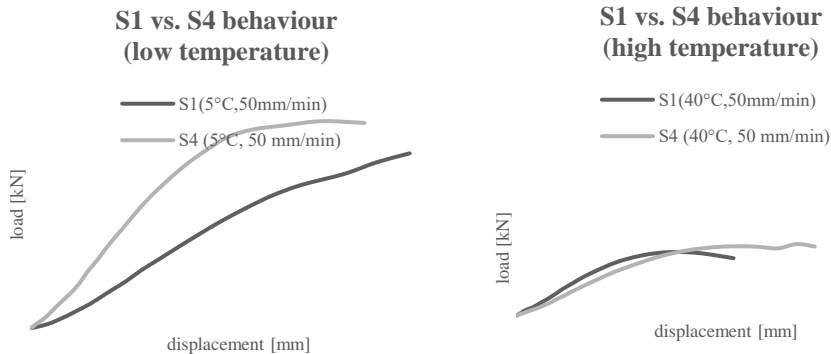
Tablica 1. Rezultati eksperimentalne analize – 1.faza

| Uzorak-udio bitumena | Indirektna vlačna čvrstoća za različite temperature ispitivanja [MPa] |       |       |
|----------------------|---|-------|-------|
|                      | 5°C   | 25°C  | 40°C  |
| 4%                   | 1.743   | 0.968 | 0.472 |
| 4.5%                 | 1.848   | 1.069 | 0.552 |
| 5%                   | 2.196   | 1.215 | 0.531 |
| 5.5%                 | 2.174   | 1.273 | 0.547 |

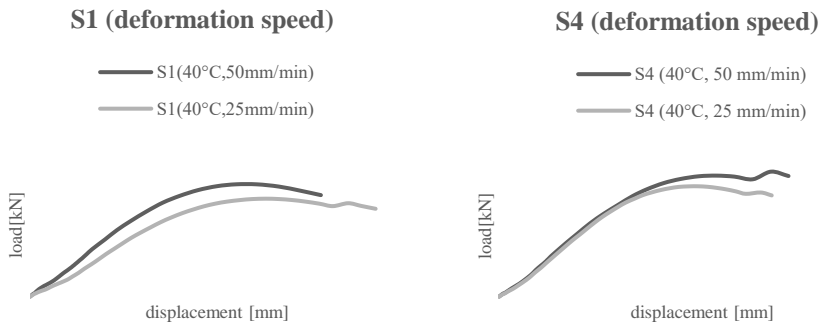
U drugoj fazi eksperimenta uzorci sa najmanjim i najvećim udjelom bitumena ispitani su na temperaturama 5°C i 40°C. S obzirom na uočene razlike u vrijednostima indirektna vlačne čvrstoće za odabrane temperature ispitivanja u prvoj fazi eksperimenta, u ovoj fazi analizirano je ponašanje odabranih setova uzoraka tijekom indirektnog vlačnog testa pomoću dijagrama sila-pomak. Osim različitih temperatura ispitivanja, kao varijabla je odabrana i brzina prirasta deformacije zbog utjecaja na ponašanje viskoelastičnog materijala. U ovom eksperimentu odabrane su brzine prirasta deformacije 50 mm/min (standardna za provedeno ispitivanje) i 25 mm/min.

Na Slikama 1. i 2. prikazani su usporedni dijagrami sila-pomak za odabrane parametre ispitivanja za uzorke različitih svojstava. Usporedbom dijagrama na Slici 1. vidljivo je kako se set uzoraka sa manjim udjelom bitumena S1 ponaša gotovo linearno na nižoj temperaturi ispitivanja (lijevi dijagram), a na višoj temperaturi pokazuje nelinearno ponašanje kao i set sa većim udjelom bitumena S4 (desni dijagram). Iz dijagrama sila-pomak za različite uzorke ispitane na istim temperaturama prikazanima na Slici 1. vidljivo je kako udio bitumena značajno utječe na ponašanje uzoraka različitih svojstava, posebice pri nižoj temperaturi ispitivanja. Utjecaj različite brzine prirasta deformacije izraženiji je za set uzoraka sa manjim udjelom bitumena, što je vidljivo na dijagramima prikazanima na Slici 2.

Kod seta uzoraka sa većim udjelom bitumena ponašanje pri indirektnom vlačnom testu jednako je za obje brzine prirasta deformacije gotovo sve do postizanja vršne sile pri kojoj dolazi do sloma uzorka. Iz rezultata druge faze eksperimentalne analize ponašanja uzoraka pri indirektnom vlačnom testu generalni je zaključak kako set sa većim udjelom bitumena pokazuje bolja svojstva i manja odstupanja u ponašanju neovisno o uvjetima ispitivanja.



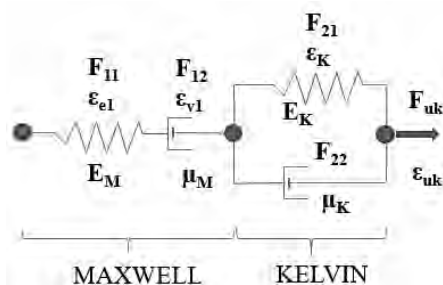
Slika 1. Usporedba dijagrama sila-pomak za različite uzorke ispitane na istim temperaturama (lijevo za nižu temperaturu ispitivanja, desno za višu temperaturu ispitivanja)



Slika 2. Usporedba dijagrama sila-pomak za iste uzorke ispitane na jednakim temperaturama ali pri različitim brzinama prirasta deformacije

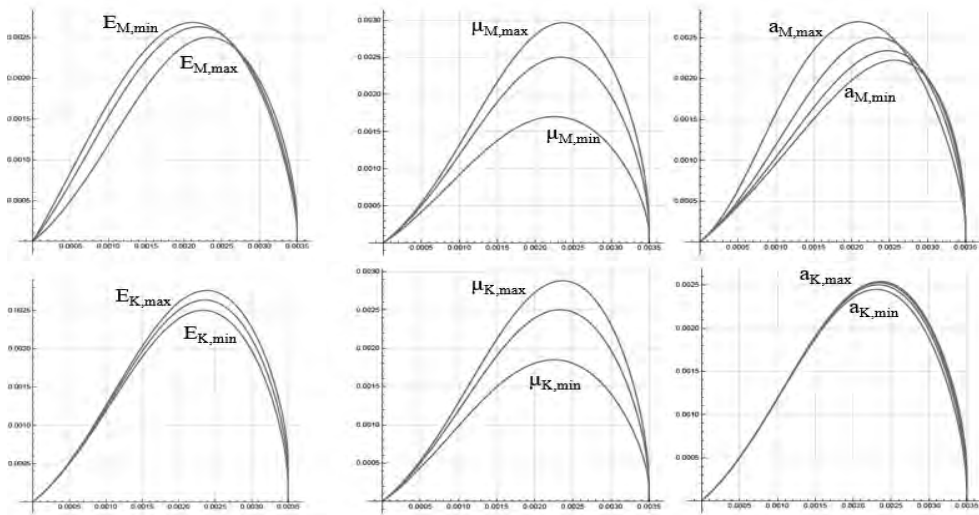
### 3 Burgerov reološki model i numerička analiza utjecajnih parametara

Viskoelastično ponašanje asfaltne mješavine često se opisuje korištenjem Burgerovog reološkog modela [4,5] koji pretpostavlja linearno viskoelastično ponašanje a sastoji se od Maxwellovog i Kelvinovog modela spojenih serijski, kao na Slici 3. Reološki parametri Burgerovog modela su moduli elastičnosti opruga  $E$  i koeficijenti viskoznosti  $\mu$  čije vrijednosti ovise o temperaturi i svojstvima mješavine (vrsta agregata i bitumena, udio bitumena). Određivanje reoloških parametara predstavlja važan dio numeričke analize ponašanja materijala kako bi rezultati takve simulacije mogli u što većoj mjeri predstaviti ponašanje materijala u stvarnoj konstrukciji. Parametri materijala obično se određuju eksperimentalno statičkim ili dinamičkim testovima, a veličina parametara ovisi ne samo o svojstvima materijala koji se ispituje već i o vrsti testa i načinu opterećenja uzorka materijala.



Slika 3. Shematski prikaz Burgerovog modela sa naznačenim silama i pomacima u elementima ( $F$ ,  $\epsilon$ ) te pripadajućim materijalnim parametrima ( $E$ ,  $\mu$ )

U okviru numeričke analize utjecaja reoloških parametara na ponašanje materijala u ovom radu definiran je Burgerov model korištenjem nelinearnih diferencijalnih algebarskih jednažbi [6,7,8]. Numeričkim modelom ispitan je utjecaj pojedinog parametra modela na ponašanje materijala. Parametri materijala izabrani su proizvoljno na način da je iz promjene vrijednosti pojedinog parametra moguće identificirati njegov utjecaj na ponašanje materijala. Načinjeni su dijagrami sila–pomak za različite vrijednosti reoloških parametara iz kojih se može vidjeti utjecaj pojedinog analiziranog parametra na vršnu silu u uzorku, koji su prikazani na Slici 4. Rezultati numeričke analize ukazuju na porast vršne sile s porastom vrijednosti parametra za sve analizirane parametre osim za modul elastičnosti Maxwellovog elementa, koji porastom vrijednosti uzrokuje smanjenje vršne sile.



Slika 4. Analiza utjecaja parametara reološkog modela (redom modul elastičnosti, koeficijent viskoznosti, parametar opruge) na dijagram sila - pomak

#### 4 Zaključci i plan za nastavak istraživanja

Iz provedene analize eksperimentalnih rezultata može se zaključiti kako su temperatura i brzina prirasta deformacije važni utjecajni parametri za definiranje ponašanja asfaltne mješavine. Generalno, bolja svojstva pokazale su mješavine u kojima je udio bitumena veći odnosno one mješavine u kojima prevladavaju viskozna svojstva. Numerička analiza utjecaja reoloških parametara na ponašanje materijala definiranog Burgerovim modelom pokazala je kako promjena pojedinog parametra materijala utječe na promjenu vrijednosti vršne sile na način da povećanjem parametra dolazi do porasta vrijednosti vršne sile u svim slučajevima osim za povećanje modula elastičnosti Maxwelllove opruge, koji uzrokuje smanjenje vršne sile. Obje provedene analize ukazuju na bolji odgovor materijala prevladavajućih viskoznih svojstava pri djelovanju opterećenja. Slijedeći koraci u istraživanju biti će usmjereni na identifikaciju realnih parametara materijala kako bi se mogla provesti numerička simulacija ponašanja definiranim Burgerovim modelom korištenjem eksperimentalno dobivenih parametara.

#### Zahvale

Ovaj rad izrađen je u sklopu istraživačkog projekta Hrvatske zaklade za znanost "Razdvajanje utjecaja parametara u inženjerskom modeliranju s parametarskom identifikacijom" (SEPAEMPI, IP-2019-04-7926) voditelja prof.dr.sc. Ivice Kožara

## Literatura

- [1] Zielinski, P., Indirect Tensile Test as a Simple Method for Rut Resistance Evaluation of Asphalt Concrete, Archives of Civil Engineering, Vol.65, No.3, 31-43, 2019.
- [2] Barman et al., An alternative analysis of indirect tensile test results for evaluating fatigue characteristics of asphalt mixes, Construction and Building Materials, 166, 204-213, 2018.
- [3] Tehnički propis za asfaltne konike, Narodne Novine 48/2021, 977, 21 2021.
- [4] Mackiewicz, P. i Szydło, A., Viscoelastic Parameters of Asphalt Mixtures Identified in Static and Dynamic Tests, Materials, 12, 2084, 2019.
- [5] Pranjić, I. i Kožar, I. , Burgerov reološki model za opisivanje ponašanja asfalta , Zbornik radova devetog susreta Hrvatskog društva za mehaniku, 267-272, 2019.
- [6] Kožar, I., Ibrahimbegovic, A. and Rukavina, T., Material model for load rate sensitivity, Coupled Systems Mechanics, Vol. 7, No.2, 141-162, 2018.
- [7] Kožar, I. i Ožbolt, J. (2010), Some aspects of load-rate sensitivity in visco-elastic microplane material model, Comput. Concrete, 7, 331-346, 2010.
- [8] Kožar, I., Ožbolt, J. i Pecak, Load-rate sensitivity in 1D non-linear viscoelastic model”, Key Eng. Mater., 488-489, 731-734, 2012.



## **Vezni kinematički element s dva čvora i njegova primjena na uslojene konstrukcije**

Ribarić, D.<sup>1</sup>

### **Sažetak**

U radu će se prikazati vezni element s dva čvora namijenjen elastičnom povezivanju čvorova elemenata koji modeliraju sloj neke višeslojne konstrukcije. Gredni vezni element uz prikladan izbor materijalnih vrijednosti ispunjava kinematički uvjet povezanosti slojeva (zajednički pomak na spojnici slojeva), te omogućuje povezivanje različitih konačnih elemenata kojima se modelira pojedini sloj (elementi greda, ploča ili ljuski), bilo da se modelira linijski, površinski ili prostorni model konstrukcije. Pri tome stupnjevi slobode su pomaci u ravnini svakog sloja i rotacije oko glavnih osi presjeka svakog sloja.

Rezultati modeliranja biti će uspoređeni s drugim pristupima analizi uslojenih konstrukcija, te će se valorizirati prednosti i nedostaci ove metode na nekoliko primjera.

**Ključne riječi:** uslojene konstrukcije, kinematičke jednadžbe slojeva, metoda konačnih elemenata, linijski element sa zglobom između čvorova

---

<sup>1</sup> **Izv. prof. dr. sc. Dragan Ribarić, dipl. ing. građ**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Ul. R. Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: [dragan.ribaric@uniri.hr](mailto:dragan.ribaric@uniri.hr)

## 1. Uvod

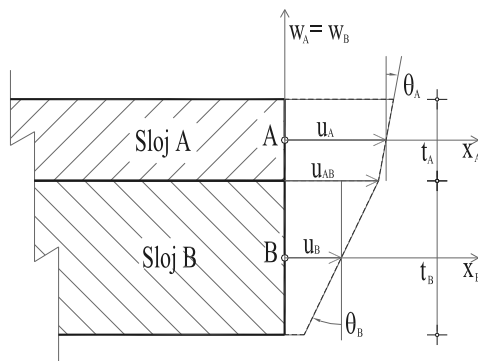
Uslojene konstrukcije imaju vrlo veliku primjenu u graditeljskoj praksi i stoga su predmet numeričke analize u pogledu dokaza nosivosti, računa napreznja i pomaka. Brojni su primjeri za to, od spregnutih nosača čelik-beton do uslojenih prostornih ljuski koje grade konstrukcije vozila ili aviona. Čak i konstruktivni elementi građeni od armiranog betona su u svojoj suštini uslojeni, jer su složeni iz dva mehanički različita materijala.

U ovom radu želi se prikazati način kako se jednostavno može iskoristiti analogija između pretpostavljene kinematike deformiranja presjeka nekog sloja konstrukcije i fiktivnog krutog štapa koji povezuje te slojeve.

## 2. Kinematike deformacija slojeva

Za uslojene konstrukcije vrijedi uobičajena Bernoullijeva pretpostavka o ravnom deformiranju presjeka svakog sloja. Deformacija sloja „i“ je definirana pomakom težišta  $u_i$  i rotacijom njegovog presjeka  $\theta_i$  (slika 1), a slojevi koji su međusobno kruto vezani na zajedničkoj spojnici moraju udovoljiti kinematički uvjet:

$$u_A - \theta_A \cdot \frac{t_A}{2} = u_B + \theta_B \cdot \frac{t_B}{2}. \quad (1)$$



Slika 1. Kinematička pretpostavka deformacija dvaju sljubljenih slojeva

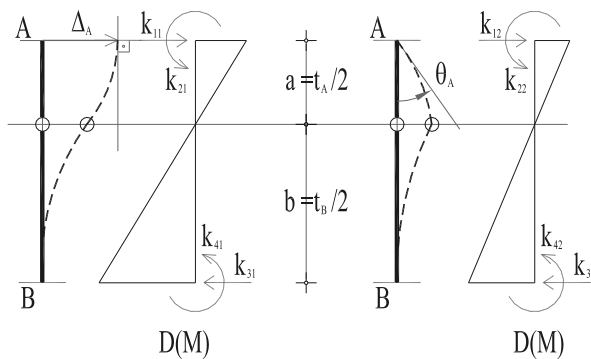
Kad se neka uslojena konstrukcija numerički analizira metodom konačnih elemenata [1], svaki sloj se opisuje elementima tipa greda (linijski modeli), elementima tipa ploča (površinski modeli) ili elementima tipa ljuski (prostorni modeli) za koje je potrebno definirati pozicije čvorova tih elemenata. Između „susjednih“ čvorova dvaju slojeva mora biti zadovoljen kinematički uvjet (1) ako se mora opisati međusobna zajednička veza bez klizanja ili odvajanja slojeva. Veze između čvorova, također, moraju udovoljiti uvjet (1).

U trodimenzionalnom prostoru slojevi imaju dvije nezavisne komponente pomaka u ravnini svakog sloja i dvije nezavisne rotacije uzajamno okomitih presjeka istog sloja.

### 3. Analogija s fiktivnim štapom sa zglobom

#### 3.1 Deformabilni štapni element sa zglobom

Kad se analizira štapni element sa zglobom između čvorova po uobičajenoj Euler-Bernoullijevoj teoriji [2], može se izračunati njegova matrica krutosti za smjerove transverzalnih pomaka i rotacija krajeva štapa  $A$  i  $B$  – čvorova priključka (slika 2). Dužina štapa je  $L = a + b$  ( $a, b$  definiraju poziciju zgloba), krutost presjeka štapa je  $EI_y$  ( $E$  je modul elastičnosti materijala štapa,  $I_y$  odgovarajući moment tromosti presjeka)



Slika 2. Deformabilni štapni element sa zglobom, krutosti za prva dva smjera.

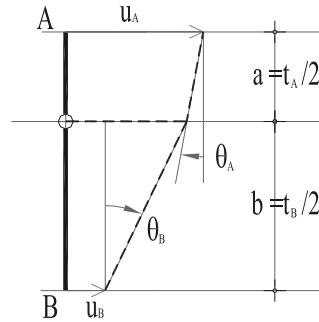
Krutosti za četiri čvorna smjera se mogu zapisati u matričnom obliku ili kao umnožak „kinematičkih“ vektora, pri čemu sve krutosti imaju zajednički množitelj zapisan ispred matrica:

$$\mathbf{K}_{b,AB} \{\delta\} = \frac{3EI_y}{a^3 + b^3} \begin{bmatrix} 1 & -a & -1 & -b \\ -a & a^2 & a & ab \\ -1 & a & 1 & b \\ -b & ab & b & b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_A \\ \theta_A \\ \Delta_B \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \frac{3EI_y}{a^3 + b^3} \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ -1 \\ -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ -1 \\ -b \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \Delta_A \\ \theta_A \\ \Delta_B \\ \theta_B \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

#### 3.2 Štapni element koji oponaša kinematičku deformaciju slojeva

Da bi deformabilni štapni element (slika 3) s matricom krutosti (2) oponašao kinematički uvjet (1) mora množitelj ispred matrice biti dovoljno velik u odnosu na materijalne parametre koji definiraju deformacije svih slojeva konstrukcije, što se može u modelu ostvariti izborom parametara za  $EI_y$ , koji su nekoliko reda veličine veći od parametara slojeva.

$$\frac{3EI_y}{a^3 + b^3} \rightarrow \infty. \quad (3)$$



Slika 3. Kinematički štapni element sa zglobom.

Na isti način se matrica krutosti štapa može proširiti i za prostornu analizu, tako da se uvedu svih 6 stupnjeva slobode u svaki čvor štapa, odnosno da se matrica krutosti proširi i za okomiti smjer presjeka, te za krutosti uslijed promjene dužine štapa i torzijskih efekta. Prostorna matrica krutosti, tad ima oblik:

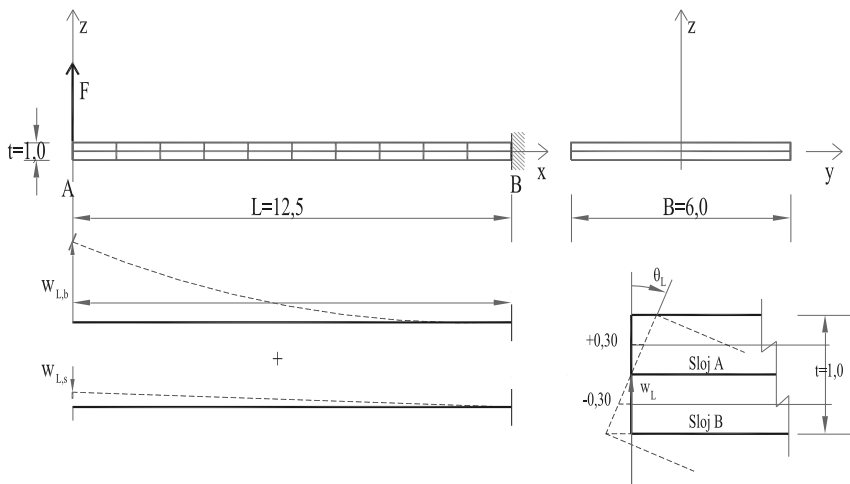
$$\mathbf{K}_{AB} \{\delta\} = C \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & ab & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & a^2 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & ab \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & -1 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & ab & 0 & 0 & 0 & b & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & ab & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x,A} \\ v_{y,A} \\ w_{z,A} \\ \theta_{x,A} \\ \theta_{y,A} \\ \theta_{z,A} \\ u_{x,B} \\ v_{y,B} \\ w_{z,B} \\ \theta_{x,B} \\ \theta_{y,B} \\ \theta_{z,B} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

pri čemu je  $C$  dovoljno veliki broj (3) da se može uz minimalna odstupanja očuvati kinematički uvjet (1):

$$\frac{EA}{a+b} = \frac{3EI_z}{a^3+b^3} = \frac{3EI_y}{a^3+b^3} = \frac{GJ_T}{a+b} = C = \text{velikibroj}. \quad (3)$$

#### 4. Numerički primjer

Da bi pokazali učinak veznih kinematičkih štapnih elemenata na točnost proračuna uslojenih konstruktivnih modela analizirati će se jednostavna konzolna ploča kao greda homogenog pravokutnog presjeka. Ploča će se analizirati pločastim elementima tipa [3] u dva sloja. Ukupna debljina ploče je  $t=1,0$ , širina je  $B=6,0$ , a dužina  $L=12,5$ . Modul elastičnosti je  $E=1000,0$ , a Poissonov koeficijent je  $\nu=0$  (kako bi se očuvao linijski karakter zadatka). Jednoliko raspoređena sila djeluje po slobodnom rubu ploče intenzitetom  $F=7,68$  (slika 4).



Slika 4. Konzolna greda kao poločasti model u dva sloja

Rubni pomak ploče i rotacija slobodnog kraja su za linijski model dati izrazima (5) i (6) računajući i efekte posmičnih deformacija ( $k=5/6$ , posmični koeficijent):

$$w_L = w_{L,b} + w_{L,s} = \frac{FL^3}{3EI} + \frac{FL}{GkA} = 10,0 + 0,0384, \quad (5)$$

$$\theta_L = \theta_{L,b} = \frac{FL^2}{2EI} = 1,2. \quad (6)$$

Tablica 1. Konvergenција kontrolnih vrijednosti ovisna o gustoći mreže konačnih elemenata za model s dva sloja

| Gustoća mreže      | Pomak ruba konzole | Rotacija presjeka ruba konzole | Horiz. pomak presjeka na $\frac{1}{4} t$ |
|--------------------|--------------------|--------------------------------|--|
| 1x1                | 7.6642             | 1.2006                         | 0.29995                                  |
| 3x2                | 9.8765             | 1.2002                         | 0.30000                                  |
| 6x3                | 10.048             | 1.2002                         | 0.30000                                  |
| Točno bez smicanja | 10.0               | 1.20                           | 0.30                                     |
| Točno sa smicanjem | 10.0384            | 1.20                           | 0.30                                     |

Vežni kinematički štapni elementi vertikalno povezuju odgovarajuće čvorove elementa ploče gornjeg sloja s čvorom elementa donjeg sloja. Na primjer u slučaju mreže s jednim elementom ploče u sloju, ugrađena su samo dva vežna elementa na čvorovima slobodnog kraja, u mreži 3x2 ima ih ukupno 9 i mreži 6x3 ima ih 24.

Iz tablice 1 je vidljivo da rješenja numeričkog modeliranja uz pomoć vežnih kinematičkih štapnih elemenata vrlo brzo konvergiraju točnim kontrolnim veličinama. Čak i kod mreže elemenata minimalne gustoće, rezultat je smislen.

Kad se isti zadatak modelira s 4 sloja pločastih elemenata i 3 reda vežnih kinematičkih elemenata konvergencija kontrolnim vrijednostima jednako je dobra, a uzdužni pomaci slojeva pokazuju primjetno vitoperenje presjeka kao posljedicu učinka smicanja.

Tablica 2. Konvergencija kontrolnih vrijednosti ovisna o gustoći mreže konačnih elemenata za model s četiri sloja

| Gustoća mreže      | Pomak ruba konzole | Rotacija presjeka na rubu konzole, na 3/8 t | Horiz. Pomak presjeka na 1/8 t | Horiz. pomak presjeka na 3/8 t |
|--------------------|--------------------|---|--------------------------------|--------------------------------|
| 1x1                | 7.6887             | 1.2137                                      | 0.14922                        | 0.45015                        |
| 3x2                | 9.9234             | 1.2123                                      | 0.14930                        | 0.45015                        |
| 6x3                | 10.120             | 1.2065                                      | 0.14963                        | 0.45008                        |
| Točno bez smicanja | 10.0               | 1.20  | 0.15                           | 0.45                           |
| Točno sa smicanjem | 10.0384            | 1.20  | 0.15                           | 0.45                           |

## 5. Zaključci

Prikazane su pretpostavke za primjenu kinematičkih grednih elemenata za vezu među elementima kojima se modeliraju uslojene konstrukcije, pri čemu oni mogu biti linearni, plošni ili prostorni. Vežni elementi ne zahtijevaju dodatne stupnjeve slobode u modelu i vrlo su jednostavni za programiranje.

Kontrolni rezultati konvergiraju brzo točnim vrijednostima i kod relativno rijetkih mreža proizvode upotrebljive rezultate.

Uz korekciju materijalnih i geometrijskih parametara za račun matrice krutosti vežnih elemenata, postoji mogućnost njihove primjene i za opis nelinearnog ponašanja veziva između slojeva.

## Zahvala

Ovaj članak je rezultat rada u na projektu „Metoda usvojenih deformacija za konačne elemente slojevitih ploča i ljuski i njena primjena na probleme delaminacije - ASDEL” (IP-06-2016-4775), koji je u cijelosti financiran sredstvima Hrvatske zaklade za znanost.

---

## Literatura

- [1] Zienkiewicz, O. i Taylor, R.L.; The Finite Element Method, Fifth edition, Volume 1: The Basis, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [2] Ghali, A., Neville, A.M. i Brown, T.G.; Structural analysis. A Unified Classical and Matrix Approach, Spon Press, London and New York, 2003.
- [3] Ribarić, D.; Problem-dependent cubic linked interpolation for Mindlin plate four-node quadrilateral finite elements; Structural engineering and mechanics: An international journal; 2016; 59 (6); 1071-1094.



## Optimizacija smještaja osjetnika vibracija

Rožić, J.<sup>1</sup>, Jokić, M.<sup>2</sup>

### Sažetak

Problem smještaja osjetnika, odnosno njemu blizak problem smještaja osjetnika za slučaju kad postoje predodređene moguće pozicije osjetnika je u nekoliko zadnjih desetljeća područje interesa za razne grane istraživanja. To je jedan od temeljnih problema pri mjerenju vibracija, modalnog ispitivanja, praćenju zdravlja konstrukcija, nadzoru mreža za distribuciju električne energije, ili praktički bilo kakvo mjerenje odnosno nadziranje koje zahtijeva raspodjelu položaja i određivanje broja osjetnika. Dodatna motivacija za ovu temu je njena kompliciranost - naprimjer: problem odabira  $p$  osjetnika između  $n$  mogućih lokacija ima  $\binom{p}{n}$  rješenja i to je NP-težak problem. Tom problemu se do sada pokušalo pristupiti iz mnogo kutova [1], sa širokim spektrom metoda: od heurističkih pa do rješenja numerički rješivih aproksimacija originalnog problema [2].

U ovom radu je predstavljen algoritam koji optimira smještaj osjetnika pomoću niza konveksnih optimizacija izvornog problema. Općenito govoreći, svaka iteracija ovog pristupa zahtijeva istovremenu minimizaciju nekog kriterija učinkovitosti promatranog dinamičkog sustava (pokušava smanjiti grešku mjerenja) i minimizaciju broja osjetnika. [3].

**Ključne riječi:** Optimizacija smještaja osjetnika vibracija, optimizacija broja osjetnika vibracija, relaksacija  $l_0$  norme, praćenje zdravlja konstrukcije

---

<sup>1</sup> **Jurica Rožić, mag. ing.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: jurica.rozic@fsb.hr

<sup>2</sup> **doc. dr. sc. Marko Jokić**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10002 Zagreb, e-mail: marko.jokic@fsb.hr

## 1 Motivacija rada

Optimiranje položaja osjetnika omogućuje, među ostalim, učinkovitu primjenu istih na praćenje zdravlja konstrukcija. Ideja je da će mehanička promjena negdje na konstrukciji (npr. pukotina) promijeniti krutost konstrukcije te time i vibracijska svojstva konstrukcije. Praćenjem vibracija konstrukcije se, dakle, ta promjena može primijetiti praktički odmah, što nije slučaj kod nekih više klasičnih metoda koje se koriste kod periodičnih rutinskih pregleda (vizualno, ultrazvuk).

Jedan od problema praćenja dinamike konstrukcije je odabir broja i pozicija osjetnika. Realne konstrukcije nisu savršeno krute jer je sve u nekoj mjeri elastično, a oštećenje se može dogoditi bilo gdje. To se očito ne može riješiti korištenjem beskonačno osjetnika već treba naći dobar kompromis između što manjeg broja osjetnika i poznavanja dovoljno podataka za zadovoljavajuće određivanje dinamike konstrukcije.

## 2 Princip rada algoritma

Nakon izvođenja jednadžbe dinamike elastičnog sustava

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{P} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

ona se preformulira u sustav varijabli stanja, gdje varijable stanja predstavljaju brzine i ubrzanja na mogućim pozicijama osjetnika.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Srž algoritma su modelirani sustav osmatrača te funkcija cilja sastavljena od dva pribrojnika: jedan pokušava minimizirati grešku, a drugi pokušava smanjiti broj korištenih osjetnika. Formulacija sustava osmatrača je prikazana u jednadžbi 3:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{L} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}), \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (3)$$

gdje je  $\mathbf{L}$  pojačanje osmatrača, a kapica označava varijable sustava osmatrača.

### 2.1 Minimiziranje greške

Greška osmatrača definirana je kao razlika varijabli stanja izvornog sustava i sustava osmatrača:

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \quad \dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}) \mathbf{e}. \quad (4)$$

Ona se minimizira pomoću  $H_2$  norme i ovisi samo o  $\mathbf{L}$  (jednadžba 5).

$$\min_L \underbrace{\|\Sigma_e(\mathbf{L})\|_2}_{H_2 \text{ norma greške}} \quad (5)$$

Primjenom ekvivalentnosti izraza iz članka [4], uzima se da se minimizira neka vrijednost  $\gamma_2$ , za koju vrijedi:

$$\|\mathbf{H}\|_2 \leq \gamma_2, \quad (6)$$

uz dodatna ograničenja, jedno od kojih glasi:

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{P} + \mathbf{W}^T \mathbf{W} & (\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C})^T \mathbf{P} \\ \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{L} \mathbf{C}) & -\mathbf{P} \end{pmatrix} < 0, \quad (7)$$

što je nekonveksni problem jer je to zbog postojanja članova  $\mathbf{P} \mathbf{L}$  i  $\mathbf{L}^T \mathbf{P}$  bilinearna matricna nejednakost. Standardna procedura za rješavanje tog problema kod modeliranja osmatrača je uvođenje supstitucije  $\mathbf{L}^* = \mathbf{P} \mathbf{L}$ , čime to postaje linearna matricna nejednakost.

Ovdje se javlja problem što za tu supstituciju ne smije biti ograničenja u obliku nultih vrijednosti  $\mathbf{L}$ , koja ovdje postoje, no u [5] je opisano kako je za slučaj optimiranja smještaja osjetnika to ipak moguće, jer ovdje  $\mathbf{L}^*$  nužno ima ne-nulte vrijednosti na istim mjestima kao i  $\mathbf{L}$ . Uspješnom zamjenom  $\mathbf{L}$  za  $\mathbf{L}^*$  minimiziranje greške postaje konveksni problem.

## 2.2 Minimiziranje broja osjetnika

Minimiziranje broja osjetnika, odnosno određivanje da li na nekoj poziciji postoji ili ne postoji osjetnik je ekvivalentno minimiziranju  $l_0$  norme te to nije konveksni problem već problem kombinatorike koji nije direktno numerički rješiv. Iz tog razloga se  $l_0$  norma se relaksira u  $l_1$  normu, koju je moguće numerički aproksimirati. Proces relaksacije je opisan u [6]. Ukratko,  $l_0$  norma

$$\left\| \sum_{i=1}^n |L_{ij}| \right\|_0 \quad (8)$$

se zamijeni sa

$$\beta_j^{it} \sum_{i=1}^n |L_{ij}| \quad (9)$$

gdje je  $\beta_j^{it}$  težina stupca  $j$ , a  $it$  oznaka iteracije. Težine se mijenjaju u svakoj iteraciji tako da se postave kao inverzne vrijednosti prethodne iteracije, čime se postiže da se normaliziraju vrijednosti između ne nultih stupaca, a nulti stupci ostaju nulti, što je aproksimacija  $l_0$  norme:

$$\beta_j^{it} = \frac{1}{\varepsilon + \sum_{i=1}^n |L_{ij}^*|}, \quad \text{za svaki } j. \quad (10)$$

Član za optimiranje broja osjetnika sada glasi:

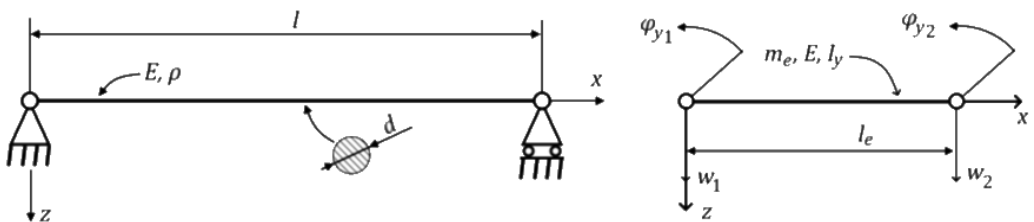
$$\sum_{j=1}^n \beta_j^{it} \sum_{i=1}^n |L_{ij}^*|. \quad (11)$$

Uz dodatni faktor  $\alpha$  kojem je svrha balansiranje težine pribrojnika funkcije cilja, te koji se proizvoljno unosi unutar algoritma, funkcija cilja sada glasi:

$$\underbrace{\min_{L^*, \gamma_2^2}}_{\text{minimizacija greške}} \gamma_2^2 + \alpha \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^n \beta_j^{it} \sum_{i=1}^n |L_{ij}^*|}_{\text{minimizacija broja osjetnika}}. \quad (12)$$

### 3 Numerički primjer

Algoritam je primjenjiv na dinamičke sustave diskretizirane sa metodom konačnih elemenata, a za ovdje dobivene rezultate upotrijebljen je na jednostavno oslonjenoj 2D Euler-Bernoullijevoj gredi (vidjeti sliku 1 lijevo) diskretiziranoj sa 29 grednih konačnih elemenata prvog reda sa stupnjevima slobode pomaka u smjeru z osi i zakreta oko y osi (vidjeti sliku 1 desno).



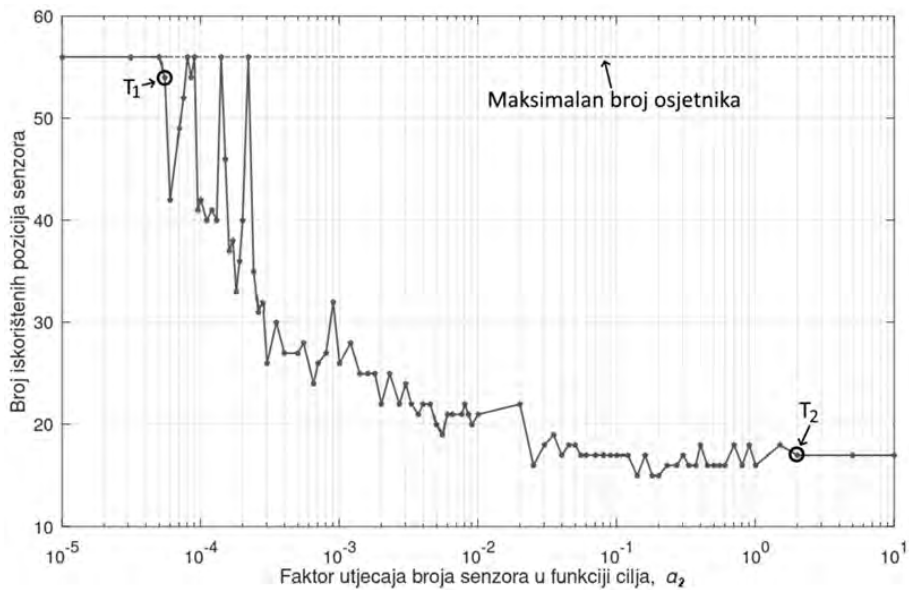
Slika 1. Odabrana konstrukcija i konačni element

U procesu ispitivanja algoritma je izvršen 101 postupak optimizacije sa variranjem parametra  $\alpha$ . Za mali  $\alpha$  je težina minimizacije broja osjetnika zanemariva pa su iskorištene sve dostupne pozicije. Porastom  $\alpha$  u nekom trenutku broj korištenih osjetnika počne relativno pravilno opadati ( $\alpha = 0,000055$ ) uz umjereno, naizgled nasumično odstupanje, dok  $\alpha$  ne poraste do vrijednosti nakon koje je broj korištenih osjetnika stabilan ( $\alpha = 0,1$ ). Daljnjim porastom nema promjena. Opisana ovisnost o faktoru  $\alpha$  je prikazana na slici 2.

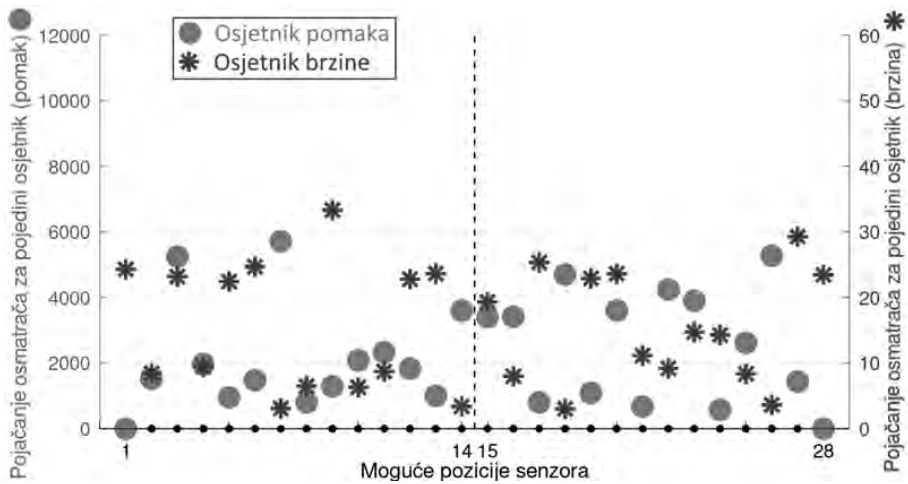
Slike 3 i 4 prikazuju smještaj osjetnika za točke  $\mathbf{T}_1$  i  $\mathbf{T}_2$  sa slike 2. Na njima su krugovima označene vrijednosti pojačanja osmatrača za pojedine osjetnike pomaka, a zvjezdicama analogne vrijednosti osjetnika brzina. Sami iznosi vrijednosti nisu relevantni,

već je bitno da li iznose nula ili imaju neku pozitivnu vrijednost (u svim slučajevima kada ne iznose nula, vrijednost je dovoljno visoka da je iz dijagrama jasno da ne iznose nula). Crne točke na apscisi označavaju 28 mogućih pozicija za osjetnike. Prostor između crnih točaka odgovara pojedinim konačnim elementima, a pozicije 0 i 29 odgovaraju osloncima grede.

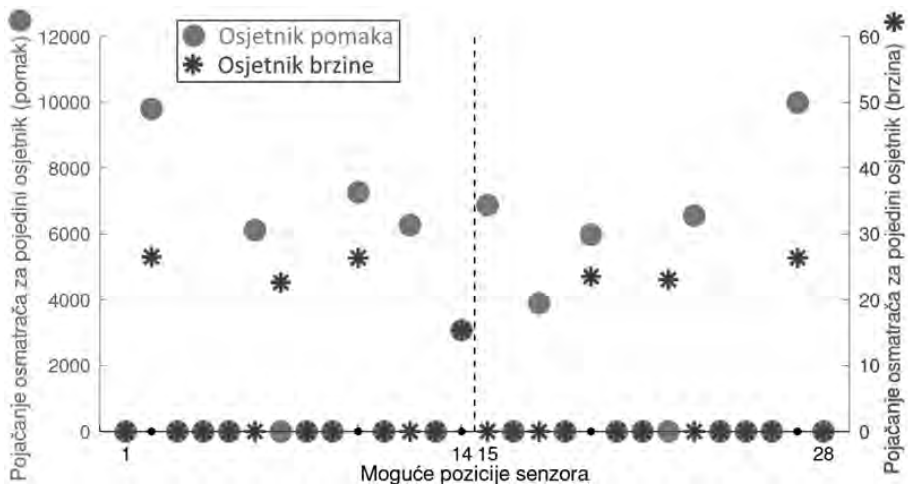
Slika 3 prikazuje točku  $T_1$  gdje je  $\alpha = 0,000055$ , što je prvi ispitani iznos  $\alpha$  na kojem nisu iskorištene sve moguće pozicije osjetnika. Osjetnici pomaka na rubovima grede nisu korišteni pri dobivanju tog rezultata (vidi se po tome što njihove vrijednosti pojačanja osmatrača iznose nula).



Slika 2. ovisnost broja korištenih osjetnika o faktoru  $\alpha$

Slika 3. Položaji osjetnika za  $\alpha = 0,000055$ 

Slika 4 prikazuje dobivene položaje osjetnika za  $T_2$ , gdje je  $\alpha = 0,1$ , što je minimalni upotrijebljeni broj osjetnika koje je ovaj algoritam uspio postići: njih 17.

Slika 4. Položaji osjetnika za  $\alpha = 0,1$ 

## Zahvale

Znanstveno istraživanje sufinancirano je sredstvima Europske unije kroz Europski fond za regionalni razvoj, Operativni program Republike Hrvatske “Konkurentnost i kohezija” za

razdoblje 2014.- 2020., projekt "Zaštita cjelovitosti konstrukcija u energetici i transportu",  
ZaCjel - KK.01.1.1.04.0056.

## Literatura

- [1] Tan, W., i Zhang, L.; Computational methodologies for optimal sensor placement in structural health monitoring: A review; *Structural Health Monitoring*; 2019; 4; 1287–1308.
- [2] Joshi, S., i Boyd, S.; Sensor Selection via Convex Optimization; *IEEE Transactions on Signal Processing*; 2009; 57 (2); 451–462.
- [3] Lin, F., Fardad, M., i Jovanović, M. J.; Design of Optimal Sparse Feedback Gains via the Alternating Direction Method of Multipliers; *IEEE Transactions on Automatic Control*; 2013; 58 (9), 2426–2431.
- [4] M. C. de Oliveira, J. C. Geromel, i J. Bernussou; Extended  $H_2$  and  $H_\infty$  norm characterizations and controller parameterizations for discretetime systems; *Int. J. Control*; 2002; vol. 75, no. 9; 666–679.
- [5] Münz, U., Pfister, M., i Wolfrum, P.; Sensor and Actuator Placement for Linear Systems Based on  $H_2$  and  $H_\infty$  Optimization; *IEEE Transactions on Automatic Control*; 2014; 59 (11); 2984–2989.
- [6] E. J. Candes, M. B. Wakin, i S. P. Boyd; Enhancing sparsity by reweighted  $l_1$  minimization; *J. Fourier Anal. Appl.*; 2008; vol. 14, no. 5; 877–905.



## Utjecaj malog prigušenja na vibracije grede

Skejo, R.<sup>1</sup>, Skoblar, A.<sup>2</sup> i Braut, S.<sup>3</sup>

### Sažetak

Vibriranje malo prigušenih konstrukcija može se opisati koristeći metodu superponiranja oblika vibriranja. Prednost takvog pristupa je u tome što se uz korištenje Rayleigh-ovog proporcionalnog prigušenja mogu dobiti realne vlastite frekvencije i oblici vibriranja bez obzira na iznos prigušenja. Navedeni pristup olakšava izračun i shvaćanje cijele prirode vibracija. U radu je analizirano kako iznos prigušenja utječe na funkcije modalnih koordinata i time na ukupne vibracije. Zaključeno je da malo prigušenje uzrokuje zanemarive pomake u fazi funkcija modalnih koordinata kod stacionarnih vibracija što omogućuje jednostavniji analitički izračun drugih fizikalnih pojava koje nastaju kao posljedica vibriranja konstrukcije kao npr. širenje zvuka.

**Ključne riječi:** vibracije, malo prigušenje, funkcije modalnih koordinata, Bernoulli-Euler teorija

---

<sup>1</sup> **Roko Skejo, Bacc. ing. mech.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: rskejo@riteh.hr

<sup>2</sup> **Doc. Ante Skoblar, dr. sc.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: askoblar@riteh.hr

<sup>3</sup> **Prof. Sanjin Braut, dr. sc.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: sbraut@riteh.hr

## 1 Uvod

Mnogi inženjerski sustavi okarakterizirani su malim prigušenjem. U takvim slučajevima dispacijski mehanizmi (prigušenje u materijalu, trenje u osloncima i spojevima, prijenos vibracijske energije na okolni fluid, ...) su relativno slabi (bez obzira radi li se o otvorenom ili zatvorenom sustavu) što upućuje na male gubitke energije tijekom jednog titraja.

Vibriranje malo prigušenih konstrukcija (omjer prigušenja  $< 0.01$ ) može se opisati koristeći metodu superponiranja oblika vibriranja. Prednost takvog pristupa je u tome što su kod malo prigušenih konstrukcija vlastite frekvencije i oblici vibriranja matematički približno realni što olakšava izračun i shvaćanje cijele prirode vibracija. Međutim, uvjet malog prigušenja uzrokuje i zanemarive pomake u fazi funkcija modalnih koordinata što omogućuje jednostavniji analitički izračun drugih fizikalnih pojava koje nastaju kao posljedica vibriranja konstrukcije.

Pa je tako, radijaciju zvuka oko malo prigušenih ravninskih izvora zvuka (Rayleigh-ov integral) moguće odrediti iz vibracijskog polja izvora zvuka za bilo koju prisilnu frekvenciju  $\omega$ , bez obzira vibrira li u rezonanciji ili ne, a iz pojednostavljenih analitičkih izraza koji u prirodi upućuju da površina konstrukcije u tom slučaju vibrira u fazi ili protufazi sa frekvencijom prisile [1].

Nadalje, metoda superponiranja oblika vibriranja pogodna je za analizu vibracija konstrukcija na niskim frekvencijama gdje se odziv određuje iz superpozicije nekolicine nisko frekventnih oblika vibriranja čije su vlastite frekvencije bliske pobudnoj frekvenciji. Na visokim frekvencijama dolazi do bliskih vrijednosti vlastitih frekvencija što može voditi do većih pogrešaka u procjeni odziva pa se za njih koriste druge statističke metode.

Ako se prigušenje u sustavu izrazi kao linearna kombinacija mase i krutosti (Rayleigh-ovo proporcionalno prigušenje), oblici vibriranja su matematički realni, neovisni i ortogonalni i utjecaj disipativnih mehanizama može se uključiti u izračun pomoću modalnog koeficijenta prigušenja koji je karakterističan za svaki pojedini oblik vibriranja. Međutim, Rayleigh-ovo proporcionalno prigušenje za više frekvencije može imati nerealno visoke veličine i time uzrokovati pogreške u izračunu što je dodatni razlog za korištenje metode superponiranja oblika vibriranja samo na niskim frekvencijama.

U radu će se analizirati kako iznos Rayleigh-ovog proporcionalnog prigušenja utječe na funkcije modalnih koordinata i time na ukupne vibracije. Za primjer je odabrana Bernoulli-Euler greda [2].

## 2 Odziv grede na harmonijsku pobudu

Harmonijske poprečne vibracije grede definiraju se umnoškom oblika vibriranja i funkcije modalne koordinate koja se smatra odzivom oblika vibriranja na modalnu pobudu [1]

$$w(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) \tilde{q}_i(\omega) e^{j\omega t} \right\} \quad (1)$$

gdje  $\psi_i(x)$  predstavlja realni oblik vibriranja  $i$ -tog oblika vibriranja grede a  $\tilde{q}_i$  predstavlja odgovarajući kompleksnu modalnu amplitudu. Kako bi primijenili ovu metodu potrebno je definirati oblike vibriranja konstrukcije,  $\psi_i(x)$ .

## 2.1 Određivanje vlastitih frekvencija i oblika vibriranja

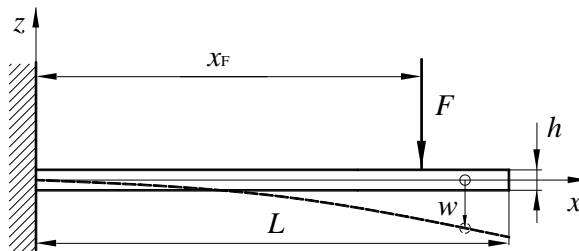
Za tankoj gredi konstantnog poprečnog presjeka može se koristiti BE teorija koja zadovoljava valnu jednadžbu savijanja [2]

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

i rubne uvjete na njegovim vlastitim frekvencijama. U izrazu (2)  $E$  je Young's modulus,  $I$  aksijalni moment tromosti poprečnog presjeka grede,  $\rho$  gustoća grede,  $A$  poprečni presjek grede,  $w$  poprečni pomak,  $x$  koordinata promatrane točke grede i  $t$  je vrijeme. Rubni uvjeti za gredu na slici 1, uklještenu s jedne i slobodnu s druge strane, glase:

$$w(0, t) = w'(0, t) = w''(L, t) = w'''(L, t) = 0 \quad (3)$$

gdje je ' derivacija po  $x$ -u. Uvjet  $w'''(L, t)=0$  vrijedi ako slobodni kraj grede nije opterećen transverzalnom silom.



Slika 1. Skica harmonijski pobuđene grede

Diferencijalna jednadžba (2) rješava se metodom separacije varijabli po kojoj se pomak definira s umnoškom funkcija položaja i vremena:

$$w(x, t) = \psi(x) \sin(\omega t) \quad (4)$$

gdje je  $\psi(x)$  funkcija vlastitog oblika vibriranja a  $\sin(\omega t)$  predstavlja harmonijske vibracije s kružnom vlastitom frekvencijom  $\omega$ .

Vlastite kružne frekvencije izračunaju se izrazom

$$\omega_i = (\beta_i L)^2 \left( \frac{EI}{\rho AL^4} \right)^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

gdje su konstante  $\beta_i$  nulte točke funkcije

$$\cos(\beta L) \cosh(\beta L) + 1 = 0 \quad (6)$$

a  $L$  je duljina grede.

Iz vlastitih frekvencija izračunavaju se oblici vibriranja

$$\psi_i(x) = (\cos(\beta_i x) - \cosh(\beta_i x)) - \frac{\cos(\beta_i L) + \cosh(\beta_i L)}{\sin(\beta_i L) + \sinh(\beta_i L)} (\sin(\beta_i x) - \sinh(\beta_i x)) \quad (7)$$

## 2.2 Određivanje funkcija modalnih koordinata

Jednadžbu prisilnih vibracija grede pri djelovanju sile u točki  $x_F$  je

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + EI \frac{c_d}{\omega^2} \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \hat{F} \sin(\Omega t) \delta(x - x_F) \quad (8)$$

gdje je  $c_d$  koeficijent Rayleigh-ov koeficijent prigušenja proporcionalan sa krutošću i  $c$  sa masom,  $\hat{F}$  amplituda vanjske sile,  $x_F$  je položaj djelovanja i  $\Omega$  kružna frekvencija harmonijske prisile.

Nakon uvrštavanja pretpostavljenog oblika rješenja (1) u diferencijalnu jednadžbu (8) te definiranja konstanti Rayleigh-ovog prigušenja,  $c_d = \beta \omega^2$  koja je proporcionalna krutosti i  $c = \alpha \varepsilon(x)$  koja je proporcionalna masi i gdje su  $\alpha$  i  $\beta$  konstante, dobija se niz nespregnutih izraza za funkcije modalnih koordinata [3]

$$\omega_i^2 q_i(t) + (\alpha + \beta \omega_i^2) \dot{q}_i(t) + \ddot{q}_i(t) = \hat{F} \sin(\Omega t) \frac{\bar{\psi}_i(x_F)}{\sqrt{M_i}} \quad (9)$$

S obzirom da se radi o harmonijskoj prisili, funkcije modalnih koordinata su harmonijske čiji period, amplituda i faza ovise o prigušenju u sustavu. Nadalje, modalni omjer prigušenja  $\zeta_i$  od  $i$ -tog oblika vibriranja po Rayleigh-u definira se izrazom

$$\zeta = \frac{\alpha}{2\omega} + \frac{\beta\omega}{2} \quad (10)$$

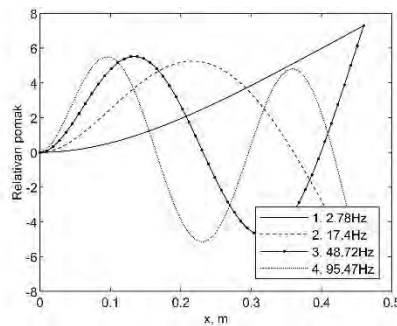
pa rješenje izraza (9) za nultu modalnu brzinu i pomak glasi

$$q_i(t) = e^{-\zeta_i \omega_i t} \left[ \frac{\bar{\psi}_i(x_F) \hat{F}}{\omega_i' \sqrt{M_i}} \int_0^t \sin(\Omega \tau) e^{\zeta_i \omega_i \tau} \sin(\omega_i'(t - \tau)) d\tau \right] \quad (11)$$

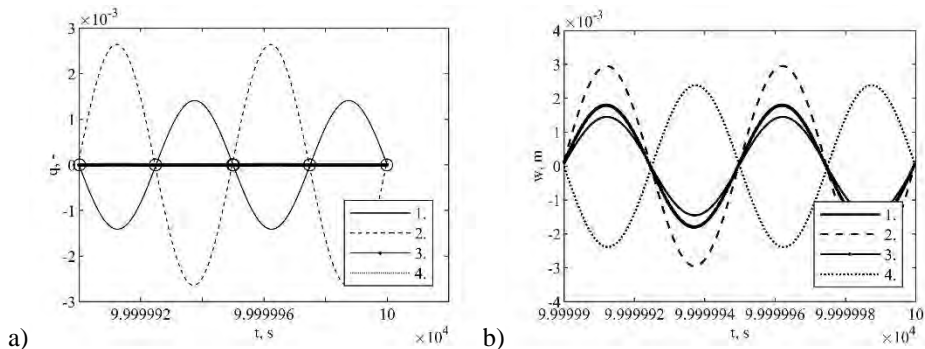
gdje je  $\omega'_i = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}$  prigušena vlastita frekvencija  $i$ -tog oblika vibriranja.

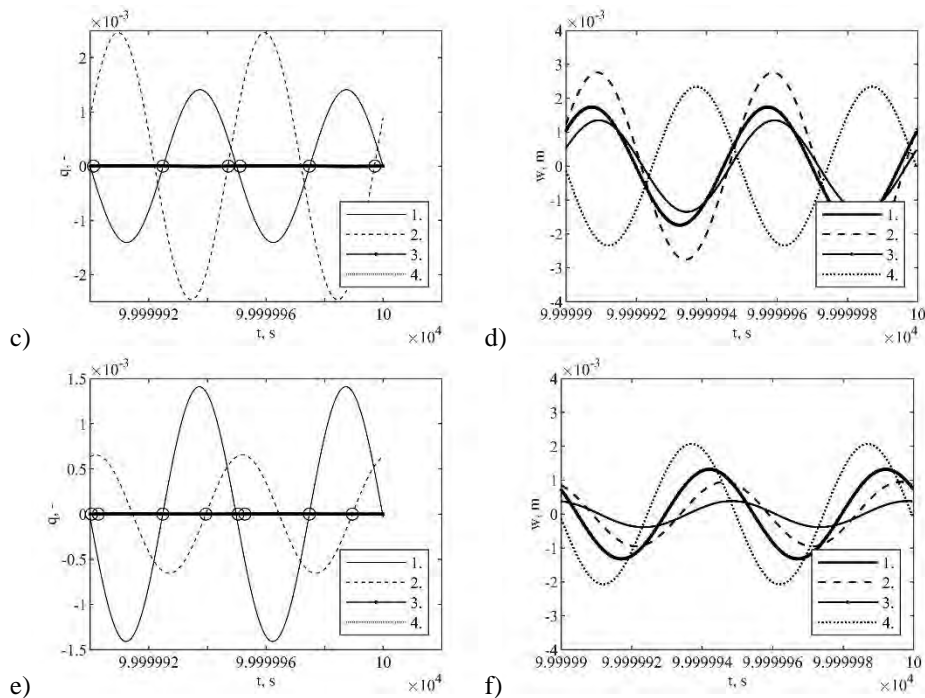
### 3 Primjer

Cilj primjera je za definirane dimenzije grede, koja se može modelirati s BE teorijom, izračunati vlastite frekvencije i oblike vibriranja. Greda je s jedne strane ukleještena a s druge slobodna. Odabrana je greda dimenzija  $0.46\text{m} \times 0.03\text{m} \times 0.0007\text{m}$  od pocinčanog lima s Young-ovim modulom elastičnosti  $E=2.1 \times 10^{11}$  Pa i gustoćom  $\rho=7780$   $\text{kg/m}^3$ . Nadalje, za amplitudu prisile 1N, frekvenciju 20Hz i položaj 0.4 m izračunati funkcije modalnih koordinata i odziv u 4 referentne točke (1/5, 2/5, 3/5 i 4/5L) za različite vrijednosti koeficijenta  $\beta$ .



Slika 2. Oblici vibriranja i odgovarajuće vlastite frekvencije





Slika 3. Stacionarne funkcije modalnih koordinata i odziv u 4. referentne točke, a) i b)  $\beta=0.0001$ , c) i d)  $\beta=0.001$ , e) i f)  $\beta=0.01$

## 4 Zaključak

U radu je analiziran utjecaj prigušenja na vibracije greda. Kako bi se koristile prednosti metode superponiranja oblika vibriranja (realne vlastite frekvencije i oblici vibriranja) odabrano je Rayleigh-ovo proporcionalno prigušenje. Korištena je BE teorija grede i opisano je kako se odrede vlastite frekvencije, oblici vibriranja, funkcije modalnih koordinata i krajnji odziv grede. Iz prikazanog primjera je vidljivo da za malo prigušenje dolazi do zanemarivih relativnih razlika u fazi funkcija modalnih koordinata tj. da će dijelovi grede vibrirati u fazi i protufazi što pojednostavljuje analitičke izraze za širenje zvuka oko grede.

## Zahvale

Autori se zahvaljuju financijskoj potpori Hrvatske zaklade za znanost (projekt broj IP-2019-04-4703) i Sveučilišta u Rijeci (projekt broj uniri-tehnic-18-37 i projekt broj uniri-tehnic-18-225).

---

## Literatura

- [1] Fahy, F. i Gardonio, P.; Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response; 2007; Second edition; 1-665.
- [2] Rao, S.S.; Vibration of Continuous Systems; 2007; 1-737.
- [3] Skoblar, A., Žigulić, R., Braut, S. i Blažević, S.; Dynamic Response to Harmonic Transverse Excitation of Cantilever Euler-Bernoulli Beam Carrying a Point Mass; FME Transactions; 2017; 45; 367-373.



# Modeliranje elastičnog ponašanja polimetilmetakrilata primjenom neuronske mreže

Stanić, M.<sup>1</sup>, Lesičar, T.<sup>2</sup>, Tomić, Z.<sup>3</sup>, Gubeljak, N.<sup>4</sup>

## Sažetak

Zbog sve veće potrebe za razvojem novih materijala i povećanog iskorištavanja starih poznatih materijala, potrebna je primjena novih i učinkovitijih metoda za opisivanje njihovog mehaničkog ponašanja. Jedna od metoda, koja je proteklih nekoliko godina postala vrlo popularna je metoda strojnog učenja temeljena na primjeni neuronskih mreža. Primjena strojnog učenja pokazala se uspješnom u opisivanju ponašanja materijala, pri čemu je za dobivanje točnih rezultata nužna dovoljna količina eksperimentalnih podataka. U radu je opisan postupak modeliranja elastičnog ponašanja polimetilmetakrilata (PMMA) primjenom neuronske mreže, pri čemu su kao ulazni podaci korišteni eksperimentalni rezultati jednoosnog vlačnog testa na PMMA epruveti. Prikazane su osnove neuronskih mreža te je izrađena unaprijedna (*feedforward*) neuronska mreža. Rezultati dobiveni primjenom neuronske mreže uspoređeni su s eksperimentalnim mjerenjima.

**Ključne riječi:** strojno učenje, neuronske mreže, elastično ponašanje

---

<sup>1</sup> **Matej Stanić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, e-mail: [matej.stanic@fsb.hr](mailto:matej.stanic@fsb.hr)

<sup>2</sup> **Doc. dr. sc. Tomislav Lesičar, docent**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, e-mail: [tomislav.lesicar@fsb.hr](mailto:tomislav.lesicar@fsb.hr)

<sup>3</sup> **Zoran Tomić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, e-mail: [zoran.tomic@fsb.hr](mailto:zoran.tomic@fsb.hr)

<sup>4</sup> **Red. prof. dr. sc. Nenad Gubeljak, profesor**, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo Maribor, Laboratorij za strojne elemente in konstrukcije, Smetanova ul. 17, 2000 Maribor, e-mail: [nenad.gubeljak@um.si](mailto:nenad.gubeljak@um.si)

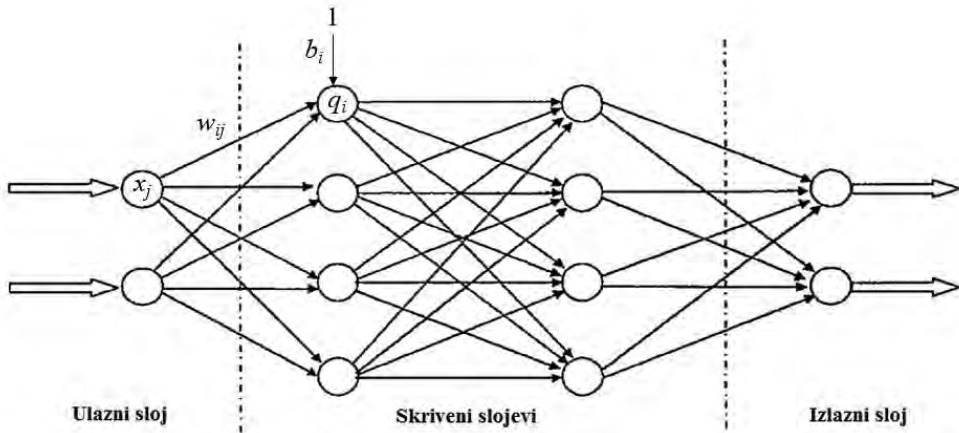
## Uvod

Mehaničko ponašanje materijala uobičajeno se opisuje odavno uspostavljenim analitičkim izrazima. Takvi konstitutivni materijalni modeli, kao i materijalne konstante, dobiveni su na temelju brojnih eksperimentalnih ispitivanja. Tradicionalno, ti su izrazi bili dovoljni za opisivanje klasičnih inženjerskih problema. Međutim, sve većom upotrebom novih materijala kompleksne mikrostrukture te povećanom eksploatacijom poznatih materijala, javlja se potreba za preciznijim i boljim opisivanjem konstitutivnog ponašanja materijala, što nažalost klasičnim analitičkim izrazima nije moguće postići zbog različitih mikrostrukturnih mehanizama koji se javljaju kao posljedica interakcije različitih mikrokonstituenata. Za opisivanje konstitutivnog ponašanja heterogenih materijala proteklih nekoliko desetljeća predloženo je više različitih pristupa, među kojima je najpopularnija metoda homogenizacije [1-3]. Međutim, zadnjih nekoliko godina, upotreba strojnog učenja postala je vrlo popularna u znanstvenoistraživačkim krugovima [4-6].

U ovome radu prikazana je upotreba strojnog učenja u opisivanju elastičnog ponašanja polimetilmetakrilata (PMMA). Na temelju eksperimentalnih rezultata i pomoću otvorenog koda *Tensorflow*, odnosno *Keras* API-ja, izrađena je neuronska mreža koja sa zadovoljavajućom točnošću opisuje konstitutivno ponašanje materijala. Primjenom neuronskih mreža moguće je odrediti iznos naprezanja koji će se javiti u materijalu uslijed zadane deformacije bez poznavanja materijalnih svojstava i konstanti.

## Neuronske mreže

Izrada materijalnog modela pomoću strojnog učenja temelji se na stvaranju arhitekture i treniranju neuronske mreže. S razvojem računala došlo je i do sve većeg razvoja neuronskih mreža te danas postoji velik broj arhitektura koje imaju različite primjene. Za potrebe ovoga rada izrađena je unaprijedna neuronska mreža (FNN) čija je arhitektura shematski prikazana na slici 1.



Slika 11. Shematski prikaz FNN mreže [7]

Neuronska mreža sastoji se od neurona koji su poredani u slojeve. Prvi sloj predstavlja ulazne vrijednosti, a za potrebe ovoga rada to su deformacije. Izlazni sloj su izračunate vrijednosti, tj. naprezanja. Sve ključne matematičke operacije obavljaju se u skrivenim slojevima. Uobičajeno je da unaprijedne neuronske mreže imaju od 2 do 4 skrivena sloja [8]. U prvom skrivenom sloju ulazna vrijednost ( $x_j$ ) se množi s težinskim koeficijentom  $w_{ij}$  (prikazan strelicom) i zbraja s konstantom prednapona  $b_i$  (eng. *bias*, shematski prikazan samo na jednom neuronu) te se potom dobivena vrijednost ( $n_i$ ) unosi u aktivacijsku funkciju  $f$ . Konačna izlazna vrijednost neurona  $q_i$  računa se preko izraza:

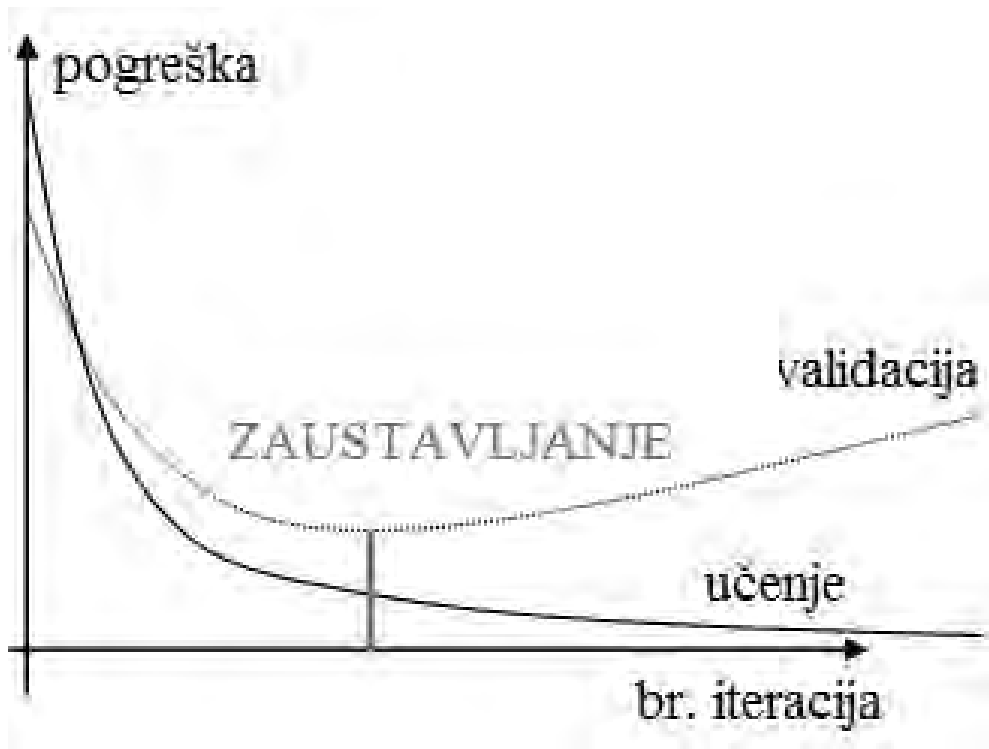
$$\begin{aligned} n_i &= w_{ij} \cdot x_j + b_i, \\ q_i &= f(n_i). \end{aligned} \quad (1)$$

U svakom idućem sloju ulazna vrijednost u neuron je izlazna vrijednost prethodnog sloja neurona. Kod klasičnih unaprijednih neuronskih mreža svi su neuroni međusobno povezani kao i na slici 1. Izbor aktivacijske funkcije ovisi o primjeni i vrsti problema koji se rješava. Aktivacijske funkcije skrivenih slojeva uglavnom su nelinearne kako bi neuronska mreža mogla opisati nelinearne probleme. Često korištene aktivacijske funkcije su sigmoidalna funkcija, funkcija hiperbolnog tangensa i ispravljena linearna funkcija (eng. *ReLU*). Kod problema linearne regresije u izlaznom se sloju koristi linearna funkcija, a kod problema klasifikacije normalizirana eksponencijalna funkcija (eng. *softmax*) [8]. U ovome radu kao aktivacijske funkcije korištene su linearna funkcija i funkcija hiperbolnog tangensa:

$$f(x) = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}. \quad (2)$$

Osim izbora arhitekture mreže (broj slojeva i vrsta aktivacijske funkcije), važno je odrediti i kako trenirati neuronsku mrežu. Učenje neuronske mreže podrazumijeva određivanje težinskih koeficijenata i konstanti prednapona za sve neurone i slojeve, na temelju poznatih ulaznih i izlaznih podataka. Najpoznatiji je algoritam za učenje neuronskih mreža algoritam unatračne propagacije greške (eng. *backpropagation algorithm*). Navedeni algoritam koristi se u kombinaciji s nekom od optimizacijskih metoda kao što je stohastički gradijentni spust (eng. *stochastic gradient descent*). Cilj treniranja je odrediti vrijednosti težinskih koeficijenata i konstanti prednapona tako da se minimizira funkcija gubitka  $L$ . Funkcija gubitka, za zadane ulazne vrijednosti, uspoređuje rezultate neuronske mreže sa zadanim izlaznim vrijednostima te računa iznos pogreške. Odabir funkcije gubitka ovisi o vrsti problema koji se rješava, načinu učenja i aktivacijskoj funkciji izlaznog sloja neuronske mreže. Koristeći algoritam unatračne propagacije greške, uspješno se određuju gradijenti funkcije gubitka u odnosu na težinske koeficijente i konstante prednapona u svim slojevima. Potom optimizator ažurira iznose težinskih koeficijenata i konstanti prednapona tako da se iznos funkcije gubitka smanji.

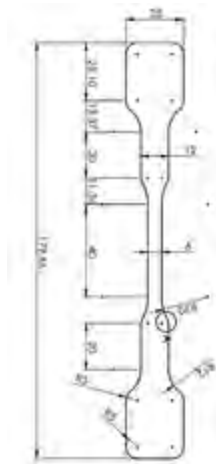
U ovome je radu za funkciju gubitka korištena funkcija srednje kvadratne pogreške (eng. *mean squared error*). Uspjeh treniranja neuronske mreže uvelike ovisi o količini dostupnih podataka kao i o njihovoj pripremi. Što je više podataka za učenje dostupno, neuronska mreža može bolje predvidjeti izlazne vrijednosti za nove, dotad neviđene, ulazne vrijednosti. Dostupni podaci dijele su u dvije grupe. Većina podataka (od 70 do 90%) sprema se u grupu za treniranje koja se potom koristi za optimiranje težinskih koeficijenata i konstanti prednapona. Ostatak podataka služi za provjeru treniranja neuronske mreže te se oni grupiraju u validacijsku grupu. Podaci iz validacijske grupe nisu dostupni neuronskoj mreži tijekom procesa učenja. Tijekom iterativnog procesa učenja, paralelno s treniranjem i ažuriranjem težinskih koeficijenata i konstanti prednapona, vrši se i njihova validacija. Proces učenja traje sve dok iznos funkcije gubitka pada za validacijsku grupu podataka, a ukoliko iznos funkcije gubitka krene rasti, proces učenja se prekida te se za konačne vrijednosti težinskih koeficijenata i konstanti prednapona uzimaju vrijednosti prije početka rasta pogreške. Ovaj kriterij zaustavljanja učenja naziva se rano zaustavljanje (eng. *early stopping*). Na taj način sprječava se preučenos neuronske mreže (eng. *overfitting*) pri čemu mreža jako dobro predviđa izlazne vrijednosti za ulazne podatke iz grupe za treniranje, ali gubi sposobnost generalizacije, tj. loše predviđa izlazne vrijednosti za ostale ulazne podatke. Primjer preučenosti i ranog zaustavljanja prikazan je na slici 2.



Slika 2. Preučenosť i rano zaustavljanje

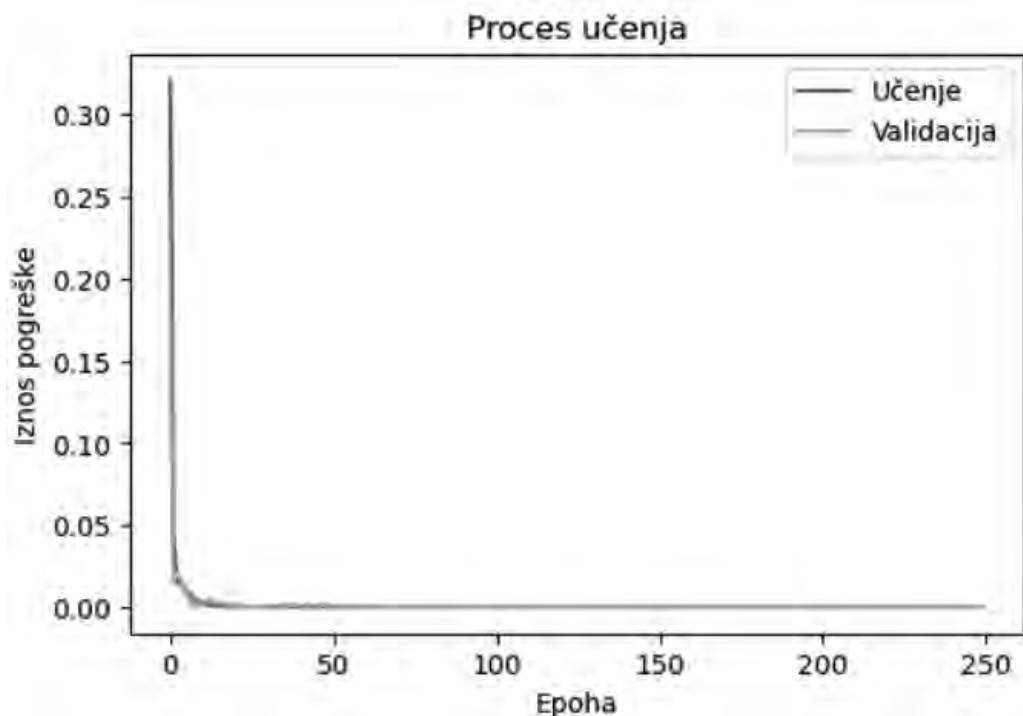
### Primjer

Ulazni podaci za treniranje neuronske mreže u ovome radu dobiveni su eksperimentalnim ispitivanjem epruvete polimetilmetakrilata (PMMA), također poznatog kao akrilno staklo. PMMA je prozirni termoplastični polimer koji se često koristi kao zamjena za staklo. Odlikuje ga krhko ponašanje pri čemu se vrlo malo plastične deformacije razvije prije loma. Skica i geometrija korištene PMMA epruvete prikazana je na slici 3. Uzorci su laserski rezani iz ploče debljine 5,75 mm te su podvrgnuti jednoosnom vlačnom testu prema normi ASTM D638-14 na hidrauličkoj INSTRON kidalici brzinom opterećivanja od 1 mm/min. Uspješno su obavljena mjerenja na 2 uzorka te je za ulazne podatke korištena njihova srednja vrijednost.



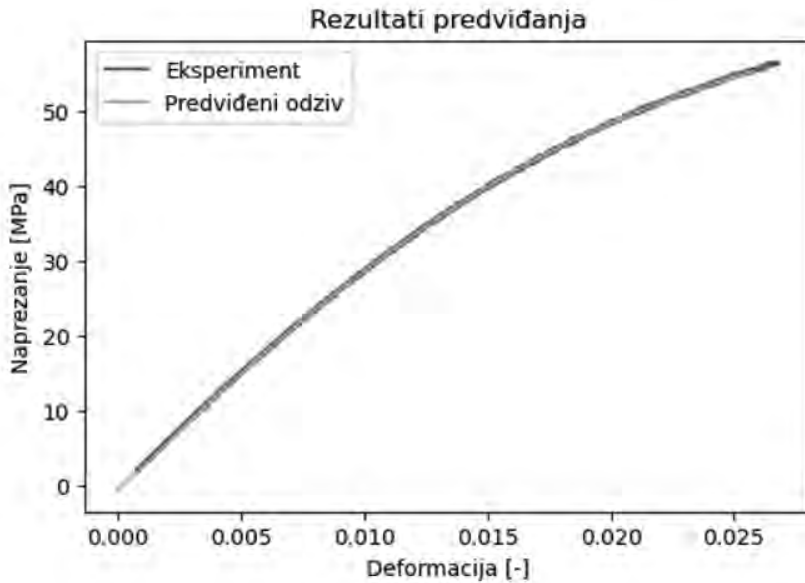
Slika 3. Geometrija PMMA epruvete

Provođenjem jednoosnog vlačnog testa dobiveno je ukupno 2911 podataka koji će se koristiti za treniranje neuronske mreže. Ulazni su podaci vrijednosti deformacija, dok su izlazni podaci vrijednosti napreznja koja se javljaju tijekom vlačnog testa. 75% nasumično odabranih podataka korišteno je za stvaranje grupe podataka za učenje, a ostatak od 25% je iskorišten za potrebe validacije. Prije same izrade mreže, podaci se moraju obraditi kako bi učenje mreže bilo brže i lakše izvedivo. Budući da su iznosi napreznja nekoliko redova veličina veći od iznosa deformacija, provodi se normiranje u intervalu od -1 do 1, kako bi sve varijable imale isti utjecaj te kako ne bi došlo velikih oscilacija u iznosu težinskih koeficijenata i konstanti prednapona. Nakon pripreme podataka izrađena je mreža s dva skrivena sloja i izlaznim slojem. Ulazni sloj čine vrijednosti deformacija. Prvi skriveni sloj sastoji se od 16 neurona, a drugi sloj od 8 neurona. Za oba skrivena sloja odabrana je aktivacijska funkcija hiperbolnog tangensa. Posljednji, izlazni sloj, sastoji se od jednog neurona jer je potrebno računati samo jednu vrijednost napreznja. Za izlazni sloj korištena je linearna aktivacijska funkcija. Tako konstruirana mreža ima ukupno 177 težinskih koeficijenata i konstanti prednapona za treniranje. Radi bržeg i praktičnijeg treniranja podaci namijenjeni za treniranje se unose u serijama od 32 podatka (eng. *batch series*) [8]. Nakon svake serije od 32 podatka ažuriraju se iznosi težinskih koeficijenata i konstanti prednapona. Tako se tijekom jedne epohe u mrežu unesu svi podaci u velikom broju serija te se težinski koeficijenti i konstante prednapona više puta ažuriraju. Tijekom učenja je došlo do ukupno 22750 ažuriranja težinskih koeficijenata i konstanti prednapona. Za izračunavanje gradijenata funkcije gubitka korišten je algoritam unatragne propagacije greške, dok je za ažuriranje parametara mreže korišten optimizacijski algoritam ADAM. Taj je algoritam nadogradnja klasičnog stohastičkog gradijentnog spusta jer za ažuriranje koristi prilagodljivu procjenu momenta, odnosno linearnih kombinacija trenutnog gradijenta i prošlih koraka [9]. Na slici 4. prikazana je greška tijekom treniranja za validacijsku i trening grupu podataka.



Slika 4. Greška za trening i validacijsku grupu tijekom učenja

Zbog jednostavne arhitekture i relativno malog broja dostupnih podataka, učenje mreže prilično je brzo i točno kao što se vidi na slici 4. Za manje od 30 iteracija (epoha) dođe se do zadovoljavajućeg iznosa pogreške od  $10^{-6}$  za trening i validacijsku grupu podataka. Nakon uspješnog učenja, potrebno je provjeriti sposobnost neuronske mreže da predvidi naprezanja za nove ulazne podatke. Za tu svrhu stvorena je nova grupa podataka koja sadrži nasumične iznose deformacije između 0 i 0,025. Usporedba eksperimentalnih podataka i predviđanja neuronske mreže prikazana je na slici 5.



Slika 5. Usporedba eksperimentalnih rezultata i predviđanja neuronske mreže

Izrađeni model neuronske mreže izrazito točno predviđa iznose naprezanja za nove nepoznate podatke. Točnost predviđanja ograničena je na područje deformacija u kojem je neuronska mreža bila učena. Ukoliko novi ulazni podaci nisu u tom rasponu deformacija, model će automatski ekstrapolirati rješenja što može dovesti do upitne točnosti. Ipak, za malo područje između 0 i 0,001, neuronska mreža je prilično točno ekstrapolirala rješenja.

## Zaključak

U radu je prikazana primjena unaprijedne neuronske mreže za određivanje elastičnog ponašanja polimetilmetakrilata. Ukratko su objašnjeni osnovni principi neuronskih mreža. Usporedbom s eksperimentalnim ispitivanjima je pokazano da model s dva skrivena sloja može točno predvidjeti konstitutivno ponašanje materijala. U nastavku istraživanja potrebno je proširiti mogućnosti arhitekture neuronske mreže za razmatranje višeosnog stanja naprezanja i deformacija te opisivanja elastoplastičnog ponašanja materijala.

## Literatura

- [1] Lesičar, T.; Multiscale modeling of heterogeneous materials using second-order homogenization [d disertacija]; 2015.
- [2] Kouznetsova, V. G.; Computational homogenization for the multi-scale analysis of multiphase materials [d disertacija]; 2002.

- [3] Terada, K., Kikuchi, N.; A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media; *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*; 2001; 190; 5427-5464
- [4] Logarzo, H. J., Capuano, G., Rimoli, J. J.; Smart constitutive laws: Inelastic homogenization through machine learning; *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*; 2021; 373; 113482
- [5] Haghghat, E., Raissi, M., Moure, A., Gomez, H., Juanes, R.; A deep learning framework for solution and discovery in solid mechanics; <https://arXiv.org/abs/2003.02751>; 2020
- [6] Huang, D., Fuhg, J. N., Weißenfels, C., Wriggers, P.; A machine learning based plasticity model using proper orthogonal decomposition; *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*; 2020; 365; 113008
- [7] Kumar, R., Aggarwal, R., K., Sharma, J., D.; Energy analysis of a building using neural artificial network; *Energy and Buildings*; 2013; 65; 352-358
- [8] Hagan, M. T., Demuth, H. B., Beale, M. H., De Jesus, O.; *Neural network design* 2nd edition; 2014.
- [9] Kingma, D. P., Ba, J.; Adam: A method for stochastic optimization; 3rd International conference for learning representations; 2015



# Eksperimentalna i numerička analiza raslojavanja lijepljenih nosača ovisnog o brzini nanošenja opterećenja

Škec, L.<sup>1</sup> i Alfano, G.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovom radu proučava se utjecaj brzine nanošenja opterećenja na lomnu otpornost ljepila u spoju s aluminijskim pločama na temelju opsežnog eksperimentalnog programa i numeričkih simulacija metodom konačnih elemenata. Provedena su ispitivanja raslojavanja testom dvostruke konzole više uzoraka pri 6 različitih brzina nanošenja opterećenja te je pokazano da se lomna otpornost ljepila povećava s brzinom nanošenja opterećenja. U numeričkom modelu za aluminijske ploče koriste se gredni konačni elementi, a za ljepilo spojni elementi bazirani na modelu kohezivne zone koji kombiniraju oštećenje i visko-elastičnost. Usporedbom s eksperimentalnim rezultatima pokazano je da predloženi model s velikom točnošću može simulirati ponašanje ljepila pri različitim brzinama nanošenja opterećenja.

**Ključne riječi:** lijepljeni spojevi, raslojavanje, eksperimenti, numerička simulacija, viskoznost

---

<sup>1</sup> **dr.sc. Leo Škec, docent**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski Fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: leo.skec@uniri.hr

<sup>2</sup> **dr.sc. Giulio Alfano, profesor**, Brunel University London, College of Engineering, Design and Physical Sciences, Kingston Lane, Uxbridge UB8 3PH, e-mail: giulio.alfano@brunel.ac.uk

## 1 Uvod

Primjena lijepljenih spojeva u posljednjih nekoliko desetljeća bilježi kontinuirani porast u različitim granama inženjerstva poput automobilske i avioindustrije, ali i građevinarstva. Prednosti lijepljenih spojeva u odnosu na tradicionalna mehanička spajala su jednoliko raspoređena naprezanja u spoju, zaštita spoja od vlage i korozije, mala vlastita težina, relativno jednostavna primjena te laka prilagodljivost različitim oblicima i materijalima. Slom lijepljenog spoja dovodi do raslojavanja (delaminacije) ili odljepljivanja spoja, što je najučestaliji i najopasniji način otkazivanja lijepljenih spojeva.

U ovom radu proučava se utjecaj brzine nanošenja opterećenja na lomnu otpornost lijepljenog spoja. Naime, industrijska ljepljiva su u pravilu polimeri kod kojih je naglašena viskoznost, što znači da će spoj pri različitim brzinama opterećenja pokazivati različitu nosivost. U pravilu, s povećanjem brzine opterećenja ljepljivo pokazuje veću lomnu otpornost, iako postoje slučajevi kod kojih postoji granična brzina iznad koje nosivost ljepljive ponovno opada. Ponašanje ljepljive ovisno o brzini nanošenja opterećenja potrebno je ustanoviti ponavljanjem istih eksperimentima pri različitim brzinama. Glavni parametar kojim opisujemo lomnu otpornost ljepljive je kritična promjena oslobođene energije (engl. *critical energy release rate*) pa se najčešće eksperimentima određuje njezina ovisnost o brzini nanošenja opterećenja. Lomna otpornost određuje se posebno za opterećenje spoja u normalnom smjeru koje uzrokuje slom u tzv. prvom modu (engl. *mode I*), u tangencijalnom smjeru (engl. *mode II*) ili mješovito (engl. *mixed mode*). U ovom radu bavimo se samo prvim modom koji se ispituje tzv. testom dvostruke konzole poznatijim kao DCB test (od engl. *double cantilever beam*).

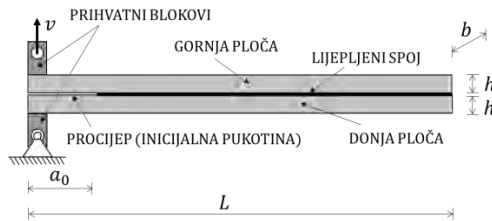
Najčešće se lomna otpornost ljepljive određuje analitičkim izrazima (detaljni pregled dan je u [1]) na temelju izmjerene sile, pomaka na mjestu nanošenja sile te duljine propagirajuće pukotine. Brzina nanošenja opterećenja (ili bilo kakva vremenska komponenta eksperimenta) ne uzima se obzir kod takvog proračuna. Preporuka je da se eksperiment izvodi pri vrlo niskoj brzini kako bi ponašanje bilo čim bliže kvazi-statičkom. U ovom radu korišten je originalni numerički model izrađen po metodi konačnih elemenata kod kojeg se osnovni materijal modelira grednim konačnim elementima, a sloj ljepljive spojnim (engl. *interface*) elementima koji objedinjuju oštećenje i viskoelastičnost te mogu simulirati raslojavanje ovisno o brzini nanošenja opterećenja.

U radu je najprije kratko objašnjen eksperimentalni program, nakon čega su dani najvažniji podaci o numeričkom modelu. Nakon usporedbe eksperimentalnih i numeričkih rezultata dani su zaključci i smjernice za daljnji rad.

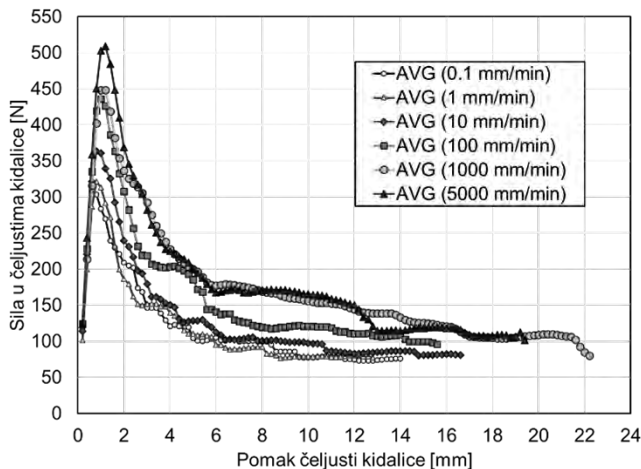
## 2 Eksperimentalni program

Uzorci su izrađeni od aluminijskih ploča debljine  $h = 6.35$  mm, širine  $b = 25.4$  mm i duljine  $L = 237$  mm. Po dvije ploče spojene su ljepljivom Araldite® 2015, ali je na dijelu uzorka gdje se nanosi opterećenje ostavljen procijep bez ljepljive duljine  $a_0 = 40$  mm (vidi Sliku 1). Ljepljivo je nanošeno ručno na obje ploče koje su potom spojene i ostavljene 24 sata pod utezima kako bi se postigla uniformna debljina ljepljive od približno 0.5 mm. Nakon toga, uzorci su dodatno grijani u peći na 80°C kako bi se ljepljivo do kraja osušilo. Ispitivanje je provedeno u kidalici,

a prihvat uzoraka ostvaren je pomoću aluminijskih blokova koji povezuju ploče s čeljustima kidalice. Testovi su provedeni pri 6 različitim brzinama otvaranja čeljusti, i to 0.1, 1, 10, 100, 1000 i 5000 mm/min. Pri svakom testu na kidalici je mjereno vrijeme  $t$ , pomak čeljusti  $v$  te sila u čeljustima  $F$ . Za svaku brzinu provedena su 4 testa na temelju kojih je za svaku brzinu određena prosječna eksperimentalna krivulja sila-pomak (vidi Sliku 2). Može se jasno vidjeti kako s porastom brzine dolazi do povećanja lomne otpornosti ljepila pa se nosivost spoja povećava.



Slika 1. Shematski prikaz ispitivanih uzoraka



Slika 1. Prosječne eksperimentalne krivulje sila-pomak za različite brzine nanošenja opterećenja

### 3 Numerički model

Kao što je ranije spomenuto, numerički model bazira se na metodi konačnih elemenata. Obzirom na dimenzije uzoraka, za aluminijske ploče koriste se gredni konačni elementi, i to dvočvorni Timošenkovi elementi koji u obzir uzimaju i deformacije od poprečne sile. Ljepilo je modelirano četveročvornim spojnim elementima koji se direktno povezuju na čvorove grednih elemenata koje spajaju. Takav je pristup vrlo raširen u numeričkom modeliranju raslojavanja [2,3]. Obzirom da je test dvostruke konzole simetričan obzirom na ravninu koja

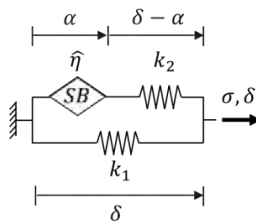
prolazi sredinom lijepljenog spoja, moguće je modelirati samo pola uzorka. Time se značajno reducira vrijeme simulacije.

Sami spojni elementi bazirani su na tzv. modelu kohezivne zone (engl. *cohesive-zone model*) kod kojeg se uvodi nelinearna veza između relativnih pomaka na spoju dviju ploča i naprezanja koje spoj prenosi. Kod takvih modela se materijal se u pravilu najprije ponaša linearno-elastično, ali nakon dostizanja vršnog naprezanja (čvrstoće) dolazi do oštećenja koje se manifestira kroz pad krutosti, odnosno pad naprezanja pri daljnjem povećanju relativnog pomaka. Pretpostavlja se da nakon što dostignuta neka kritična vrijednost relativnog pomaka ljepljivo više nije u stanju prenositi naprezanja između spojenih komponenti. Kod modela korištenog u ovom radu (a originalno objavljenog u [4]) dodatno je uzet u obzir i utjecaj promjene relativnog pomaka u vremenu, odnosno brzine razdvajanja spoja. Iako se eksperimenti izvode pri konstantnoj brzini pomicanja čeljusti kidalice, brzina razdvajanja na lijepljenom spoju će ovisiti o položaju i vremenu. Naime, ista će točka na spoju u različitim trenucima imati različitu brzinu razdvajanja, a samim time i različitu lomnu otpornost. Stoga, za razliku od uvriježenog pristupa kod kojeg se određenoj brzini otvaranja čeljusti kidalice pridružuje odgovarajuća vrijednost lomne otpornosti ljepljiva s kojom se dalje provodi kvazi-statički proračun, u ovom modelu moguće je preciznije opisati ponašanje ljepljiva prilikom raslojavanja u vremenu.

Kao što je prikazano na Slici 2, reološki model ljepljiva modificirani je Zenerov model (poznat i kao SLS model od engl. *standard linear solid model*) koji se sastoji od dvije grane. Na donjoj grani, nalazi se samo opruga krutosti  $k_1$ , ali ta krutost (za razliku od standardnog Zenerovog modela) nije konstantna, već ovisi o veličini relativnog pomaka  $\delta$ . Naime, veza između relativnog pomaka  $\delta$  i naprezanja na spoju  $\sigma$  je nelinearna i definirana ranije spomenutim modelom kohezivne zone s oštećenjem. Gornja grana predstavlja modifikaciju tzv. Maxwellovog modela gdje je umjesto standardnog linearnog viskoznog elementa (prigušivača) korišten tzv. Scott-Blair (SB) element u kojem je naprezanje definirano kao

$$\sigma_{SB} = \hat{\eta} \frac{d^v \alpha}{dt^v} \quad (1)$$

gdje je  $\hat{\eta}$  materijalna konstanta SB elementa (faktor viskoznog prigušenja), a drugi član predstavlja frakcionalnu derivaciju reda  $v$  relativnog pomaka  $\alpha$  po vremenu  $t$ , pri čemu  $0 < v < 1$ . Kao što je navedeno u [4], poznato je da za mnoge polimere frakcionalna viskoelastičnost opisuje ponašanje materijala u velikom rasponu brzina deformacije puno efikasnije (s manje parametara) u odnosu na klasične modele s višestrukim Maxwellovim granama.

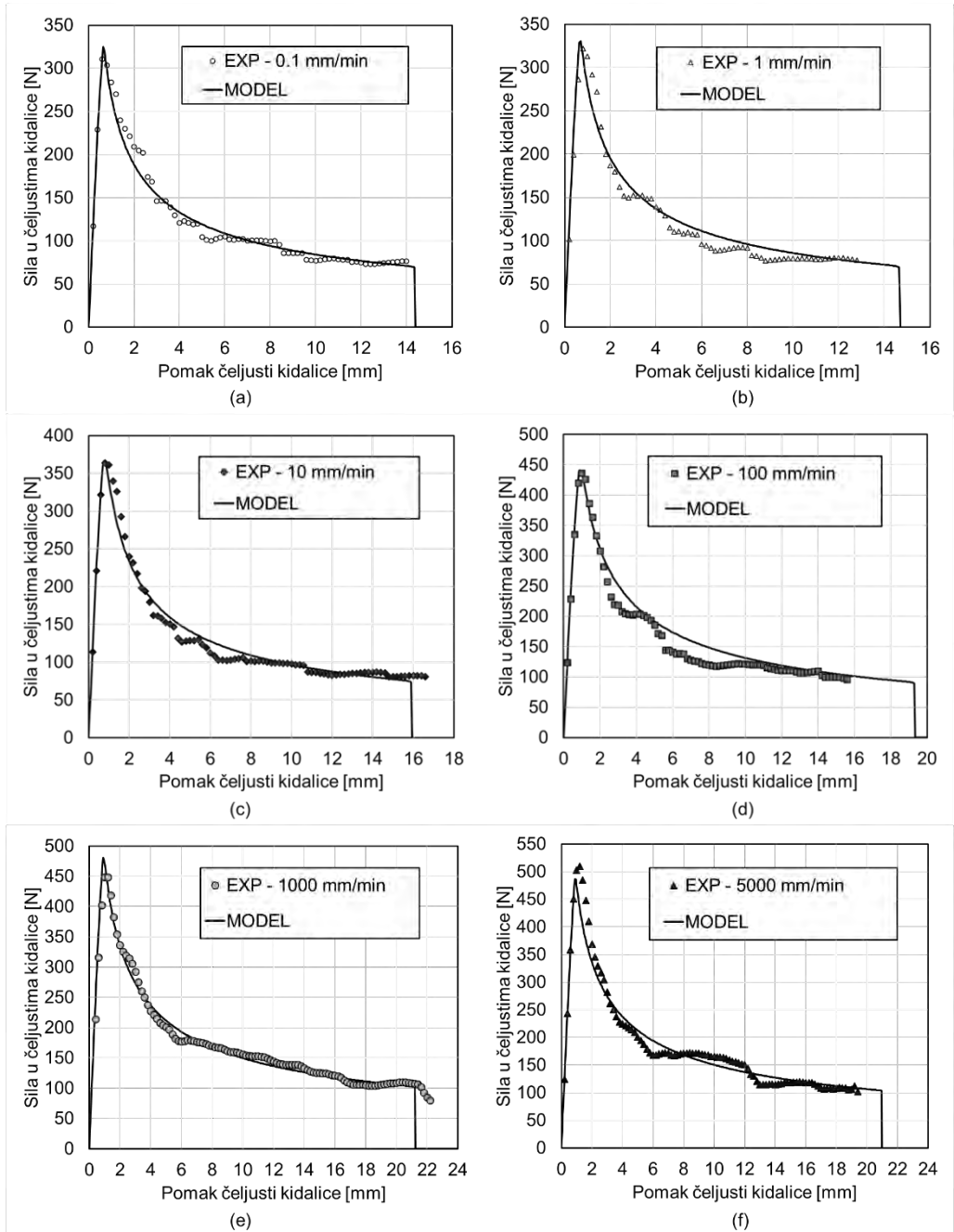


Slika 3. Reološki model ljepila

Treba naglasiti da u modelu prikazanom na Slici 2 oštećenje (prisutno u oprugama krutosti  $k_1$  i  $k_2$ ) ne ovisi o brzini razmicanja. Za potrebe računalne implementacije koristi se numerička aproksimacija Grünwald-Letnikove definicije frakcionalne derivacije. Za rješavanje se vremenska domena problema diskretizira u konačni broj inkremenata, a u svakom koraku sprema se maksimalni relativni pomak na spoju kako bi se u sljedećem koraku znalo je li i u kojoj mjeri došlo do oštećenja. Spojni elementi se u odgovarajućim čvorovima kombiniraju s grednim elementima tako što im se pribrajaju doprinosi u vektoru neuravnoteženih sila (rezidualu) i matrici krutosti. Gredni elementi se integriraju reduciranom Gaussovom integracijom u jednoj točki, dok se kod spojnih elemenata koristi Simpsonova integracija u 3 točke. Rješenje se dobiva Newton-Raphsonovom metodom s kontrolom pomaka.

#### 4 Usporedba rezultata modela s eksperimentima

Iako su poznati svi geometrijski i materijalni parametri aluminijskih ploča potrebnih za numeričke simulacije, parametri ljepila trebaju se odrediti na način da rezultati simulacija imaju najmanje moguće odstupanje od eksperimentalnih podataka (kao što je to prikazano na Slici 4). Ipak, obzirom da model ima 7 nezavisnih parametara, a rezultate treba provjeriti za 6 različitih brzina otvaranja čeljusti kidalice, takav zadatak nije trivijalan. Iako postoje različite metode za algoritamsku identifikaciju parametara, u ovom radu parametri su odabrani kombinacijom analitičkih rješenja i metode pokušaja.



Slika 4. Usporedba rezultata modela s prosječnim eksperimentalnim krivuljama sila-pomak za brzinu otvaranja čeljusti (a) 0.1, (b) 1, (c) 10, (d) 100, (e) 1000 i (f) 5000 mm/min.

Na temelju standardne kvazi-statičke analize eksperimentalnih rezultata ustanovljeno je da se između brzina 0.1 i 1 mm/min, te između brzina 1000 i 5000 mm/min nema značajne promjene lomne otpornosti. Stoga, pretpostavljeno je da parametri kvazi-statičkog modela koji najbolje opisuju ponašanje pri 0.1, odnosno 5000 mm/min, definiraju donju, odnosno gornju granicu koju ovakav model ima. Pod tom pretpostavkom određeno je 5 parametara modela, a preostala 2 određena su metodom pokušaja. Radi se o parametrima koji direktno definiraju visko-elastični odgovor modela, a to su red (stupanj) frakcionalne derivacije  $\nu$  te faktor viskoznog prigušenja  $\eta$ . Kao što se može vidjeti na Slici 4, model je u stanju izvršno simulirati ponašanje ljepila pri različitim brzinama nanošenja opterećenja.

## 5 Zaključci

U ovom radu predstavljena je eksperimentalna i numerička analiza raslojavanja lijepljenih nosača ovisnog o brzini nanošenja opterećenja. Provedeni eksperimenti pokazuju da nosivost korištenog ljepila ovisi o brzini nanošenja opterećenja, a predloženi numerički model može s velikom točnošću simulirati takvo ponašanje. Iako su, zbog relativno malog broja stupnjeva slobode u modelu, pojedinačne numeričke simulacije iznimno brze, jedan od glavnih problema u predloženom modelu je identifikacija parametara. Iako, kao u prikazanom primjeru, postoje načini za brzo i jednostavno identificiranje 5 parametara koji ne ovise o brzini opterećenja, za preostala 2 parametra ovisna o brzini opterećenja, umjesto metode pokušaja, bilo bi primjerenije koristiti neki od algoritama za automatsku identifikaciju. Nadalje, kod slomljenih uzoraka je analizom lijepljenog sloja ustanovljeno da postoje mjesta sa slabom adhezijom na aluminijskoj površini, ali i šupljine u samom ljepilu čiji uzrok za sada nije u potpunosti jasan. Ipak, kako je nakon sloma položaj i obujam takvih defekata poznat, iste je moguće uključiti u simulaciju kako bi model lijepljenog sloja (s odgovarajućim parametrima) čim vjernije prikazivao realno stanje.

## Zahvale

Ovo istraživanje financirala je Europska unija kroz program za istraživanja i inovacije Obzor 2020 stipendijom Marie Skłodowska-Curie br. 701032.

## Literatura

- [1] Škec, L., Alfano, G. i Jelenić, G.; Enhanced simple beam theory for characterising mode-I fracture resistance via a double cantilever beam test; Composites Part B: Engineering; 2019; 167; 250-262.
- [2] Alfano, G. i Crisfield, M.; Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues; International journal for numerical methods in engineering; 2001; 50(7); 1701-1736.

- [3] Škec, L., Jelenić, G. i Lustig, N.; Mixed-mode delamination in 2D layered beam finite elements; *International journal for numerical methods in engineering*; 2015; 104 (8); 767-788.
- [4] Musto, M. i Alfano, G.; A fractional rate-dependent cohesive-zone model; *International journal for numerical methods in engineering*; 2015; 103(5); 313-341.

# Numeričke simulacije hidrauličkih tranzijenata u CHE Fužine

Škifić, J.<sup>1</sup>, Grenko, B.<sup>2</sup> i Kranjčević, L.<sup>3</sup>

## Sažetak

Provedene su numeričke simulacije hidrauličkih tranzijenata u sustavu CHE Fužine pomoću nestacionarnog 1D modela strujanja pod tlakom u cijevi. Točnost modela postignuta je korištenjem nekonzervativne formulacije modela nestacionarnog strujanja tekućine u cijevi pod tlakom koji uključuje modificirani model nestacionarnog trenja i fluks limitiranu numeričku metodu drugog reda točnosti. Postignuti numerički rezultati su pokazali dobro slaganje sa izmjerenim podacima promatranog sustava

**Ključne riječi:** hidraulički tranzijenti, numeričke simulacije, hidroelektrane

---

<sup>1</sup> izv. prof. dr. sc. Jerko Škifić, dipl. ing., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarstvo inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, email: jerko.skific@riteh.hr

<sup>2</sup> Bojan Grenko Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarstvo inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka,

<sup>3</sup> red. prof. dr. sc. Lado Kranjčević, dipl. ing., Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za mehaniku fluida i računarstvo inženjerstvo, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, email: lado.kranjcevic@riteh.hr

## 1 Uvod

Tijekom numeričkih simulacija hidrauličkih tranzijenata energetski gubici uslijed djelovanja trenja se aproksimiraju izrazima izvedenim za stacionarne ili kvazi stacionarne uvjete strujanja, čime numeričko modeliranje disipacije i periode hidrauličkog udara nije moguće predvidjeti na zadovoljavajući način. Iako je razvijen veći broj modela nestacionarnog trenja [1-4], u ovom radu je korišten nestacionarni model trenja zasnovan na proširenoj Brunonevoj formulaciji [9] zapisan u nekonzervativnoj formulaciji [7]. Rješavanje dobivenog numeričkog modela provedeno je fluks limitiranom numeričkom metodom drugog reda [7]. Dobiveni model je validiran usporedbom numeričkih rezultata sa izmjerenim podacima promatranog sustava.

## 2 Opis crpne hidroelektrane Fužine

Strojarnica CHE Fužine smještena je na izlazu iz tunela Lokvarka-Ličanka, koji povezuje Lokvarsko jezero i jezero Bajer. Tlačni tunel Lokvarka – Ličanka ukupne dužine 3456,5 m ima promjer 2,4 m a od vodne do zasunske komore Fužine 2,20 m. Vodna komora je cilindrična, s donjom horizontalnom komorom.

Zasunska komora je smještena na izlazu iz tunela iza prijelaza tunela u čelični tlačni cjevovod. Iza zasunske komore celicni se cjevovod račva u dva ogranka. Jedan ogranak promjera 1,00 m vodi prema ispustu, a drugi promjera 1,80 m služi kao čelični tlačni cjevovod za dovod i odvod vode do strojarnice hidroelektrane.

Strojarnica je situirana uz regulacijski kanal Ličanke i služi za smještaj turbine i crpke. Turbina koristi vodu iz Lokvarskog jezera na padu od 24,50 do 54,50 m.

Čelični tlačni cjevovod je ukopan u teren dužine 44 m. Promjer mu je 1,8 m a završava računom i dvema odvojcima s prirubnicama promjera 1,6 m na koje su priključeni leptirasti zatvarači turbine i pumpe.

## 3 Matematički model

### 3.1 Jednodimenzionalno strujanje tekućine u cijevi

Allievijev model strujanja tekućine u cijevima proizlazi iz direktne primjene zakona očuvanja mase i količine gibanja. Također, model ne pretpostavlja pojavu kavitacije i promjenu gustoće fluida uslijed promjene tlaka u cijevi. Konačni oblik Allievijevog modela može se zapisati u obliku:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{c^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + J_s + J_u = 0 \quad (2)$$

gdje indeksi  $t$  i  $x$  označavaju vrijeme i duljinu (duž osi cijevi),  $H$  označava piezometričku visinu,  $Q$  protok,  $c$  brzinu zvuka,  $g$  ubrzanje sile teže,  $A$  površinu poprečnog presjeka, dok  $J_s$  i  $J_u$  predstavljaju gubitke po jediničnoj dužini cijevi zbog stacionarnog i nestacionarnog trenja. Gubici uslijed djelovanja stacionarnog trenja su:

$$J_s = \frac{\lambda Q |Q|}{2DA} \quad (3)$$

gdje  $\lambda$  predstavlja Darcy-ev faktor trenja, a  $D$  promjer cijevi. Nestacionarni član trenja prema definicij preuzetoj iz [2]:

$$J_u = \frac{k}{2} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + c \Phi_A \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| \right) \quad (4)$$

gdje  $\Phi_A$  označava predznak  $Q$  i  $k$  predstavlja Brunone-ov koeficijent trenja definiran sa

$$k = \frac{\sqrt{C^*}}{2} \quad (5)$$

$$C^* = \begin{cases} 0,0476 & Re < 2300 \\ 7,41(Re^{\log(14,3/Re^{0,05})})^{-1} & Re \geq 2300 \end{cases} \quad (6)$$

gdje je  $Re = uD/\nu$  Reynoldsov broj,  $u$  brzina strujanja i  $\nu$  dinamička viskoznost fluida. Nestacionarni model trenja je moguće napisati u obliku:

$$J_u = \frac{1}{2} \left( k_p \frac{\partial Q}{\partial t} + k_A c \Phi_A \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| \right) \quad (7)$$

gdje su prema [9] dva nestacionarna koeficijenta  $k_p$  i  $k_A$  definirana sa  $k_p = k$  i  $k_A = 1,5k_p$ . Kako sustav jednačbi (1)-(2) sa izrazima (3)-(4) ili (7) nije napisan u klasičnom konzervativnom obliku te ga je potrebno napisati u nekonzervativnom obliku [7].

### 3.2 Rubni uvjeti

Rubni uvjet jezera modeliran je kao spremnik sa lokalnim otporom [10] na ulazu u sprovodni aparat. Odnosno, piezometrička visina na ulazu u tunel iznosi

$$H = H_{st} - (1 - \zeta) \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (8)$$

gdje je  $Q$  protoku na ulazu u cijev,  $A$  poprečni presjek cijevi,  $\zeta$  lokalni hidraulički gubitak na ulazu u cijev koji uključuje sve lokalne hidrauličke gubitke između cijevi i jezera, dok  $H_{st}$  označava razinu vode jezera.

Model vodne komore se definira diferencijalnom jednačinom

$$\frac{dH_{st}}{dt} = \frac{Q}{A_{st}} \quad (9)$$

Gdje  $H_{st}$  označava nivo vode u vodnoj komori,  $A_{st} = A_{st}(H_{st})$  je poprečni presjek u vodnoj komori na  $H_{st}$  ([5]).

Protok u ili iz vodne komore je moguće izračunati sa

$$Q_{st} = \text{sgn}(H_{bst} - H_{st}) \cdot C_D \sqrt{2g|H_{bst} - H_{st}|} \quad (10)$$

gdje je  $C_D$  koeficijent protoka vodne komore, a  $H_{bst}$  piezometrička visina u cijevi ispod vodne komore [10]. Predznak  $Q_{st}$  indicira smjer strujanja vode, odnosno:

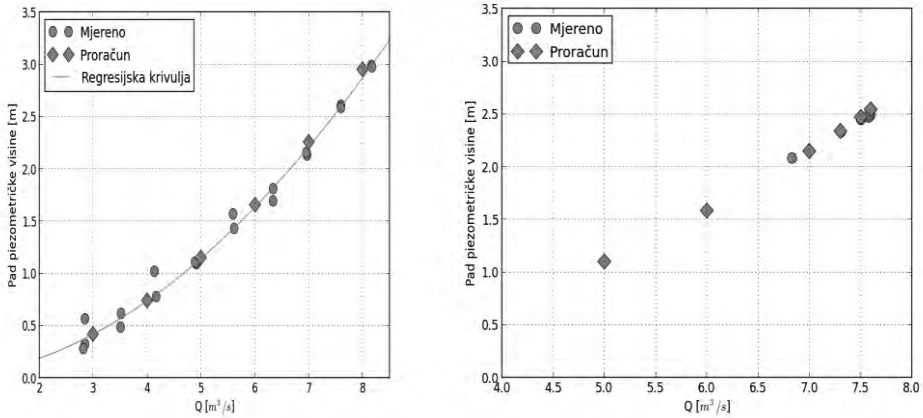
- $Q_{st} > 0$  voda struji u vodnu komoru,
- $Q_{st} < 0$  voda struji iz vodne komore.

Turbina na kraju cijevi je modelirana su kao jedinstveni rubni uvjet protoka [10].

## 2 Implementacija i verifikacija modela

Matematički model CHE Fužine je kalibriran prema mjerenjima Turboinstituta i pogonskog osoblja. Za gubitke u na dionici Lokvarsko jezero – vodna komora, korišteni su izmjerene razine vode Lokvarskog jezera, vodne komore i izmjereni protok [5].

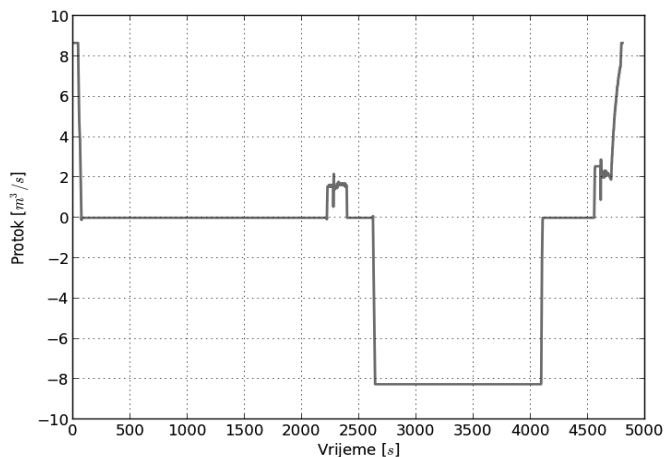
Na Slici 1 prikazana je usporedba izmjerenog i proračunatog pada vodnog lica na dionici Lokvarsko jezero vodna komora u turbinskom i crpnom radu.



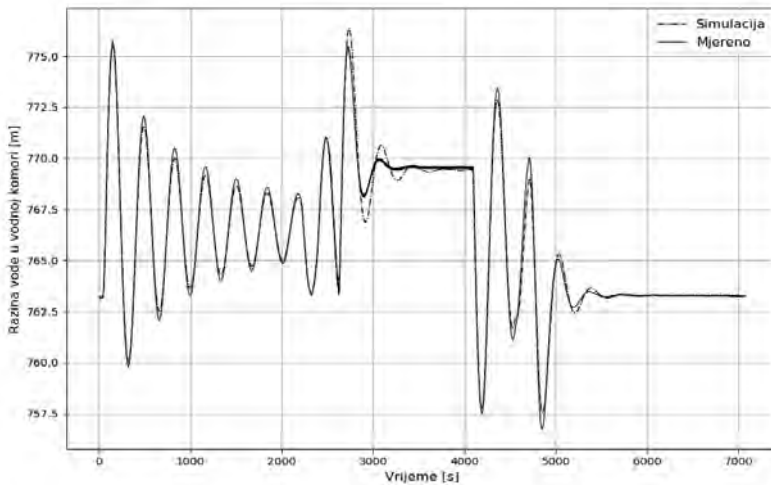
Slika 1. Usporedba izmjenenog i proračunatog pada na dionici Lokvarsko jezero - vodna komora u turbinskom (lijevo) i crpno radu (desno)

#### 4.1 Usporedba mjerenja i rezultata simulacije uslijed složenog djelovanja turbine i crpke

Prema izvršenim mjerenjima, kota jezera Lokve je iznosila 766.58 m n. m. te je rekonstruirana funkcija protoka i prikazana na Slici 2. Dobiveni rezultati pokazuju dobro slaganje s izmjerenim vrijednostima (Slika 3), unatoč tome što prije upućivanja crpke nisu vrijedili stacionarni uvjeti strujanja u hidrauličkom sustavu.



Slika 2. Vremenska ovisnost protoka za vrijeme ispitivanja prijelaznih pojava uslijed složenog djelovanja turbine i crpke



Slika 3. Usporedba mjenjenih i proračunatih vrijednosti razina vodnog lica u vodnoj komori uslijed složenog djelovanja turbine i crpke

## 5 Zaključak

Standarni nestacionarni model strujanja tekućine u cijevi proširen je modelom nestacionarnog trenja i primijenjen na simulacije strujanja hidrauličkih tranzijenata u CHE Fužine. Rezultati numeričkih simulacija prikazuju dobro slaganje s izmjerenim podacima unatoč uvedenim aproksimacijama koje uključuju geometrijski opis vodne komore i vremensku ovisnost protoka za vrijeme ispitivanja prijelaznih pojava, čime uspostavljeni matematički, odnosno numerički model potvrđuje opravdanost primjene na simulacije strujanja hidrauličkih tranzijenata u hidroelektranama.

## Literatura

- [1] Bergant, A., Simpson, A., Vitkovsky, J. A. R.: “Developments in unsteady pipe flow friction modelling”, *J. Hydraul. Res.*, 39 (2001), 3, 249–258.
- [2] Brunone, B., Ferrante, M., Cacciamani, M.: “Decay of pressure and energy dissipation in laminar transient flow”, *J. Fluids Eng.*, 126 (2004), 928-934.
- [3] Bouazza, Z., Brunelle, P. E.: “A new friction model for transient pipe flows development of the frequency dependence approach of Brunone”, *Proc., 9th Int. Conf. on Pressure Surges*, BHR, Chester, U.K., 2004, 391-404.

- [4] Daily, W. L., Hankey, W. L., Olive, R. W., Jordan, J. M.: "Resistance coefficients for accelerated and decelerated flows through smooth tubes and orifices", *Trans. Jpn. Soc. Civ. Eng.*, 78 (1956), 1071-1077.
- [5] Sopta, L., Škifić, J., Crnković, B., Tambača, J. Ivić, S.: "Hidraulička analiza stacionarnog i nestacionarnog rada CHE Fužine na dionici akumulacije Lokve-crpno/turbinski agregat u uvjetima povećanih protoka", Tehnički fakultet Rijeka 2013., Rijeka
- [6] Škifić, J., Črnjarić-Žic, N., Crnković, B.: "Numerical Simulation of Hydraulic transients in Rijeka HPP", *Strojarstvo*, Vol. 50, No.1, 2008, str. 23-30
- [7] Škifić, J., Maćešić, S., Črnjarić-Žic, N.: "Nonconservative Formulation of Unsteady Pipe Flow", *Journal of Hydraulic Engineering - ASCE*, 136 (2010), 8, 483-492.
- [8] Škifić, J., Radošević, A., Brajković, Đ., Družeta, S., Čavrak, M.: "Numerical Simulations of Hydraulic transients in hydropower plant Jajce II", *Engineering Review*, Vol. 3, No.1, 2013, str. 51-57
- [9] Vítkovský, J., Bergant, A., Simpson, A., Lambert, M., Martin, F.: "Systematic Evaluation of One Dimensional Unsteady Friction Models in Simple Pipelines", *Journal of Hydraulic Engineering - ASCE*, 132 (2006), 7, 696-708.
- [10] Wylie, W. B., Streeter, V. L., "Fluid Transients in Systems", McGraw-Hill international, 1993.



# Numerički postupak određivanja materijalnih parametara hiperelastičnih materijala iz dvoosnog vlačnog testa na križnim epruvetama

Škugor, T.<sup>1</sup>, Smoljkić, M.<sup>2</sup>, Virag, L.<sup>3</sup> i Karšaj, I.<sup>4</sup>

## Sažetak

Materijalni parametri jedan su od ključnih faktora za adekvatno izvođenje numeričkih simulacija i u razvoju proizvoda. Odabir eksperimenta za određivanje materijalnih parametara temelji se na svojstvima materijala kao što je anizotropnost te eksploatacijskim uvjetima. Proces optimizacije kojim se određuju materijalni parametri većinom se temelji na eksperimentalnim naprezanjima koji nisu eksperimentalno mjerena već izvedena veličina. U slučaju dvoosnog vlačnog ispitivanja križnih uzoraka uvodi se pretpostavka o homogenom polju naprezanja koja može utjecati na određivanje eksperimentalnog naprezanja i posljedično na izračunate materijalne parametre. Kako bi se povećala točnost pri određivanju materijalnih parametara uvedena je funkcija cilja zasnovana na funkciji energije deformiranja. Kao dodatan alat u procesu optimizacije korištene su numeričke simulacije eksperimenta. Prikazana su dva primjera određivanja materijalnih parametara uz predloženu novu funkciju cilja te su njihovi rezultati uspoređeni s rezultatima dobivenima uz funkciju cilja temeljenu na naprezanjima. U primjerima su korištene Mooney – Rivlin i NeoHooke funkcije energije deformiranja. Rezultati su pokazali kako je korištenje funkcije cilja zasnovane na funkciji energije deformiranja povećalo točnost izračunatih materijalnih parametara iako takav postupak zahtjeva veće računalno vrijeme.

**Ključne riječi:** hiperelastičnost, dvoosni vlačni eksperiment, optimizacija, funkcija energije deformiranja, križni uzorak

---

<sup>1</sup> **Toni Škugor, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, toni.skugor@fsb.hr

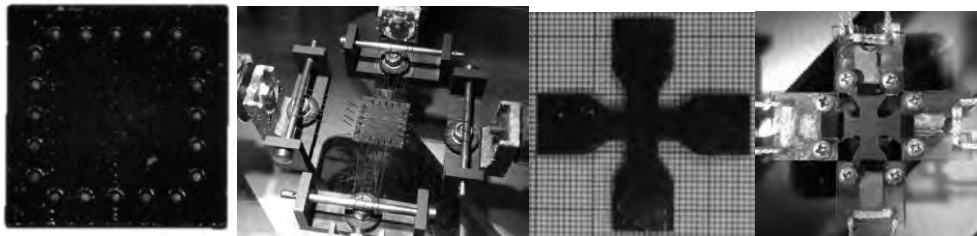
<sup>2</sup> **Dr. sc. Marija Smoljkić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, marija.smoljkic@fsb.hr

<sup>3</sup> **Doc. dr. sc. Lana Virag, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, lana.virag@fsb.hr

<sup>4</sup> **Prof. dr. sc. Igor Karšaj, dipl. ing. stroj.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, igor.karsaj@fsb.hr

## 1 Uvod

Poznavanje materijalnih svojstava jedan je od ključnih preduvjeta za uspješno izvođenje proračuna, numeričkih simulacija te općenito u razvoju proizvoda. Materijalna svojstva određuju se iz rezultata dobivenih mjerenjem tijekom eksperimentalnog ispitivanja. Odabir tipa i postavke eksperimentalnog ispitivanja ovise o namjeni proizvoda te njegovim eksploatacijskim uvjetima. Potreba za odabirom dvoosnih vlačnih testova javlja se pri određivanju materijalnih svojstava anizotropnih materijala poput kompozita ojačanih vlaknima ili 3D ispisanih polimernih uzoraka kod kojih smjer printanja utječe na strukturu uzoraka i posljedično na njihova svojstva. Nadalje, dvoosni vlačni testovi koriste se i za ispitivanje mekih tkiva poput krvnih žila, anizotropnih materijala s heterogenom strukturom, koje su podvrgnute složenom stanju naprezanja [1]. Prilikom izvođenja dvoosnog vlačnog testa eksperimentalni uzorak se razvlači u smjeru dviju glavnih osi pri čemu se najčešće na eksperimentalnom uređaju kontroliraju narinuto opterećenje ili pomaci. Istovremeno se u četiri točke mjere deformacije pri sredini uzorka gdje je polje naprezanja i deformacija homogeno. Općenito, kod dvoosnih vlačnih testova koriste se dva tipa eksperimentalnih uzoraka; kvadratični i križni, te se na uređaj mogu postaviti pomoću prihvata kukicama ili stezaljkama [2]. Odabir tipa eksperimentalnog uzorka i njegova prihvata na uređaj vrši se s ciljem ostvarivanja što veće deformacije tijekom eksperimenta te kako bi se minimizirao utjecaj rubnih uvjeta na eksperimentalne rezultate i olakšalo izvođenje samog eksperimenta.



a)

b)

Slika 1 a) kvadratični uzorak i prihvat kukicama b) križni uzorak i prihvat stezaljkama

Nakon izvođenja eksperimenta potrebno je odabrati adekvatan materijalni model koji kvalitativno odgovara eksperimentalno izmjerenim vrijednostima. Za odabrani materijalni model, vrijednosti materijalnih parametara određuju se pomoću metode najmanjih kvadrata pri čemu je cilj smanjiti rezidual odnosno sumu razlika kvadrata između eksperimentalno mjerene ili izvedene i modelirane vrijednosti. Kod određivanja vrijednosti materijalnih svojstava metodom najmanjih kvadrata funkcija cilja većinom se definira pomoću eksperimentalnog i modeliranog naprezanja. S obzirom da se dvoosnim vlačnim testom mjere vrijednosti u smjeru dvaju osi, funkcija cilja koju je potrebno minimizirati poprima oblik:

$$\min \sum_{i=1}^n \left( \sigma_{x,i}^{\text{exp}} - \sigma_{x,i}^{\text{mod}} \right)^2 + \left( \sigma_{y,i}^{\text{exp}} - \sigma_{y,i}^{\text{mod}} \right)^2, \quad (1)$$

gdje je  $i$  redni broj mjerne točke u vremenu, a  $n$  ukupan broj mjernih točaka. Unatoč čestom korištenju u funkciji cilja, eksperimentalno naprezanja nije izravno mjereno tijekom eksperimenta već se izvodi iz mjerene eksperimentalne sile i površine na koju ona djeluje. U

slučaju kvadratičnih eksperimentalnih uzoraka površina je jednoznačno određena kao umnožak duljine prihvata i debljine uzorka. Kod križnih uzoraka raspodjela naprezanja ovisi o geometriji i dizajnu uzorka [3] te pretpostavka o homogenom stanju naprezanja i odabir površine na koji djeluje eksperimentalna sila može uzrokovati neispravno određeno eksperimentalno naprezanje što se dalje prolongira na određivanje vrijednosti materijalnih svojstava.

## 2 Metodologija

Navedeni tipovi materijala, za čije određivanje materijalnih svojstava se koristi dvoosni vlačni test, podvrgnuti su velikim deformacijama te se u mehanici kontinuuma opisuju hiperelastičnim materijalnim modelom. Velike deformacije opisuju se tenzorom gradijenta deformiranja  $\mathbf{F}$  koji povezuje položaj čestice u referentnoj i trenutnoj konfiguraciji. Kao početni položaji u referentnoj konfiguraciji uzimaju se međusobne udaljenost između dvaju mjernih točaka  $L_0$  dok je promatrani trenutni položaj definiran mjerenim pomakom  $u$ . Na osnovu ovih dviju veličina definira se istezanje u smjerovima opterećenja:

$$\lambda_x = \frac{L_0 + u_x}{L_0}, \lambda_y = \frac{L_0 + u_y}{L_0}. \quad (2)$$

Uz definirana istezanja slijedi gradijent deformiranja za dvoosni vlačni test:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Istezanje u smjeru osi  $z$  koje se ne mjeri tijekom eksperimenta izračunava se iz uvjeta nestlačivosti hiperelastičnih materijala prema kojem je determinanta gradijenta deformiranja  $\det \mathbf{F} = 1$  pa slijedi:

$$\lambda_z = \lambda_x^{-1} \lambda_y^{-1}. \quad (4)$$

Pomoću tenzora gradijenta deformiranja moguće je izraziti deformacije u obliku lijevog Cauchy-Green tenzora deformiranja  $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ . S obzirom na velike deformacije potrebno je naprezanje izraziti kao stvarno ili Cauchyovo naprezanje prema izrazu:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_{1b}} \mathbf{b} - 2 \frac{\partial W}{\partial I_{2b}} \mathbf{b}^{-1}. \quad (5)$$

U izrazu 5,  $I_{1b}$  i  $I_{2b}$  predstavljaju prvu i drugu invarijantu tenzora  $\mathbf{b}$  dok  $p$  predstavlja Lagrangeov multiplikator koji se određuje iz pretpostavke o ravninskom stanju naprezanja za koju vrijedi  $\sigma_z = 0$ . Naprezanje i deformacije povezani su funkcijom energije deformiranja  $W$  koja sadrži materijalne parametre i ovisi o deformacijama odnosno mjerenim istezanjima pa je uvedena nova funkcija cilja koju je potrebno minimizirati:

$$\min \sum_{i=1}^n (W_i^{\text{exp}} - W_i^{\text{mod}})^2, \quad (6)$$

te općenito vrijedni da je  $W = W(\mathbf{C}, \mathbf{F})$ . U sklopu ovog rada korištene su dvije funkcije energije deformiranja zapisane u tablici 1:

Tablica 3 Korištene funkcije energije deformiranja  $W$

|          |                           |
|----------|---------------------------|
| NeoHooke | $W = C_1 \cdot (I_1 - 3)$ |
|----------|---------------------------|

|                 |   |
|-----------------|---|
| Mooney - Rivlin | $W = C_1 \cdot (I_1 - 3) + C_2 \cdot (I_2 - 3)$ |
|-----------------|---|

Za izračunavanje funkcije energije deformiranja modela, kao dodatan alat u proces optimizacije, uvedena je numerička simulacija eksperimenta kojom se za pretpostavljene materijalne parametre metodom konačnih elemenata određuju vrijednosti istezanja. Nužno je da rubni uvjeti i opterećenja u simulaciji budu adekvatno postavljeni kako bi ispravno opisali deformiranje tijekom eksperimenta.

Za optimizacijski proces odabran je Newton – Raphson algoritam koji spada u skupinu gradijentnih algoritama. Za određivanje gradijenta unutar jedne iteracije korištena je aproksimacija metodom konačnih razlika. U teoretskom, idealnom slučaju kada eksperimentalno ispitivani materijal i odabrani model imaju istu funkciju energije deformiranja moguće je ostvariti vrijednost reziduala koja je jednaka nuli. Takav slučaj, za funkciju energije deformiranja modela s jednim parametrom, zahtjeva dvije simulacije unutar iteracije kako bi se odredio gradijent reziduala. Materijalni parametar u novom iterativnom koraku određuje se izrazom:

$$C_1^{j+1} = C_1^j - \frac{res}{\nabla res} \quad (7)$$

Kod realističnog slučaja funkcija energije deformiranja ispitivanog materijala i modela nisu identične, a uz to postoje i mjerne netočnosti pa nije moguće ostvariti vrijednost reziduala koja je jednaka nuli stoga se traži minimum funkcije cilja odnosno točka u kojoj je njen gradijent jednak nuli. Za prikazani Newton – Raphson algoritam tada je potrebno odrediti drugi gradijent pa je za funkciju energije deformiranja modela s jednim parametrom potrebno provesti tri simulacije unutar jedne iteracije te se materijalni parametar za novi iterativni korak određuje prema izrazu:

$$C_1^{j+1} = C_1^j - \frac{\nabla res}{\nabla^2 res} \quad (8)$$

Kako bi se izbacio utjecaj mjernih grešaka i provjerila točnost predloženog postupka određivanja materijalnih parametara, umjesto eksperimentalnih rezultata korištene su simulacije eksperimenta za navedene funkcije energije deformiranja. Vrijednosti zadanih materijalnih parametara u simulaciji eksperimenta odabrane su nasumično, ali predstavljaju red veličine njihovih vrijednosti kod mekih tkiva i 3D ispisanih polimera. U oba slučaja odabrana funkcija energije deformiranja modela je NeoHooke. Odabrane su vrijednosti eksperimentalnog opterećenja kako bi se ostvarila istezanja od približno 40% do 50%. Rezultati dobiveni predloženim numeričkim postupkom uspoređeni su sa rezultatima dobivenima pomoću funkcije cilja prikazane jednadžbom 1.

### 3 Rezultati

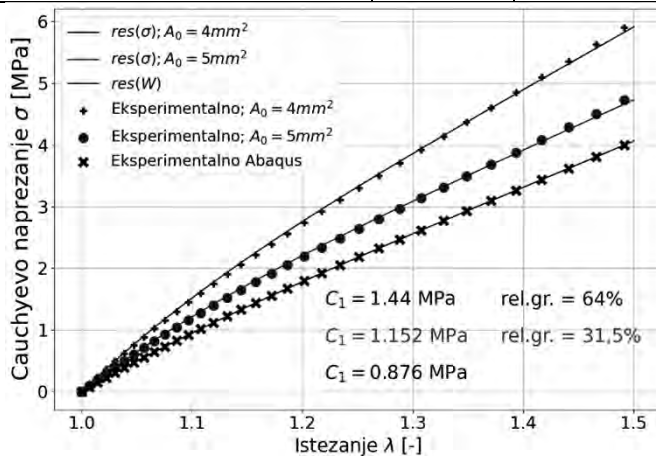
#### 3.1 NeoHooke eksperiment – NeoHooke model

Navedeni slučaj predstavlja idealan, teoretski slučaj. Za simulaciju eksperimenta odabrana je vrijednost materijalnog parametra  $C_1^{\text{exp}} = 0,876 \text{ MPa}$  dok je početna vrijednost materijalnog modela pri postupku optimizacije  $C_1^{\text{mod}} = 0,5 \text{ MPa}$ . Također proveden je postupak određivanja materijalnih parametara prema funkciji cilja iz jednadžbe 1 uz dvije pretpostavke

o početnoj površini na koju se prenosi opterećenje. U tablici 2 dan je pregled izračunatih vrijednosti materijalnog parametra za dvije različite pretpostavke površine na koju se prenosi opterećenje te pripadna relativna greška izračunatog materijalnog parametra.

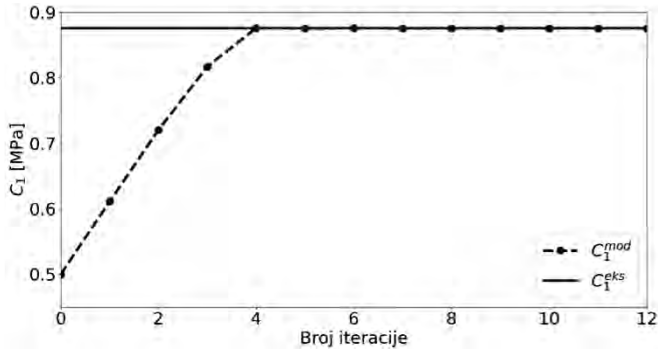
Tablica 4 Prikaz rezultata za NeoHooke - NeoHooke slučaj

| Funkcija cilja  | $A_0$ [mm <sup>2</sup> ] | $C_1$ [MPa] | Relativna greška [%] |
|---|--------------------------|-------------|----------------------|
| $\min \sum_{i=1}^n (\sigma_{x,i}^{\text{exp}} - \sigma_{x,i}^{\text{mod}})^2 + (\sigma_{y,i}^{\text{exp}} - \sigma_{y,i}^{\text{mod}})^2$ | 4                        | 1,44        | 64                   |
|   | 5                        | 1,152       | 31,5                 |
| $\min \sum_{i=1}^n (W_i^{\text{exp}} - W_i^{\text{mod}})^2$   | -                        | 0,876       | -                    |



Slika 2 – Usporedba različitih postupaka određivanja materijalnih parametara za NH-NH slučaj

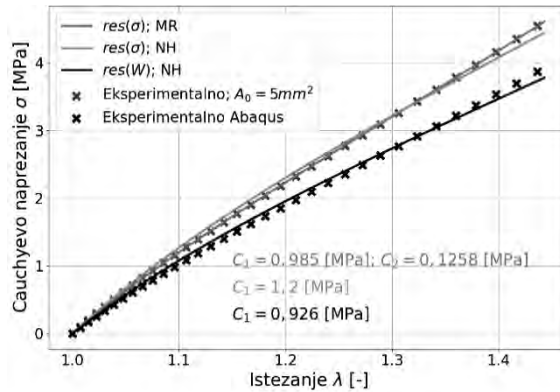
Dijagramom na slici 2 usporedno su prikazane vrijednosti eksperimentalnog naprezanja i naprezanja modela uz izračunate materijalne parametre. Također, vidljivo je da materijalni parametri određeni funkcijom cilja iz jednadžbe 1 adekvatno opisuju eksperimentalne rezultate no oni su dobiveni neispravnom pretpostavkom o homogenom polju naprezanja i površini koja prenosi opterećenje. Relativna greška vrijednosti materijalnog parametra je u korelaciji s netočno pretpostavljenom veličinom površine koja prenosi opterećenje. Do konvergencije rezultata za zadanu toleranciju koja iznosi  $10^{-6}$  došlo je nakon 12 iteracija iako je iz slike 3 vidljivo da je približno točna vrijednost ostvarena već nakon 5 iteracija.



Slika 3 – Konvergencija rezultata za NH-NH primjer

### 3.1 Mooney - Rivlin eksperiment – NeoHooke model

Budući da se funkcije energije deformiranja eksperimenta i modela razlikuju proveden je optimizacijski postupak prema jednadžbi 8 uz funkciju cilja iz jednadžbe 6. U svrhu usporedbe određeni su parametri za Mooney –Rivlin i NeoHooke funkcije energije deformiranja prema funkciji cilja iz jednadžbe 1 i pretpostavku o vrijednosti površine koja prenosi opterećenje  $A_0 = 5 \text{ mm}^2$ . U simulaciji eksperimenta nasumično su odabrane vrijednosti materijalnih parametara Mooney – Rivlin modela  $C_1^{\text{exp}} = 0,5164 \text{ MPa}$  i  $C_2^{\text{exp}} = 0,3418 \text{ MPa}$  dok je početna vrijednost NeoHooke materijalnog parametra postavljena na  $C_1^{\text{mod}} = 0,6 \text{ MPa}$ . Konvergencija rezultata ostvarena je kroz 15 iteracija no vrijednost  $C_1$  je postala stabilna već nakon 6 iteracija. Dijagramom na slici 3 i tablicom 3 dana je usporedba rezultata.



Slika 4 – Usporedba različitih postupaka određivanja materijalnih parametara za MR-NH slučaj

Tablica 5 - Prikaz rezultata za MR – NH slučaj

| Funkcija cilja  | W  | $C_1$ [MPa] | $C_2$ [MPa] |
|---|----|-------------|-------------|
| $\min \sum_{i=1}^n (\sigma_{x,i}^{\text{exp}} - \sigma_{x,i}^{\text{mod}})^2 + (\sigma_{y,i}^{\text{exp}} - \sigma_{y,i}^{\text{mod}})^2$ | MR | 0,985       | 0,1258      |
|   | NH | 1, 2        | -           |

---

|   |    |       |   |
|---|----|-------|---|
| $\min \sum_{i=1}^n (W_i^{\text{exp}} - W_i^{\text{mod}})^2$ | NH | 0,926 | - |
|---|----|-------|---|

#### 4 Zaključak

Provedenom numeričkom analizom pokazalo se da pretpostavka o homogenom stanju naprezanja može imati značajan utjecaj na određivanje materijalnih parametara. Procjena površine koja prenosi opterećenje ima utjecaj na izračun eksperimentalnog naprezanja te se navedena greška prolongira na izračunate materijalne parametre. Uvođenjem nove funkcije cilja temeljene na funkcijama energije deformiranja u kombinaciji s numeričkim simulacijama omogućeno je točnije određivanje materijalnih parametara. Za predloženi numerički postupak potrebno je iterativno provoditi numeričke simulacije eksperimenta što je zahtjevno s pogleda računalnog vremena. U sklopu ovog rada prikazani su primjeri na jednostavnim, izotropnim funkcijama energije deformiranja te se u daljnjem radu planira proširenje metode na anizotropne funkcije deformiranja s većim brojem materijalnih parametara.

#### Zahvale

Ovaj rad financiran je sredstvima Hrvatske zaklade za znanost u sklopu projekta „IP-2018-01-3796“, D. Ozretić i DOK-2018-09-9116.

#### Literatura

- [1] Holzapfel GA, Ogden RW. On planar biaxial tests for anisotropic nonlinearly elastic solids. A continuum mechanical framework. *Math Mech Solids*. 2009;14(5):474–89.
- [2] Fehervary H, Smoljkić M, Vander Sloten J, Famaey N. Planar biaxial testing of soft biological tissue using rakes: A critical analysis of protocol and fitting process. *J Mech Behav Biomed Mater*. 2016;61:135–51.
- [3] Zhao X, Berwick ZC, Krieger JF, Chen H, Chambers S, Kassab GS. Novel Design of Cruciform Specimens for Planar Biaxial Testing of Soft Materials. *Exp Mech*. 2014;54(3):343–56.



# Geometrijski točni 3D gredni element - SE(3) formulacija

Tomec, J.<sup>1</sup> i Jelenić, G.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovome radu je kratko predstavljena geometrijski točna teorija greda, zapisana u Liejevi grupi pomaka krutog tijela  $SE(3)$ . Zapisane su jednačbe za statičku ravnotežu i provedena je diskretizacija zapisa u konačni element. Na kraju je element testiran preko standardnog numeričkog primjera iz literature.

**Ključne riječi:** Statička analiza, nelinearna teorija greda, metoda konačnih elemenata, neograničeno velike 3D rotacije, SE(3) interpolacija

---

<sup>1</sup> **Jan Tomec, doktorand**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: jan.tomec@uniri.hr

<sup>2</sup> **Gordan Jelenić, profesor**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr

## 1 Uvod

Geometrijsku točnu teoriju greda i njezin konačni element razvili su Simo [1] te Simo i Vu-Quoc [2]. Sonnevile et al. proširili su formulaciju na  $SE(3)$  grupu, odnosno grupu pomaka krutog tijela.  $SE(3)$  element ima nekoliko prednosti, koje su zanimljive iz teoretskog, a i numeričkog zornog kuta. Najviše se koristi element sa dva čvora, gdje ova interpolacija osigura da rješenje ostaje u grupi na cijeloj domeni elementa. Vektor zakrivljenosti je konstantan, što znači da se vektor unutarnjih sila i matrica krutosti mogu jednostavno integrirati analitički. Elementi višeg reda su, za sada, više-manje samo u domeni akademskog istraživanja.

## 2 Kinematika grede

Geometriju grede opisujemo pomoću deformabilne centralne linije i familije nedeformabilnih poprečnih presjeka, kroz koje ta linija prolazi. Centralna linija ne mora predstavljati težišnu os nego može biti proizvoljno odabrana linija. Svakoju točki na centralnoj liniji pridružujemo dvije ortogonalne baze: prostornu bazu  $\mathbf{R} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$  i materijalnu bazu  $\mathbf{I} = [\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3]$ . Duljina nedeformirane linije je  $L$ . Neka vektor  $\mathbf{x}(\xi) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\xi \in [0, L]$  označava položaj centralne linije, a  $\mathbf{R}(\xi) \in SO(3)$  orijentaciju presjeka. Položaj proizvoljno odabrane točke  $P$  na gredi je onda

$$\mathbf{x}_P(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}(\xi) + \mathbf{R}(\xi)\mathbf{y}(\eta, \zeta), \quad (1)$$

gdje je  $\mathbf{y}(\eta, \zeta) = \eta\mathbf{E}_2 + \zeta\mathbf{E}_3 = \{0 \ \eta \ \zeta\}^T$  položaj točke na poprečnom presjeku.

## 3 Liejeva grupa $SE(3)$

Liejeva grupa  $SE(3)$  je grupa pomaka krutog tijela. Pomoću nje, okvir (položaj i orijentacija zajedno) centralne linije može se zapisati kao

$$\mathbf{H}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\xi) & \mathbf{x}(\xi) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

a okvir točke  $P$  kao

$$\mathbf{H}_P(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\xi) & \mathbf{x}_P(\xi, \eta, \zeta) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\xi) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{y}(\eta, \zeta) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\xi)\mathbf{H}_y(\eta, \zeta) \quad (3)$$

Derivaciju unutar  $SE(3)$  grupe provodimo pomoću Liejeve algebre  $\mathfrak{se}(3)$ . Definirajmo operator  $\widehat{(\cdot)}$ , koji transformira vektor  $\mathbf{a} = \{\mathbf{a}_U^T \ \mathbf{a}_\Omega^T\}^T \in \mathbb{R}^6$  u Liejevu algebru

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}_\Omega & \mathbf{a}_U \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(3), \quad (4)$$

a gdje  $\hat{\mathbf{a}}_\Omega$  označava element Lijeve algebre  $\mathfrak{so}(3)$ , tako da je  $\hat{\mathbf{a}}_\Omega \mathbf{b} = \mathbf{a}_\Omega \times \mathbf{b}$  za proizvoljni vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ . Derivacija okvira centralne linije  $\mathbf{H}(\xi)$  je  $\mathbf{H}'(\xi) = \mathbf{H}(\xi) \widehat{\mathbf{f}}(\xi)$ , a njegova varijacija je  $\delta \mathbf{H}(\xi) = \mathbf{H}(\xi) \delta \widehat{\mathbf{h}}(\xi)$ . Ostale jednadžbe, koje se koriste unutar grupe, nalaze se u radu [3].

## 4 Statička formulacija

Ravnotežne jednadžbe problema u materijalnim koordinatama glase [1]

$$\mathbf{N}' - \mathbf{N} \times \boldsymbol{\kappa} + \bar{\mathbf{N}} = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad \mathbf{M}' - \mathbf{N} \times \boldsymbol{\gamma} - \mathbf{M} \times \boldsymbol{\kappa} + \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

gdje su  $\mathbf{N}$  i  $\mathbf{M}$  te  $\bar{\mathbf{N}}$  i  $\bar{\mathbf{M}}$  unutarnje, odnosno vanjske sile i momenti, a  $\boldsymbol{\gamma}$  i  $\boldsymbol{\kappa}$  su deformacije. Sve veličine su u materijalnim koordinatama. Pomoću  $SE(3)$  grupe i slijedećih novih varijabli  $\mathbf{n} = \{\mathbf{N}^T \ \mathbf{M}^T\}^T$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\boldsymbol{\gamma}^T \ \boldsymbol{\kappa}^T\}^T$  i  $\bar{\mathbf{n}} = \{\bar{\mathbf{N}}^T \ \bar{\mathbf{M}}^T\}^T$ , jednadžba (5) može se zapisati i kao

$$\mathbf{n}' - \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{n} + \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\kappa}} & \hat{\boldsymbol{\gamma}} \\ \mathbf{0} & \hat{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Poštujući Hookeov elastični zakon  $\mathbf{n} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ , gdje je  $\mathbf{C} = \text{diag}(EA, GA_1, GA_2, GI_t, EI_1, EI_2)$  matrica materijalnih parametra, slabi (integralni) oblik ravnotežne jednadžbe (6) glasi

$$\delta W = \int_0^L \delta \mathbf{h}^T (\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} + \bar{\mathbf{n}}) d\xi = 0. \quad (7)$$

## 5 Diskretizacija

U metodi konačnih elemenata kontinuum, odnosno gredu razdijelimo na konačne elemente. Nepoznate veličine definiramo u čvorovima na rubu elementa, a u samom elementu provodimo interpolaciju. Dobra interpolacija ima slijedeća svojstva:

poštuje prostor, u kojem se nalazi rješenje,

poštuje invarijantnost obzirom na kretanje krutog tijela i

poštuje invarijantnost obzirom na odabir referentne točke.

U  $SE(3)$  postoji takva interpolacija samo između dva čvora. Nazovimo ih čvor A i čvor B i definirajmo okvir centralne linije kao

$$\mathbf{H}(\xi) = \mathbf{H}_A \exp(\xi/L \mathbf{d}), \quad \mathbf{d} = \log(\mathbf{H}_A^{-1} \mathbf{H}_B). \quad (8)$$

Derivacija se može sada izračunati kao  $\mathbf{H}'(\xi) = \mathbf{H}(\xi) \left[ \mathbf{T} \left( \frac{\xi}{L} \mathbf{d} \right) \frac{d}{L} \right]^{\wedge} = \mathbf{H}(\xi) \frac{\hat{\mathbf{d}}}{L}$ , gdje zadnji rezultat slijedi iz svojstva vektorskog produkta  $\hat{\mathbf{d}}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ . Iz toga dalje slijedi  $\mathbf{f} = \frac{d}{L}$ , a deformacija je definirana kao  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{f} - \mathbf{f}_0 = \frac{d-d_0}{L}$ , gdje indeks 0 označava početno stanje. Kako se vidi iz jednadžbe, deformacija je konstantna.

Varijaciju  $\delta\mathbf{d}$  jednostavno izrazimo iz jednadžbe (8) kao  $\delta\mathbf{d} = \mathbf{P}\delta\mathbf{h}_{AB}$ , gdje je  $\delta\mathbf{h}_{AB}$  objedinjeni vektor virtualnih pomaka u čvorovima A i B, a matrica  $\mathbf{P} = [-\mathbf{T}^{-1}(-\mathbf{d}) \quad \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{d})]$ . Varijacija deformacije glasi  $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \delta\mathbf{h}' + \boldsymbol{\varepsilon}\delta\mathbf{h} = \delta\mathbf{f} = \frac{1}{L}\delta\mathbf{d} = \frac{1}{L}\mathbf{P}\delta\mathbf{h}_{AB}$ . Ovaj izraz se pojavljuje u virtualnom radu (7) u integralnom obliku, zato ga integriramo znajući da varijacija nestaje na rubu  $\int_0^L \delta\mathbf{h}' + \boldsymbol{\varepsilon}\delta\mathbf{h} d\xi = \int_0^L \boldsymbol{\varepsilon}\delta\mathbf{h} d\xi$ ,

$$\int_0^L \boldsymbol{\varepsilon}\delta\mathbf{h} d\xi = \mathbf{P}\delta\mathbf{h}_{AB} \quad (9)$$

Iz (7) i (10) te činjenice da je u odabranoj interpolaciji deformacija konstantna, slijedi konačni oblik rezidualnog vektora

$$\mathbf{F}_{\text{res}} = \mathbf{P}^T \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \int_0^L \mathbf{Q}^T \bar{\mathbf{n}} d\xi = \mathbf{0} \quad (10)$$

u kojem je korištena interpolacija varijacije okvira  $\delta\mathbf{h}(\xi) = \mathbf{Q}(\xi)\delta\mathbf{h}_{AB}$ , a interpolacijska matrica je definirana izrazom  $\mathbf{Q}(\xi) = \left[ \mathbf{I} - \frac{\xi}{L}\mathbf{T} \left( \frac{\xi}{L}\mathbf{d} \right) \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{d}) \quad \frac{\xi}{L}\mathbf{T} \left( \frac{\xi}{L}\mathbf{d} \right) \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{d}) \right]$ .

## 6 Numerički primjer i zaključak

Gore zapisane jednadžbe smo isprogramirali u istraživačkom kodu i primijenili na znanom testu savijanja konzole u krug [2]. Podaci su  $(EA, GA_1, GA_2, GI_t, EI_1, EI_2, L) = (1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)$  a koristili smo 5  $SE(3)$  elemenata. Slobodni kraj grede je opterećen momentom  $8\pi$  u jednom samom koraku. Analitičko rješenje ovog problema je dvostruki krug. Algoritam je iskonvergirao u 3 iteracije, što je očekivano [2].

U budućnosti želimo  $SE(3)$  formulaciju proširiti na dinamiku i mehaničke integratore.

### Zahvale

Ovaj rad financiran je iz EU programa Horizon 2020 (ugovor br. 860124 – THREAD).

---

## Literatura

- [1] Simo, J. C.; A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I; 1986; 58; 79-116.
- [2] Simo, J. C. i Vu-Quoc, L.; A three-dimensional finite-strain rod model. part II: Computational aspects; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 1986; 58; 79-116.
- [3] Sonnevile, V., Cardona, A. i Brüls, O.; Geometrically exact beam finite element formulated on the special Euclidian group  $SE(3)$ ; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 2014; 268; 451-474.



## DEM simulacija Doser Blade alata

Tomerlin, D.<sup>1</sup>, Vučemilović-Vranjić, I.<sup>2</sup> i Kozak, D.<sup>3</sup>

### Sažetak

Prilikom eksploatacije mehanizama i alata za manipuliranje rasutim terenom, dolazi do neizbježne interakcije materijala njihove konstrukcije sa česticama terena. U radu je prikazan slučaj Doser Blade alata koji pri linearnom gibanju konstantnom brzinom vrši pomicanje rasutih čestica šljunka. Objasnjena je funkcija alata i opisana njegova konstrukcija.

U radu je naglasak na primjenu DEM (Discrete Element Method) računalnih simulacija pri modeliranju realističnih interakcija alata sa rasutim terenom. Određivanjem utjecaja pojedinih čestica materijala terena na geometriju alata izrađenu od čeličnog materijala, moguće je u konačnici, primjenom FEM strukturne analize, odrediti naprezanja površina u kontaktu. Čak i bez provođenja eksperimentalnih analiza eksploatacije alata, moguće je dobivanje uvida u odnose sustava čestica i alata. U radu su razmatrane samo osnovne interakcije i opterećenja alata, dok je sva detaljnija analiza u domeni budućih istraživanja.

**Ključne riječi:** Doser Blade, Discrete Element Method, računalna simulacija, rastresiti materijal, šljunak

---

<sup>1</sup> **Damir Tomerlin, univ.spec.mech., IWE, DOK-ING d.o.o.,** Slavonska avenija 22G, 10000 Zagreb, e-mail: damir.tomerlin@dok-ing.hr

<sup>2</sup> **Ivan Vučemilović-Vranjić, struč.spec.mech., DOK-ING d.o.o.,** Slavonska avenija 22G, 10000 Zagreb, e-mail: ivan.vucemilovicvranjic@dok-ing.hr

<sup>3</sup> **Prof. dr. sc. Dražan Kozak, red. prof. u t.z.,** Sveučilište u Slavanskom Brodu, Strojarski fakultet u Slavanskom Brodu, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg I. B. Mažuranić 2, 35 000 Slavonski Brod, e-mail: dkozak@unisb.hr

## 1 Uvod

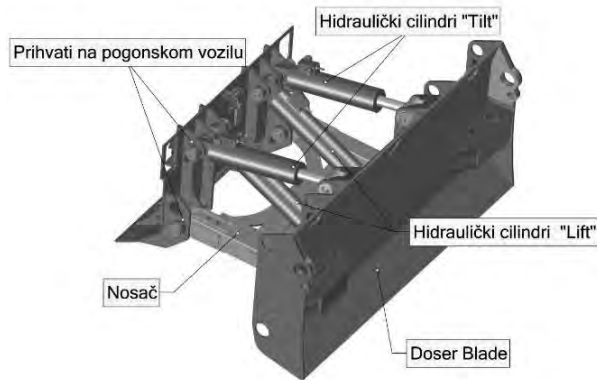
Rezanje i guranje materijala osnovne su funkcije dozerskih alata. Oblik alata i karakteristike materijala kojeg dozer obrađuje direktno će utjecati na otpore rezanja i kopanja, te na opterećenja na alatu generirana tijekom radnog ciklusa. Izdržljivost, otpornost na trošenje i učinkovitost alata povezani su s geometrijskim parametrima alata. Ispravno oblikovanje umanjuje radna opterećenja, osigurava ispravno rušenje obrađenog tla na nožu i smanjuje gubitke rastresitog tla. Kvalitetno odabrani materijali tijekom procesa konstruiranja pridonijeti će funkcionalnosti i smanjenju gubitaka tijekom eksploatacije alata.

Analizom dozerskih alata dolazi se do važnih saznanja korisnih u optimizaciji i poboljšavanju dizajna. Proces konstruiranja alata uključuje analizu opterećenja kojima će alat biti izložen. Analitički pristup konstruktoru pruža okvirna saznanja o silama koje će djelovati na alat. Međutim, zbog komplicirane geometrije alata i fizike ponašanja tla kojeg se alatom obrađuje, analitički pristup se često nadopunjava s testiranjem alata u stvarnim uvjetima. Takva vrsta analize daje najpotpunije rezultate ali je često vremenski dugotrajna i financijski zahtjevna. Iz tog razloga upotreba računalnih numeričkih metoda, koje omogućuju kvalitetnu analizu zahtjevnih konstrukcija u prihvatljivom vremenskom roku, postala je neophodna u procesu konstruiranja.

## 2 Konstrukcija alata i analitički pristup

Doser Blade alat [1] koji s nosačem alata i dvostrukim parom hidrauličkih cilindara sačinjava sustav za obradu tla rezanjem i guranjem, prikazan je na slici 1. Materijalni model alata je abrazijski otporan čelik, tvrdoće 450 HB. Nosač alata zglobno je vezan u dvije prihvatne točke za pogonsko vozilo i Doser Blade alat. Sve zglobne veze ostvarene su pomoću svornjaka. Radi osiguravanja nesmetanog rada i olakšavanja procesa servisiranja ili izmjene, na svim zglobnim mjestima osigurana je mogućnost podmazivanja.

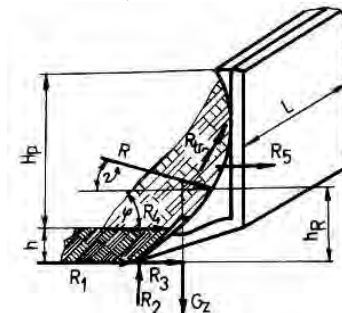
Kontrola nad pomacima alata ostvarena je izvlačenjem i uvlačenjem hidrauličkih cilindara. Cilindri su hidrauličkim crijevima povezani s hidrauličkim sustavom smještenim unutar pogonskog vozila. Za podizanje i spuštanje alata koriste se "lift" hidraulički cilindri zglobno vezani za prihvatne točke na donjem dijelu alata. Na gornje prihvatne točke pričvršćen je par "tilt" cilindara koji alatu omogućuju promjenu nagiba.



Slika 1. Sustav za obradu tla rezanjem i guranjem

Analitičko određivanje opterećenja dozerskog uređaja je složen proces, pa će se u ovom članku samo okvirno prezentirati. Analiza se provodi kroz pet situacija djelovanja dozerskog uređaja: početak iskopa, kraj doziranja, dizanje punog noža, propinjanje dozera te opterećenje na rubu noža [2]. Za analizu je potrebno poznavati otpore kopanja tla dozerom ( $R$ ), odnosno proračunati otpor rezanja tla ( $R_1$ ), otpor potiskivanja noža ( $R_2$ ), otpor trenja oštrice noža ( $R_3$ ), otpor pomicanja zemlji ispred noža ( $R_4$ ) i otpor premještanja materijala po nožu. Svi otpori prikazani su na slici 2. Rezultantna sila otpora kopanja  $R$  koja pri radu djeluje na alat jednaka je:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \text{ [N]} \quad (1)$$



Slika 2. Otpori kopanja tla dozerskim nožem

### 3 Računalna simulacija

Interakciju Doser Blade alata i terena s kojim prilikom rada dolazi u zahvat moguće je analizirati računalnom DEM (Discrete Element Method) simulacijom, koja je numerička metoda za računanje gibanja i utjecaja velikog broja sitnih čestica [3,4]. Napravljena je analiza za specifičnu šljunčanu vrstu terena koja se u praksi eksploatacije alata uobičajeno susreće. Ovakva računalna simulacija pruža dobar uvid u interakciju alata i terena te pri tome

nastala opterećenja konstrukcije, u slučaju nedostatka podataka dobivenih eksperimentalnim putem. Podaci iz DEM analize koriste se dalje pri FEM strukturnoj analizi i optimizaciji alata.

### 3.1 Definicija terena

Prilikom simulacije Doser Blade alata, presudno je realistično modeliranje interakcija između alata i terena. Realni tereni sačinjeni su od različitih čestica tla, značajno variraju svojim karakteristikama i stohastičke su prirode. U sklopu ovoga rada koristi se materijalni model šljunčanog terena [5]. Šljunak se generalno referira na rastresiti agregat fragmenata kamenja sa zaobljenim česticama. Dimenzijski se klasificira rasponom veličina čestica, koje se kreću od vrlo finih 2 mm do vrlo grubih 64 mm u promjeru, prema Krumbein  $\phi$  skali [6].

Gustoća čestica materijala iznosi  $\rho_p = 2600 \text{ kg/m}^3$ , dok je za rastresiti šljunčani materijal, uz poroznost (šupljine između čestica nastale pri slijeganju materijala) od 40%, nasipna (volumetrijska) gustoća  $\rho_b = 1560 \text{ kg/m}^3$ . Dimenzijski su čestice odabrane promjera  $\varnothing 20 \text{ mm}$  sa odstupanjem  $0.5 \varnothing - 2 \varnothing$ , čime variraju od srednje do vrlo grubih [7]. Materijal šljunka opisan je u tablici 1. Pri definiranju međusobnih interakcija između čestica šljunka te između čestica šljunka i čeličnog materijala Doser Blade alata, koriste se koeficijenti restitucije  $k$ , statičkog  $\mu_s$  i kotrljajućeg trenja  $\mu_d$ . Za interakciju čestica - čestica:  $k_1 = 0.15$ ,  $\mu_{s1} = 0.2$  i  $\mu_{r1} = 0.2$ , dok za čestica - čelik:  $k_2 = 0.5$ ,  $\mu_{s2} = 0.45$  i  $\mu_{r2} = 0.15$ . Materijalni model šljunka je definiran kao nekompresibilan i neljepljiv (suhi) pa se koristi fizikalni kontaktni model Hertz-Mindlin uz uključeno trenje kotrljanja [8].

Tablica 1. Materijal šljunka

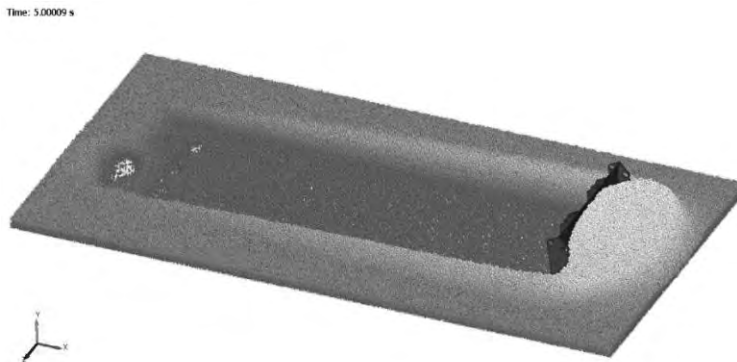
|  |              |
|--|--------------|
| gustoća čestice $\rho_p$ [ $\text{kg/m}^3$ ] | 2600         |
| nasipna gustoća $\rho_b$ [ $\text{kg/m}^3$ ] | 1560         |
| Poissonov omjer $\nu$                        | 0.25         |
| modul elastičnosti $E$ [MPa]                 | 25           |
| dimenzije čestice $\varnothing$ [mm]         | 20 (10 - 40) |

### 3.2 DEM analiza

Za provođenje računalne simulacije DEM metodom potrebno je definirati sve geometrije sustava: geometrija alata i prostor za smještaj terena "pješčanika". Geometrija Doser Blade alata je preuzeta direktno iz 3D CAD modela. Simulacija podržava realnu, detaljnu geometriju pa nema potrebe za pojednostavljenjima ili čak posebnom izradom modela za računalnu simulaciju. Šljunčani teren smješta se u posebnu geometriju "pješčanika" dimenzija  $10 \times 5 \times 0,2 \text{ m}$  koja omogućava nesmetano linearno kretanje alata i razmicanje šljunka. Na početku simulacije, Doser Blade alat pozicionira se u šljunčani teren sa zahvatom dubine 100 mm.

Vremenski tok simulacije moguće je rastaviti na nekoliko ključnih faza. U prvoj fazi izvodi se punjenje "pješčanika" česticama šljunka, ukupne mase 15600 kg, u vremenskom periodu od 0 - 1 s. Uslijed interakcije pri sudaranju čestica šljunka, potreban je period

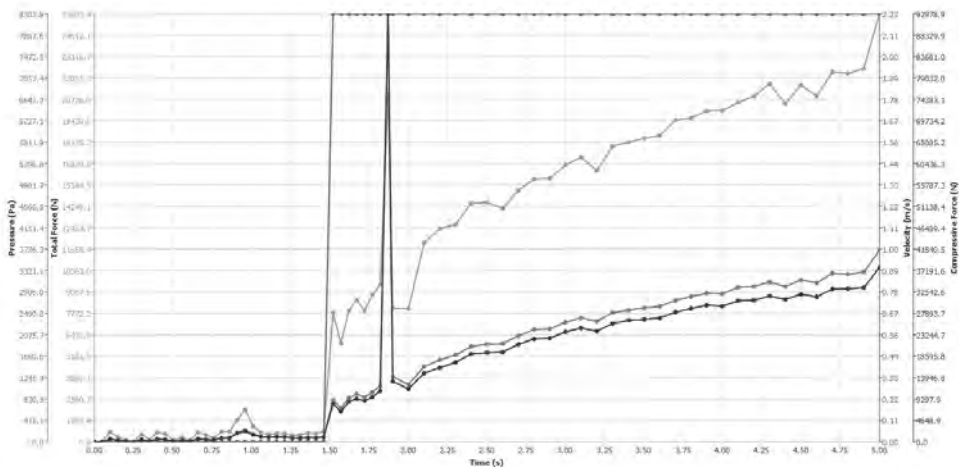
smirivanja terena i slijeganja čestica, koji se odvija u drugoj fazi, od 1 - 1.5 s. Čestice se sliježu isključivo uslijed gravitacije, bez dodatnog komprimiranja. Treća faza odnosi se na linearno kretanje Doser Blade alata kroz period od 1.5 - 5 s. Na početku perioda, u trenutku 1.5 s, alat iz mirovanja počinje ubrzavati do postizanja konačne brzine 2.222 m/s (8 km/h), kojom se dalje kreće sve do završetka simulacije u trenutku 5 s, prikazano na slici 3. U ovom periodu uspostavlja se kontinuirano gibanje alata i interakcija sa česticama šljunka. Vidljivo je uspostavljanje koridora sa izbačenim česticama iza alata te grupiranje čestica na prednjim kontaktnim plohami alata.



Slika 3. DEM simulacija, konačni vremenski trenutak = 5 s

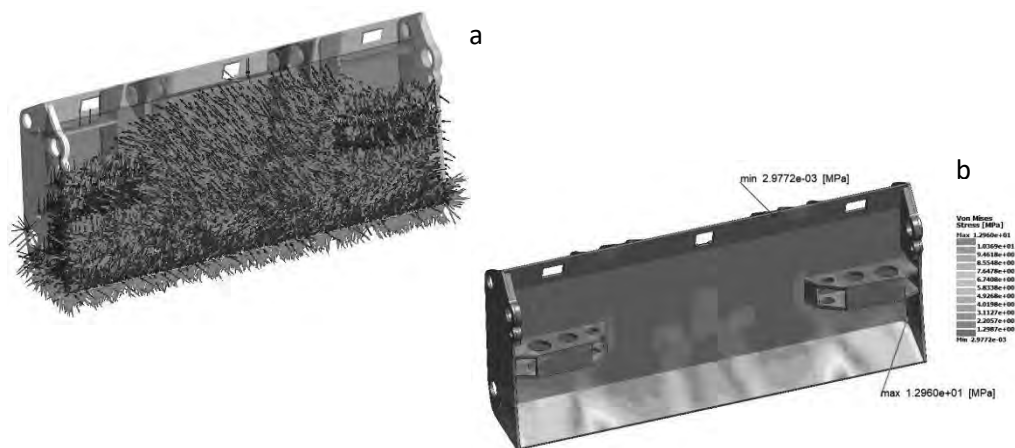
#### 4 Rezultati i analiza

Po završetku DEM analize kretanja Doser Blade alata kroz šljunčano tlo i nastalih interakcija izvršena je obrada dobivenih podataka. U razmatranje je uzet odnos između vremena trajanja simulacije i nekoliko varijabli koje djeluju na geometriju alata, a to su ukupna sila, kompresivna sila i pritisak. Također se uspoređuje i brzina kretanja alata obzirom na vrijeme trajanja simulacije. Ove interakcije prikazane su grafički na slici 4.



Slika 4. DEM simulacija, interakcije na geometriju alata

Iz grafičkog prikaza, vidljivo je da alat kreće iz stanja mirovanja u vremenskom trenutku oko 1.5 s te se nastavlja linearno kretati konstantnom brzinom 2.222 m/s. Nastali otpor gibanju alata kroz šljunčani materijal popraćen je porastom sila i pritiska na površine u kontaktu. U vremenskom periodu 1.8 - 1.9 s zamjetan je znatan skok otpora gibanju, nastao uslijed naglog povećanja količine gibanja, dok se u daljnjem periodu porasti svih varijabli stabiliziraju.



Slika 5. naprezanje kontaktnih površina alata, trenutak = 5 s a) djelovanje čestica i b) FEM Kako bi se izvršila strukturna analiza konstrukcije Doser Blade alata, iznosi kontaktnih sila pojedinih čestica pozicioniraju se na odgovarajuće površine alata te se uzimaju kao ulazni podaci za FEM analizu. Slučaj opterećenja za stabilizirani period interakcije sa šljunkom u trenutku 5 s, daje max iznos ekvivalentnih naprezanja od 13 MPa, prikazano na slici 5. Realno je očekivati da su naprezanja koncentrirana na donjoj zahvatnoj plohi alata, kao i na rubnim spojevima.

## 5 Zaključak

U radu navedeni simulacijski pristup pokazao se prikladnim za analizu interakcija Doser Blade alata i šljunčanog terena. Realno je određeno linearno gibanje alata kroz rastresiti teren te prikazano razmicanje čestica šljunčanog materijala na putanji alata. Dobivene su i razmatrane varijable nastale uslijed otpora gibanju alata kroz čestice terena. Na temelju podataka DEM analize pokazalo se mogućim provesti strukturnu FEM analizu konstrukcije alata.

Obzirom na eksploatacijske uvjete alata, simulirane u ovom radu, može se zaključiti da je sama konstrukcija alata pogodna za ovakav stupanj interakcije s terenom i da se u radu ne očekuju nikakvi problemi.

Na temelju dobivenih rezultata vidljiv je veliki potencijal ovakvih simulacija pri analizi i drugih mehanizama u interakciji s tlom, prvenstveno Tiller i Flail alata za razminiranje. Plan budućih istraživanja je usavršavanje materijalnog modela terena i provedba simulacija na nekim drugim terenima poput pijeska, zemlje i kamenjara. Zbog

velikog broja parametara koje je moguće analizirati pri ovakvim simulacijama, u sklopu ovog rada obrađeni su samo osnovni vezani uz interakciju čestica tla i geometrije alata. Određivanje trošenja materijala alata je od izrazite važnosti i buduća istraživanja će se posvetiti toj problematici. Potvrda računalne simulacije usporedbom sa eksperimentalnim ispitivanjima je također jedan od budućih planiranih koraka.

## Literatura

- [1] DOK-ING d.o.o.; dokumentacija
- [2] Mikulić, D.; Građevinski strojevi: konstrukcija, proračun i uporaba; Vlast. nakl. (Dinko Mikulić); Zagreb; 1998.
- [3] Pande, G., Beer, G., Williams, J.; Numerical methods in rock mechanics; United States; N. p., 1990.
- [4] Munjiza, A.; The Combined Finite-Discrete Element Method; John Wiley & Sons Ltd, England; 2004.
- [5] Hunt, R.E.; Characteristics of Geologic Materials and Formations: A Field Guide for Geotechnical Engineers; CRC Press; Boca Raton; 2006.
- [6] Krumbein, W.C.; Size frequency distributions of sediments and the normal phi curve; Journal of Sedimentary Petrology; 1938; 8; 84-90.
- [7] Yu, C., Kamboj, S., Wang, C. et al.; Argonne National Laboratory; ANL/EVS/TM-14/4; Data Collection Handbook to Support Modeling Impacts of Radioactive Material in Soil and Building Structures; U.S. Department of Energy (DOE), 2015.
- [8] DEM Solutions; EDEM 2.6 Theory Reference Guide; 2014.



# Određivanje mikromehaničkih svojstava sinteriranog čelika instrumentiranom indentacijom

Tomić, Z.<sup>1</sup>, Aleksandrov Fabijanić, T.<sup>2</sup>, Jarak, T.<sup>3</sup> i Tonković, Z.<sup>4</sup>

## Sažetak

Razvoj materijala s naprednim mehaničkim svojstvima zahtjeva primjenu višerazinskih numeričkih metoda u kojima se uzimaju u obzir heterogenosti materijala na mikro- i/ili nanorazini. Za to je potrebno eksperimentalno odrediti materijalne parametre konstituenata materijala. Budući da nije moguće provesti jednoosne testove na mikrorazini, instrumentirana metoda indentacije u kombinaciji s različitim empirijskim izrazima omogućava određivanje ovisnosti napreznja o deformaciji na mikrorazini. U radu je prikazan postupak rekonstrukcije dijagrama napreznja – deformacija za pojedine konstituente heterogene mikrostrukture niskolegiranog sinteriranog čelika. Predložene metode u literaturi su verificirane na etalonskom uzorku. Mikromehanička ponašanja dobivena indentacijom oštrim indentorom i rekonstruirana ovisnost napreznja o deformaciji konstituenata ferita i bainita trenutno se uspoređuju s rezultatima makromehaničkih jednoosnih testova.

**Ključne riječi:** instrumentirana metoda indentacije, sinterirani čelik, ferit, bainit, granica tečenja, dijagram napreznja – deformacija

---

<sup>1</sup> **Zoran Tomić, mag. ing.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, [zoran.tomic@fsb.hr](mailto:zoran.tomic@fsb.hr)

<sup>2</sup> **Dr. sc. Tamara Aleksandrov Fabijanić**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za materijale, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, [tamara.aleksandrov@fsb.hr](mailto:tamara.aleksandrov@fsb.hr)

<sup>3</sup> **Dr. sc. Tomislav Jarak**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za materijale, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, [tomislav.jarak@fsb.hr](mailto:tomislav.jarak@fsb.hr)

<sup>4</sup> **Prof. dr. sc. Zdenko Tonković**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10 000 Zagreb, [zdenko.tonkovic@fsb.hr](mailto:zdenko.tonkovic@fsb.hr)

## 1 Uvod i motivacija

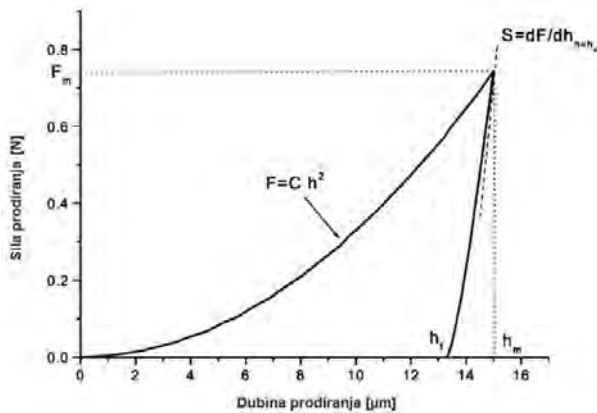
Istraživanje materijala na mikrorazini primjenom numeričkih metoda, kao i višerazinsko modeliranje i proučavanje utjecaja nepravilnosti na mikrorazini na ponašanje materijala na makrorazini zahtjeva poznavanje materijalnih svojstava na mikrorazini. Proučavanje heterogenih materijala uz pretpostavku o homogenom ponašanju nije dovoljno točno, osobito za slučaj materijala sa složenom mikrostrukturom. Iz navedenih razloga potrebno je poznavati materijalne karakteristike pojedinih konstituenata. S druge strane, za napredne nanostrukturirane materijale, poput sinteriranih prevlaka na alatima za odvajanje čestica ili različitim sapnicama, nije moguće izraditi klasične (makro) ispitne uzorke za jednoosni test. Da bi se odredila materijalna svojstva na mikro(nano) razini posljednjih godina snažan uzlet doživljava instrumentirana metoda indentacije. Oliver i Pharr [1], na principima klasične mehanike Hertza i Johnsona [2,3], predložili su određivanje modula elastičnosti iz rezultata indentacije. Na temeljima njihova rada metoda indentacije je postala standardizirana [4] te se dijeli u 3 skupine: makro ( $2 \text{ N} \leq \textit{sila utiskivanja} \leq 30 \text{ kN}$ ); mikro ( $2 \text{ N} > \textit{sila utiskivanja}$ ;  $\textit{dubina prodiranja} > 0,2 \text{ }\mu\text{m}$ ) te nano ( $\textit{dubina prodiranja} \leq 0,2 \text{ }\mu\text{m}$ ). U ovom radu provedena je indentacija na mikrorazini najprije krhkog, a zatim i duktilnog materijala.

## 2 Instrumentirana metoda indentacije

Instrumentirana metoda indentacije je metoda koja se koristi za određivanje materijalnih (elasto-plastičnih) parametara na temelju utiskivanja indentora u materijal. Indentor se u većini slučajeva može smatrati idealno krutim budući da se gotovo u pravilu izrađuje od dijamanta. Geometrija indentora može biti različita no najčešće se koriste oštri (Vickers i Berkovich) te sferni indentori. U skladu s rezultatima indentacije prikazanim u [1], a kasnije i u [4], pokazano je da različiti materijali pokazuju kvalitativno sličnu ovisnost u dijagramu primijenjena sila – dubina prodiranja koji je prikazan na Slici 1. Pokazano je kako se ta ovisnosti jednostavno može opisati izrazom

$$F = Ch^2, \quad (1.1)$$

pri čemu je  $F$  primijenjena sila,  $C$  predstavlja parametar očvršćenja, dok je  $h$  dubina prodiranja.



Slika 1. Tipična ovisnost sile prodiranja o dubini prodiranja dobivena indentacijom oštrim indenterom

Također, prema [1] nagib krivulje rasterećenja pri maksimalnoj sili (Slika 1) odgovara modulu elastičnosti što je kasnije istraženo na različitim skupinama materijala te je pokazano da vrijedi relacija

$$S = \left. \frac{dF}{dh} \right|_{h=h_{\max}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} E_r \sqrt{A}, \quad (1.2)$$

pri čemu je  $E_r$  reducirani modul elastičnosti koji u obzir uzima elastičnost indentora, a  $A$  je površina otiska pri maksimalnoj sili. Kako bi se u obzir uzeo utjecaj spuštanja i podizanja materijala uz bok indentora (eng. *pile-up* i *sink-in*), autori u [5–7] predlažu uzimanje u obzir spomenutih pojava za točnije računanje materijalnih parametara.

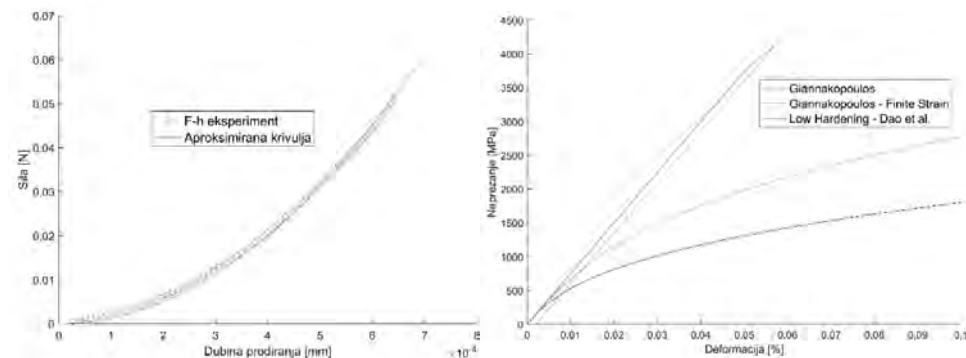
Nedugo nakon prijedloga Olivera i Pharra [1] otvara se novo polje karakterizacije materijala. Osim određivanja tvrdoće i modula elastičnosti, stvorila se potreba za poznavanjem elasto-plastičnih materijalnih svojstava, poput granice tečenja i parametara očvršćenja, za potrebe istraživanja materijala na mikrorazini. Giannakopoulos i Suresh [8] temeljem inverzne metode i metode konačnih elemenata te rezultata indentacije na različitim materijalima predlažu empirijske izraze pomoću kojih se može odrediti granica tečenja te dijagram naprezanje-deformacija. Predloženi izrazi vrijede za oštre indentore poput Vickersa (četverostrana piramida) i Berkovicha (trostrana piramida) te za izrazito duktilne materijale. Koristeći se također 2D konačnim elementima Dao *et al.* [9] predlaže proširene bezdimenzijske jednadžbe za točnije određivanje materijalnih parametara. Uz bezdimenzijske jednadžbe Dao [9] je proširio jednadžbe kako bi se mogli odrediti materijalni parametri krhkih materijala i materijala s jako malim očvršćenjem. S druge strane, Bucaille [10] predlaže bezdimenzijske jednadžbe u ovisnosti o kutu oštrog indentora. Sva tri spomenuta autora koriste ulazne rezultate indentacije kao ulazne podatke te aproksimaciju krivulje indentacije (slika 2a) za određivanje parametra  $C$  iz jednadžbe (1).

### 3 Materijali i metode

Kako bi se verificirale spomenute metode korišten je topljeni silicijev dioksid poznatiji kao *fused silica* (FS). FS je staklo u amorfnom obliku, a ima izrazito krhka svojstva i služi kao etalon budući da ima nepromjenjiva materijalna svojstva. Uprosječeni rezultati indentacije (slika 2a) aproksimirani su jednadžbom (1.1) te je koristeći jednadžbe iz [8,9] određena ovisnost naprezanja o deformaciji (slika 2b). Za provedbu prikazanih ispitivanja FS korištena je sila karakterizacije od 50  $\mu\text{N}$ , pretpostavljeni Poissonov faktor 0.16 i Vickers indenter. Iako su na slici 2b prikazani različiti modeli, bitno je uočiti kako samo model predložen u [9] za krhke materijale možemo smatrati adekvatnim, dok su ostali modeli prilagođeni izrazito duktilnim materijalima.

Iz rezultata sa slike 2b vidljivo je kako granica tečenja za analiziranu *fused silicu* iznosi 4100 MPa. Takav rezultat se dobro poklapa s rezultatima iz literature [11,12] koji navode raspon granice tečenja od 4000 MPa do 4500 MPa, dok se modul elastičnosti od 75 000 MPa poklapa s certificiranom vrijednosti uzorka.

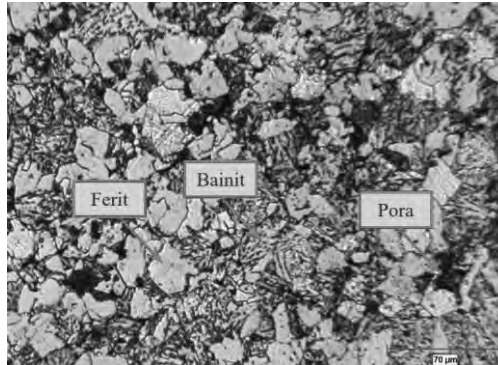
Nakon što su modeli verificirani na etalonu FS-a modeli za rekonstrukciju dijagrama naprezanje – deformacija su primjenjeni na uzorcima sinteriranog čelika. Sinterirani uzorci su prethodno zaliveni u polimernu masu, polirani te nagriženi nitalom.



Slika 2. a) aproksimacija eksperimentalne krivulje indentacije s jednadžbom (1), b) dijagram naprezanje – deformacija rekonstruiran iz podataka indentacije za FS s tri različita analitička modela

Uzorci sinteriranog čelika od Astaloy Mo+0,2C niskolegiranog čeličnog praha imaju poroznu heterogenu mikrostrukturu (slika 3). Struktura se sastoji od faze ferita i međufaze bainita te pora. Budući da se radi o niskolegiranom čeliku, najveći dio ugljika je raspoređen kao lamele FeC karbida u međufazi bainita što pridonosi većem modulu elastičnosti bainita. Ferit se nalazi u metalnoj matrici s postotkom od 20-25%, pore do 7%, a ostatak zauzima bainit.

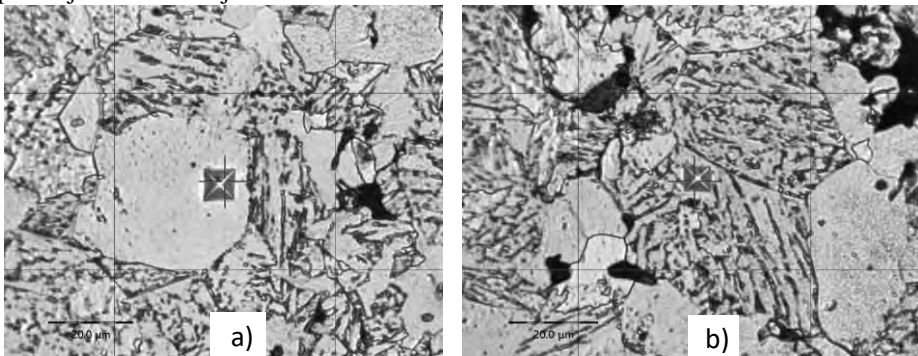
Sva mjerenja obavljena su na uređaju MCT® tvrtke Anton Paar. Prilikom karakterizacije sinteriranih uzoraka korištena je sila od 100  $\mu\text{N}$  s Vickers indentorom, vrijeme držanja maksimalne konstantne sile je 15 sekundi, a Poissonov faktor je pretpostavljen kao 0,3.



Slika 3. Heterogena mikrostruktura sinteriranog čelika (povećanje 20x)

## 4 Rezultati

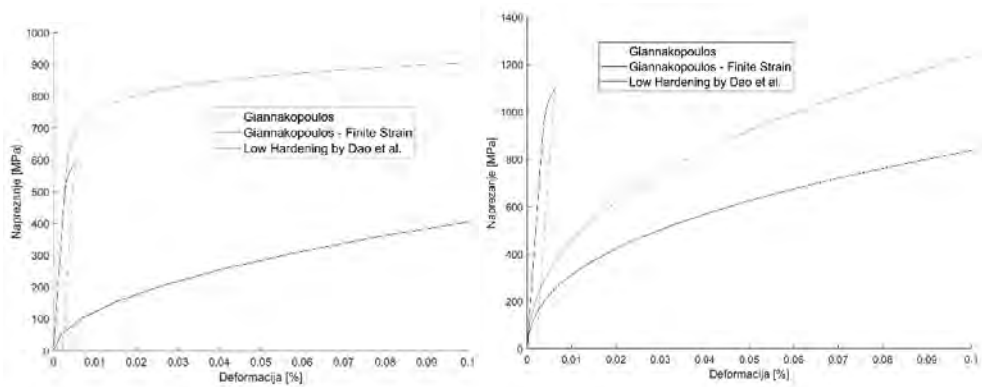
Veliki broj indentacija izvršen je na feritnim kristalnim zrnima (slika 4a). Uprosječene krivulje indentacije aproksimirane su jednadžbom (1.1) te je rekonstruirana ovisnost napreznja o deformaciji.



Slika 4. a) Otisak na feritnom kristalnom zrnju, b) otisak na bainitnom kristalnom zrnju

Za razliku od feritnih kristalnih zrna, bainitna zrna (slika 4b) pokazuju veće rasipanje rezultata. Lokacija indentacije ima veliki utjecaj budući da bainit ovisi o lokalizaciji lamela FeC karbida.

Slika 5 prikazuje rekonstruirane dijagrame napreznje – deformacija za ferit (slika 5a) i bainit (slika 5b) dok su u tablici 1 prikazani rezultati indentacije za ferit i bainit te granica tečenja dobivena preko metode rekonstrukcije iz [8].



Slika 5. Rekonstruirani dijagram ovisnosti naprezanja o deformaciji za kristalno zрно: a) ferita i b) bainita

Tablica 1. Rezultati indentacije i granica tečenja za ferit i bainit sinteriranog čelika

|        | Modul elastičnosti,<br>$E$ [MPa] | Tvrdoća po<br>Vickersu, $H$ [-<br>] | Dubina prodiranja,<br>$h_{\max}$ [ $\mu\text{m}$ ] | Granica tečenja,<br>$\sigma_y$ [MPa] |
|--------|----------------------------------|-------------------------------------|--|--------------------------------------|
| Ferit  | 185 000                          | 177                                 | 1,477  | 700                                  |
| Bainit | 259 000                          | 301                                 | 1,131  | 252                                  |

Osim toga, na istim uzorcima materijala provedni su jednosni vlačni makrotestovi te je određen modul elastičnosti za sinterirani čelik u iznosu od 152 000 MPa i granica tečenja iznosa 329 MPa.

## 5 Zaključak

U radu su prikazani preliminarni rezultati eksperimentalnih istraživanja instrumentirane indentacije na mikrorazini krhkog materijala topljenog silicijeva dioksida (FS) te duktilnog sinteriranog čelika. Pritom se rezultati dobiveni za FS dobro poklapaju s certificiranim vrijednostima analiziranog materijala. Nadalje su iz rezultata indentacije sinteriranog čelika Astaloy Mo+0,2C rekonstruirani dijagrami ovisnosti naprežanja o deformaciji za kristalno zrno ferita i bainita. Na istim uzorcima materijala provedni su jednosni vlačni makrotestovi. Da bi se potvrdili rezultati mikromehaničkih svojstava u daljnjim istraživanjima provest će se indentacija sfernim indetorom te napraviti usporedba s više analitičkih modela rekonstrukcije dijagrama naprežanje-deformacija. Osim toga, cilj budućih istraživanja je dovesti u korelaciju rezultate mikro i makro ispitivanja te na temelju dobivenih eksperimentalnih rezultata izvesti numeričke algoritme za višerazinsko modeliranje procesa deformiranja sinteriranog čelika.

### Zahvale

Istraživanje je u potpunosti financirano sredstvima Hrvatske zaklade za znanost u okviru projekta PZS-2019-02-4177 "Višerazinsko numeričko modeliranje i eksperimentalno istraživanje procesa starenja u sinteriranim konstrukcijskim komponentama".

### Literatura

- [1] Oliver WC, Pharr GM. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *J Mater Res* 1992;7:1564–83.
- [2] Hertz H. Ueber die Berührung fester elastischer Körper. 1882;1882:156–71.
- [3] Johnson KL. *Contact Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press; 1985.
- [4] ISO 14577-1 Metallic materials - Instrumented indentation test for hardness and materials parameters. 2002.
- [5] Zhang J, Niebur GL, Ovaert TC. Mechanical property determination of bone through nano- and micro-indentation testing and finite element simulation. *J Biomech* 2008;41:267–75.
- [6] Lu L, Dao M, Kumar P, Ramamurty U, Karniadakis GE, Suresh S. Extraction of mechanical properties of materials through deep learning from instrumented indentation. *Proc Natl Acad Sci* 2020;117:7052 LP – 7062.
- [7] Venkatesh TA, Van Vliet KJ, Giannakopoulos AE, Suresh S. Determination of elasto-plastic properties by instrumented sharp indentation: guidelines for property extraction. *Scr Mater* 2000;42:833–9.
- [8] Giannakopoulos AE, Suresh S. Determination of elastoplastic properties by instrumented sharp indentation. *Scr Mater* 1999;40:1191–8.
- [9] Dao M, Chollacoop N, Van Vliet KJ, Venkatesh A, Suresh S. Computational modeling of the forward and reverse problems in instrumented sharp indentation. *Acta Mater* 2001;49:3899–918.
- [10] Bucaille JL, Stauss S, Felder E, Michler J. Determination of plastic properties of metals by instrumented indentation using different sharp indenters. *Acta Mater* 2003;51:1663–78.

- [11] Gao C, Liu M. Instrumented indentation of fused silica by Berkovich indenter. *J Non Cryst Solids* 2017;475:151–60.
- [12] Torres-Torres D, Muñoz-Saldaña J, De Guevara LAGL, Hurtado-Macías A, Swain M V. Geometry and bluntness tip effects on elastic-plastic behaviour during nanoindentation of fused silica: Experimental and FE simulation. *Model Simul Mater Sci Eng* 2010;18.

# Utjecaj mehaničkih svojstava arterije i plaka na naprezanja u stijenci nakon ugradnje stenta

Virag, L.<sup>1</sup>, Rukljač, D.<sup>2</sup> i Karšaj, I.<sup>3</sup>

## Sažetak

Povećano nakupljanje aterosklerotskog plaka na stijenci krvne žile može dovesti do opstrukcije krvnog protoka, a ukoliko dođe do pojave tromba, i do moždanog ili srčanog udara. Uobičajeni tretman kojim se osigurava povrat protoka krvi u ateroskleroznoj žili je ugradnja stenta. Endovaskularno ugrađen proširivi kardiovaskularni stent lokalno širi krvnu žilu na mjestu stenozе. Unutar nekoliko mjeseci nakon liječenja može doći do ponovnog sužavanja (restenoze). Mogući uzrok restenoze je povećanje naprezanja u krvnoj žili uslijed ugradnje stenta što posljedično uzrokuje povećanu proizvodnju kolagenskih vlakana u stijenci žile.

S obzirom na važnost naprezanja u stijenci arterije nakon ugradnje stenta, u ovom radu je numerički simulirana ugradnja stenta. Radiologijskim slikovnim metodama moguće je snimiti *in vivo* geometriju arterija opterećenih krvnim tlakom, međutim neopterećena geometrija arterije i predistezanja su nepoznati. Iznos predistezanja ovisi o starosti pacijenta i stadiju bolesti. Stoga je u radu je ispitan utjecaj iznosa predistezanja stijenke i krutosti plaka na naprezanja nakon ugradnje stenta, a time i uspješnosti liječenja.

U radu je prikazana implementacija predistezanja u neo-Hooke i Holzapfel–Gasser–Ogden (HGO) hiperelastične materijalne modele unutar UMAT rutina (eng. *user subroutine*) u programskom paketu Abaqus. Ti modeli su korišteni za simulaciju ugradnje samostalno izrađenog karotidnog stenta u ateroskleroznu stijenku. Korištenjem neo-Hooke modela s predistezanjima se može zaključiti da se povećanjem predistezanja značajno smanjuje povećanje naprezanja nakon ugradnje stenta. Nadalje, smanjenje krutosti plaka uzrokuje povećanje naprezanja u stijenci, jer podatljiviji plak nosi manje opterećenja. Također je prikazano da parametri stijenke ne utječu na uspješnost smanjenja stenozе nakon ugradnje stent, ali krutost plaka značajno utječe na vjerojatnost rezidualne stenozе nakon ugradnje karotidnog stenta.

**Ključne riječi:** konačni elementi, ateroskleroza, kardiovaskularni stent, predistezanje, restenoza, UMAT

---

<sup>1</sup> **dr. sc. Lana Virag, docent**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: lana.virag@fsb.hr

<sup>2</sup> **Dominik Rukljač, mag.ing.mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: dominik.rukljac@gmail.com

<sup>3</sup> **dr. sc. Igor Karšaj, redoviti profesor**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: igor.karsaj@fsb.hr

## 1 Motivacija

Ateroskleroza predstavlja nakupljanje plaka na intimi velikih i srednje velikih arterija. Plak se sastoji od lipida, upalnih stanica, stanica glatkog mišićja te stanica vezivnog tkiva [1]. Ateroskleroza kao bolest stijenke velikih i srednje velikih mišićnih i elastičnih arterija se najčešće razvija na karotidnim i koronarnim arterijama. Ateroskleroza karotidnih arterija je značajan uzrok moždanog udara. U zapadnim zemljama je oko 20-25% slučajeva moždanog udara uzrokovano karotidnom aterosklerozom [2]. Moždani udar nastaje zbog začepljenja ili suženja moždane arterije krvnim ugruškom (trombom) ili embolusom. Ugrušak se može razviti na oštećenoj ili ateroskleroznoj arteriji koja opskrbljuje mozak (tromboza), dok je embolus ugrušak, mast, zračni mjehurić ili djelić tumora nastao na drugom mjestu, koji je krvlju doputovao i začepi krvlju moždanu arteriju (embolija).

Liječenje se svodi na endovaskularnu ugradnju stenta, nakon čijeg postavljanja se trenutno uspostavlja (skoro) normalan protok na mjestu prethodnog suženja. Metalni stent je metalna mrežica nakon čijeg postavljanja dolazi do prirodnog procesa "cijeljenja", tj. ostaje ugrađen u stijenku krvne žile. Ovaj proces traje nekoliko tjedana, pa se stoga tijekom ovog razdoblja preporučuje uzimanje dvostruke terapije protiv stvaranja ugruška, u svrhu sprječavanja moždanog udara. Naime, sve dok je stent svježe postavljen, postoji izravan dodir krvi i metala, koji može biti okidač za stvaranje ugruška (tromba) u stentu, što predstavlja potencijalno katastrofalnu komplikaciju.

Restenoza je drugi mogući problem koji se javlja nakon postavljanja metalnog stenta. Ovdje se radi o pretjeranoj reakciji žile na metalni stent, pa proces prerastanja stenta bude toliko izražen da ovo tkivo ponovno suzi sam promjer krvne žile i zapravo ponovno dovede do istog problema, odnosno suženja ili začepljenja, zbog kojeg je stent prvotno i bio ugrađen. Restenoza se javlja s različitom učestalošću i ovisi prvenstveno o dužini i primjeru ugrađenog stenta te o značajkama samog bolesnika; učestalost restenoze je od 15 do više od 50% slučajeva [3]. Restenoza je primjerice znatno češća kod bolesnika s dijabetesom. Do restenoze najčešće dolazi unutar prvih šest mjeseci nakon ugradnje stenta [4]. S obzirom da je suženje kod restenoze uzrokovano pretjeranom proizvodnom kolagena, a ne taloženjem plaka, može se zaključiti da je jedan od bitnijih faktora koji utječu na pojavu restenoze pretjerano povećanje naprezanja u stijenci uzrokovano ugradnjom stenta. S obzirom na važnost naprezanja u stijenci arterije nakon ugradnje stenta, u ovom radu je numerički simulirana ugradnja stenta. Da bi se arterija mogla što točnije opisati, potrebno je moći modelirati predistezanja. Naime, radiologijskim slikovnim metodama moguće je snimiti *in vivo* geometriju arterija opterećenih krvnim tlakom, međutim neopterećena geometrija arterije kao ni predistezanja nisu poznati. Krutost stijenke i iznos predistezanja ovise o starosti i anamnezi pacijenta. Stoga je u radu je ispitan utjecaj iznosa predistezanja stijenke i krutosti plaka na naprezanja nakon ugradnje stenta, a time i uspješnosti liječenja.

## 2 Metodologija

### 2.1. Implementacija predistezanja u UMAT rutine

Da bi se moglo opisati ponašanje materijala arterije pri nastanku plaka unutar nje, deformiranje kreće od referentne konfiguracije koja se nalazi u stanju s određenim predistezanjem pa je zato taj efekt važan pri implementaciji hiperelastičnih materijalnih modela. Za opisivanje efekta predistezanja uvodi se tenzorska veličina  $\mathbf{G}$  koju zovemo tenzor predistezanja. To je, u cilindričnom koordinatnom sustavu stijenke, dijagonalni tenzor drugog reda koji po dijagonali sadrži iznose omjera izduženja  $\lambda$  u radijalnim, cirkularnom i aksijalnom smjeru, a za koji mora biti zadovoljen uvjet nestlačivosti ( $\det(\mathbf{G}) = 1$ ). Pomoću tenzora predistezanja  $\mathbf{G}$  i tenzora gradijenta deformiranja  $\mathbf{F}$ , možemo definirati novi tenzor gradijenta deformiranja kao:

$$\mathbf{F}_G = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}. \quad (1)$$

Tenzor  $\mathbf{F}_G$  je tenzor gradijenta deformiranja s predistezanjem. Nadalje, u zapisima osnovnih veličina iz mehanike kontinuuma koristit će se tenzor gradijenta deformiranja s predistezanjem  $\mathbf{F}_G$  umjesto do sada korištenog klasičnog tenzora gradijenta deformiranja  $\mathbf{F}$ . Analogno tome, lijevi i desni Cauchy–Greenov tenzor deformiranosti s uključenim efektima predistezanja glase:

$$\mathbf{C}_G = \mathbf{F}_G^T \mathbf{F}_G, \quad (2)$$

$$\mathbf{b}_G = \mathbf{F}_G \mathbf{F}_G^T, \quad (3)$$

gdje  $\mathbf{C}_G$  predstavlja desni, a  $\mathbf{b}_G$  lijevi Cauchy–Greenov tenzor deformiranosti s uključenim efektima predistezanja. Takvu tenzori deformiranosti se zatim koriste za računanje invarijanti, odnosno energije deformiranja i naprezanja. Tako recimo za HGO model, s materijalnim konstantama  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  i  $D_1$ , potencijalna energija ostaje

$$W = c_1(I_1 - 3) + \frac{c_2}{c_3} [e^{c_3(I_4 - 3)} - 1] + \frac{1}{D_1} (J - 1)^2. \quad (4)$$

Jacobian  $J$  ostaje nepromijenjen, jer je  $\det(\mathbf{G}) = 1$ , a  $I_1$  i  $I_4$  predstavljaju prvu i četvrtu invarijantu desnog Cauchy–Greenovog tenzora deformiranosti za anizotropne materijale, ali s predistezanjima, tj. na primjer:

$$I_4 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{C}_G \cdot \mathbf{m}^T. \quad (5)$$

### 2.2. Simulacije

Geometrija arterije i plaka te postavke simulacije su izrađene prema [5], uz razliku da autori tog rada nisu uzeli u obzir predistezanja. Zbog korištenja dvije simetrije, arterija je diskretizirana s 16740 C3D8H konačnih elemenata, dok je plak opisan s 8680 konačnih

elemenata istog tipa. Hibridna formulacija je potrebna da se može nametnuti nestlačivost arterije. S obzirom da krutost plaka ovisi o sastavu, uzete su u obzir tri krutosti plaka – kalcificirani, celularni i hipocelularni, prema [6].

Prilikom ugradnje metalnog stenta, on se širi balonom te nakon micanja balona iz arterije ostaje proširen zbog plastičnih deformacija, tako šireći krvnu žilu. Samostalno izrađeni stent je konstruiran da se prilikom zadanog tlaka u balonu, stent dovoljno proširi, da prilikom proširivanja ne dođe do prevelikih naprezanja u stentu, ali da unesene plastične deformacije budu dovoljno velike da zadrže promjer aterosklerozna stijenke na nominalnoj vrijednosti. U prvom koraku se analizira aterosklerozna žila s predistezanjima opterećena samo s krvnim tlakom. Budući da se krutost izračunata tako da za određeni tlak i predistezanje zadana geometrija odgovara *in vivo* konfiguraciji, odnosno da nema pomaka, početni inkrement je odabran da bude 1 usprkos nelinearnom materijalu. S obzirom da je to odmah ravnotežno stanje, potrebna je samo jedna iteracija. Kada bi se stavio mali početni inkrement, npr. 0,02, tlak bi se skalirao s tom vrijednosti i žila bi se suzila s predistezanjima. Iako se to može napraviti ako se računaju naprezanja i pomaci u žili, u slučaju kada se unutar žile nalazi stent, zbog problema s kontaktom je to bolje izbjeći. U drugom koraku se stent proširuje balonom, odnosno predefiniranim radijalnim pomakom te je u ovom stepu zadan jako mala početna vrijednost inkrementa „vremena“ (eng. *Initial Increment size*) od 0,015 i velik maksimalni broj inkremenata (1000). Tu je potreban mali inkrement ne samo zbog hiperelastičnosti, nego i zbog kontakta između stenta i stijenke. Treći korak opisuje rasterećenje stenta te je u tome Step-u ponovno bitno da inkrement bude malen.

### 3 Rezultati

#### 3.1 Utjecaj predistezanja na naprezanja u stijenci nakon ugradnje stenta

Usporede li se vrijednosti naprezanja za različita predistezanja, prikazana u Tablici 1, vidljivo je da su razlike značajne. Iz priloženog je vidljiv maksimalan porast naprezanja od 413% u slučaju s najmanjom vrijednosti predistezanja u odnosu na zdravu arteriju. Promjenom vrijednosti naprezanja s 1,07 na 1,15, dolazi do porasta naprezanja od čak 61,1%.

Tablica 1. Maksimalna naprezanja u stijenci za različita predistezanja prije i nakon stentiranja

| Predistezanje $G_{22}$ [%] | $S$ , Mises [N/mm <sup>2</sup> ] | $(S - Z) / Z$ , [%] |
|----------------------------|----------------------------------|---------------------|
| 1,07                       | 0,1685                           | 412,94              |
| 1,1                        | 0,1322                           | 302,44              |
| 1,15                       | 0,1046                           | 218,42              |
| Zdrava arterija (Z)        | 0,03285                          |                     |

Također se naprezanje u plaku smanjuju povećanjem vrijednosti predistezanja stijenke ( $G_{22}$  i  $G_{33}$ ), zbog smanjenja krutosti žile  $c_{10}$ . Zanimljivo je i da predistezanje u stijenci gotovo

uopće ne utječe na krajnji pomak stenta, odnosno uspješnost smanjivanja stenoze. Razlika pomaka za predistezanja 1,07 i 1,15 iznosi samo 0,005 mm.

### 3.2 Utjecaj krutosti plaka na naprezanja u stijenci nakon ugradnje stenta

Za razliku od predistezanja, krutost plaka ima značajnu ulogu u uspješnosti povrata protoka na normalnu vrijednost. U slučaju podatljivih plakova (kalcificiranog i celularnog), sužavanje stenta nakon rasterećenja je značajno manje nego li je u slučaju krutog hipocelularnog plaka. Za ista svojstva arterije i uvjete ugradnje stenta, kod podatljivih plakova je došlo do potpunog povratka krvnog protoka, dok se za kruti plak stenoza smanjila s početnih 50% na 16%, ali nije potpuno riješena (rezultati nisu tu prikazani). Rezidualna stenoza nakon ugradnje stenta nije neuobičajena, te ako je manja od 20% se operativni zahvat smatra uspješnim. Međutim, pokazalo se da rezidualna stenoza povećava vjerojatnost restenoze [7]. Ovi rezultati ukazuju na to da nisu parametri stijenke (predistezanje i krutost) ti koji su ključni za uspješnost smanjenja stenoze nakon ugradnje stenta, već da to ovisi o materijalu ateroskleroznog plaka.

Tablica 2. Maksimalna naprezanja u stijenci za različite krutosti plaka prije i nakon stentiranja

| Vrsta plaka   | S, Mises [N/mm <sup>2</sup> ] | ZDRAVA ARTERIJA, Z            |                  |
|---------------|-------------------------------|-------------------------------|------------------|
|               |                               | S, Mises [N/mm <sup>2</sup> ] | (S - Z) / Z, [%] |
| kalcificirani | 0,165281                      | 0,03282                       | 403,60           |
| hipocelularni | 0,0853406                     |                               | 160,03           |
| celularni     | 0,1595                        |                               | 385,98           |

Proučavanjem naprezanja u samoj stijenci potvrđuje se da je naprezanje u žili najveće u slučaju gdje je krutost plaka najmanja. U Tablici 2, prikazana je razlika u maksimalnim naprezanjima između gore prikazanih slučajeva i zdrave arterije. Iz tablice se također uočava da smanjenje naprezanja kod korištenja hipocelularnog plaka u odnosu na kalcificirani plak iznosi 93,67% iz čega se može zaključiti da krutost plaka značajno utječe i na iznose maksimalnih naprezanja.

### 3.3 Utjecaj krvnog tlaka na naprezanja u stijenci nakon ugradnje stenta

S obzirom da je pretpostavljena opterećena geometrija ista kao u prošlim primjerima, za ista predistezanja, povećanje tlaka mora uzrokovati povećanje krutosti stijenke. Krvni tlak, odnosno krutost, zanemarivo mijenja povratni pomak stenta, a ne utječe niti na maksimalno naprezanje u plaku. S obzirom da tlak znatno mijenja krutost stijenke, za iste pomake se očekuje da će naprezanja biti različita. U Tablici 3 su prikazana maksimalna naprezanja u slučajevima s predistezanjem nakon implantacije stenta te slučajevi s istim materijalnim

parametrima u zdravoj arteriji. Iz priloženog se uočava da naprezanje u žili raste porastom tlaka, što je bilo i za očekivati. Također, prikazan je i porast napreznja u postocima nakon implantacije stenta. Iz tablice se može zaključiti da tlak nema nikakvu ulogu pri pojavi restenoze. Razlika napreznja nakon stenozе i u zdravoj arteriji je podjednaka za sva tri iznosa tlaka.

Tablica 3. Maksimalna napreznja u stijenci za različite krvne tlakove prije i nakon stentiranja

|                                 |                               | ZDRAVA ARTERIJA, Z            |             |
|---------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-------------|
| Krvni tlak [N/mm <sup>2</sup> ] | S, Mises [N/mm <sup>2</sup> ] | S, Mises [N/mm <sup>2</sup> ] | (S - Z) / Z |
| 0,0133                          | 0,12714                       | 0,03282                       | 287,39      |
| 0,0173                          | 0,1688                        | 0,04253                       | 296,90      |
| 0,0213                          | 0,2052                        | 0,05256                       | 290,41      |

#### 4 Zaključak

U radu se proučavao utjecaj materijalnih parametara stijenke i plaka na povećanje napreznja unutar stijenke karotidne arterije nakon ugradnje stenta. Stijenke arterija su karakterizirane kompozitnom strukturom, hiperelastičnošću, anizotropnošću te zaostalim napreznjima. U ovom radu su korišteni neo-Hooke i HGO modeli s predistezanjima. S obzirom da takvi modeli ne postoje u Abaqusu, bilo ih prvo potrebno implementirati korištenjem *user material* (UMAT) rutina. Kolagen koji se nalazi unutar stijenke se kontinuirano obnavlja. U slučaju povećanja napreznja, proizvodnja kolagena se povećava. Povećana proizvodnja kolagena u intimi je mogući uzrok restenoze, tj. ponovnog sužavanja krvne žile, nakon ugradnje stenta, do kojeg dolazi unutar prvih šest mjeseci nakon stentiranja u do 50% slučajeva. Dakle napreznja u žili ne smiju biti prevelika nakon ugradnje stenta.

Korištenjem neo-Hooke modela s predistezanjima se može zaključiti da se povećanjem predistezanja značajno smanjuje povećanje napreznja nakon ugradnje stenta. Napreznja također rastu i porastom tlaka, što je bilo i za očekivati. Međutim, zanimljivo je da tlak gotovo uopće ne utječe na razliku napreznja nakon ugradnje stenta u odnosu na napreznja u zdravoj stijenci pod istim tlakom. Nadalje, smanjenjem krutosti plaka uzrokuje povećanje napreznja u stijenci, jer podatljiviji plak nosi manje opterećenja.

Također je pokazano je da parametri stijenke (predistezanje konstituenata te promjena krutosti) ne utječu na uspješnost smanjenja stenozе nakon ugradnje stent, ali krutost plaka (a vjerojatno i debljina plaka, odnosno početna stenozа) značajno utječu na vjerojatnost i stupanj rezidualne stenozе nakon ugradnje karotidnog stenta.

---

## Zahvale

Ovaj rad je financiran projektom Hrvatska zaklade za znanost (IP-2020-02-4016, Ž. Tuković).

## Literatura

- [1] Tomey, M. I., Narula, J. i Kovacic, J. C.; Advances in the understanding of plaque composition and treatment options: Year in review; *J. Am. Coll. Cardiol.*; 2014; 63; 1604–1616.
- [2] Pahwa, R. i Jialal, I.; *Atherosclerosis*; Treasure Island (FL); 2021.
- [3] Sakamoto, A., Jinnouchi, H., Torii, S., Virmani, R. Finn, A. V.; Understanding the impact of stent and scaffold material and strut design on coronary artery thrombosis from the basic and clinical points of view; *Bioengineering*; 2018; 5; 1–19.
- [4] Byrne, R. A., Joner, M. i Kastrati, A.; Stent thrombosis and restenosis: What have we learned and where are we going?; *Eur. Heart J.*; 2015; 36, 3320–3331.
- [5] Schiavone A. i Zhao, L. G.; A computational study of stent performance by considering vessel anisotropy and residual stresses; *Mater. Sci. Eng. C*; 2016; 62; 307–316.
- [6] Karimi, A., Navidbakhsh, M., Shojaei, A., Hassani, K. i Faghihi, S.; Study of plaque vulnerability in coronary artery using mooney-rivlin model: A combination of finite element and experimental method; *Biomed. Eng.- Appl. Basis Commun.*; 2014; 26, 1–7.
- [7] Kang, J., Hong, J. H., Kim, B. J., Bae, H. J., Kwon, O. K., Oh, C. W., Jung, C., Lee, J. S. i Han, M. K.; Residual stenosis after carotid artery stenting: Effect on periprocedural and long-term outcomes; *PLoS One*; 2019; 14, 1–11.



## Dinamička analiza cikličke kidalice za *in-situ* ispitivanja materijala unutar CT skenera

Vrgoč, A.<sup>1</sup>, Bartulović, A.<sup>2</sup>, Stanić, L.<sup>3</sup>, Zaplatić, A.<sup>4</sup>, Čakmak, D.<sup>5</sup>, Tomičević, Z.<sup>6</sup>

### Sažetak

Zbog njihovih specifičnih mehaničkih svojstava, upotreba vlaknima ojačanih kompozita je u stalnom porastu. No, zbog neadekvatne karakterizacije i trenutnih ograničenja u procjeni oštećenja, puni potencijal ove klase inženjerskih materijala ostaje neiskorišten, a današnje kompozitne konstrukcije su predimenzionirane. Stoga su napredne metode nerazornih ispitivanja, poput računalne tomografije X-zrakama, te *in-situ* eksperimentalna ispitivanja polimera ojačanih vlaknima ključan element u identifikaciji oštećenja u ovim materijalima te opisivanju makroskopskog odziva.

U ovom radu je provedena dinamička analiza konstruirane *in-situ* cikličke kidalice koja omogućuje eksperimentalna ispitivanja unutar CT skenera. Prvo je provedena frekvencijska analiza te su određene glavne forme vibriranja ovog ispitnog uređaja. Dinamičkom analizom pokriven je frekvencijski interval od 1 do 100 Hz, a proučavan je najkonzervativniji slučaj kada amplituda pomaka ispitnog uzorka iznosi 1 mm. Nadalje, prilikom rada razvijene *in-situ* cikličke kidalice javljat će se vibracije koje mogu oštetiti rotacijski stol tomografa i/ili utjecati na kvalitetu zabilježenih projekcija. Stoga su u ovom radu određene reakcijske sile koje djeluju na rotacijski stol CT skenera.

**Ključne riječi:** polimeri ojačani vlaknima, oštećenje, *in-situ* ciklička kidalica, računalna tomografija, metoda konačnih elemenata

---

<sup>1</sup>**Ana Vrgoč, mag.ing.mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: [ana.vrgoc@fsb.hr](mailto:ana.vrgoc@fsb.hr)

<sup>2</sup>**Ante Bartulović, mag.ing.mech.**, INETEC – Institute for nuclear technology, Dolenica 28, 10250 Lučko, Zagreb, e-mail: [ante.bartulovic@inetec.hr](mailto:ante.bartulovic@inetec.hr)

<sup>3</sup>**Luka Stanić, mag.ing.mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za zrakoplovno inženjerstvo, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: [luka.stanic@fsb.hr](mailto:luka.stanic@fsb.hr)

<sup>4</sup>**Andrija Zaplatić, mag.ing.mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: [andrija.zaplatic@fsb.hr](mailto:andrija.zaplatic@fsb.hr)

<sup>5</sup>**dr.sc. Damjan Čakmak, mag.ing.mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: [damjan.cakmak@fsb.hr](mailto:damjan.cakmak@fsb.hr)

<sup>6</sup>**doc.dr.sc. Zvonimir Tomičević, mag.ing.mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: [zvonimir.tomicevic@fsb.hr](mailto:zvonimir.tomicevic@fsb.hr)

## 1 Uvod

Primjena vlaknima ojačanih kompozita (eng. *Fiber reinforced polymers* - FRP) u izradi zahtjevnih inženjerskih konstrukcija je u konstantnom porastu. Ovi kompozitni materijali se odlikuju visokim omjerom čvrstoće i mase, a heterogena mikrostruktura omogućuje jednostavno modificiranje njihovih svojstava kako bi se zadovoljili sve stroži zahtjevi na pouzdanost i sigurnost konstrukcija. No, unatoč brojnim prednostima, zbog anizotropnosti te heterogene mikrostrukture, opisivanje globalnog odziva FRP materijala je složeno te zahtjeva primjenu naprednih metoda nerazornih ispitivanja (eng. *Non-destructive testing methods* – NDT). Osim toga, pucanje strukture FRPa je heterogen i složen proces koji nastaje uslijed različitih mehanizama oštećenja, koji se iniciraju u unutrašnjosti materijala te propagiraju na različite razine (mikro-, mezo- i/ili makrorazina) [1]. Stoga je identificiranje mehanizama oštećenja unutar ovih materijala ključan element opisivanja ponašanja materijala do pojave loma.

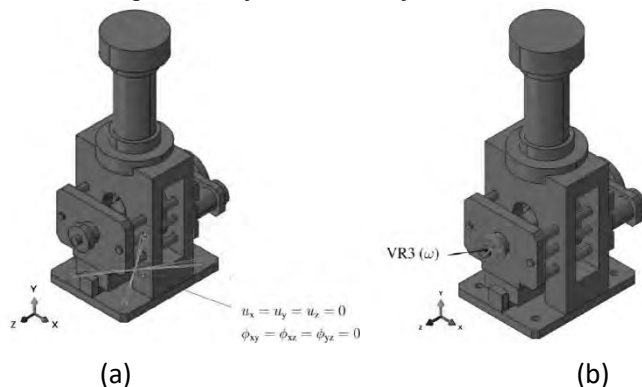
Računalna tomografija X-zrakama (eng. *X-ray computed tomography* – XCT) u posljednjih nekoliko desetljeća u području eksperimentalne mehanike omogućuje detaljan uvid u unutrašnjost materijala i procjenu oštećenja, a time i dobivanje novih spoznaja u znanosti o materijalima. Ova se metoda temelji na rekonstruiranju 3D volumena promatranog objekta iz zabilježenih 2D (rendgenskih) projekcija dobivenih pod različitim kutovima snimanja, a kontrast slike ovisi o razlikama u absorpciji X-zraka prilikom prolaska kroz ispitivani objekt [2]. Na ovaj je način moguće zabilježiti promjene u registriranim volumenima te pratiti razvoj kritičnih značajki mikrostrukture. Budući da je struktura FRPa heterogena, XCT svoju primjenu sve više nalazi u ispitivanju ovih kompozitnih materijala te omogućuje određivanje utjecaja mehanizama oštećenja, pukotina i šupljina na globalni odziv materijala [3]. Nadalje, u većini dosadašnjih istraživanja XCT je korišten za identifikaciju mehanizma loma i procjenu oštećenja FRPa putem *ex-situ* mehaničkih ispitivanja. No, provedene eksperimentalne kampanje ističu nedostatak ove strategije, s obzirom da je većina pukotina bila zatvorena te stoga nemjerljiva [4]. S druge strane, provedba *in-situ* eksperimentalnih testova unutar tomografa zahtjeva primjenu posebnih ispitnih uređaja koji omogućuju opterećivanje uzoraka tijekom skeniranja, a da pri tom ne ometaju proces skeniranja. Također, dostupni *in-situ* ispitni uređaji omogućuju jednoosna, monotona ispitivanja ispitnih uzoraka [3]. Međutim, većina inženjerskih konstrukcija podvrgnuta je vibracijama i drugim promjenjivim opterećenjima, što uzrokuje zamornu degradaciju materijalnih svojstava. Dakle, ciklička opterećenja su jedan od glavnih uzroka loma konstrukcijskih komponenti. Nadalje, predviđanje životnog vijeka i procjena S-N krivulja FRPa slijede iste metodologije kao i kod metalnih materijala, unatoč tome što se problemi zamora vlaknima ojačanih materijala značajno razlikuju od zamora metalnih materijala. Drugim riječima, tijekom cikličkih opterećenja FRP materijala se na različitim razinama istodobno javljaju različiti mehanizmi oštećenja, a njihova interakcija te propagiranje na makrorazinu uzrokuju lom inženjerskih konstrukcija [5]. S obzirom na trenutna ograničenja u predviđanju zamornog vijeka FRPa, puni potencijal ove klase materijala ostaje neiskorišten, a današnje FRP konstrukcije su i dalje predimenziorane. Stoga je u sklopu FULLINSPECT projekta, koji se bavi promatranjem inicijacije i propagacije pukotina te identifikacijom mehanizma oštećenja unutar FRPa, razvijena *in-situ* ciklička kidalica. Ovaj

ispitni uređaj omogućit će cikličko opterećivanje ispitnog uzorka unutar CT skenera, a time i prvi put promatranje mikrostrukture i interakcije oštećenje-deformacija na mikrorazini kako bi se mogla razumjeti fizikalna pozadina loma FRP ispitnih uzoraka.

Prilikom rada razvijene *in-situ* cikličke kidalice javljat će se vibracije koje mogu oštetiti rotacijski stol tomografa i/ili utjecati na kvalitetu zabilježenih projekcija. Stoga je u ovom radu izrađen pojednostavljeni model prilagođen za dinamičku analizu, a primjenom metode konačnih elemenata određene su glavne forme vibriranja predloženog ispitnog uređaja te izračunate sile koje djeluju na rotacijski stol tomografa u frekvencijskom rasponu od 1 do 100 Hz.

## 2 Razvijena *in-situ* ciklička kidalica

Pojednostavljeni model razvijene *in-situ* cikličke kidalice prikazan je na Slici 1. Predloženi uređaj koristi cijev izrađenu od polimetilmetakrilata (eng. *Polymethylmethacrylate* – PMMA) transparentnu za X-zrake koja povezuje gornji i donji dio kidalice. Vanjske dimenzije kidalice iznose  $211 \times 166 \times 456$  mm, dok masa kidalice iznosi otprilike 40 kg. Pogon kidalice smješten je u donjem djelu uređaja. Vlačno i tlačno opterećenje prenosi se na jednoosni ispitni uzorak preko osovine koja je pogonjena elektromotorom. Nadalje, posebnost ove kidalice je mogućnost promjene amplitude pomaka uzorka u intervalu od 1 mm. Također, predloženi uređaj je pomoću fiksnog dijela postolja vijejcima pričvršćen za rotacijski stol CT skenera, a predviđen je za frekvenciju rada do 50 Hz.



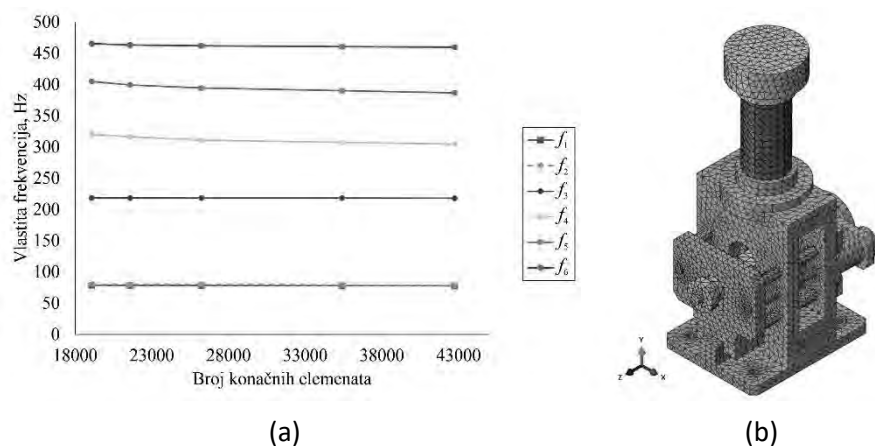
Slika 1. (a) Pojednostavljeni numerički model razvijene *in-situ* cikličke kidalice s označenim rubnim uvjetom uklještenja. (b) Rubni uvjet kutne brzine korišten u dinamičkoj analizi.

### 3 Numerička analiza cikličke kidalice

Kako bi se pojednostavio model te smanjilo vrijeme trajanja simulacija, analizom gibanja pojedinih komponenata, broj dijelova ispitnog uređaja reduciran je s 58 na 9 (tj. pojedini dijelovi su spojeni u jedan dio s obzirom da su međusobno u krutoj vezi). Proračunski model diskretiziran je tetraedarskim elementima drugog reda (C3D20). Pojedini dijelovi kidalice međusobno su povezani različitim kinematskim vezama unutar programskog paketa *Abaqus*. Svi dijelovi kidalice, osim ispitnog uzorka i cijevi, izrađeni su od čelika, dok je ispitni uzorak izrađen od polimera ojačanog staklenim vlaknima (eng. *Glass fiber reinforced polymer – GFRP*). Prilikom provođenja numeričkih simulacija uzete su sljedeće vrijednosti mehaničkih svojstava:  $E_{\text{čelik}}=210000$  MPa,  $\nu_{\text{čelik}}=0,3$ ,  $\rho_{\text{čelik}}=7850$  kg/m<sup>3</sup>,  $E_{\text{PMMA}}=3000$  MPa,  $\nu_{\text{PMMA}}=0,3$ ,  $\rho_{\text{PMMA}}=1208$  kg/m<sup>3</sup>,  $E_{\text{GFRP}}=1500$  MPa,  $\nu_{\text{GFRP}}=0,3$ ,  $\rho_{\text{GFRP}}=2100$  kg/m<sup>3</sup>. Nadalje, predviđeno je da je ispitni uređaj preko fiksnog dijela postolja vijcima pričvršćena za rotacijski stol CT skenera. Stoga su provrti za vijke kinematskom vezom (*Abaqus* opcija eng. *Coupling, Distributing*) spojeni s referentnom točkom na dnu kidalice. U toj je referentnoj točki zadan rubni uvjet uklještenja, kao što je prikazano na Slici 1. (a), te su u toj točki očitane reakcijske sile koje djeluju na rotacijski stol tomografa.

#### 3.1 Frekvencijska analiza

Kako bi se odredile vlastite frekvencije razvijene *in-situ* cikličke kidalice, provedena je modalna analiza. Proračunski model diskretiziran je različitim brojem C3D20 konačnih elemenata (KE), tj. 19078, 21566, 26238, 35400 i 42728 KE kako bi se provjerila konvergencija rješenja, kao što je prikazano na Slici 3. (a). Budući da prve tri vlastite frekvencije brzo konvergiraju, na Slici 3. (a) prikazana je i konvergencija rješenja četvrte, pete i šeste vlastite frekvencije. Proračunski model diskretiziran pomoću 42728 konačnih elemenata korišten je u provedbi dinamičkih analiza, s obzirom da je za taj model dobiveno konvergirano rješenje vlastitih frekvencija. Osim toga, na Slici 3. je vidljivo da je iznos prve vlastite frekvencije ( $f_1=77,8$  Hz) iznad predviđene frekvencija rada kidalice (50 Hz). Prve tri vlastite frekvencije kidalice odnose se na savijanje i torziju PMMA cijevi, stoga se ovaj dio pokazao najslabijom komponentom predloženog ispitnog uređaja.



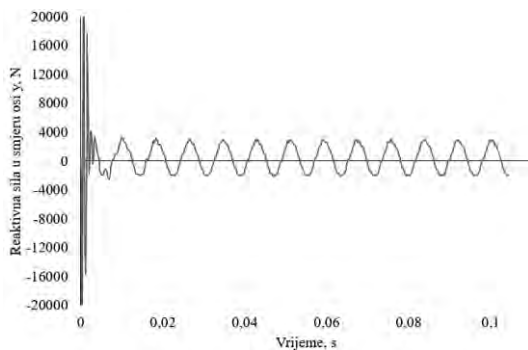
Slika 3. (a) Konvergencija rješenja vlastitih frekvencija. (b) Konvergirana mreža KE.

### 3.2 Dinamička analiza kidalice

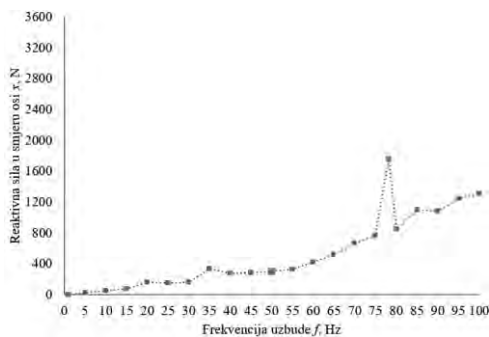
Dinamička analiza kidalice provedena je korištenjem *Dynamic, Implicit* opcije u *Abaqus*-u. Budući da je cilj ovog rada odrediti sile koje djeluju na rotacijski stol CT skenera s obzirom na kružne frekvencije rada kidalice, opterećenje je zadano na vratilo u obliku kutne brzine (Slika 1. (b)). Osim toga, unutar svojstva materijala dodano je i Rayleigh-evo prigušenje koje se modelira kao linearna kombinacija prigušenja proporcionalna matrici mase  $\mathbf{M}$  te matrici krutosti  $\mathbf{K}$  [6]:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (1)$$

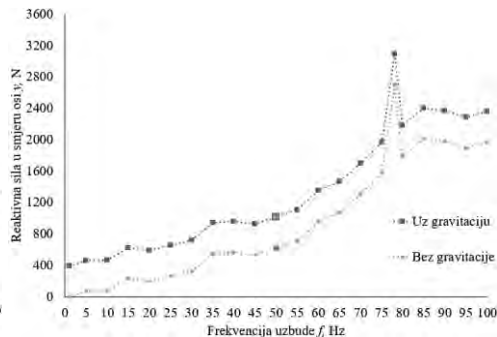
pri čemu su iznosi koeficijenata  $\alpha$  i  $\beta$  izračunati na temelju prve dvije vlastite frekvencije te iznose  $9,9 \text{ rad/s}$  i  $4,03 \cdot 10^{-5} \text{ s/rad}$ . Provedenim numeričkim simulacijama pokrivena je frekvencijska domena od 1 do 100 Hz, a promatran je najkonzervativniji slučaj kada je amplituda pomaka ispitnog uzorka 1 mm. Na Slici 4. (a) prikazan je odziv reaktivne sile u smjeru osi  $y$  (RF2) u ovisnosti o vremenu za frekvenciju uzbude od 77,8 Hz ( $f_1$ ). Vidljivo je da na početku djelovanja uzbude dolazi do naglog porasta iznosa sile uslijed načina zadavanja opterećenja, koji se nakon nekoliko ciklusa stabilizira. U realnom modelu to neće biti slučaj jer će se zakret vratila regulirati motorom. U daljnjoj analizi u obzir su uzeti maksimalni iznosi stacionarnog odziva reaktivne sile. Nadalje, reaktivna sila u smjeru osi  $z$  dva je reda veličine manja od iznosa reaktivnih sila u smjeru osi  $x$  (RF1) i  $y$  (RF2), stoga je zanemarena. Budući da ne postoji eksplicitan iznos maksimalne sile koja smije djelovati na rotacijski stol CT skenera, proizvoljno je odabran iznos od 1000 N.



(a)



(b)



(c)

Slika 4. (a) Ovisnost reaktivne sile RF2 u ovisnosti o vremenu za frekvenciju uzbude od 77,8 Hz. (b) Promjena reaktivne sile RF1 ovisno o frekvenciji uzbude. (c) Promjena reaktivne sile RF2 ovisno o frekvenciji uzbude.

Na slikama 4. (b)-(c) vidljivo je kako porastom frekvencije rastu iznosi reaktivnih sila, a koje najveći iznos postižu u rezonanciji, nakon čega dolazi do pada. Ponovnim rastom frekvencije uzbude iznosi sila rastu. Na navedenim slikama su crvenim kvadratićima označeni iznosi sila koji se javljaju pri frekvenciji uzbude od 50 Hz (tj. maksimalni iznos uzbude kojom će raditi ciklička kidalica). Iznos sile u smjeru osi  $x$  pri frekvenciji od 50 Hz manji je od dopuštenih 1000 N, dok je iznos sile u smjeru osi  $y$  iznad dopuštenih 1000 N. No, bitno je naglasiti da se radi o slučaju kada je amplituda pomaka 1 mm, što u realnom slučaju nikada neće biti ostvareno pri frekvenciji od 50 Hz. Naime, amplituda pomaka od 1 mm namijenjena je za frekvencije uzbude manje od 10 Hz.

## 4 Zaključak

U ovom radu je provedena numerička analiza pojednostavljenog modela *in-situ* cikličke kidalice namijenjene za ispitivanje materijala unutar CT skenera. Proučavan je

najkonzervativniji slučaj opterećivanja ispitnih uzoraka kada amplituda istih iznosi 1 mm. Prvo su određene vlastite frekvencije predloženog ispitnog uređaja. Potom su provođenjem niza simulacija u frekvencijskom intervalu od 1 do 100 Hz određene sile kojima ovaj uređaj djeluje na rotacijski stol tomografa. Najveći iznosi sile javljaju se u rezonanciji, dok su sile prilikom uzbudne frekvencije od 50 Hz otprilike jednake dopuštenim silama od 1000 N. Ako se u obzir uzme da je proučavan najkonzervativniji slučaj, slijedi zaključak da predloženi uređaj zadovoljava potrebni kriterij vezan uz maksimalni iznos sile od 1000 N.

## Zahvale

Ovaj rad izrađen je u sklopu FULLINSPECT projekta podržanog od Hrvatske zaklade za znanost (UIP-2019-04-5460 Grant).

## Literatura

- [1] Nguyen, VD, Wu, L., Noels, L.; A micro-mechanical model of reinforced polymer failure with length scale effects and predictive capabilities. Validation on carbon fiber reinforced high-crosslinked RTM6 epoxy resin; *Mechanics of Materials*; 2019; 133; 193-213.
- [2] Buljac, A., Jailin, C., Mendoza A., Neggers, J., Tailandier-Thomas, T., Bouterf, A. *et al.*; Digital volume correlation: Review of progress and challenges; *Experimental Mechanics*; 2018; 58; 661-708.
- [3] Brault, R., Germaneau, A., Dupré, J., Doumalin, P., Mistou, S., Fazzini, M.; In-situ analysis of laminated composite materials by X-ray micro-computed tomography and Digital Volume Correlation; *Experimental Mechanics*; 2013; 53; 1143-51.
- [4] Vrgoč, A., Tomičević, Z., Smaniotto, B., Hild, F.; Application of different imaging techniques for the characterization of damage in fiber reinforced polymer, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*; 2021.
- [5] Montesano, J., Selezneva, M., Levesque, M., Fawaz, Z.; Modeling fatigue damage evolution in polymer matrix composite structures and validation using in-situ digital image correlation; *Composite Structures*; 125; 354-361.
- [6] Abaqus Analysis User's Guide, Dassault Systemes; 2016.



# Numerička analiza i optimizacija dizajna koronarnog stenta

Vrtovšnik, D.<sup>1</sup>, Brčić, M.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovome radu opisana je i provedena numerička analiza i optimizacija modela koronarnog stenta, za odabrani materijal u radnim uvjetima. U prvom djelu rada na konačnoelementnom modelu dvije početne geometrije provedena je analiza naprezanja stenta prilikom njegove ugradnje. Nakon početne analize, s ciljem smanjenja ukupnih naprezanja u stentu optimiziran je oblik obje geometrije stenta. Konačno, nakon postupka optimizacije, provedena je ponovna analiza naprezanja u stentu, ovaj puta za optimizirane geometrije. Rezultati dobiveni u ovome radu dobar su temelj za daljnja istraživanja koja potencijalno mogu rezultirati poboljšanjem postojećih oblika koronarnog stenta.

**Ključne riječi:** stent, koronarni stent, optimizacija modela, numerička analiza, metoda konačnih elemenata

---

<sup>1</sup> **Domagoj Vrtovšnik, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: dvrtovsnik@riteh.hr

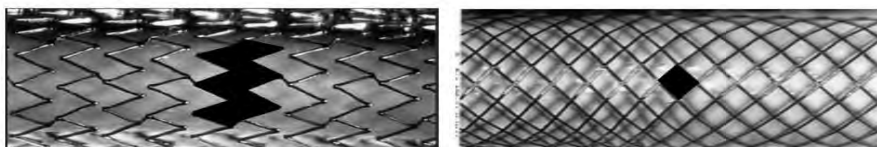
<sup>2</sup> **Izv. prof. dr. sc. Marino Brčić, dipl. ing.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51000 Rijeka, e-mail: mbrbic@riteh.hr

## Uvod

Kardiovaskularne bolesti značajan su javnozdravstveni problem diljem svijeta. Koronarna bolest srca ili ishemijska bolest srca je vodeći uzrok smrti u svijetu. Karakterizira je akutno stanje, propadanje srčanog mišića ili infarkt miokarda. Učinkovit način liječenja ove bolesti je ugradnja metalne proširnice, stenta [1]. Potreba za stentom javlja se kada formirani aterosklerotski plak onemogućuje normalan protok krvi kroz krvnu žilu. Funkcija stenta vraćanje je normalnog promjera začepljenoj krvnoj žili. Stent se postupkom perkutane koronarne intervencije ugrađuje u začepljenu arteriju te se uspostavlja normalan protok krvi. Postupak se sastoji od tri koraka: kontrakcije, ekspanzije i relaksacije. Numerički proračun proveden u ovom radu obuhvaća sva tri koraka perkutane koronarne intervencije. Konačnoelementni proračun proveden je za dva najčešća tipa geometrije stenta; stent s otvorenom čelijskom izvedbom i stent sa zatvorenom čelijskom izvedbom. Korišteni materijal u ovom radu je legura CoCr L605 koja je najkorištenija za izradu stenta ovakvog tipa. Provedeni numerički proračun obuhvaća sva tri koraka perkutane koronarne intervencije za obje početne geometrije stenta. Nakon postupka optimizacije oblika geometrije stenta, numerička analiza je također provedena na novim, optimiziranim geometrijama.

## Početna numerička analiza

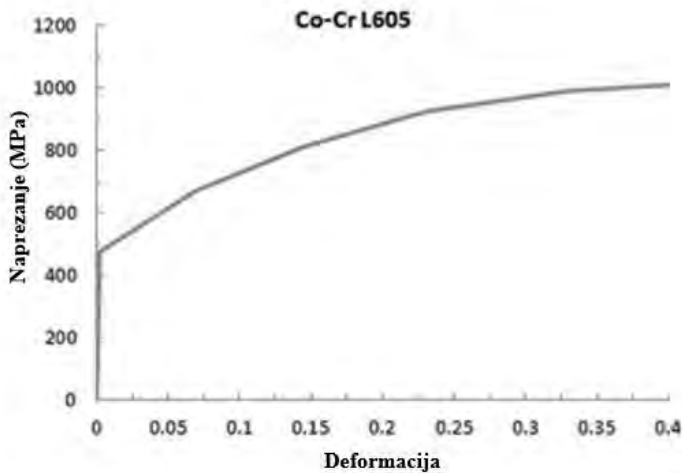
Kao što je u uvodu navedeno, rad se bavi numeričkom analizom naprežanja u stentu prilikom postupka perkutane koronarne intervencije. Kada govorimo o tipovima geometrije stenta, razlikujemo dva tipa: tip s otvorenom čelijskom izvedbom i tip s zatvorenom čelijskom izvedbom. Oba tipa geometrije prikazana su na slici ispod.



Slika 1. Stent s otvorenom čelijskom izvedbom (lijevo) i stent s zatvorenom čelijskom izvedbom (desno)

Postupak perkutane koronarne intervencije sastoji se od tri koraka. U koraku kontrakcije stent se s početnog promjera od 2 mm sužava na promjer od 1,8 mm što predstavlja promjer balona za ugradnju. Nakon koraka kontrakcije, slijedi korak ekspanzije prilikom kojeg se stent širi na prosječni promjer koronarne arterije od 4 mm. U koraku relaksacije zaostala naprežanja te plastične deformacije imaju ulogu zadržavanja stenta u proširenoj konfiguraciji kako bi se ispunila njegova funkcija, odnosno proširenje promjera arterije s ciljem ponovne uspostave normalnog krvotoka kroz arteriju.

Materijal korišten u ovoj analizi je legura CoCr L605 koja predstavlja standard u izradi stentova, a čija su svojstva prikazana dijagramom naprežanje-deformacija na slici 2 i tablicom 1.

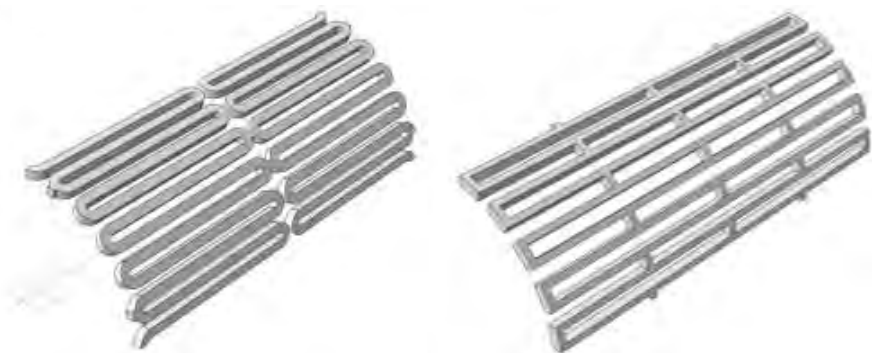


Slika 2. Dijagram naprezanje-deformacija za leguru CoCr L605 [2]

| Materijal | Modul elastičnosti (MPa) | Poissonov broj | Granica tečenja (MPa) |
|-----------|--------------------------|----------------|-----------------------|
| CoCr L605 | 243000                   | 0,3            | 470                   |

Tablica 1. Osnovne karakteristike materijala.

Na slici 3. prikazane su geometrije korištene u analizama, modelirane u SolidWorksu te segmentirane s obzirom na simetričnost. Bitno je napomenuti kako su geometrije modelirane po uzoru na postojeće geometrije i ne predstavljaju realne reprodukcije.



Slika 3. Geometrije stenta korištene u numeričkim analizama

Za obje analize postupak je isti; provodi se numerička statička analiza na oba konačnolementna modela stenta u sva tri prethodno opisana. Svrha ovih početnih analiza je

dobivanjem polja naprezanja u stentu, kako bi se lakše definirao optimizacijski postupak. U nastavku su dani rezultati početne analize za obje geometrije stenta.



Slika 4. Naprezanja na stentu sa zatvorenom ćelijskom izvedbom u koraku kontrakcije



Slika 5. Naprezanja na stentu sa otvorenom ćelijskom izvedbom u koraku ekspanzije

| <b>Stent s otvorenom ćelijskom izvedbom</b> | Naprezanje (MPa) | <b>Stent sa zatvorenom ćelijskom izvedbom</b> | Naprezanje (MPa) |
|---|------------------|---|------------------|
| Kontrakcija                                 | 520              | Kontrakcija                                   | 508              |
| Ekspanzija                                  | 800              | Ekspanzija                                    | 645              |
| Relaksacija                                 | 425              | Relaksacija                                   | 325              |

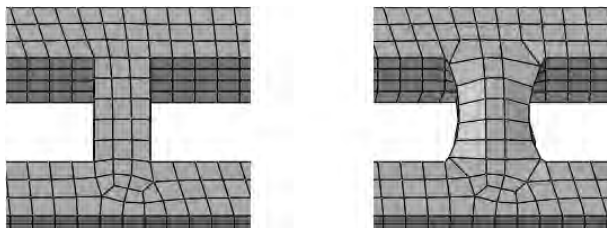
Tablica 2. Rezultati analize naprezanja obje promatrane geometrije stenta

## Optimizacija geometrije i ponovljena analiza

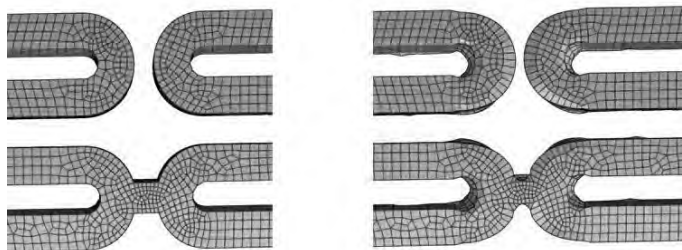
Nakon što je provedena početna numerička analiza te su ustanovljena mjesta najvećih naprezanja u stentu pristupa se postupku optimizacije geometrije s ciljem smanjenja naprezanja u tim zonama. Bitno je naglasiti da naprezanja ne smiju pasti ispod granice tečenja materijala zbog toga što je za održavanje stenta u raširenom obilku ključno postići plastifikaciju presjeka.



Slika 6. Zone na geometrijama stenta gdje se provodi optimizacija  
Kao korak relevantan za optimizaciju odabran je korak ekspanzije stenta budući da se u njemu javljaju najveća naprezanja. Rezultat optimizacije dan je na slikama 7 i 8.

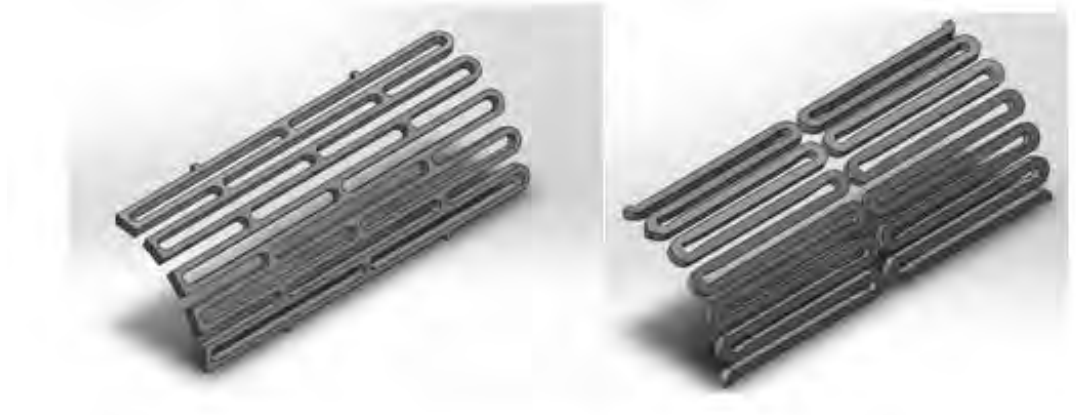


Slika 7. Geometrija stenta s zatvorenom ćelijskom izvedbom prije (lijevo) i nakon optimizacije (desno)



Slika 8. Geometrija stenta s otvorenom ćelijskom izvedbom prije (lijevo) i nakon optimizacije (desno)

Prema rezultatima optimizacije kreirane su nove geometrije prikazane na slici 9.



Slika 10. Nove geometrije kreirane nakon optimizacijskog postupka

Nakon optimizacije geometrije ponavlja se početna analiza, ovog puta na novim geometrijama. U tablicama 3 i 4 prikazana je usporedba rezultata numeričke analize, za obje geometrije, prije i nakon optimizacijskog postupka.

| <b>Korak</b> | Naprezanje prije optimizacije (MPa): | Naprezanje nakon optimizacije (MPa): | Razlika u naprezanju (%): |
|--------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
| Kontrakcija: | 520                                  | 500                                  | 4                         |
| Ekspanzija:  | 800                                  | 595                                  | 25,63                     |
| Relaksacija: | 425                                  | 335                                  | 21,18                     |

Tablica 3. Usporedba rezultata numeričke analize naprezanja stenta s zatvorenom čelijskom izvedbom prije i nakon optimizacije

| <b>Korak</b> | Naprezanje prije optimizacije (MPa): | Naprezanje nakon optimizacije (MPa): | Razlika u naprezanju (%): |
|--------------|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
| Kontrakcija: | 508                                  | 508                                  | 0                         |
| Ekspanzija:  | 645                                  | 550                                  | 14,73                     |
| Relaksacija: | 375                                  | 245                                  | 33,78                     |

Tablica 4. Usporedba rezultata numeričke analize naprezanja stenta s otvorenom čelijskom izvedbom prije i nakon optimizacije

## Zaključak

U radu je dana numerička analiza dva karakteristična tipa geometrije stenta, za zadani materijal u radnim uvjetima. Numerička analiza simulacija je postupka ugradnje stenta, odnosno postupka perkutane koronarne intervencije. Nakon početnih numeričkih analiza, proveden je optimizacijski postupak s ciljem smanjenja maksimalnih naprezanja u stentu. Kako bi se potvrdila uspješnost optimizacije geometrije, numerička analiza je ponovljena s optimiziranim geometrijama.

Na temelju rezultata početne analize određene su zone geometrije u kojima se javljaju najveća naprezanja te je prema tome proveden optimizacijski postupak. Iz rezultata se zaključuje da su obje geometrije uspješno poboljšane zbog toga što su maksimalna naprezanja smanjena čime je cilj optimizacije ispunjen.

Geometrije stenta dobivene u ovome radu još uvijek nisu pogodne za proizvodnju. Stent je u radnim uvjetima podvrgnut i drugim tipovima opterećenja, koji u ovom radu nisu razmatrani. Unatoč tome, ovaj rad predstavlja dobar temelj za daljnja istraživanja i razvoj novih geometrija koronarnih stentova.

## Zahvale

Ovaj rad je financiralo Sveučilište u Rijeci projektom broj uniri-tehnic-18-37.

## Literatura

[1]

[https://www.cybermed.hr/centri\\_a\\_z/srcani\\_udar\\_infarkt\\_miokarda/koronarni\\_stent](https://www.cybermed.hr/centri_a_z/srcani_udar_infarkt_miokarda/koronarni_stent), s Interneta, 19.siječanj 2021.

[2] Schiavone, A., Zhao, L.: A study of balloon type, system constraint and artery constitutive model used in finite element simulation of stent deployment, 2015.



# Numeričko modeliranje visokoučinkovitog zavarivanja debelih ploča

Vukovojac, M.<sup>1</sup>, Jalušić, B.<sup>2</sup>, Perić, M.<sup>3</sup>, Skozrit, I.<sup>4</sup> i Tonković, Z.<sup>5</sup>

## Sažetak

Zavarivanje je jedan od najraširenijih postupaka spajanja konstrukcijskih elemenata gledano s aspekta jednostavnosti i troškova izrade. Posljednjih godina industrija traži načine kako povećati učinkovitost nekih od postojećih postupaka zavarivanja debelih ploča, pri čemu je cilj povećati depozit rastaljenog metala u jedinici vremena. S obzirom da zavarivanjem dolazi do nastanka zaostalih naprezanja i deformacija iste je potrebno predvidjeti, no eksperimentalna ispitivanja su skupa i dugotrajna pa se sve više razvijaju i koriste numeričke simulacije kao alternativni pravac. U tu svrhu razvijena je računalna Abaqus Welding Interface (AWI) metoda koja olakšava izradu numeričkih modela koji se u ovom radu koriste za provedbu toplinskih i mehaničkih analiza. U radu je provedeno numeričko modeliranje procesa zavarivanja sa zakopanim električnim lukom dviju debelih sučeono zavarenih čeličnih ploča primjenom AWI metode. U usporedbi s klasičnom metodom modeliranja zavarivanja, AWI osim skraćivanja vremena izrade modela, skraćuje i samo trajanje analize što ga čini pogodnim za primjenu na složenim konstrukcijama.

**Ključne riječi:** zavarivanje zakopanim lukom, debelostijene ploče, numeričko modeliranje, Abaqus Welding Interface (AWI)

---

<sup>1</sup> **Marin Vukovojac, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: marin.vukovojac@fsb.hr

<sup>2</sup> **Dr.sc. Boris Jalušić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: boris.jalusic@fsb.hr

<sup>3</sup> **Dr.sc. Mato Perić, dipl. ing.**, Bestprojekt, Biro za energetiku i strojarsku tehniku, Petrovaradinska 7/7, 10000 Zagreb, e-mail: mato.peric@fsb.hr

<sup>4</sup> **Doc.dr.sc. Ivica Skozrit, dipl. ing.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: ivica.skozrit@fsb.hr

<sup>5</sup> **Prof.dr.sc. Zdenko Tonković, dipl. ing.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: zdenko.tonkovic@fsb.hr

## 1 Uvod

Zavarivanje je jedan od najrasprostranjenijih i najjeftinijih proizvodnih postupaka spajanja dvaju ili više osnovnih materijala izrađenih od metala. Posljednjih se godina nastoji povećati učinkovitost nekih od postojećih postupaka zavarivanja, pri čemu je cilj smanjiti potrošnju dodatnog materijala i/ili zaštitnih plinova, a povećati depozit rastaljenog metala u jedinici vremena bez velike degradacije mehaničkih svojstava i kvalitete zavarenog spoja. To je posebno izraženo u industrijama u kojima je nužno zavarivati dijelove većih debljina.

Dosad se zavarivanje debelostijenih konstrukcija u većini slučajeva provodilo u više prolaza, što se osim velikog utroška vremena te resursa zbog pripreme spoja manifestira i unosom topline u više ciklusa. To rezultira lokalnim promjenama mikrostrukture osnovnog materijala u zoni utjecaja topline i pogrubljivanjem zrna pri većim unosima topline, što nepovoljno utječe na mehanička svojstva zavara. Naravno, postoje i određeni postupci zavarivanja pomoću kojih je moguće zavariti ploče u jednom prolazu, no oni ne daju zadovoljavajuće rezultate zbog velikog utroška vremena za pripremu spoja, nezadovoljavajuće mikrostrukture i distorzije izvedenog zavarenog spoja te velikog unosa topline.

Pred par godina japanski znanstvenici su razvili visokoučinsku tehnologiju zavarivanja sa zakopanim električnim lukom (eng. *buried arc*) pri čemu se zavarivanje debelostijenih konstrukcija najčešće može izvršiti u jednom prolazu [1]. Ovim postupkom je moguće postići potpunu penetraciju iz razloga što se električni luk i vrh rastaljene žice nalaze u volumenu rastaljenog metala [1, 2]. Zbog nedostatka podataka o primjenjivosti ove metode, rezultata mehaničkih ispitivanja materijala zavara te numeričkih modela unosa topline zakopanim električnim lukom nužno je eksperimentalno i numerički istražiti ovaj postupak.

U posljednje vrijeme sve više se razvijaju i koriste numeričke simulacije kako bi zamijenile skupa i dugotrajna eksperimentalna mjerenja. One se tako primjenjuju i na području zavarivanja s ciljem predviđanja zaostalih naprezanja i deformacija spoja nakon provođenja istog. Numeričke simulacije vezane uz zavarivanje se najčešće sastoje od toplinske i mehaničke analize pri čemu se rješenje toplinske analize, u obliku temperaturnog polja, unosi u mehaničku analizu kako opterećenje. S obzirom na način i redoslijed izvođenja tih simulacija postoje potpuno spregnute i sekvencijalno spregnute toplinsko-mehaničke analize [4]. Najčešće tehnike za simulaciju depozita dodatnog materijala su tehnika rađanja elemenata te tehnika fiktivnih elemenata [4], pri čemu se toplina unosi modeliranjem toplinskog toka [3] ili zadavanjem Dirichletovih rubnih uvjeta temperature zavara [5]. Na potonjem načinu radi Abaqus Welding Interface (AWI) metoda koja omogućava jednostavnije i brže modeliranje zavara u odnosu na klasičnu metodu koja koristi unos toplinskog toka [5]. AWI koristi sekvencijalno spregnutu toplinsko-mehaničku analizu pri čemu se depozit dodatnog materijala modelira tehnikom rađanja elemenata. Rad predstavlja nastavak istraživanja autora u području numeričkog modeliranja procesa zavarivanja sa zakopanim električnim lukom primjenom AWI metode.

## 2 Numerički model

Polazna točka izrade numeričkog modela su prethodna istraživanje autora ovog rada prikazanih u [3]. U navedenom radu su provedena eksperimentalna istraživanja i numeričko modeliranje procesa zavarivanja sa zakopanim električnim lukom dviju debelih sučeoно završenih čeličnih ploča. Ovdje je primjenjena klasičnih metoda za modeliranje postupka zavarivanja kod koje se toplina unosi modeliranjem toplinskog toka. Cilj je na osnovi prethodno navedenog rada i Abaqus Welding Interface (AWI) metode napraviti numerički manje zahtjevan model zavarivanja koji bi bilo moguće primijeniti na složene konstrukcije.

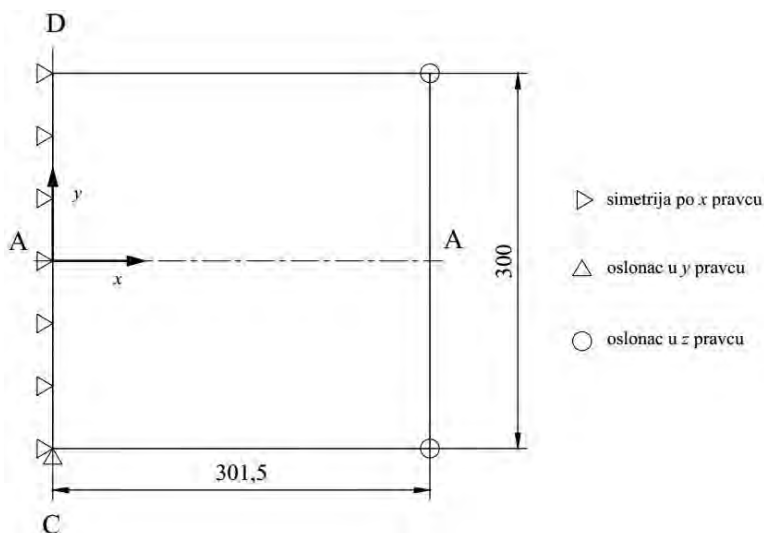
Numeričko istraživanje je provedeno na dva modela, jedan s dvije ploče ukupne duljine i širine 603 mm x 300 mm te 20 mm debljine [3], dok je u drugom modelirana samo jedna ploča pri čemu je korišten rubni uvjet simetrije. Uz pretpostavku da osnovni i dodatni materijal imaju ista toplinska i mehanička svojstva, napravljena su dva ista modela materijala od niskolegiranoг čelika S355J2+N pri čemu je jedan definiran kao osnovni materijal, a drugi kao materijal zavara. Kod modeliranja materijala korištena su temperaturno zavisna svojstva materijala, pri čemu je isti modeliran kao elastično-idealno plastičan [3]. S obzirom da se radi o zavarivanju niskougljičnog čelika, u radu nije razmatran utjecaj faznih transformacija materijala na polje zaostalih naprezanja i deformacija jer on za niskougljične čelike mali [6].

Mreža se u modelu s jednom pločom sastoji od 24000 konačnih elemenata, a napravljena je po uzoru na literaturu [3] s malim varijacijama kako bi se mogla pratiti raspodjela temperature u vremenu s obzirom na položaj termoparova. Duljina zavara je 300 mm, a brzina zavarivanja je 300 mm/min što znači da će po duljini zavara u svakoj sekundi biti umetnut zagrijani element duljine 5 mm. Odmah uz zavar, tj. u zoni utjecaja topline korištena je vrlo fina mreža kako bi se bolje mogla opisati nelinearnost samog procesa, dok je ostatak modela diskretiziran grubljom mrežom u svrhu smanjenja broja stupnjeva slobode modela te ubrzanja samog procesa računanja [3].

U AWI metodi se modeliranje stvaranja materijala ostvaruje tehnikom rađanja elemenata kako u toplinskoj tako i u mehaničkoj analizi. AWI sam izrađuje modele za toplinsku i mehaničku analizu, tj. stvara korake (engl. *step*), toplinske rubne uvjete, temperaturna polja te pripadne datoteke za toplinsku i mehaničku analizu. Na taj način je smanjeno vrijeme „ručne“ pripreme modela. Za razliku od klasične metode gdje se simulacija unosa topline vrši zadavanjem toplinskog toka koji je moguće izračunati iz parametara zavarivanja, u AWI metodi je potrebno zadati temperaturu električnog luka što i nije tako jednostavno, tj. zahtjeva iterativni postupak određivanja. Također je potrebno definirati simetriju, ako se model sastoji samo od polovice predviđenog spoja. Također, potrebno je zadati brzinu zavarivanja, odnosno duljinu komada zavara koji će biti deponiran u jedinici vremena u sklopu tehnike rađanja elemenata. Nadalje, definiraju se površine preko kojih se konvekcijom i radijacijom toplina unešena zavarivanjem odvodi u okoliš. Radijacija će biti značajna u području zavara i zoni utjecaja topline gdje su najviše temperature, pri čemu je faktor emisivnosti  $\varepsilon = 0,9$ , dok će u preostalim dijelovima biti izražena konvekcija, pri čemu je koeficijent prijelaza topline  $h_c = 10 \text{ Wm}^{-2}\text{K}$  [3]. U posljednjem koraku toplinske analize potrebno je zadati hlađenje koje se provlači kroz toplinsku, a zatim i kroz mehaničku analizu. Potrebno je zadati iste površine kao i kod kreiranja zavara preko kojih će doći do prijenosa

topline konvekcijom i zračenjem. Prije nego što AWI sam kreira zadatke potrebno je zadati tip konačnih elemenata kako za toplinsku analizu, tako i za mehaničku. U toplinskoj analizi korišteni su trodimenzijski konačni elementi s osam čvorova, tj. DC3D8, dok su u mehaničkoj analizi korišteni trodimenzijski konačni elementi C3D8I [3]. Broj konačnih elemenata korištenih u mehaničkoj analizi jednak je broju elemenata korištenih u toplinskoj analizi.

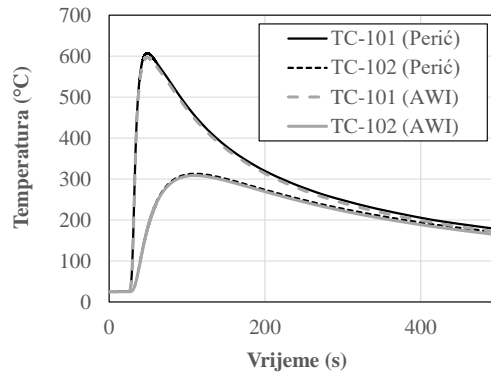
S obzirom da je u uvodnom poglavlju rečeno kako AWI koristi sekvencijalno spregnutu toplinsko-mehaničku analizu, potrebno je po završetku toplinske, i prije pokretanja mehaničke analize, zadati mehaničke rubne uvjete. Iako su ploče prilikom postupka zavarivanja bile razmaknute i slobodno oslonjene [3], u mehaničkoj je analizi potrebno zadati rubne uvjete kako se model ne bi gibao kako kruto tijelo u prostoru. Kod modela u kojem su korištene dvije ploče zadani su isti rubni uvjeti kao i u literaturi [3], dok su kod modela s jednom pločom zadani rubni uvjeti prikazani na slici 1.



Slika 12. Mehanički rubni uvjeti modela s jednom pločom

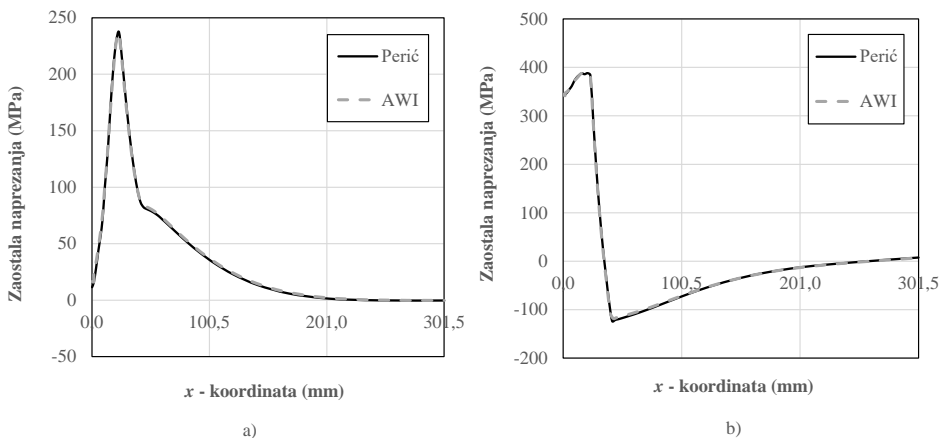
### 3 Rezultati

Prvi korak verifikacije numeričkog modela napravljenog u AWI metodi je bila usporedba raspodjela temperatura u prvih 500s nakon početka zavarivanja na mjestima termoparova TC-101 i TC, koji su udaljeni 15mm i 35mm od osi  $y$ , a leže na presjeku A-A u srednjoj ravnini debljine ploče. Na slici 2 je prikazana usporedba rezultata s klasičnom metodom za modeliranje postupka zavarivanja [3]. Kao što je vidljivo sa slike, dobiveno je vrlo dobro poklapanje rezultata.

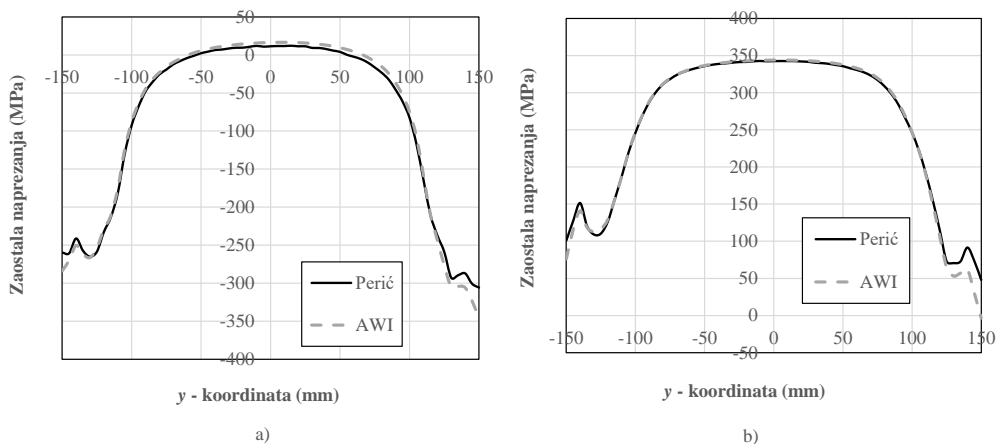


Slika 13. Raspodjela temperatura na mjestima termoparova za prvih 500s

Što se tiče zaostalih naprezanja, Perić i suradnici [3] su postigli dobra poklapanja rezultata numeričke simulacije zavarivanja s eksperimentalno izmjerenim zaostalim naprezanjima s donje strane zavarenog spoja. Na slikama 3 i 4 dana je usporedba numeričkih rezultata zaostalih naprezanja iz literature [3] s rezultatima numeričke simulacije zavarivanja provedene pomoću AWI metode. Slike prikazuju naprezanja duž presjeka A-A i C-D sa slike 1, pri čemu su duž presjeka A-A prikazani rezultati samo za polovicu zavarenog spoja, tj. za model u kojem je korišten rubni uvjet simetrije.



Slika 14. Raspodjela zaostalih naprezanja za polovicu spoja u pravcu zavarivanja duž presjeka A-A (slika 1): a) transverzalna naprezanja S22, b) longitudinalna naprezanja S11



Slika 15. Raspodjela zaostalih napreznja u pravcu zavarivanja duž presjeka C-D (slika 1):  
a) transverzalna napreznja S11, b) longitudinalna napreznja S22

Jasno je vidljivo da se rezultati longitudinalnih i transverzalnih napreznja duž presjeka A-A vrlo dobro poklapaju, dok su kod longitudinalnih i transverzalnih napreznja duž presjeka C-D također dobivena vrlo dobra poklapanja uz mala odstupanja na krajevima spoja. Na prvi pogled bi se reklo da do razlike dolazi zbog rubnih uvjeta, no oba modela napravljena s AWI metodom daju potpuno istu raspodjelu zaostalih napreznja.

#### 4 Zaključak

U prikazanom radu je primjenom AWI metode iz programskog paketa Abaqus provedeno numeričko modeliranje procesa zavarivanja sa zakopanim električnim lukom dviju debelih sučeono zavarenih čeličnih ploča. Rezultati su uspoređeni s klasičnom metodom modeliranja zavarivanja te je dobiveno vrlo dobro poklapanje. Pritom AWI metoda pokazuje znatne prednosti u odnosu na klasičnu metodu. Vrijeme pripreme modela, kao i računalno vrijeme trajanja simulacije puno je manje uz zadržavanje zadovoljavajuće točnosti. Nedostatak AWI metode je potreba odabira ulazne temperature zavara čiju ovisnost o parametrima zavarivanja, mreži konačnih elemenata, mehaničkim karakteristikama osnovnog i dodatnog materijala, geometrije zavara i slično, treba detaljnije istražiti. Unatoč tome, radi svoje učinkovitosti AWI metoda predstavlja snažan alat za numeričku simulaciju procesa zavarivanja složenijih konstrukcija.

#### Zahvale

Znanstveno istraživanje sufinancirano je sredstvima Europske unije kroz Europski fond za regionalni razvoj, Operativni program Republike Hrvatske “Konkurentnost i kohezija” za razdoblje 2014.- 2020., projekt “Unaprjeđenje tehnologije visokoučinskog zavarivanja”, ImproWE - KK.01.1.1.07.0076.

## Literatura

- [1] Baba, H., Era, T., Ueyama, T., Tanaka, M.; Single pass full penetration joining for heavy plate steel using high current GMA process; *Welding in the World*; 2017.; 61(5); 963-969.
- [2] Baba, H., Honda, R., Era, T., Komen, H., Tanaka, M., Terasaki, H.; Microstructure observation of high-current buried-arc welded joint; *Quarterly journal of the Japan welding society*; 2020.; 38(2); 11s-15s.
- [3] Perić, M., Garašić, I., Tonković, Z., Vuherer, T., Nižetić, S., Dedić-Jandrek, H.; Numerical prediction and experimental validation of temperature and residual stress distributions in buried-arc welded thick plates; *International journal of energy research*; 2019.; 43(8); 3590-3600.
- [4] Yang, Y. P.; Recent advances in the prediction of weld residual stress and distortion - Part 1; *Welding journal*; 2021.; 100(5); 151S-170S.
- [5] Seleš, K., Perić, M., Tonković, Z.; Numerical simulation of a welding process using a prescribed temperature approach; *Journal of constructional steel resesarch*; 2018.; 145; 49-57.
- [6] Deng, D.; FEM prediction of welding residual stress and distortion in carbon steel considering phase transformation effects; *Materials & design*; 2009.; 30(2); 359-366.



# Ispitivanje osjetljivosti promjene geometrijskih značajki ispitnog uzorka na raspodjelu posmičnih deformacija

Zaplatić, A.<sup>1</sup>, Tomičević, Z.<sup>2</sup>, Vrgoč, A.<sup>3</sup> i Hild, F.<sup>4</sup>

## Sažetak

Vlaknima ojačani polimeri ističu se kao adekvatna zamjena za konvencionalne inženjerske materijale u mnogim konstrukcijama. Međutim, ograničavajuća predvidljivost mehanizama oštećenja te konačnog loma kompozitnih materijala rezultira predimenzioniranim inženjerskim konstrukcijama. Stoga se provode serije eksperimentalnih ispitivanja u svrhu identifikacije i karakterizacije mehanizama oštećenja te kvantifikacije degradacije krutosti kod kompozita ojačanih vlaknima. Štoviše, s ciljem sveobuhvatne karakterizacije kompozitnih materijala uslijed narinutog opterećenja primjenjuju se napredne nerazorne metode ispitivanja među kojima se posebno ističe računalna tomografija budući da omogućuje uvid u mikrostrukturu materijala na površini i unutar promatranog objekta.

U ovom radu predložena je geometrija ispitnog uzorka za in-situ smična ispitivanja polimera ojačanih staklenim vlaknima. Uzorak je konstruiran sa dva zarez u sredini mjernog područja radi postizanja homogene raspodjele posmičnih deformacija između vrhova zarez. Provedena je analiza osjetljivosti polja deformacija s obzirom na promjenu geometrije zarez i zone smicanja s ciljem definiranja zadovoljavajućih dimenzija ispitnog uzorka. Analizom rezultata dobivenih metodom konačnih elemenata ustanovljeno je kako optimalna visina mjernog područja, tj. udaljenost vrhova zarez, iznosi 2 mm, širina zarez 1 mm, a polumjer vrhova zarez 0,5 mm.

**Ključne riječi:** smik, osjetljivost geometrije, posmične deformacije, analiza osjetljivosti, in-situ ispitivanja

---

<sup>1</sup> **Asistent Andrija Zaplatić, mag.ing.mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: [andrija.zaplatic@fsb.hr](mailto:andrija.zaplatic@fsb.hr)

<sup>2</sup> **Docent Zvonimir Tomičević, doc.dr.sc.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: [zvonimir.tomicevic@fsb.hr](mailto:zvonimir.tomicevic@fsb.hr)

<sup>3</sup> **Asistent Ana Vrgoč, mag.ing.mech.**, Sveučilište u Zagreb, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, Ivana Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: [ana.vrgoc@fsb.hr](mailto:ana.vrgoc@fsb.hr)

<sup>4</sup> **Research Professor François Hild, dr.sc.**, Université Paris-Saclay, ENS Paris-Saclay, CNRS, LMT, 91190 Gif-sur-Yvette, Pariz, e-mail: [francois.hild@ens-paris-saclay.fr](mailto:francois.hild@ens-paris-saclay.fr)

## 1 Uvod

Rastuća potreba za konstrukcijama smanjene mase uvjetuje razvoj inovativnih materijala gdje se polimeri ojačani vlaknima sve više ističu u usporedbi s konvencionalnim inženjerskim materijalima (tj. čelicima i raznim legurama). Uslijed visokog omjera čvrstoće i mase te krutosti i mase, kompoziti nalaze primjenu u svim granama industrije. Međutim, puni potencijal ovih materijala nije iskorišten uslijed ograničene predvidljivosti njihovih mehanizama oštećenja što rezultira predimenzioniranjem inženjerskih komponenti. U svrhu bolje predikcije inicijacije te širenja oštećenja u kompozitnim materijalima, neophodno je provoditi serije različitih eksperimentalnih ispitivanja.

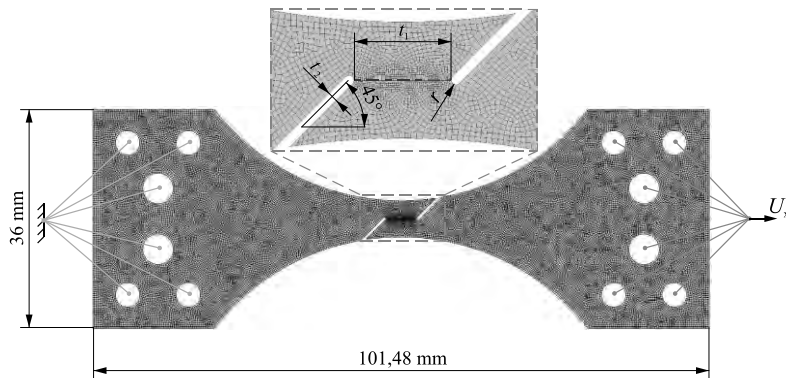
Unaprjeđenje optičkih sustava pridonio je razvoju naprednih beskontaktnih metoda mjerenja cijelog polja pomaka od kojih se *korelacija digitalne slike* (eng. *Digital Image Correlation* - DIC) [1] ističe kao najraširenija metoda. Međutim, ovim pristupom moguće je izmjeriti pomake samo na površini promatranih objekata. Ovaj nedostatak može se prevladati primjenom uređaja (tj. skenera) temeljenih na računalnoj tomografiji (eng. *Computed Tomography* - CT) X-zraka pomoću kojih se može dobiti uvid u mikrostrukturne karakteristike cijelog promatranog volumena. Štoviše, primjenom metode *korelacije digitalnih volumena* (eng. *Digital Volume Correlation* - DVC) može se izmjeriti cijelo polje pomaka iz niza zabilježenih skenova na različitim razinama opterećenja [2]. U svrhu karakterizacije materijala uslijed opterećenja provode se *ex-situ* ili *in-situ* mehanička ispitivanja.

Kod *ex-situ* ispitivanja ispitni uzorak opterećuje se izvan CT skenera te se naknadno provodi skeniranje na neopterećenom uzorku [3]. Međutim, posebice kod kompozita ojačanih vlaknima, tijekom rasterećenja dolazi do zatvaranja nastalih pukotina čime se onemogućuje uvid u mehanizme oštećenja. Stoga su *in-situ* mehanička ispitivanja [4,5] adekvatnija za ispitivanje kompozitnih materijala jer se ispitni uzorak istovremeno opterećuje i skenira unutar CT uređaja. Na ovaj način se može provesti sveobuhvatna karakterizacija ponašanja ispitivanog materijala u različitim stadijima opterećivanja. Kod *in-situ* ispitivanja moguće je primjena samo štapnih (jednoosnih) ispitnih uzoraka, kod kojih je se može narinuti vlačno, tlačno i torzijsko opterećenje. Međutim, modifikacijom ispitnih uzoraka namijenjenih za vlačne testove moguće je na mjerno područje narinuti i smično opterećenje.

U ovom radu predložena je modifikacija ispitnog uzorka u svrhu *in-situ* ispitivanja ponašanja polimernih kompozita ojačanih staklenim vlaknima opterećenih na jednostavni smik. U sredini ispitnog uzorka, tj., mjernom području, asimetrično su definirana dva paralelna zarezna pod kutom od  $45^\circ$  s obzirom na uzdužnu os uzorka. U svrhu validacije predložene modifikacije, primjenom metode konačnih elemenata (MKE) provedena je analiza osjetljivosti raspodjele posmičnih deformacija između vrhova zarezna s obzirom na promjenu njihove geometrije.

## 2 Numerički protokol

Analizirani ispitni uzorak (vidjeti sliku 1.) predviđen je za smična in-situ ispitivanja u XCT uređaju Deben CT-20kN. Sredina ispitnog uzorka stanjena je s radijusom od 39 mm kako bi se osigurala lokalizacija deformacija u najtanjem dijelu ligamenta jednoosnog ispitnog uzorka. Budući da je ova geometrija izrazito prikladna za vlačna ispitivanja, potrebno je modificirati geometriju uzorka radi ostvarivanja homogene raspodjele posmičnih deformacija u mjernom području. Stoga su po uzoru na normu ASTM B831-19 za ispitivanje tankih limova na smik [6] konstruirana dva zarez pod kutom od  $45^\circ$  u odnosu na uzdužnu os uzorka.



Slika 1. Mreža konačnih elemenata sa definiranim rubnim uvjetima pomaka. Crtkana plava linija u uvećanom detalju središnjeg dijela ispitnog uzorka definira profil (tj. čvorove MKE mreže) za koje su analizirane posmične deformacije.

Geometrija zarez definirana je pomoću tri karakteristične veličine, tj. visinom mjernog područja  $t_1$ , širinom zarez  $t_2$  te polumjerom vrha zarez  $r$ . U sklopu ovog rada provedena je analiza osjetljivosti raspodjele posmičnih deformacija između vrhova zarez s obzirom na promjenu karakterističnih veličina (vidjeti tablicu 1.). U tablici 1. referentne dimenzije osjenčane su sivom bojom. Protokol analize osjetljivosti provodi se mijenjanjem dimenzije jedne karakteristične veličine dok su preostale dvije jednake referentnim vrijednostima. Naposljetku su na temelju izračunate raspodjele posmičnih deformacija između vrhova zarez odabrane optimalne dimenzije karakterističnih veličina.

Tablica 1. Dimenzije karakterističnih veličina uzete u obzir za analizu osjetljivosti. Referentne dimenzije osjenčane su sivom bojom.

|       |         |        |         |        |      |      |      |      |
|-------|---------|--------|---------|--------|------|------|------|------|
| $t_1$ | 1 mm    | 2 mm   | 3 mm    | 4 mm   | 5 mm | 6 mm | 7 mm | 8 mm |
| $t_2$ | 0,25 mm | 0,5 mm | 0,75 mm | 1 mm   | 2 mm | 3 mm | 4 mm |      |
| $r$   | 0,25 mm | 0,5 mm | 1 mm    | 1,5 mm |      |      |      |      |

U MKE numeričkim analizama korištena je dvodimenzionalna mreža konačnih elemenata, stvarne debljine od 5 mm konstruirana u programskom paketu *Abaqus* [7]. Mreža je izrađena od elemenata prvog reda s četiri čvora CPS4 koji se koriste za opisivanje ravninskog stanja naprezanja (vidjeti sliku 1.). Budući da je proveden velik broj numeričkih analiza, primijenjena je opcija reducirane integracije radi smanjenja vremenskog trajanja numeričkih proračuna. Također, radi opisivanja izrazito nelinearnog ponašanja uzorka, korištena je opcija *nelinearne geometrije* (NLGEOM) koja računa stvarno naprezanje i deformaciju stoga su rezultirajuće deformacije u logaritamskom zapisu. S obje strane modela konačnih elemenata predloženog ispitnog uzorka definirane su referentne točke povezane s provrtima. S lijeve strane, definiran je rubni uvjet uklještenja u referentnoj točki, a sa suprotne strane je u referentnoj točki definiran rubni uvjet pomaka od 0 do 1 mm s korakom od 0,01 mm.

Radi daljnjeg pojednostavljenja numeričkog modela, za materijal je uzet izotropan materijal, tj. čelik visoke čvrstoće HARDOX 450. Za opisivanje nelinearnog plastičnog ponašanja modela konačnih elemenata, korišten je Ludwиков zakon izotropnog očvršćenja materijala [8]

$$\sigma_{eq} = \sigma_T + K \epsilon_{pl}^{-n}, \quad (1)$$

gdje  $\sigma_{eq}$  predstavlja Von Misesovo ekvivalentno naprezanje,  $\epsilon_{pl}$  akumuliranu plastičnu deformaciju. Youngov modul elastičnosti  $E$ , granica tečenja  $\sigma_T$ , modul očvršćenja  $K$  te eksponent očvršćenja  $n$  preuzeti su iz [9] i njihove vrijednosti su zapisane u tablici 2.

Tablica 2. Vrijednosti elastičnih i plastičnih parametara Ludwиковog zakona izotropnog očvršćenja.

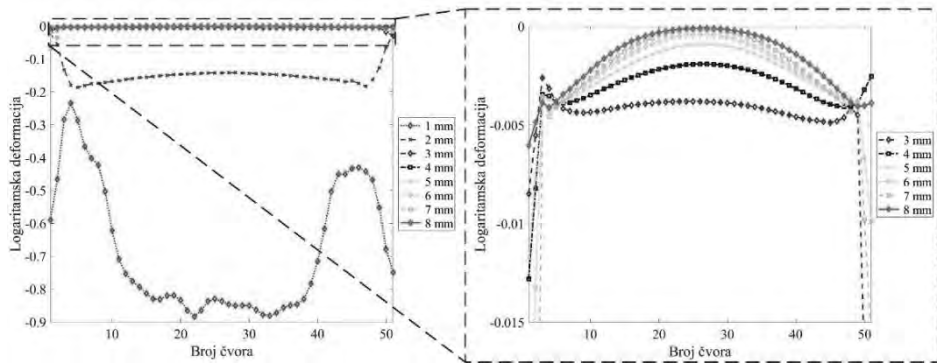
| $E$ , GPa | $\nu$ , - | $\sigma_T$ , MPa | $K$ , MPa | $n$ , - |
|-----------|-----------|------------------|-----------|---------|
| 211       | 0,3       | 1060             | 980       | 0,18    |

### 3 Rezultati numeričkih analiza

Analiza osjetljivosti raspodjele posmičnih deformacija provedena je u tri koraka. Prvotno je ispitana osjetljivost s obzirom na promjenu visine mjernog područja, zatim s obzirom na širinu zarezata te naposljetku u odnosu na promjenu polumjera zarezata. Iz svake numeričke simulacije analizirane su posmične deformacije u čvorovima koji obuhvaćaju definirani profil u sredini područja interesa (vidjeti sliku 1.). Cijeli profil interesa definiran je s 52 čvora.

Iz Slike 2. može se vidjeti kako visina mjernog područja (tj. duljina profila) ima značajan utjecaj na raspodjelu posmičnih deformacija. Za minimalnu dimenziju od 1 mm postižu se najveće posmične deformacije u sredini profila. Međutim raspodjela deformacija nije homogena u sredini mjernog područja. Nadalje, za visine profila veće od 2 mm može se pretpostaviti da je raspodjela posmičnih deformacija u sredini homogena, a vrijednosti deformacija su približno jednake. Nadalje, povećanjem visine definirano područje interesa prestaje homogenizirano stanje posmičnih deformacija u sredini. Oko vrhova zarezata stvaraju se lokalizacije deformacija, a u sredini profila vrijednosti teže nuli. Od ispitanih dimenzija,

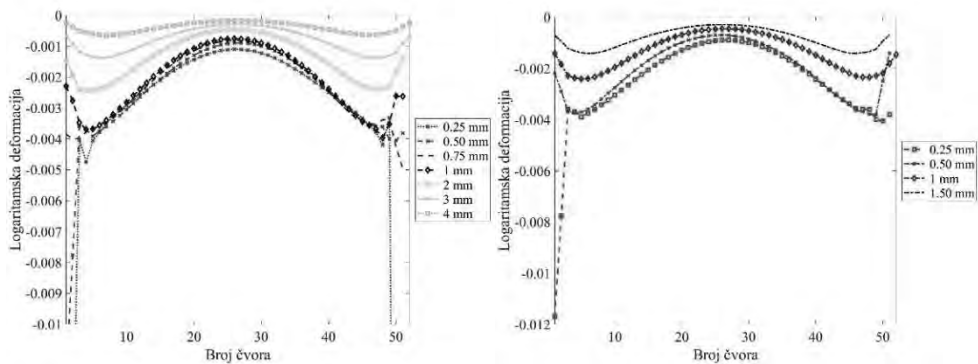
jedino širina mjernog područja od 2 mm pruža homogenu raspodjelu posmičnih deformacija u sredini ispitnog uzorka.



Slika 2. Rezultati osjetljivosti posmičnih deformacija za promjenu visine mjernog područja  $t_1$

Na slici 3. (a) prikazana je ovisnost raspodjele posmičnih deformacija na definiranom profilu u ovisnosti o širini zarezaja. Naime, iz dobivenih rezultata može se vidjeti kako širina zarezaja ne pridonosi stabilizaciji i homogenizaciji posmičnih deformacija u sredini ispitnog uzorka. Štoviše, povećanjem širine zarezaja cjelokupna raspodjela deformacija na promatranom profilu sve više teži nuli. Iz priloženog dijagrama može se uočiti da su vrijednosti posmičnih deformacija za širine zarezaja od 0,25 do 1 mm približno jednake. Budući da dimenzije manje od 1 mm ne pružaju bolje rezultate, može se zaključiti kako je širina zarezaja od 1 mm optimalna. Osim toga, bitno je naglasiti kako je jednostavnije izraditi zarez širine 1 mm što također utječe na odabir ove dimenzije.

Kao i u prethodnom slučaju promjene širine zarezaja, promjena veličine polumjera vrha zarezaja (vidjeti sliku 3. (b)) ne pridonosi ujednačavanju posmičnih deformacija u mjernom području. Štoviše, može se uočiti analogija rezultata raspodjele čvornih deformacija na promatranom profilu sa prethodnim slučajem. Pokazano je da se promjenom polumjera vrha zarezaja mogu ostvariti isti rezultati kao u slučaju mijenjanja širine zarezaja. Iz tog razloga, radi dosljednosti, odabran je radijus od 0,5 mm kako bi odgovarao širini zarezaja od 1 mm.



Slika 3. Rezultati osjetljivosti posmičnih deformacija za promjenu: (a) širine zarez  $t_2$  i (b) polumjera vrha zarez  $r$

## 4 Zaključak

U ovom radu provedena je analiza osjetljivosti raspodjele posmičnih deformacija u mjernom području ispitnog uzorka namijenjenog za provođenje in-situ smičnih ispitivanja na kompozitima ojačanim vlaknima. U promatranom mjernom području modelirana su dva zarez pod kutom od  $45^\circ$  u odnosu na uzdužnu os uzorka. Ispitano je kako geometrijske značajke promatrane zone interesa utječu na promjenu raspodjelu posmičnih deformacija. Na temelju analize osjetljivosti zaključeno je da optimalna visina mjernog područja iznosi 2 mm kako bi uvjet homogene raspodjele posmičnih deformacija između vrhova zarez bio ostvaren. Također, zaključeno je da najveća širina zarez može biti 1 mm bez narušavanja integriteta uzorka, a samim time dopušteni polumjer vrha zarez jednak je 0,5 mm.

## Zahvale

Ovaj rad izrađen je u sklopu FULLINSPECT projekta podržanog od Hrvatske Zaklade za Znanost (UIP-2019-04-5460 Grant)

## Literatura

- [1] Sutton MA; DIC for Shape and Deformation Measurements. Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics. 2008. p. 565–600.
- [2] Vrgoč A, Tomičević Z, Smaniotto B, Hild F; Application of different imaging techniques for the characterization of damage in fiber reinforced polymer. Composites Part

---

A: Applied Science and Manufacturing. 2021;106576.

- [3] Tomičević Z, Bouterf A, Surma R, Hild F; Damage observation in glass fiber reinforced composites via  $\mu$ -tomography. In: Materials Today: Proceedings. 2019. p. 185–91.
- [4] Jailin C, Bouterf A, Poncelet M, Roux S; In situ  $\mu$  CT-scan Mechanical Tests: Fast 4D Mechanical Identification. Experimental Mechanics. 2017;57(8):1327–40.
- [5] Buljac A, Jailin C, Mendoza A, Neggers J, Taillandier-Thomas T, Bouterf A, et al.; Digital Volume Correlation: Progress and Challenges. Experimental Mechanics. 2018;58:661–708.
- [6] ASTM; ASTM B831-19, Standard Test Method for Shear Testing of Thin Aluminum Alloy Products. 2019.
- [7] Simulia Dassault Systemes; Abaqus analysis user's manual. Dassault Systemes, Pawtucket, USA. 2019;
- [8] Ludwik P; Elemente der Technologischen Mechanik. Verlag von Julius Springer. 1909;
- [9] Zaplatić A, Tomičević Z, Čakmak D, Hild F; Identifiability of Ludwik ' s law parameters depending on the sample geometry via inverse identification procedure. Coupled System Mechanics (submitted). 2021;



## Optimiranje 3d modela robotske ruke za inspekciju cijevi candu parogeneratora

Zlatic, J.<sup>1</sup>, Šarlija, L.<sup>2</sup>, Kozak, D.<sup>3</sup>, Damjanović, D.<sup>4</sup>, Bakić, A.<sup>5</sup>

### Sažetak

Električna energija je najčešće korišteni oblik energije u svijetu. Može se lako pretvoriti u bilo koji drugi oblik energije i može se sigurno i učinkovito transportirati na velike udaljenosti. Kao rezultat toga, koristi se u svakodnevnom životu više od bilo kojeg drugog oblika energije. Iako, trenutno u svijetu još uvijek najviše prevladavaju elektrane na bazi fosilnih goriva sve je veći prijelaz čovječanstva na jedan od obnovljivih ili zelenih oblika energije. Pod zelenom grupom spadaju nuklearne elektrane. Nuklearne elektrane ne proizvode izravne emisije ugljičnog dioksida, kao što to proizvode elektrane na bazi fosilnih goriva, a sve neizravno proizvedene emisije imaju daleko manji utjecaj na okoliš od najčešće korištenih fosilnih goriva. Kod nuklearnih elektrana zahtjeva se visok oprez pri radu, redovito održavanje i inspekcije u svrhu prevencije potencijalne katastrofe. Kako se u nuklearnim elektranama nalazi radioaktivno zračenje koje je štetno za čovjeka, inspekcije se provode pomoću robota, odnosno manipulatora. Jedan od manipulatora koji služe za ispitivanje cijevi parogeneratora PWR tipa je mobilni manipulator Forerunner, tvrtke INETEC. Ispitivanje se provodi na bazi metode vrtložnih struja (eng. *Eddy Current Testing – EC*), koristeći bobin sonde koje ulaze u cijevi. Princip rada Forerunner-a je takav da nakon što manipulator zauzme početni položaj ispituje sve cijevi u svom dometu te se pomoću hvatača i mehaničkih pogona pomiče cijevnom stijenkom do sljedećeg radnog položaja. U radu je provedena numerička analiza i optimiranje 3D modela robotske ruke za inspekciju cijevi CANDU parogeneratora pri čemu su rezultati uspoređeni s eksperimentom. Zatim se provela analiza na novom rješenju koje se dodatno optimiralo, promjenom različitih parametara sa zadovoljavanjem postojećih ograničenja. Na kraju je prikazana analiza pokriva manipulatora na cijevnoj stijenci jednog CANDU parogeneratorskog sklopa cijevi.

**Ključne riječi:** *Manipulator, CANDU, parogenerator, Forerunner*

<sup>1</sup> **Josip Zlatic, univ. bacc. ing. mech.,** Haldenstrasse 8, 88361 Altshausen, e-mail: jzlatic@unisb.hr

<sup>2</sup> **Luka Šarlija, mag. ing. mech.,** INETEC – Institut za nuklearnu tehnologiju, Dolenica 28, 10250 Lučko, e-mail: luka.sarlija@inetc.hr

<sup>3</sup> **prof. dr. sc. Dražan Kozak, Redoviti profesor u trajnom zvanju,** Sveučilište u Slavonskom Brodu, Strojarski fakultet, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane Brlić Mažuranić 2, 35000, Slavonski Brod, e-mail: Drazan.Kozak@unisb.hr

<sup>4</sup> **doc. dr. sc. Darko Damjanović,** Sveučilište u Slavonskom Brodu, Strojarski fakultet, Zavod za strojarske konstrukcije, Trg Ivane Brlić Mažuranić 2, 35000, Slavonski Brod, e-mail: ddamjanovic@unisb.hr

<sup>5</sup> **dr. sc. Ante Bakić,** Probotica d.o.o., Ćire Truhelke 15, 10000 Zagreb, e-mail: ante.bakic@probotica.hr

## 1 UVOD

Parogeneratori predstavljaju jednu od najvažnijih, osnovnih komponenti nuklearnog postrojenja sa tlačnim reaktorom. Koriste se za iskorištavanje energije, koja se oslobađa kao toplina i pretvara u neki korisniji oblik, poput mehaničke i električne energije. Kao primarna funkcija im je opskrbljivanje turbine energijom, a kao sekundarna uklanjanje energije iz reaktora. Isto tako odvaja primarni krug sa radioaktivnom tekućinom od sekundarnog parnog kruga i time sprječava ulazak radioaktivnih proizvoda iz primarnog u sekundarni krug.

Budući da je tekućina u primarnom krugu kontaminirana, puknuta cijev za izmjenu topline uzrokovala bi curenje tekućine iz primarnog u sekundarni krug. To bi obično zahtijevalo zaustavljanje pogona. Da bi se izbjegla takva primarno-sekundarna curenja, cijevi generatora pare se pregledavaju tijekom remonta. Pregledi se obavljaju ispitivanjem materijala metodama bez razaranja. Najčešće korištena metoda bez razaranja za ispitivanje cijevi parogeneratora je metoda vrtložnih struja (eng. *Eddy Current Testing – EC*).

Mobilni manipulator Forerunner firme INETEC je jedno od najboljih rješenja za ispitivanje cijevi parogeneratora. Forerunner je dio INETEC-ovog nadzornog sustava za PWR nuklearne elektrane, prvenstveno se koristi, pomoću napredno programiranog algoritma, za brzo i točno pozicioniranje na cijevnoj stijenci parogeneratora, te za učinkovit pregled integriteta parogeneratorskih cijevi. Koristeći se hvatačima (pneumatskim prstima) i mehaničkim pogonima, ostvaruje se kretanje robota te je zbog toga prilikom konstrukcije novog rješenja potrebno model optimirati kako bi omogućavao brzu i jednostavnu instalaciju sa što manje pozicioniranja, uzimajući u obzir određena ograničenja.



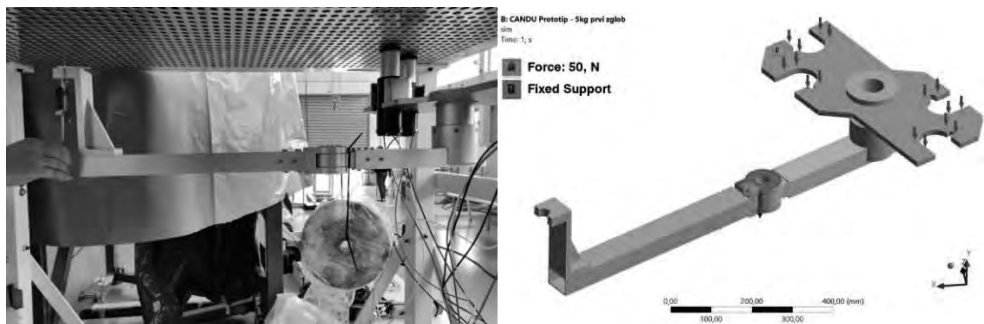
Slika 1. Mobilni manipulator Forerunner tvrtke INETEC [1]

## 2 POSTAVLJANJE NUMERIČKE ANALIZE I USPOREDBA VALJANOSTI S EKSPERIMENTALNIM REZULTATIMA

Linearna analiza je analiza u kojoj postoji linearna veza između primijenjenih sila i pomaka, dok kod nelinearne postoji nelinearna veza između primijenjenih sila i pomaka. Razlika je u tome što je matrica krutosti u linearnoj analizi konstantna, dok kod nelinearne nije. Nelinearnost se dijeli na: geometrijsku nelinearnost, materijalnu nelinearnost, te kontaktnu. Uspoređivale su se numeričke postavke s otprije izrađenim pojednostavljenim prototipom robotske ruke kako bi se odredila valjanost rubnih uvjeta. Slučaj statičkog strukturnog

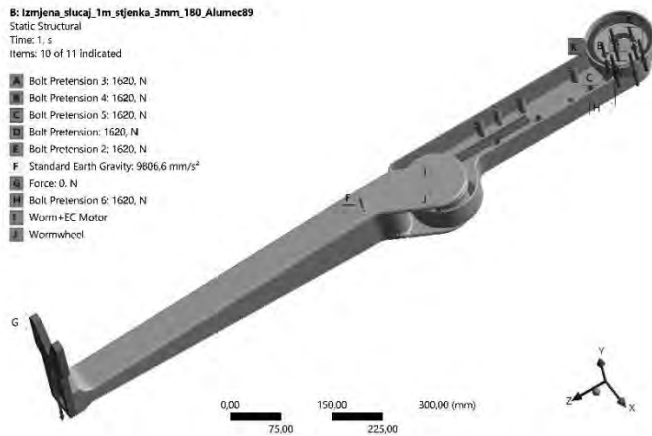
opterećenja imao je za cilj prikazati ponašanje robotskih ruku dok su opterećene težinom s koracima od 50 N i 100 N, jer se upravo sa tim težinama provela eksperimentalna analiza prototipa. Sila se postavila kroz dva slučaja na 2 mjesta. Prvo mjesto je zglobov spoja dvaju ruku dok je drugo mjesto priključak vodilice. Nepomični oslonac je postavljen na provrte preko kojih su hvatači spojeni sa kućištem. Inače pri ovakvim simulacijama gdje robotske ruke „vise“ u zraku, bi bilo potrebno postaviti i utjecaj gravitacijske sile, ali kako se eksperimentalni dio provodio sa referentom duljinom gdje je već došlo do utjecaja gravitacije, u analizama se ne stavlja njen utjecaj kako bi se rezultati mogli usporediti. Svi postavljeni rubni uvjeti prikazani su na slici 2.

Rezultati su prikazali odstupanje od 1% između eksperimentalnog ispitivanja i numeričke analize. Time su rezultati poslužili za verifikaciju korištenja heksaedarskih elemenata drugog reda. Također je provedena verifikacija korištenja elementa grede umjesto „solid“ vijaka radi skraćivanja vremena simulacija.



Slika 2. Eksperimentalni postav modela ruke (lijevo), 3D model prototipa ruke s postavljenim rubnim uvjetima (desno)

Za novu konstrukciju robotske ruke, prvo je model pojednostavljen, gdje su se mehanički dijelovi zamijenili „virtualnim masama“, zatim se na mjestu spoja kućišta sa prirubnicom postavio nepomični oslonac, sila se postavila na drugom kraju, odnosno mjestu gdje se nalazi vodilica za priključak sklopa sa sondom. U ovom slučaju za razliku od numeričke analize na prototipu bilo je potrebno postaviti utjecaj gravitacije, te su na vijcima postavljane sile prednapretnja, vezani kontakti na mjestima navoja, dok su ostali kontakti definirani s faktorom trenja 0,2.

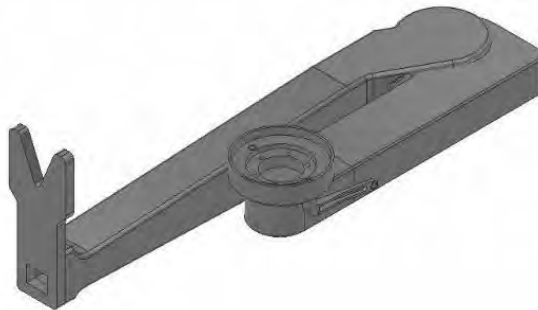


Slika 3. Rubni uvjeti na modelu robotske ruke

### 3 OPTIMIRANJE 3D MODELA ROBOTSKE RUKE ZA INSPEKCIJU CIJEVI CANDU PAROGENERATORA I ANALIZA POKRIĆA NA CIJEVNOJ STIJENKI PAROGENERATORA

#### 3.1 Optimiranje robotske ruke

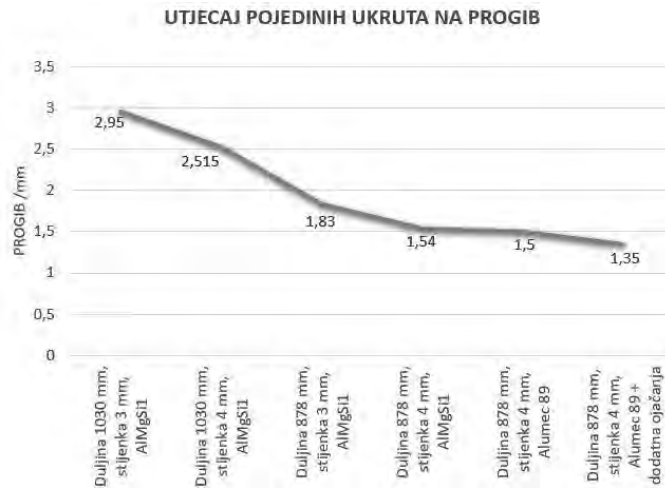
Robotske ruke su trebale biti konstruirane takve da ne dođe do plastične deformacije, stoga je potrebno utvrditi koja najveća opterećenja robotska ruka može podnijeti bez plastične deformacije. Numeričke analize provodile su se najviše iz razloga provjere progiba, a i za utvrđivanje kritičnih mjesta pri visokim opterećenjima, od 100 do 800 N. Sve analize razmatrane su kao statičke, pomoću softvera ANSYS.



Slika 4. Model robotske ruke

Problem su bili preveliki progibi koji su se nastojali smanjiti, prvo putem formule krutosti kod savijanja te naknadno dodavanjem dodatnih ojačanja. Analiza se provela za više različitih kuteva pozicioniranja ruku.

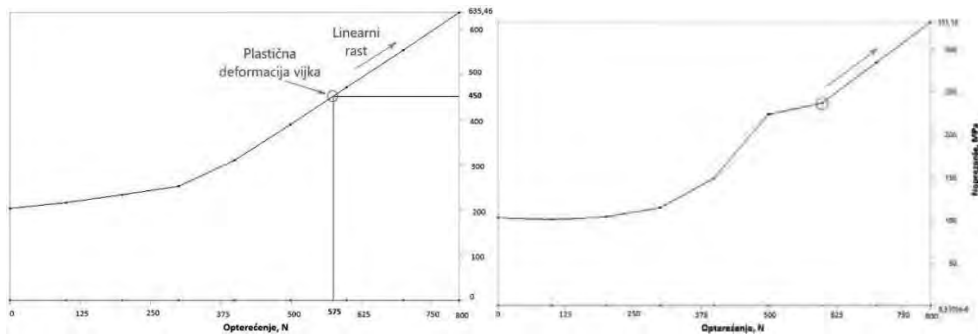
Rezultati numeričke analize prikazali su maksimalne progibe od 2,95 mm pri sili od 100 N, za slučaj potpuno otvorenih ruku. Optimizacijom su se progibi dodatno smanjili, promjenom različitih parametara, na 1,35 mm, tj. ostvarilo se smanjenje progiba za oko 55% (Slika 5).



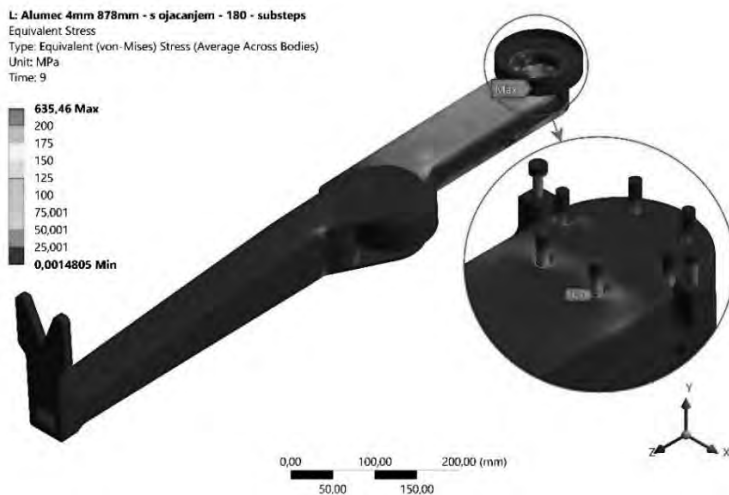
Slika 5. Utjecaj pojedinih ukruta na progib

Iz dijagrama slike 6, se uočilo kako nakon plastične deformacije vijka pri opterećenju od 575 N, dijagrami napreznja rastu linearno. Za slučaj same strukture robotskih ruku, koje nisu prešle granicu razvlačenja, koja za materijal robotske ruke Alumec89 predstavlja 550 MPa, faktor sigurnosti pri maksimalnoj sili (800 N) iznositi će 1,66. Faktor sigurnosti je u željenim granicama od 1,5-2.

Nelinearnom analizom bi rezultati vjerojatno bili i niži od 331 MPa, jer je vijak povukao za sobom linearni rast i na ovom dijagramu.



Slika 6. Dijagram ovisnosti napreznja o opterećenju: za vijak (lijevo), za strukturu robotskih ruku (desno)

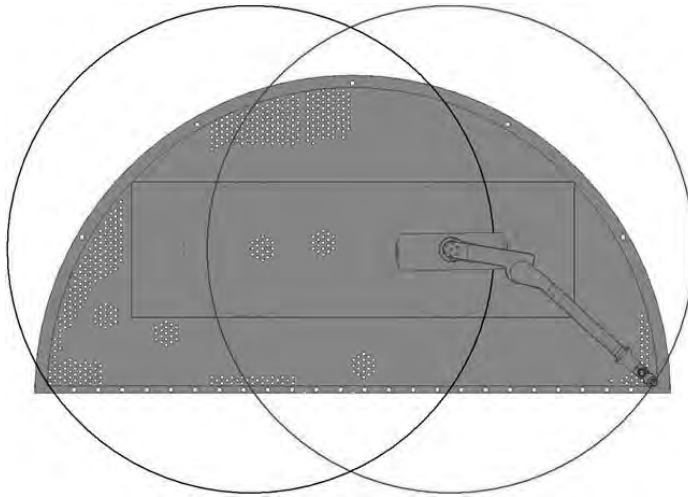


Slika 7. Maksimalno ekvivalentno naprezanje na vijku

### 3.2 Analiza pokrića manipulatora na cijevnoj stijenci manipulatora

Smanjenjem manipulatorskih ruku na duljinu 878 mm, na dimenzijama parogeneratorske cijevne stijenske prikazane na slici 8, omogućava se ispitivanje svih cijevi dvostrukom vodilicom sondi iz dva pozicioniranja robota. Različiti parogeneratori imaju različite dimenzije cijevne stijenske tako da sami broj pozicioniranja ovisi o veličini parogeneratorske. Također, važna stvar je sam otvor kroz koji se manipulator ubacuje u parogenerator, te on predstavlja jedno od ograničenja same veličine ruke koja je u ovom slučaju bila smanjena u odnosu na početnu veličinu s kojom se išlo u samu analizu.

Osim toga nastojanje je pokriti što više cijevi prilikom pozicioniranja, jer se u cijevima nalaze naslage magnetita koji može stvarati probleme pri držanju manipulatora, te su svi faktori uzeti u obzir prilikom dizajniranja ruke.



Slika 8. Pokriće cijevi parogeneratorsa sa dvostrukom vodilicom sonde (ljubičasti krug – pokriće u prvom položaju, crni krug - pokriće u drugom položaju, crveni pravokutnik – područje gripanja)

## 4 ZAKLJUČAK

U okviru ovog rada provedena je statička MKE analiza robotske ruke za ispitivanje cijevi parogeneratorsa, CANDU nuklearnih elektrana.

Optimizacija se vršila u pogledu smanjenja progiba i povećanja faktora sigurnosti, promjenom različitih parametara, poput debljine stijenke, duljine ruke, različitog materijala te dodavanjem vanjskih ojačanja. Optimizacijom je ostvareno smanjenje progiba od približno 55% u odnosu na početnu konstrukciju te je ostvaren faktor sigurnosti od 1,66, što je u željenim granicama 1,5-2.

Iz analize je jasno da su pod najvećim opterećenjem vijci koji spajaju prirubnicu sa bazom prve ruke, gdje je utvrđeno kako dolazi do plastične deformacije vijka M6 pri opterećenju od 575 N, a kao rješenje je ponuđeno korištenje vijka M8. No, ovo bi trebalo biti detaljno ispitano postupkom podmodeliranja. Kao konačni odabrani materijal uzet je Alumec89 zbog dostupnosti i što se njegovim korištenjem ostvaruje veći faktor sigurnosti.

Još je odrađena analiza pokrića cijevne stijenke na postojećem modelu, gdje se za takav slučaj dimenzija realizira ispitivanje svih cijevi iz dva pozicioniranja manipulatora.

Kako bi MKE analiza bila potpuna, dodatno bi se trebala izvršiti dinamička analiza, gdje bi se vidio stvarni utjecaj na konstrukciju.

### Literatura:

[1] INETEC – Institut za nuklearnu energiju, Lučko, Hrvatska: *Forerunner* (slika)

URL: <https://www.inetec.hr/en/products/robotics/forerunner>



# Smanjenje računskog vremena postprocessinga FEM rezultata korištenjem neuronskih mreža

Zlatic, M.<sup>1</sup>, Čanađija, M.<sup>2</sup>

## Sažetak

U ovome radu se istražuje mogućnost korištenja neuronskih mreža za bržu obradu pomaka dobivenih proračunom metodom konačnih elemenata. Metoda je radi jednostavnosti implementirana na 2D membranskim elementima. Dobiveno je znatno ubrzanje u odnosu na komercijalni softver Abaqus.

**Ključne riječi:** strojno učenje, MKE, postprocessing

---

<sup>1</sup> **mag.ing.mech. Martin Zlatic, Asist.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički Fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51 000 Rijeka, e-mail: mzlatic@riteh.hr

<sup>2</sup> **Dr.sc. Marko Čanađija, Prof.**, Sveučilište u Rijeci, Tehnički Fakultet, Zavod za tehničku mehaniku, Vukovarska 58, 51 000 Rijeka, e-mail: markoc@riteh.hr

## 1 Uvod

Kako se unatrag zadnjih 20 godina performanse procesora i grafičkih kartica povećavaju tako su i metode poput neuronskih mreža uhvatile veliki zamah u korištenju u svakodnevnim i tehničkim problemima, a razvojem programskih knjižnica poput TensorFlow-a [1] implementacija neuronskih mreža je postala vrlo praktična. Metoda konačnih elemenata je u širokoj upotrebi među inženjerima i stoga predstavlja područje u kojoj bi korištenje neuronskih mreža kao surogata za određene elemente proračuna moglo biti od znatne koristi. Neka od polja u kojima je istraživana primjena neuronskih mreža u mehanici čvrstoga tijela uključuje i opisivanje konstitutivnih modela, multiscale simulacije, mehanika loma, predviđanje napreznja na aorti i generiranje matrica deformacije-pomaka konačnih elemenata [2-10].

Ovaj rad je primarno motiviran radom Jung et al. [9] gdje se neuronske mreže koriste za generiranje matrica deformacije-pomak za konačne elemente i nadograđen je da se može koristiti neuronske mreže direktno za dobivanje komponenti napreznja iz pomaka.

## 2 Temeljni problem

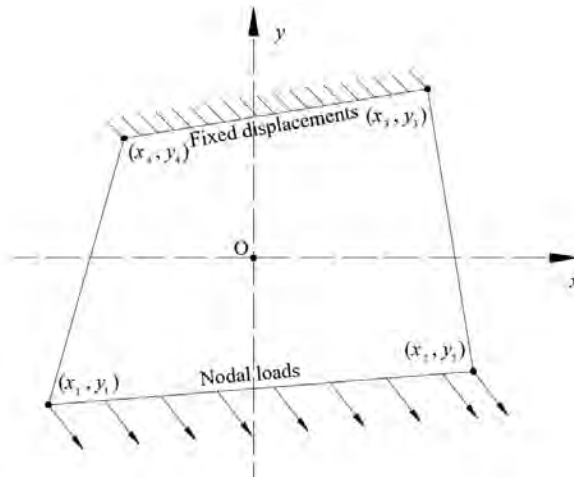
Cilj rada je ispravno modelirati linearne elastične 2D membranske elemente dobivanjem napreznja izravno iz pomaka bez prethodnoga modeliranja materijalne matrice [10] ili matrice deformacije-pomak [9], odnosno izraz (1) zamijeniti sa izrazom (2).

$$\sigma = \mathbf{CB}u \quad (1)$$

$$\sigma = \mathbf{FNN}(u) \quad (2)$$

## 3 Priprema podataka za strojno učenje

Podaci na kojima se trenira neuronska mreža su dobiveni putem Abaqusa. Pripremljena je skripta za Abaqus koja generira četverokutnu ploču omreženu sa 2D membranskim elementima (tip M3D4), primjer ploče je dan na Slici 1. Koordinate vrhova ploče su nasumično odabirane u rasponu [0.5, 1.5] m u svakome kvadrantu. Ploča je uklještena na jednome rubu, a na jednome od preostalih rubova su nanosena čvorna opterećenja. Čvorno opterećenje je nasumično birano za svaku ploču te je odabrano u rasponu od [-3000,3000] N za  $x$  i  $y$  komponentu sile. Ukupna sila za čvor onda iznosi  $F^n = F_x^n \cdot i + F_y^n \cdot j$ . Generirano je 1000 ploča, najveće ukupno opterećenje po ploči iznosi 254 kN, a najmanje 84 kN. Poissonov koeficijent također varira od ploče do ploče u rasponu [0.1, 0.4].



Slika 16. Primjer ploče generirane Abaqus skriptom.

Nakon što su sve ploče generirane podaci po elementu se pripremaju na sljedeći način:

Koordinate čvorova se uzimaju iz Abaqus input datoteke.

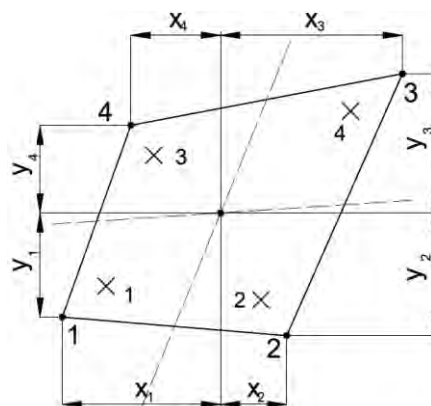
Nalazi se sjecište srednjica elementa, slika 2.

Udaljenosti između čvorova i srednjica se pohranjuju u pomoćni vektor i normaliziraju tako da se pomnože sa inverzom udaljenosti prvog i trećeg čvora.

Pomaci čvorova elementa se pohranjuju u pomoćni vektor.

Koordinate čvorova, pomaci čvorova i Poissonov koeficijent se pohranjuju u ulazni vektor za treniranje.

Naprezanja u integracijskim točkama dobivena simulacijama se pohranjuju u izlazni vektor za treniranje.



Slika 17. Položaj sjecišta srednjica i udaljenosti čvorova.

Ulazni vektor za treniranje je sljedećeg oblika:

$$\mathbf{u} = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, u_x^1, u_y^1, u_x^2, u_y^2, u_x^3, u_y^3, u_x^4, u_y^4, v) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1, \sigma_x^2, \sigma_y^2, \tau_{xy}^2, \sigma_x^3, \sigma_y^3, \tau_{xy}^3, \sigma_x^4, \sigma_y^4, \tau_{xy}^4) \quad (4)$$

## 4 Treniranje mreže i rezultati

Parametri mreže koja je korištena su sljedeći:

Broj skrivenih slojeva: 3

Broj neurona po sloju: 68

Aktivacijska funkcija: Parametric Rectified Linear Unit (PReLU)

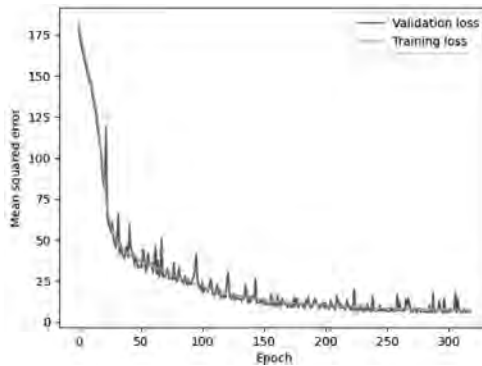
Kernel inicijalizacija: Glorot normal

Kernel regularizacija: L2 (vrijednost 0.001)

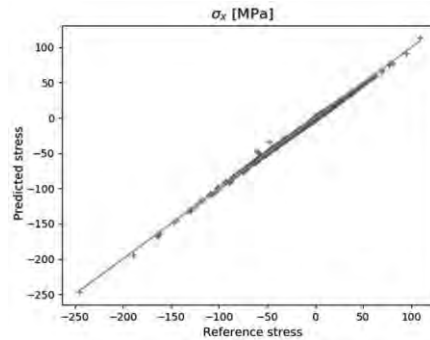
Optimizator: Adam

Metrika greške: Srednja kvadratna greška

Tri mreže su korištene, jedna mreža za svaku komponentu naprezanja. Na slici 3. je prikazana konvergencija prilikom treniranja mreža, dok je na slici 4. prikazan rezultat predviđanja naprezanja na testnoj ploči, prikazana je samo jedna komponenta naprezanja.



Slika 18. Prikaz smanjenja greške tokom treniranja.



Slika 19. Predviđena naprezanja naprama referentnim.

U sljedećoj tablici je dan pregled  $R^2$  vrijednosti za svaku komponentu naprezanja:

Tablica 1. Vrijednosti  $R^2$  za pojedinu komponentu naprezanja.

|       | $\sigma_x$ | $\sigma_y$ | $\tau_{xy}$ | Ukupno |
|-------|------------|------------|-------------|--------|
| $R^2$ | 0.9927     | 0.986      | 0.9832      | 0.987  |

Korištenje neuronskih mreža je dakle moguće kao surogat tradicionalnome postprocessingu i u ovome radu je također pokazano da je vrlo jednostavno implementirati mreže u konačnim elementima. Od posebne važnosti se treba napomenuti priprema podataka i normalizacija bez kojih mreža može loše učiti.

Također je zamijećeno ubrzanje u odnosu na vrijeme postprocessing koje je potrebno u odnosu na Abaqus. Pripremljen je model sa milijun elemenata i određeno je da je Abaqusu potrebno 11 sekundi da izračuna naprezanja. Sa predstavljanim modelom je za iste te elemente potrebno 1,89 sekundi što je 5,82 puta brže.

## 6 Zaključak

Neuronske mreže se mogu koristiti kao zamjena postojećim metodama obrade podataka i pritom ostvariti uštedu na vremenu. U radu je također pokazano da se može istovremeno više značajki zamijeniti sa neuronskom mrežom i time dodatno ubrzati procese u tradicionalnome MKE proračunu.

### Zahvale

Ovaj rad je financiralo Sveučilište u Rijeci projektom broj uniri-tehnic-18-37.

### Literatura

[1] Abadi et al.; TensorFlow: Large-scale machine learning on heterogeneous systems; <https://tensorflow.org/>; 2015.

- 
- [2] Ghaboussi et al.; Autoprogressive training of neural network constitutive models; International Journal for Numerical Methods in Engineering; 1998.; 42; 105-126.
- [3] Liang, L. et al.; A deep learning approach to estimate stress distribution: a fast and accurate surrogate of finite-element analysis; Journal of The Royal Society Interface; 2018.; 15
- [4] He, J. et al.; Relu deep neural networks and linear finite elements; Journal of Computational Mathematics; 2020.; 38; 502-527.
- [5] Capuano, G. i Rimoli, J.J.; Smart finite elements: A novel machine learning application; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 2019.; 345; 363-381.
- [6] Haghghat, E. et al.; A deep learning framework for solution and discovery in solid mechanics; arXiv:2003.02751; 2020.
- [7] du Bos, M.L. i Balabdaoui, F. i Heidenreich, J.N.; Modelling stress-strain curves with neural networks: a scalable alternative to the return mapping algorithm; Computational Materials Science; 2020.; 178.
- [8] Carrara, P. et al.; Data-driven fracture mechanics; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 2020.; 372
- [9] Jung, J. i Yoon, K. i Lee, P.-S.; Deep learned finite elements; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering; 2020.; 365
- [10] Huang, D. et al.; A machine learning based plasticity model using proper orthogonal decomposition; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering

## Primjena *fixed-pole* interpolacije u linearnoj dinamičkoj analizi Timošenkove grede

Žiković, L.<sup>1</sup> i Jelenić, G.<sup>2</sup>

### Sažetak

U ovome radu će se izvesti matrica masa prostornog Timošenkovog grednog konačnog elementa iz Hamiltonovog varijacijskog principa gdje će se zasebno koristiti dvije različite vrste tzv. *fixed-pole* interpolacije: originalna i poboljšana. U poboljšanoj *fixed-pole* interpolaciji uveden je koeficijent koji je ovisan o broju čvorova pojedinog elementa duž promatrane koordinatne osi dok je u originalnom pristupu on jednak jedinici. U radu [1] autori su pokazali da originalni pristup daje matricu krutosti koja je jednaka onoj dobivenoj Lagrangeovom interpolacijom, dok poboljšani pristup daje matricu krutosti koja je jednaka onoj dobivenoj Lagrangeovom interpolacijom uz primjenu reducirane integracije, čime je uklonjen problem *shear-locking*. Nakon dobivanja matrice masa i poznavanjem matrice krutosti, moguće je riješiti probleme vlastitih vrijednosti. Na primjenu slobodno oslonjene grede, za koju je analitičko rješenje vlastitih frekvencija poznato, analizirana su rješenja dvočvornih i tročvornih grednih konačnih elemenata uz primjenu obiju vrsta *fixed-pole* interpolacija te su ona uspoređena s rješenjima dobivenih uz primjenu Lagrangeovih interpolacija. Originalni *fixed-pole* pristup daje poboljšane rezultate za slučaj rijetkih mreža dvočvornih konačnih elemenata u odnosu na primjenu standardne Lagrangeove interpolacije, gdje poboljšanje proizlazi iz dobivene matrice masa, dok poboljšani pristup pruža puno bržu konvergenciju.

**Ključne riječi:** Timošenkova greda, mikropolarna teorija, vezana interpolacija, *fixed-pole* koncept, vlastite vrijednosti, metoda konačnih elemenata

---

<sup>1</sup> **Laura Žiković, mag. ing. aedif**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: laura.zikovic@uniri.hr.

<sup>2</sup> **Prof. dr. sc. Gordan Jelenić**, Sveučilište u Rijeci, Građevinski fakultet, Zavod za nosive konstrukcije i tehničku mehaniku, Radmile Matejčić 3, 51000 Rijeka, e-mail: gordan.jelenic@uniri.hr.

## 1 Uvod

*Fixed-pole* interpolacija inspirirana je tzv. konceptom nepomičnog pola (eng. *fixed-pole concept*) kojeg su prvi put predstavili Bottasso i Borri u [2], gdje su koncept primijenili u geometrijsko nelinearnoj analizi 3D grede. Kao glavna zamisao koncepta je zamjena momentne rezultante naprezanja  $m$  i specifičnog momenta količine kretanja  $\pi$ , koje su prema Reissnerovom pristupu definirane s obzirom na referentnu os grede, s novim rezultatama, koje su sada definirane s obzirom na odabranu ishodišnu točku cijelog promatranog sustava (nepomičan pol). Također su uz pomoć konfiguracijskog tenzora, koji spada u posebnu grupu krutog kretanja  $SR(6)$  koja ja ujedno i Liejeva grupa, uspjeli spojiti polje pomaka i rotacije. Na taj način, objedinjeno polje pomaka i rotacija s obzirom na nepomičan pol čini novo nestandardno jedinstveno polje nepoznanica. Implementacija ovog koncepta pokazuje otpornost na *shear-locking* te sposobnost istovremenog očuvanja energije i vektora količine kretanja i momenta količine kretanja. Elementi, međutim, pate od neobjektivnosti s obzirom na odabir položaja promatrača, čak i u ravninskoj analizi, i posljedično od neinvarijantnosti deformacija obzirom na pomak krutog tijela [3]. Do unatrag godinu dana nisu bila poznata nikakva istraživanja koncepta u linearnoj analizi gdje se i dalje očekuje jedinstveni opis svih nepoznatih polja kao prednost koncepta, dok složenosti i nedostaci koji se javljaju u nelinearnoj analizi iščekavaju (konfiguracijski tenzor postaje linearan te problem neobjektivnosti nestaje). Autori su u radu [1] predstavili primjenu *fixed-pole* interpolacije ili srodne vezane interpolacije u linearnoj analizi mikropolarnog kontinuuma, gdje su originalnu formulaciju poboljšali s uvođenjem koeficijenta koji je ovisan o broju čvorova pojedinog elementa duž koordinatne osi. Tako poboljšana formulacija daje matricu krutosti koja je jednaka onoj koju daje Lagrangoeva interpolacija ali uz primjenu reducirane integracije. Na taj način, primjena koncepta na Timošenkovoj gredi eliminira pojavu *shear-lockinga*. Ovaj koncept je moguće primijeniti na gredne elemente za proizvoljan broj čvorova. S obzirom na to da Timošenkova greda zapravo predstavlja 1D mikropolarni kontinuum, tako razvijeni konačni element predstavlja osnovu za daljnji razvoj 2D i 3D mikropolarnih konačnih elemenata. Poboljšana *fixed-pole* interpolacija daje jednaku formulaciju kao što daje vezana interpolacija za koju je poznato da daje egzaktno rješenje Timošenkove grede [4] te poboljšanu točnost kod 2D mikropolarnih elemenata [5]. *Fixed-pole* interpolacija se na jednostavan i elegantan način generalizira na 3D mikropolarne konačne elemente, gdje je pokazana puno brža konvergencija u odnosu na Lagrangove mikropolarne elemente kao i robusnost kod distorzirane mreže [6].

U nastavku će, u okviru analize vlastitih vrijednosti Timošenkove grede, biti predstavljena motivacija za primjenu koncepta nepomičnog pola u linearnoj dinamičkoj analizi mikropolarnog kontinuuma.

## 2 Originalna i poboljšana *fixed-pole* interpolacija

U ovome radu će se za opisivanje nepoznatih polja prostorne Timošenkove grede duljine  $L$ , s dva ili više čvorova, koristiti dvije vrste *fixed-pole* interpolacija: originalna i poboljšana te će se dobiveni rezultati usporediti i s onima dobivenih interpolacijom Lagrangeovim polinomima. Kao što je u Uvodu rečeno, *fixed-pole* koncept uvodi novo kinematičko polje koje objedinjuje polje pomaka  $\mathbf{u}$  i rotacije  $\boldsymbol{\theta}$  s obzirom na nepomični pol te su sada naša nepoznata polja  $\boldsymbol{\rho}$  i  $\boldsymbol{\theta}$ , gdje je novo polje  $\boldsymbol{\rho}$  izraženo prema [1]

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{u} + \frac{1}{n} \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\theta}, \quad (1)$$

gdje je koeficijent  $\frac{1}{n}$  ovisan o broju čvorova  $n$  pojedinog elementa duž koordinatne osi (koji je uveden umjesto jediničnog koeficijenta u originalnom *fixed-pole* pristupu s ciljem izboljšanja rezultata), operator  $\hat{\bullet}$  označava antisimetričnu matricu koja zamjenjuje vektorski produkt tako da vrijedi  $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\theta} = \hat{\mathbf{r}} \boldsymbol{\theta}$  te je  $\mathbf{r}$  vektor položaja referentne osi duž grede s obzirom na promatrano ishodište koordinatnog sustava

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{r}_i, \quad (2)$$

koji je interpoliran standardnim Lagrangeovim interpolacijskim polinomima  $N_i$ . Interpolira li se na isti način i novo polje  $\boldsymbol{\rho}$ , iz izraza (1) slijedi  $\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{p}$ , gdje je matrica interpolacijskih funkcija polja pomaka  $\mathbf{N}_u$  jednaka

$$\mathbf{N}_u = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{N}_n \quad \mathbf{0}] - \frac{1}{n} \hat{\mathbf{r}} [\mathbf{0} \quad \mathbf{N}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{N}_n] \quad (3)$$

dok je matrica interpolacijskih funkcija za polje rotacije koju koristimo u  $\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \boldsymbol{\theta}_i \equiv \mathbf{N}_\theta \mathbf{p}$  jednaka  $\mathbf{N}_\theta = [\mathbf{0} \quad \mathbf{N}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{N}_n]$ , gdje su  $\mathbf{N}_i$  podmatrice Lagrangeove interpolacijske funkcije

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

za svaki čvor pojedinog konačnog elementa  $i = 1 \dots n$ , što se može primijeniti za proizvoljno odabran broj čvorova  $n$ . Vektor  $\mathbf{p}$  je vektor stupnjeva slobode  $\mathbf{p}^T = \langle \mathbf{p}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{p}_n^T \rangle$ , gdje je  $\mathbf{p}_i^T = \langle \boldsymbol{\rho}_i^T \quad \boldsymbol{\theta}_i^T \rangle$ . Kako bi se usporedio poboljšani *fixed-pole* pristup predstavljen ovdje s originalnim, u izrazima (1) i (3) će se koeficijent  $\frac{1}{n}$  zamijeniti jedinicom. Poboljšana *fixed-pole* interpolacija identična je vezanoj interpolaciji izvedenoj u [4] koja daje točna rješenja za općenito polinomsko opterećenje te time eliminira pojavu *shear-lockinga*.

Dobivene matrice krutosti prema originalnom pristupu jednake su matricama krutosti koje se dobiju uz primjenu Lagrangeovih interpolacijskih polinoma uz punu

integraciju, dok se kod poboljšanog pristupa dobivaju matrice krutosti koje su jednake onima koje se dobiju uz upotrebu Lagrangeovih interpolacijskih funkcija ali uz primjenu reducirane integracije [1].

### 3 Izvod matrice mase

Za dobivanje matrice mase koristiti će se Hamiltonov varijacijski princip (koji predstavlja dinamički ekvivalent principu stacionarnosti ukupne potencijalne energije u statici)

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \quad (5)$$

gdje je funkcional Lagrangea jednak razlici ukupne kinetičke energije  $T$  i ukupne potencijalne energije  $U$ , tj.  $L = T - U$ . Ukupna potencijalna energija jednaka je  $U = V_i - V_e$ , gdje su  $V_i$  i  $V_e$  energija deformacije i rad vanjskih sila:

$$V_i = \frac{1}{2} \int_0^L (\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{C}_n \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\kappa}^T \mathbf{C}_m \mathbf{\kappa}) dx, \quad (6)$$

$$V_e = \int_0^L (\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\theta}^T \bar{\mathbf{m}}) dx, \quad (7)$$

gdje je  $\mathbf{\Gamma}$  vektor normalnih i posmičnih deformacija,  $\mathbf{\kappa}$  je vektor rotacijskih deformacija (zakrivljenosti) [1],  $\mathbf{C}_n = \text{diag}(EA, GA_2, GA_3)$  i  $\mathbf{C}_m = \text{diag}(GI_t, EI_2, EI_3)$  su dijagonalne konstitutivne matrice,  $E$  i  $G$  su moduli elastičnosti i smicanja,  $A$  je površina presjeka,  $A_2$  i  $A_3$  su odgovarajuće posmične površine presjeka duž glavnih osi presjeka,  $I_t$  je torzijska konstanta presjeka, a  $I_2$  i  $I_3$  su glavni momenti površine drugog reda presjeka. Vanjska distribuirana opterećenja duž segmenta opisana su vektorom sila i momenta  $\bar{\mathbf{n}}$  i  $\bar{\mathbf{m}}$ . Kinetička energija jednaka je

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (A\rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} + \rho \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}}) dx, \quad (8)$$

gdje je  $\rho$  gustoća grede, operator  $\dot{\phantom{x}}$  označava derivaciju vektora pomaka i rotacije po vremenu, tenzor  $\mathbf{J} = \text{diag}(I_2 + I_3, I_2, I_3)$ . Iz Hamiltonovog principa dobiva se jednačba kretanja

$$\mathbf{K}\mathbf{p} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}, \quad (9)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  matrica krutosti,  $\mathbf{M}$  matrica masa i  $\mathbf{R}$  vektor ekvivalentnog opterećenja u čvorovima. Uvrštavanjem odabranih interpolacijskih funkcija u izraz za kinetičku energiju dobije se

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L (A\rho \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u \dot{\mathbf{p}} + \rho \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{J} \mathbf{N}_\theta \dot{\mathbf{p}}) dx, \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T (\mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R) \dot{\mathbf{p}}, \quad (11)$$

gdje  $\mathbf{M}_T$  i  $\mathbf{M}_R$  predstavljaju matrice masa za translacijsku i rotacijsku inerciju. Ukupna matrica mase  $\mathbf{M}$  jednaka je

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_T + \mathbf{M}_R = A\rho \int_0^L (\mathbf{N}_u^T \mathbf{N}_u) dx + \rho \int_0^L (\mathbf{N}_\theta^T \mathbf{J} \mathbf{N}_\theta) dx. \quad (12)$$

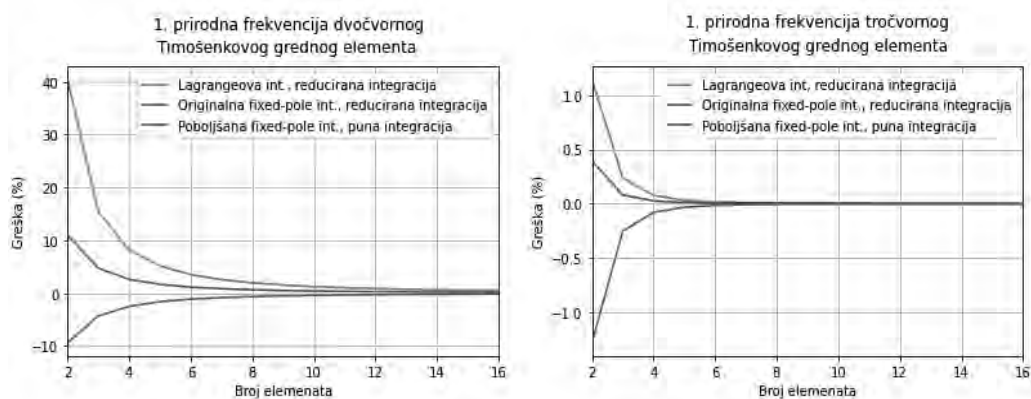
Za dobivanje matrice krutosti i matrice masa korištene su jednake interpolacijske funkcije te se matrica masa u izrazu (12) naziva konzistentnom matricom masa. Važno je naglasiti da *fixed-pole* formulacija koristi nestandardne stupnjeve slobode koje se lako mogu izraziti preko standardnog polja pomaka poznajući izraz (1). Dobivena matrica masa prema originalnom *fixed-pole* pristupu (gdje koeficijent  $\frac{1}{n}$  zamjenjujemo jedinicom) različita je od matrice mase dobivene standardnom Lagrangeovom interpolacijom, a prema poboljšanom *fixed-pole* pristupu dobivena matrica masa jednaka je onoj dobivenoj uz primjenu vezane interpolacije.

#### 4 Numerički primjer slobodno oslonjene grede

Poznavanjem matrice mase i matrice krutosti moguće je izračunati svojstvene vrijednosti na primjeru slobodno oslonjene grede, čije je analitičko rješenje poznato [7]. Proračun baziran na metodi konačnih elemenata proveden je u programskom jeziku *Python*. Dana je usporedba rezultata prvih prirodnih frekvencija dobivenih upotrebom Lagrangeovih polinoma te obje vrste *fixed-pole* interpolacije za slučaj dvočvornih i tročvornih grednih konačnih elemenata. Analizira se konvergencija rezultata prema egzaktnom rješenju u ovisnosti o broju konačnih elemenata te povećanju broja čvorova pojedinog elementa.

Razmotrimo slobodno oslonjenu gredu duljine  $L = 4.0$  m, s navedenim geometrijskim i materijalnim karakteristikama [8]:  $EA = 7.5 \cdot 10^5$ ,  $GA_2 = GA_3 = 2.6 \cdot 10^5$ ,  $EI_2 = 15624$ ,  $EI_3 = 156.24$ ,  $GI_t = 244$ ,  $\rho A = 6.25 \cdot 10^{-2}$ ,  $\rho I_2 = 1.302 \cdot 10^{-3}$ ,  $\rho I_3 = 10^{-5}$ . Originalna *fixed-pole* interpolacija daje matricu krutosti koja je jednaka onoj dobivenoj Lagrangeovim interpolacijskim polinomima uz primjenu pune integracije, dok su njihove matrice mase različite. To rezultira sporijom konvergencijom, gdje je za promatrani slučaj za mrežu od 32 elemenata pogreška od oko 78% za obje interpolacije, stoga će se ovdje primijeniti reducirana numerička integracija za matrice krutosti. Kod poboljšane *fixed-pole* interpolacije, uz primjenu pune numeričke integracije dobije se identična matrica krutosti kao kod Lagrangeovih interpolacijskih funkcija uz primjenu reducirane integracije. Najveći doprinos odabranih interpolacijskih funkcija u dinamičkoj analizi vidljiv je kod formulacije matrice masa. Na slici 1. su prikazane konvergencijske krivulje prvih prirodnih frekvencija za slučaj dvočvornih i tročvornih grednih konačnih elemenata uz primjenu navedenih interpolacijskih funkcija. Za dvočvorni konačni element vidljiva je brža konvergencija primjenom originalnog *fixed-pole* pristupa u odnosu na Lagrangeovu interpolaciju, međutim, kod tročvornih grednih elemenata njihovi rezultati se gotovo u potpunosti poklapaju

(suprotnih predznaka). Poboljšana *fixed-pole* interpolacija pruža puno bržu konvergenciju za oba slučaja.



Slika 1. Konvergencijske krivulje prvih prirodnih frekvencija slobodno oslonjene Timošenkovke grede za slučaj dvočvornih (lijevo) i tročvornih (desno) grednih konačnih elemenata uz primjenu predstavljenih interpolacijskih funkcija.

## 5 Zaključak i budući rad

U radu je izvedena matrica masa pomoću dviju vrsta *fixed-pole* interpolacija: originalna i poboljšana. Na primjeru slobodno oslonjene grede se analizirala brzina konvergencije prema egzaktnom rješenju prve prirodne frekvencije za slučaj primjene dvočvornih i tročvornih prostornih Timošenkovih konačnih elemenata. Za razliku od statičke analize, kod dvočvornih grednih konačnih elemenata originalni pristup uz primjenu reducirane numeričke integracije za matricu krutosti ima određenu stopu poboljšanja u odnosu na linearnu interpolaciju, također uz primjenu reducirane integracije, dok u slučaju primjene grednih elemenata s više čvorova to poboljšanje iščezava. Poboljšana *fixed-pole* interpolacija pokazuje značajno bržu konvergenciju u odnosu na originalnu i Lagrangeovu interpolaciju. Dobiveni rezultati predstavljaju motivaciju za daljnju dinamičku analizu Timošenkovke grede, kao i generalizaciju na 2D i 3D mikropolarni kontinuum.

## Zahvale

Rezultati prikazani u ovom radu dobiveni su u sklopu rada na projektu IP 1732 Hrvatske zaklade za znanost (Fixed-Pole Concept in Numerical Modelling of Cosserat Continuum). Istraživanje je dodatno podržalo Sveučilište u Rijeci putem potpore br. 1413 (Računski i eksperimentalni postupci za određivanje materijalnih parametara Cosseratovog kontinuuma).

## Literatura

- [1] Žiković, L. i Jelenić, G., “Fixed-pole interpolacija u linearnoj analizi mikropolarnog kontinuuma,” in *Zbornik radova 10. susreta Hrvatskog društva za mehaniku*, 2020, pp. 313–318.
- [2] Bottasso, C. L. i Borri, M., “Integrating finite rotations,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 164, no. 3–4, pp. 307–331, 1998, doi: 10.1016/S0045-7825(98)00031-0.
- [3] Gaćeša, M. i Jelenić, G., “Modified fixed-pole approach in geometrically exact spatial beam finite elements,” *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 99, pp. 39–48, 2015, doi: 10.1016/j.finel.2015.02.001.
- [4] Jelenić, G. i Papa, E., “Exact solution of 3D Timoshenko beam problem using linked interpolation of arbitrary order,” *Arch. Appl. Mech.*, vol. 81, no. 2, pp. 171–183, 2011, doi: 10.1007/s00419-009-0403-1.
- [5] Grbčić, S., Jelenić, G. i Ribarić, D., “Quadrilateral 2D linked-interpolation finite elements for micropolar continuum,” *Acta Mech. Sin. Xuebao*, vol. 35, no. 5, pp. 1001–1020, 2019, doi: 10.1007/s10409-019-00870-1.
- [6] Žiković, L. i Jelenić, G., “Fixed-pole interpolation in linear numerical static and dynamic analysis of the micropolar continuum,” (*preprint*), 2021.
- [7] Timoshenko, S., *Vibration Problems In Engineering*. New York: D.Van Nostrand Company INC., 1937.
- [8] Rukavina, T. i Jelenić, G., “Izvod matrice masa interpolacijom ovisnom o problemu za prostorni Timošenkov konačni element,” in *Zbornik radova 6. susreta Hrvatskog društva za mehaniku*, 2014, pp. 185–190.



# Rizik rupture i morfologija aneurizme abdominalne aorte

Živić, J.<sup>1</sup>, Virag, L.<sup>2</sup>, Horvat, N.<sup>3</sup>, Smoljkić, M.<sup>4</sup>, Karšaj, I.<sup>5</sup>

## Sažetak

Predviđanje rupture te optimalno vrijeme kirurške intervencije aneurizme abdominalne aorte ostaje nedovoljno istraženo nakon desetljeća kliničkih, histoloških i numeričkih istraživanja. Iako postoje studije koje procjenjuju opasnost rupture aneurizme na temelju geometrijskih značajki dobivenih iz CT snimaka, one se još uvijek ne koriste u praksi. Korištenje numeričke analize za svakog pojedinog pacijenta uvodi previše pretpostavki o strukturi stijenke da bi se RPI (eng. *rupture potential index*) mogao smatrati pouzdanim. Numerički model G&R (eng. *growth and remodeling*) pomaže ukloniti nepotrebne pretpostavke te predstavlja najveći potencijal za računanje naprezanja, RPI-ja te nam pomaže detaljnije shvatiti samu rupturu. Funkcija razgradnje elastina jedan je od glavnih čimbenika koji određuju idealizirani oblik aneurizme. Koristeći stotinu različitih kombinacija parametara koji definiraju morfologiju aneurizme (parametri funkcije razgradnje elastina, predistezanja kolagena te početni promjeri zdrave aorte), istražen je odnos između morfologije aneurizme i RPI-ja te su uspoređeni numerički rezultati s kliničkim ispitivanjima.

**Ključne riječi:** biomehanika, *Growth and remodeling*, aneurizma abdominalne aorte

## 1 Uvod

---

<sup>1</sup>**Josip Živić, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: josip.zivic@fsb.hr

<sup>2</sup>**Dr. sc. Lana Virag, dipl. ing.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: lana.virag@fsb.hr

<sup>3</sup>**Nino Horvat, mag. ing. mech.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: nino.horvat@fsb.hr

<sup>4</sup>**Dr. sc. Marija Smoljkić, dipl. ing.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: marija.smoljkic@fsb.hr

<sup>5</sup>**Dr. sc. Igor Karšaj, dipl. ing.**, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zavod za tehničku mehaniku, I. Lučića 5, 10000 Zagreb, e-mail: igor.karsaj@fsb.hr

Aneurizma abdominalne aorte (AAA) često je asimptomatska sve do rupture; događaja s visokom stopom smrtnosti. Predviđanje rupture te optimalno vrijeme medicinske intervencije i dalje se temelje prvenstveno na maksimalnom promjeru aneurizme i iskustvu liječnika, unatoč različitim histološkim, eksperimentalnim i računalnim istraživanjima da se pronađu pouzdaniji kriteriji rupture. Pokušaji predviđanja rupture dobiveni su analizom CT snimki. Pojavile su se kontroverze s oprečnim rezultatima: nekoliko je studija pokazalo da je ruptura AAA povezana s većim volumenom intraluminalnog tromba (ILT) [1]; međutim, druga studija nije otkrila razliku u volumenu ILT -a u rupturiranoj i nerupturiranoj AAA [2]. Shum i suradnici [3] definirali su ukupno dvadeset i pet parametara veličine i oblika AAA te procijenili njihovu važnost u rupturi aneurizme. Ista je skupina zaključila da su volumen i površina AAA značajno različiti u rupturiranim i nerupturiranim aneurizmama [4]. Kitagawa i suradnici [5] došli su do zaključka da je promjer aneurizme značajniji od volumena u predviđanju rasta AAA te operativnog planiranja.

S mehaničkog stajališta, do rupture dolazi kada naprezanje stijenke premašuje čvrstoću. Unatoč uvođenjem mnogih pretpostavki (npr. homogena struktura, nepostojanje predistezanja, jednolična debljina stijeke), pokazano je da upravo geometrija AAA igra ključnu ulogu u rupturi, a ne njena veličina i naprezanje. Pokazano je da bi naprezanje moglo biti veće kod manjih AAA sa normalnim krvnim tlakom nego kod većih AAA s povišenim krvnim tlakom. No, važno je imati na umu da je raspodjela naprezanja i čvrstoće izrazito heterogena i ovisi o različitim čimbenicima.

## 2 Metodologija

G&R model implementiran je u program za analizu konačnih elemenata FEAP. G&R model temelji se na premisi da su meka tkiva podložna stalnoj promjeni sastava mase, pri čemu se kolagen i glatki mišići razgrađuju, a novo tkivo kontinuirano stvara i taloži. Matematički, trenutna masa računa se kao:

$$M^k(s) = M^k(0)Q^k(s) + \int_0^s \dot{m}^k(\tau)q^k(s - \tau) d\tau \quad (1)$$

gdje su  $M^k(s)$  i  $M^k(0)$  ukupne mase konstituenta  $k$  za određeno vrijeme  $s$  i početno vrijeme 0. Stopa proizvodnje mase definira se pomoću funkcije postojeće mase proizvedene u vremenu,  $Q^k(s)$ . Razgradnja elastina u zdravim arterijama opada s vremenom te ima poluživot od približno 40 godina. Korištena funkcija razgradnje elastina prilagođena je iz [6]. Za nesimetričnu fuziformnu aneurizmu, funkcija razgradnje elastina može se definirati kao:

$$Q^e(s, z, g) = \phi_{rem}^e + (1 - \phi_{rem}^e) f_1(s) f_2(z) f_3(g) \quad (2)$$

U jednadžbi (2) je za vrijednost nerazgrađenog elastina uzeto  $\phi_{rem}^e = 0.2$ . Funkcije  $f_1(s)$ ,  $f_2(z)$  predstavljaju razgradnju u vremenu te aksijalnom smjeru:

$$f_1(s) = \left(1 - \left(1 - \exp\left(-s / \tau_{1/2}^e\right)\right)\right) \quad (3)$$

$$f_2(z) = \begin{cases} \exp\left[-\frac{0.7}{\min(300, a)}(z - z_{\text{down}})^b\right] & z < z_{\text{down}}, \\ \exp\left[-\frac{0.7}{\min(300, a)}(z - z_{\text{up}})^b\right] & z > z_{\text{up}}, \\ 1 & z_{\text{down}} \leq z \leq z_{\text{up}}. \end{cases} \quad (4)$$

Parametri  $a$  i  $b$  utječu na širinu i strmost razgradnje elastina u aksijalnom smjeru. Povećavanjem vrijednosti parametra  $a$ , proširuje se područje razgradnje elastina između granica  $z_{\text{up}}$  i  $z_{\text{down}}$ . Funkcija  $f_3(g)$  predstavlja razgradnju elastina u cirkularnom smjeru:

$$f_3(g) = \exp\left[-\left(\frac{cg}{e-g}\right)^d\right], \quad (5)$$

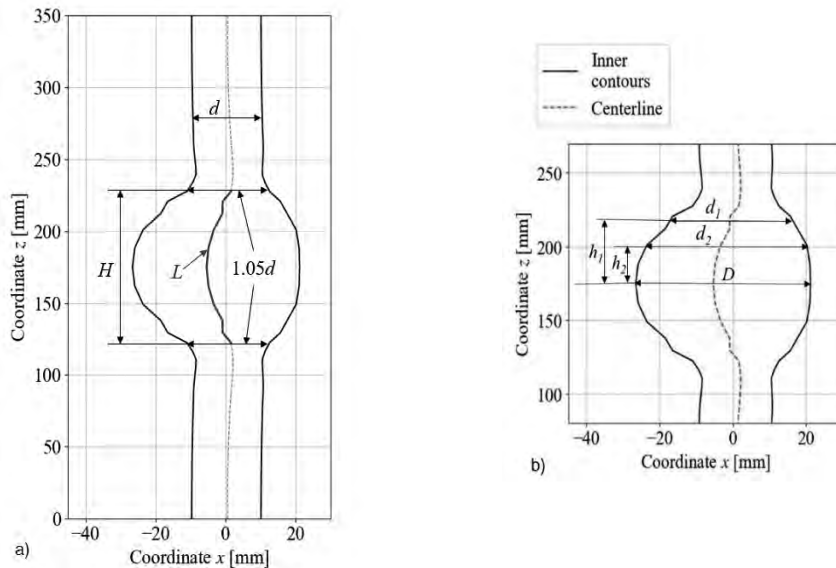
gdje su  $c$ , i  $e$  parametri koji utječu na širinu i razgradnje elastina u cirkularnom smjeru. Što su vrijednosti parametara  $c$  manje, te  $e$  veće, područje razgradnje elastina je šire. Parametar  $d$  utječe na strmost razgradnje.

Vrijednosti svih parametara navedene su u tablici:

| Parametri                              | Vrijednosti       |
|--|-------------------|
| $a$ [-]                                | 100, 300, 900     |
| $b$ [-]                                | 1.67, 2, 2,40     |
| $c$ [-]                                | 0.77, 1, 1.3      |
| $d$ [-]                                | 1, 2, 4           |
| $e$ [-]                                | 2.75, 3.157, 3.63 |
| $z_{\text{up}} - z_{\text{down}}$ [mm] | 10, 20, 30, 40    |
| $d_{\text{in}}$ [mm]                   | 16, 20, 24        |

Tablica 2. Vrijednosti parametara razgradnje elastina

Martufi [7] je definirao ukupno 25 indeksa procjene rupture AAA. Schum i suradnici [3] proveli su ispitivanje te definirali 7 najvažnijih indeksa: Duljina ( $L$ ), visina ( $H$ ), maksimalni promjer ( $D$ ), zakrivljenost ( $T$ ), površina lumena ( $S$ ) te volumen ( $V$ ). Aneurizma se definira kao takva kada njen maksimalan promjer iznosi 50% promjera zdrave žile. Na slici 1 prikazani su parametri aneurizme:

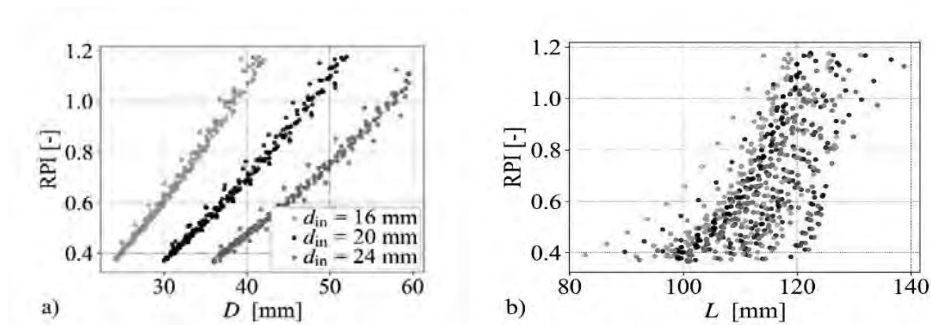


Slika 7. Geometrijski parametri aneurizme

Kako bi se pronašao optimalni indeks koji će moći predvidjeti rupturu, napravljeno je 96 simulacija rasta AAA s različitim kombinacijama parametara razgradnje elastina. Svaka simulacija analizirana je u približno 8 vremenskih trenutaka te ukupan broj numeričkih stanja u kojima je provedena analiza iznosi 706. Za svako stanje računat je omjer indeksa i napreznja izraženog preko veličine RPI. Naknadno je provedena statistička analiza i linearna regresija kako bi se odredila najbolja korelacija među vrijednostima.

### 3 Rezultati

Svi spomenuti indeksi ruptore prikazani su u odnosu s RPI-jem u vrhu aneurizme. RPI se definira kao čvrstoća aneurizme dijeljena s koeficijentom koji govori o histološkim karakteristikama pacijenta. Na slici 2 prikazan je odnos maksimalnog radijusa i duljine aneurizme s RPI-jem:

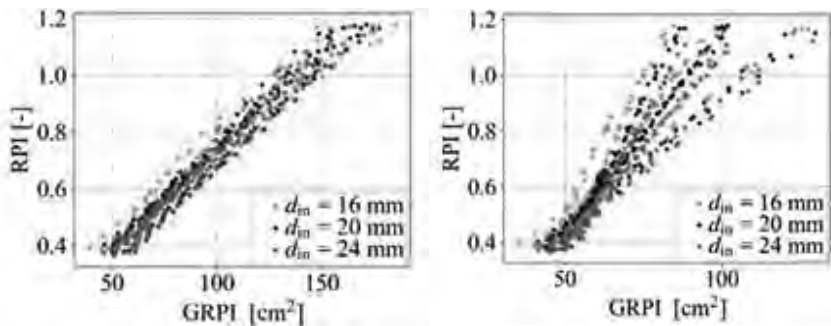


Slika 8. Indeksi  $D$  i  $L$

Na slici 2.a) vidljivo je očito grupiranje po početnom radijusu. Na slici 2. b) to nije vidljivo, međutim korelacija je loša te je područje široko i neprecizno za upotrebu predviđanja rupture. Vidljivo je da ti indeksi nisu dovoljno dobar pokazatelj rupture aneurizme te kao takvi ne mogu biti korišteni u praksi. Nakon provedene analize te kombinacije parametara, optimalan indeks imao je oblik:

$$GRPI = \frac{L^2}{d \left( \frac{4}{D} - \frac{1}{d} \right)}$$

Njegovo ponašanje prikazano je na slici 3 za radijuse mjerene na dvije različite visine (62mm te 55 mm od vrha aneurizme):



Slika 9. Indeks GRPI

Vidljivo je da prikazani indeks ima usko područje te da se ne događa rasipanje vrijednosti u širokom području. Također ne postoji nedostatak grupiranja točaka po početnom radijusu. U tablici 2 navedeni su koeficijenti korelacije ranije navedenih indeksa te novo definiranog GRPI-ja.

| Indeksi                 | r-vrijednost |
|-------------------------|--------------|
| $D$ [mm]                | 0.65         |
| $H$ [mm]                | 0.639        |
| $L$ [mm]                | 0.67         |
| $T$ [-]                 | 0.899        |
| $S$ [cm <sup>2</sup> ]  | 0.859        |
| $V$ [cm <sup>3</sup> ]  | 0.764        |
| GRPI [cm <sup>2</sup> ] | 0.97         |

Tablica 2. korelacijska indeksa

## 4 Zaključak

Predviđanje ruptur aneurizme u praksi se do sada svodilo samo na maksimalni radijus te klinička iskustva liječnika. Provedenom analizom vidljivo je da se maksimalan radijus ne može samostalno koristiti u procjeni ruptur. Također, ostali pojedinačno predloženi indeksi imaju određene nedostatke poput grupiranja po radijusu ili preširokog područja vrijednosti. Također, neki specifični indeksi poput volumena ili površine ne mogu biti jednostavno izmjereni što stvara dodatni problem. Zbog toga je predložen novi indeks GRPI koji eliminira nedostatke postojećih indeksa. Njegov korelacijski faktor ima najveću vrijednost te mu je područje raspodjele usko i linearno. Sastoji se od nekoliko pojedinačnih parametara što mu daje bolju pouzdanost te sprječava moguće neregularnosti pri očitavanju pojedinačnih parametara. Kako bi se predloženi indeks mogao koristiti u praktičnom liječenju, potrebno je prethodno klinički verificirati rezultate.

## Zahvala

Ovaj rad je financirala Hrvatska zaklada za znanost projektima IP-2014-09-7382 i DOK-2018-01-5244

## Literatura:

- [1] S. S. Hans, O. Jareunpoon, M. Balasubramaniam, and G. B. Zelenock, "Size and location of thrombus in intact and ruptured abdominal aortic aneurysms," *J. Vasc. Surg.*, vol. 41, no. 4, pp. 584–588, 2005, doi: 10.1016/j.jvs.2005.01.004.
- [2] J. Golledge, V. Iyer, J. Jenkins, B. Bradshaw, O. Cronin, and P. J. Walker, "Thrombus volume is similar in patients with ruptured and intact abdominal aortic aneurysms," *J. Vasc. Surg.*, vol. 59, no. 2, pp. 315–320, 2014, doi: 10.1016/j.jvs.2013.08.036.
- [3] J. Shum *et al.*, "Quantitative assessment of abdominal aortic aneurysm geometry," *Ann. Biomed. Eng.*, vol. 39, no. 1, pp. 277–286, 2011, doi: 10.1007/s10439-010-0175-3.

- 
- [4] J. Shum, A. Xu, I. Chatnuntawech, and E. A. Finol, "A framework for the automatic generation of surface topologies for abdominal aortic aneurysm models," *Ann. Biomed. Eng.*, vol. 39, no. 1, pp. 249–259, 2011, doi: 10.1007/s10439-010-0165-5.
  - [5] A. Kitagawa, T. M. Mastracci, R. Von Allmen, and J. T. Powell, "The role of diameter versus volume as the best prognostic measurement of abdominal aortic aneurysms," *J. Vasc. Surg.*, vol. 58, no. 1, pp. 258–265, 2013, doi: 10.1016/j.jvs.2013.05.001.
  - [6] J. S. Wilson, S. Baek, and J. D. Humphrey, "Parametric study of effects of collagen turnover on the natural history of abdominal aortic aneurysms," *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 469, no. 2150, p. 20120556, 2012, doi: 10.1098/rspa.2012.0556.
  - [7] G. Martufi, E. S. Di Martino, C. H. Amon, S. C. Muluk, and E. A. Finol, "Three-Dimensional Geometrical Characterization of Abdominal Aortic Aneurysms: Image-Based Wall Thickness Distribution," *J. Biomech. Eng.*, vol. 131, no. 6, p. 061015, 2009, doi: 10.1115/1.3127256.



INDEKS AUTORA

**A**

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| Abramović, L.....             | 1   |
| Adamović, P. ....             | 9   |
| Aleksandrov Fabijanić, T..... | 307 |
| Alfano, G. ....               | 269 |

**B**

|                     |             |
|---------------------|-------------|
| Bakić, A. ....      | 355         |
| Bakran, A.....      | 17          |
| Banić, D. ....      | 25          |
| Bartulović, A. .... | 323         |
| Birt, D. ....       | 33, 93, 173 |
| Braut, S. ....      | 251         |
| Brčić, M. ....      | 331         |
| Bukvić, L. ....     | 45          |

**C**

|                      |              |
|----------------------|--------------|
| Čakmak, D. ....      | 323          |
| Čanađija, M. ....    | 41, 133, 363 |
| Čeh, N.....          | 17, 61, 165  |
| Črnjarić-Žic, N..... | 45           |

**D**

|                    |          |
|--------------------|----------|
| Damjanović, D..... | 145, 355 |
| Drašković, Z. .... | 53       |

**F**

|                  |    |
|------------------|----|
| Fabijan, P. .... | 61 |
|------------------|----|

**G**

|                         |     |
|-------------------------|-----|
| Grbac, M.....           | 69  |
| Grbčić Erdelj, S. ....  | 77  |
| Grenko, B.....          | 277 |
| Gubeljak, N.....        | 259 |
| Guy de Chamisso, Q..... | 61  |

**H**

|                |             |
|----------------|-------------|
| Hild, F.....   | 347         |
| Hlača, I. .... | 85          |
| Hoić, M.....   | 33, 93, 173 |
| Horvat, N..... | 377         |

**I**

|               |    |
|---------------|----|
| Ivić, S. .... | 45 |
|---------------|----|

**J**

|                  |                   |
|------------------|-------------------|
| Jalušić, B. .... | 101, 339          |
| Jarak, T. ....   | 109, 189, 307     |
| Jasak, H. ....   | 157               |
| Jelenić, G.....  | 77, 195, 293, 369 |
| Jokić, A.....    | 173               |
| Jokić, M.....    | 243               |
| Jukić, K.....    | 109               |
| Jurčević, A..... | 117               |

**K**

|                              |               |
|------------------------------|---------------|
| Kačmarčik, J.....            | 125           |
| Karšaj, I. ....              | 285, 315, 377 |
| Kesedžić, M.....             | 201           |
| Kodvanj, J.....              | 9             |
| Konjatić, P. ....            | 125, 145      |
| Košmerl, V. ....             | 133           |
| Kostelac, M. ....            | 93            |
| Kozak, D.....                | 145, 299, 355 |
| Kožar, I.....                | 137, 227      |
| Kranjčević, L.....           | 277           |
| Kraus, I. ....               | 211           |
| Krolo, P. ....               | 17, 165, 211  |
| Kulić, V. ....               | 145           |
| Kvaternik Simonetti, S. .... | 25, 151       |

**L**

|               |         |
|---------------|---------|
| Lanc, D. .... | 25, 151 |
|---------------|---------|

|                    |               |
|--------------------|---------------|
| Lesičar, T. ....   | 117, 219, 259 |
| Lisac, A. ....     | 157           |
| Lukačević, L. .... | 165           |

**M**

|                   |             |
|-------------------|-------------|
| Marenić, E. ....  | 189         |
| Markušić, S. .... | 201         |
| Miler, D. ....    | 33, 93, 173 |

**N**

|                  |     |
|------------------|-----|
| Nikolić, Ž. .... | 181 |
| Novak, M. ....   | 189 |

**P**

|                     |     |
|---------------------|-----|
| Papa Dukić, E. .... | 195 |
| Pavlović, B. ....   | 101 |
| Penava, D. ....     | 201 |
| Perić, A. ....      | 211 |
| Perić, M. ....      | 339 |
| Plovanić, M. ....   | 137 |
| Polančec, T. ....   | 219 |
| Pranjić, I. ....    | 227 |

**R**

|                    |             |
|--------------------|-------------|
| Radojičić, S. .... | 125         |
| Ribarić, D. ....   | 69, 85, 235 |
| Rožić, J. ....     | 243         |
| Rukljač, D. ....   | 315         |

**S**

|                  |         |
|------------------|---------|
| Sabalić, S. .... | 9       |
| Šarlija, L. .... | 355     |
| Seleš, K. ....   | 109     |
| Škec, L. ....    | 85, 269 |
| Skejo, R. ....   | 251     |
| Škifić, J. ....  | 277     |
| Skoblar, A. .... | 251     |
| Skozrit, I. .... | 1, 339  |

|                   |          |
|-------------------|----------|
| Škugor, T. ....   | 285      |
| Smoljkić, M. .... | 285, 377 |
| Sorić, J. ....    | 117      |
| Stanić, L. ....   | 323      |
| Stanić, M. ....   | 259      |
| Stanko, D. ....   | 201      |
| Sulovsky, T. .... | 137      |

**T**

|                      |                                 |
|----------------------|---------------------------------|
| Tomec, J. ....       | 293                             |
| Tomerlin, D. ....    | 299                             |
| Tomić, Z. ....       | 101, 259, 307                   |
| Tomičević, Z. ....   | 323, 347                        |
| Tonković, Z. ....    | 101, 109, 117, 219, 307,<br>339 |
| Torić Malić, N. .... | 227                             |
| Trajber, D. ....     | 201                             |
| Turk, D. ....        | 125                             |
| Turkalj, G. ....     | 25, 151                         |

**U**

|                |     |
|----------------|-----|
| Uroić, T. .... | 157 |
|----------------|-----|

**V**

|                              |               |
|------------------------------|---------------|
| Virag, L. ....               | 285, 315, 377 |
| Vrgoč, A. ....               | 323, 347      |
| Vrtovšnik, D. ....           | 331           |
| Vučemilović-Vranjić, I. .... | 299           |
| Vučković, K. ....            | 219           |
| Vukovojac, M. ....           | 339           |

**Z**

|                   |          |
|-------------------|----------|
| Zaplatić, A. .... | 323, 347 |
| Žiković, L. ....  | 195, 369 |
| Živić, J. ....    | 377      |
| Zlatić, J. ....   | 355      |
| Zlatić, M. ....   | 363      |







